

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDAC-
TIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN
J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

MET MEDEWERKING VAN

Dr. H. J. E. BETH
AMERSFOORT

Dr. G. C. GERRITS
AMSTERDAM

Dr. C. DE JONG,
LEIDEN

Dr. P. DE VAERE
BRUSSEL

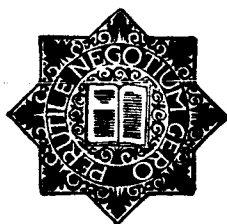
Dr. E. J. DIJKSTERHUIS
OISTERWIJK

Dr. B. P. HAALMEIJER
AMSTERDAM

Dr. W. P. THIJSSEN
BANDOENG

Dr. D. P. A. VERRIJP
ARNHEM

12e JAARGANG 1935/36, Nr. 3.



P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN

Prijs per Jg. van 18 vel f 6.—. Voor intekenaars op het
Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde en Christiaan Huygens f 5.—

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijks afleveringen, samen 18 vel druks. Prijs per jaargang *f* 6.—. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6.—) of op „Christiaan Huygens” (*f* 10.—) zijn ingetekend, betalen *f* 5.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

I N H O U D.

	Blz.
Dr. U. H. VAN WIJK, De école polytechnique te Parijs en haar invloed op de ontwikkeling der exacte wetenschappen . .	97
R. SWIERSTRA, De logarithmische betrekking tussen trillingssterkte en geluidssterkte.	108
Dr. V. HERBIET, Les concours d'admission à l'école militaire à Bruxelles.	113
Prof. J. W. N. le Heux, Toelating tot de Koninklijke militaire academie	124
Boekbesprekingen	130
Ingekomen boeken.	132
Dr. E. J. DIJKSTERHUIS, Archimedes	133

veroorloven ook hooghartig op te treden en scherp te discussieeren.¹⁾

De oudste broer van Louis Monge, Gaspard (1746—1818) kan als de eigenlijke oprichter van de school worden beschouwd. Zijn levensloop is o.m. beschreven door Prof. Dr. Hk. de Vries in het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde 3e jrg. blz. 255.²⁾ Tot 1809 is Monge met enkele onderbrekingen aan de school als docent werkzaam geweest. Hij heeft dit gedaan op een wijze „welcher mehrerer Hunderte von Studenten förmlich elektrisierte”.³⁾ Voor de leerlingen is hij echter behalve een eminent docent een steun geweest, waarop zij in moeilijke omstandigheden — en die deden zich in die bewogen jaren vaak voor — konden rekenen. Hij, die zelf de armoede gekend had, verleende hun naast zijn machtigen moreelen steun ook financieele hulp, als dit noodig was. Met recht wordt Monge daarom „le père des polytechniciens” genoemd.

Bij de oprichting der school droeg deze geen militair karakter. De leerlingen werden gehuisvest bij families, waarvan de hoofden moesten zijn „pères de famille, sensibles et bons patriotes”. Tot 1804 heeft het instituut der „pères sensibles”, zooals de polytechniciens hun voogden in de wandeling noemden, bestaan.

Veel lessen werden er aan de school niet gegeven. Gedurende den geheelen cursus werden er in 1801 in het eerste studiejaar 332 en in het tweede studiejaar 474 lessen gegeven, d.i. ongeveer 2 lessen per dag. De meeste tijd wordt besteed aan eigen studie. Oorspronkelijk werd er 11 uur per dag gewerkt en 3 uur 's Zondags, tegenwoordig 10½ uur, terwijl de jongelui 's Zondags geheel vrij zijn. De lessen worden in hoofdzaak in de vroege morgenuren gegeven, behalve die in literatuur en geschiedenis (tegenwoordig ook economie), waarvoor het uur van 8.30 tot 9.30 n.m. is bestemd.

Om eenig idee te krijgen van het onderwijs hebben we in achterstaande tabel in procenten aangegeven, hoeveel tijd er aan de lessen in de verschillende vakken werd besteed in verschillende perioden.

¹⁾ „Les examinateurs d'aujourd'hui n'ont plus rien, d'ailleurs, du „Montardus ferox” qu'ont connu les vieux polytechniciens. Les cris d'indignation, comme les ironies sarcastiques, ne sont plus heureusement dans la manière du siècle”.

²⁾ Later opgenomen in deel I van de Historische Studiën van Prof. De Vries; uitgave Noordhoff.

³⁾ Moritz Cantor: „Geschichte der Mathematik”. IV, blz. 635.

Cours	Temps de travail pour les deux années d'études.		
	1801	1829	1894
Analyse. Arithmétique sociale (calcul des probabilités)	13 $\frac{1}{2}$	18 $\frac{1}{2}$	13,7
Analyse appliquée à la géométrie	2	1	—
Géométrie descriptive	20	11 $\frac{1}{2}$	9,8
Mécanique	11	16 $\frac{1}{2}$	} 16,2
Machines	—	3 $\frac{1}{2}$	
Géodésie et astronomie	—	5	5,2
Physique	6 $\frac{1}{2}$	9 $\frac{1}{2}$	13,8
Chimie	15	13	11,9
Architecture	3 $\frac{1}{2}$	4	2,4
Littérature et Histoire	—	6	3,9
Fortification	7 $\frac{1}{2}$	—	—
Art militaire	—	—	2,8
Travaux civils	5	—	—
Travaux des mines	2	—	—
Dessin de la figure et du paysage	14	6 $\frac{1}{2}$	4,5
Autres dessins: épures, lavis, dessins d'architecture	—	5	8,9
Croquis et dessins de machines	—	—	2,7
Allemand ¹⁾	—	—	2,2

De eigen studie gedurende 6 à 7 uur per dag wordt gehouden in kleine zaaltjes, die van een bibliotheekje zijn voorzien. De lokaliteiten zijn ingericht voor zeven à acht leerlingen. Men eischt geen stilte. Alleen wanneer de jongelui zich te rumoerig gedragen of er te demonstratief bridge gespeeld wordt, grijpt het toeziende personeel in.

De leerlingen worden er op die manier aan gewend hun gedachten in een onrustige omgeving te concentreren op het studieobject, wat hun later in een fabriek, op het slagveld enz. te stade komt. Deze methode van werken wijkt wel heel sterk af van die in de leesalen

¹⁾ Sedert den wereldoorlog ook Engelsch.

onzer universiteiten, waar de stilte slechts sporadisch door wat gefluister verbroken wordt. Heel ver gaat men, naar ik vernam, in die richting aan het Mathematisch Seminarium van de universiteit te Göttingen, waar speciale localiteiten zijn ingericht met fauteuils, waarin men zich kan neervlijen om in een omgeving van doodsche stilte inspiratie op te doen.

Het wetenschappelijk personeel bestaat uit examinatoren voor de toelating, docenten, repetitoren en examinatoren voor het eind-examen, terwijl een „directeur des études” met de algemeene leiding der studie is belast. Al deze functies zijn streng gescheiden. De examinatoren kennen de leerlingen niet „et ne peuvent avoir, à leur sujet, aucune idée préconçue.” In 1844 hebben de jongelui zelfs geweigerd examen te doen, omdat de „directeur des études”, Duhamel, als examiner zou optreden. De minister van oorlog sloot toen de school en opende ze weer onder commando van generaal De Rostolau, die de polytechniciens onder een ijzeren discipline deed zuchten.

De repetitoren komen 's avonds van 5 tot 7 op school. De examens zijn er op ingericht om in een korten tijd een groote hoeveelheid stof te verwerken. Dit wordt van groote paedagogische waarde geacht, omdat de afgestudeerden later als ingenieur of officier ook in staat moeten zijn om voor het uitvoeren van verstrekte opdrachten de daartoe benoodigde gegevens snel te verzamelen en te verwerken.

De school werd bij de oprichting ondergebracht in de dépendances van het Palais Bourbon om in 1804 te verhuizen naar het oude „collège de Navarre”, een gebouwencomplex achter het Panthéon, waar ze thans nog gevestigd is. Pas in den laatsten tijd zijn door verbouwing enz. enkele verbeteringen in de schoolgebouwen aangebracht. Toch is de ruimte nog zoo beperkt, dat de leerlingen er in hun vrijen tijd bv. niet kunnen tennissen.

In de woelige jaren na de oprichting heeft het onderwijs er niet altijd regelmatig plaats gehad. Er werden van tijd tot tijd „cours révolutionnaires” gehouden, waarbij de beste leerlingen in $\pm$ 1 jaar tijds werden klaargestoomd. Ook werd het volgen van het onderwijs aan een applicatieschool niet altijd noodig geacht.

De school heeft in die jaren ook meermalen voor haar bestaan moeten vechten, als de liberale geest der leerlingen botste tegen de

dictatoriale opvattingen van de leidende staatslieden. Het was dan meestal Monge, die met zijn gezaghebbende stem de school dan wel enkele harer leerlingen de hand boven het hoofd hield. Het is ook Monge geweest, die in 1804 de belangen van de school bij Napoleon heeft bepleit.

„Monge, disait un jour Napoléon, vos élèves ne m'aiment pas. — Sire, répondit Monge, nous avons eu bien de la peine à en faire des républicains, laissez leur le temps de devenir impérialistes.”

Hij heeft echter niet kunnen verhinderen, evenmin als Berthollet en Fourcroy, dat den 16en Juli 1804 bij Keizerlijk besluit de school op militaire leest werd geschoeid. De bedoeling daarvan was het liberalisme der leerlingen te beteugelen. „Il faut m'enrégimenter l'instruction publique” oordeelde Napoleon. De generaal Foy merkte daaromtrent later op: „L'Empire a transformé une pépinière de savants en un séminaire de guerriers.” Zoo'n vaart heeft het echter niet geloopt, want de militaire oefeningen nemen, zooals we gezien hebben, slechts een zeer bescheiden plaats in het leerplan in. Ze worden gehouden in den recreatietijd (12.30—15.30) evenals de sportoefeningen, w.o. sinds 1885 ook het paardrijden ressorteert (schermen is een facultatief vak).

Merkwaardig is 't, dat de kazerneering niet het gewenschte effect heeft gehad; de discipline heeft er niets bij gewonnen. De stille tegenstand tegen Napoleon bleef bestaan. Deze heeft er daarom ernstig over gedacht de school op te heffen. Hij had echter bij verschillende gelegenheden ondervonden, welke eminente officieren de school hem had geleverd, waarom hij dit plan toch niet ten uitvoer heeft gebracht. Speciaal op de tocht naar Egypte had hij de diensten der polytechniciens gewaardeerd, op het slagveld zoowel als bij de stichting van het „Institut d'Egypte”.¹⁾

De Restauratie verdroeg echter het liberalisme der leerlingen niet. De jongelui frequenteerden in dien tijd het café Lamblin, waar de officieren van Waterloo plachten samen te komen. Zij kwamen daar zoo demonstratief voor hun republikeinsche gevoelens uit, dat tot sluiting van de school werd overgegaan. Dit besluit deed echter zooveel stof, ook in het buitenland, opwaaien, dat men spoedig genoodzaakt was de inrichting weer te openen. Het militaire regiem

¹⁾. Ook leeraren der school (Monge, Fourier) hebben zich voor dit wetenschappelijk instituut verdienstelijk gemaakt.

werd afgeschaft, het internaat en de uniforme (toenmaals niet-militaire) kleding bleven echter gehandhaafd.

De gebeurtenissen in Juli 1830 werden door de polytechniciens met intense belangstelling gevolgd. Tegen de orders in begaven beide promoties zich naar buiten; op de barricaden werden ze ontvangen met de kreet: „Vive l'Ecole Polytechnique!” De revolutionaire actie van het gros der leerlingen beperkte zich echter tot deze demonstratie; slechts een 60-tal mengde zich onder de strijdenden. Deze vervulden echter bij verschillende acties een leidende rol. Lafayette prees hen in zijn dagorder van den 5den Augustus op uitbundige wijze:

„En présence des services rendus à la patrie par la population parisienne et les jeunes gens des Ecoles, il n'est aucun citoyen qui ne soit pénétré d'admiration, de confiance, je dirai même de respect, à la vue de ce glorieux uniforme de l'Ecole Polytechnique qui, dans ce moment de crise, a fait de chaque individu une puissance pour la conquête de la liberté et le maintien de l'ordre public.”

Het resultaat van de revolutie, de instelling van de Juli-monarchie, kon de republikeinsche geest der polytechniciens niet bevredigen. Zij weigerden de aan de combattanten aangeboden graad van luitenant te accepteren benevens een dozijn kruisen van het Legioen van Eer. Door dit belangelooze optreden wies hun prestige nog tegenover het volk, dat zich moeilijk kon verzoenen met de bij verrassing ingestelde orleanistische monarchie.

Na 1830 heeft de school haar militair karakter herkreten zonder echter uitsluitend voor de technische legerfuncties op te leiden.

In de jaren 1832, 1833 en 1834 bevond zich menig polytechnicien weer op de barricaden, wat verschillende ontslagen ten gevolge had. Uit dien tijd dateert ook de stichting van de „Association Polytechnique”, welke de volksontwikkeling beoogde door de instelling van publieke leergangen. Auguste Comte (1798—1857) was één der eerste docenten, hoewel hij in 1816 van de school was verwijderd als promotor van een protest tegen het Koninklijk gezag.

In 1848 vervulden de leerlingen der school slechts de rol van bemiddelaars en pacificators. Men verweet hun, dat ze niet meer op de hand van het volk, de „roode” Republikeinen, waren. De polytechnicien Fargue antwoordde hierop: „Vous n'êtes pas le peuple” en zou gefusilleerd zijn, als niet „une cantinière au coeur sensible” voor hem in de bres gesprongen was.

De republikeinsche geest blijkt later nog uit een paar voorvallen. In 1855 juichte het bataljon, gevormd uit de leerlingen der school, warm de uit den Krim teruggekeerde troepen toe om vervolgens „dans un silence glacial” voor Napoleon III te defileeren. Het „Vive l'Empereur” van den generaal aan 't hoofd werd niet overgenomen. Naar aanleiding daarvan werd besloten de school in 't vervolg niet meer aan dergelijke militaire plechtigheden te laten deelnemen.

Het tweede voorval speelde zich in 1868 af. De Kroonprins bracht in gezelschap van de Keizerin een bezoek aan de school. Zij werden onder doodsche stilte ontvangen. „Waarom willen die „petits architectes” niet juichen?” vroeg de Keizerin geërgerd. De maarschalk Vaillant redde toen de situatie door de prophetische woorden te spreken: „Majesteit, vandaag juichen zij niet, maar morgen zullen ze zich laten dooden”.

Na 1870 begint zich onder den invloed van de opgekomen revanche-idee ¹⁾ een meer militaire geest op de school te demonstreeren. Veel meer afgestudeerden kiezen de militaire carrière; één jaar is het aantal „bottiers” (degenen, die een civiele carrière kiezen) op een promotie van 225 zelfs geslonken tot 15. In de periode 1905—1913 is de animo voor een militairen werkkring weer aanmerkelijk geluwd, omdat in die jaren de geslaagden voor het toelatingsexamen eerst een jaar bij een regiment als kanonnier werden ingelijfd. Men zag gelukkig spoedig in, dat deze maatregel niet bepaald bevordelijk was om het wetenschappelijke peil van het onderwijs te handhaven. Na den wereldoorlog is het aantal liefhebbers voor een militaire carrière aanvankelijk nog meer geslonken; sinds 1925 vertoont het echter weer een stijging.

Wanneer wij na deze weinige grepen uit de geschiedenis der school een kort overzicht willen geven van de vruchten, die zij voor de exacte wetenschappen heeft afgeworpen, moeten we ons sterk beperken en feitelijk volstaan met een opsomming van namen. Veilig kan beweerd worden, dat nagenoeg alle groote mathematici en physici, die Frankrijk de vorige eeuw heeft opgeleverd, aan de Ecole Polytechnique zijn gevormd. In de eerste plaats moeten dan de beide

¹⁾ Als een merkwaardige uiting van die idee zij hier vermeld, dat de maarschalk Mannoury, die in 1867 op de Ecole Polytechnique is gekomen, pas na zijn overwinning aan de Ourcq in den wereldoorlog de medaille van 1870 heeft willen dragen.

universeele geleerden Cauchy (1789—1857) en Poincaré (1854—1912) genoemd worden. Dat deze genieën op het hoogtepunt van hun roem warme belangstelling voor de school zijn blijven koesteren, moge blijken uit het feit, dat Poincaré er geheel belangeloos de astronomie heeft gedoceerd, toen de minister van oorlog, generaal André, dit vak van het leerplan had geschrapt, omdat het z.i. geen nut had voor de opleiding. Poincaré heeft dit volgehouden tot het vak weer officieel in het programma werd opgenomen.

Na deze beiden verdienen twee minder universeele geleerden vermeld te worden, die het echter op hun speciaal terrein tot zeer groote hoogte hebben gebracht, de analyticus Hermite (1822—1901) en de syntheticus Chasles (1793—1880).¹⁾ Van de overige mathematici, die aan de school zijn gevormd, moeten genoemd worden Poncelet, Poinsot, Poisson, Lamé, Brianchon, Dandelin, Dupin, Liouville, Serret, Laurent, Laguerre, Halphen, Mannheim, Jordan, Painlevé, Julia enz. Vooraanstaande physici, die polytechnici zijn geweest, zijn Malus, Arago, Fresnel, Carnot, Biot, Dulong, Petit, Babinet, Gay-Lussac, Regnault en de Becquerels. Op het gebied der mechanica noemen we Coriolis en Clapeyron.

In de laatste 50 à 60 jaar heeft de Ecole Polytechnique blijkbaar niet meer die aantrekking uitgeoefend op degenen, die groote begaafdheid voor de exacte wetenschappen toonden, als in de daaraan voorafgegane periode. De moderne vooraanstaande Fransche mathematici en physici zijn niet meer uitsluitend aan de Ecole Polytechnique gevormd. We kunnen hiervoor geen volledige verklaring geven. Wellicht is een tijdelijke daling van het wetenschappelijk peil van het onderwijs hiervan één der oorzaken. Zooals reeds opgemerkt is, zijn er herhaaldelijk stemmen opgegaan, die een hervorming van het onderwijs in een meer op de technische praktijk ingestelde richting beoogden. De verdedigers van deze opvatting hebben gedurende een periode van ongeveer 30 jaar (1850 tot 1880) hun denkbeelden weten te verwezenlijken. In 1850 werd een „commission mixte” benoemd, welke de opdracht kreeg het onderwijs te reorganiseeren. De ziel daarvan was de astronoom Le Verrier, de ontdekker van Neptunus.

¹⁾ Chasles debuteerde aan de Ecole Polytechnique met het meetkundig bewijs van de dubbele voortbrenging der hyperboloïde met één blad, welk bewijs onmiddellijk door den docent in zijn cursus werd overgenomen.

„Il arriva à la commission avec un système tout prêt et le parti pris d'avance de le faire réussir, et, malheureusement, il était au fond peu scrupuleux sur les moyens de faire prévaloir ses opinions.”

„Travailleur infatigable et calculateur de génie, il avait pour le calcul numérique, qui lui avait tant servi pour découvrir un monde, l'amour d'un ouvrier pour son outil de prédilection.”

„Ce fut une des principales raisons de son intervention dans le régime de l'Ecole: l'ingénieur devait calculer, il fallait que le candidat calculât, que l'élève calculât.”

Regnault en Poncelet (de laatste was sinds 1848 commandant van de school) waren in de commissie niet tegen Le Verrier en zijn aanhangers opgewassen. In een lijvig rapport formuleerden deze hun grieven tegen het onderwijs. De cursussen in mechanica, physica en analyse waren te theoretisch en te lastig („trop élevés pour la moyenne des intelligences”). Eminente geleerden als Chasles, Liouville, Catalan en Duhamel namen hun ontslag of werden er toe gedwongen. De docenten werden genoodzaakt alles, wat niet direct met de technische praktijk in verband stond, uit hun colleges weg te laten.

Deze periode van overheersching der praktijk wordt door het gros der tegenwoordige Fransche deskundige beoordeelaars als een duistere periode beschouwd. In „L'Ecole Polytechnique. Livre du Centenaire. 1794—1894” wordt het gedurende de periode 1850—1880 geldende leerplan zelfs in het geheel niet besproken, zoodat we het ter vergelijking met de andere ook niet hebben kunnen opnemen. Dit wordt a.v. gemotiveerd:

„Nous avons supprimé dans cette comparaison le régime inauguré en 1850, qui, nous croyons l'avoir montré, n'a constitué dans la marche de l'Ecole qu'un arrêt de développement, une perturbation due à des causes absolument artificielles.”

Ook heeft men zich herhaaldelijk de vraag gesteld, of de zuiver wetenschappelijke vooropleiding voor a.s. artillerie- en genie-officieren niet te ver ging. Napoleon bv. was van meening, dat voor de artillerie noodig waren „des hommes pratiques et non des savants, occupés à résoudre des problèmes qu'on doit renvoyer aux loisirs de la paix.” Het andere standpunt heeft echter ook voor de militaire vooropleiding gezegevierd. De aanhangers van dat standpunt gaan zelfs wel eens zoo ver, dat zij de débacle van 1870—1871 wijten aan de superioriteit der Duitsche officieren op

VERSCHENEN

BEKNOPTE BESCHRIJVENDE MEETKUNDE

DOOR

P. WIJDENES
AMSTERDAM

DERDE DRUK

130 blz. 147 figuren.



In dit boek zijn niet alleen de eenvoudige grondconstructies opgenomen, maar als toepassing ook 21 volledig uitgevoerde werkstukken van de eindexamens van de H.B.S.

Prijs gec. f 2.—

P. NOORDHOFF N.V. — 1935 — GRONINGEN-BATAVIA

IN DE BOEKHANDEL VERKRIJGBAAR.

In Ned. Oost-Indië uit voorraad verkrijgbaar bij
N.V. Uitgevers-Maatschappij NOORDHOFF-KOLFF,
Laan Holle 7, Batavia C.

UIT HET VOORBERICHT VAN DE TWEEDE DRUK.

Alles, wat opgenomen is, is geboden door de eisen van het eindexamen; misschien kan men het zesde hoofdstuk (blz. 86—92) overslaan; de manier, waarop fig. 110 van blz. 89 is geconstrueerd, leek mij echter wel zo leerzaam, dat ik niet kon nalaten dit werkstuk volledig te behandelen met het weinige, dat er noodzakelijk aan vooraf moet gaan; deze wenteling treedt in verdere studie bovendien op de voorgrond.

Behalve de grondconstructies, die de theorie van de Beschrijvende Meetkunde vormen, heb ik ook de **volledige uitvoering gegeven van 21 eindexamenvraagstukken**; de maten zijn bij verscheidene daarvan iets gewijzigd om de figuur op de bladzijde te houden en ook zijn wel eens wat meer lijnen getrokken, dan strikt noodzakelijk is; dit ter instructie en voor de proef.

Een ruim gebruik is er gemaakt van de affiniteitsassen; over de noodzakelijkheid deze eenvoudige leerstof te onderwijzen, heb ik in jaargang VII van het tijdschrift 'Euclides' een artikel geschreven; in jaargang VIII is een overdruk opgenomen van een artikel van Prof. Dr. Hk. de Vries over hetzelfde onderwerp, van ruim dertig jaar geleden. In beide wordt betoogd en met voorbeelden aangetoond, dat het gebruik van de affiniteitsassen de volgende voordelen biedt boven verouderde methoden: **een beter begrip, de theorie duidelijker, inniger samenhang met de Stereometrie, beter zicht op de figuur, minder lijnen en nauwkeuriger tekeningen**. Zie fig. 21, 43, 44, 64, 66 als vooroefeningen; uiteenzetting en bepaling bij fig. 86 en 87; verder fig. 88, 89, 90, 92, 93, 94, 95, 98, 106, 107, 116, 118, 119, 124, 125, 143, 147.

Het overzicht over de leerstof heb ik gemakkelijk gemaakt door het aangeven in randschrift van hetgeen daar ter plaatse behandeld wordt en door onder elke figuur te zetten, wat deze behelst. Beide stellen den leraar onmiddellijk op de hoogte van wat er aan de beurt is, terwijl de leerlingen bij het leren en nadoen en herhalen slechts goed alle figuren hebben na te gaan met de onderschriften, want alles, wat in de tekst staat, is door een figuur verhelderd. De nummers achter vele vraagstukken verwijzen naar de „Oefenbladen” van schrijver dezes; die verzameling is een kostelijk hulpmiddel bij het onderwijs in de Beschrijvende Meetkunde.

BIJ DE DERDE DRUK.

Enige figuren heb ik door nieuwe vervangen; toegevoegd zijn de werkstukken van het eindexamen H. B. S. 1933 (blz. 50), 1934 (blz. 80) en van het eindexamen H. B. S. in Nederlands Indië 1933 (blz. 73) en beide van 1934 (blz. 94 en 100).

Door deze uitbreiding, niet van de leerstof dus, en door duidelijker druk van de vraagstukken, is het boekje enige bladzijden groter geworden.

Voor alle mogelijke op- en aanmerkingen houd ik mij ten zeerste aanbevolen.

Amsterdam, Zuid
Jac. Obrechtstraat 88.

P. WIJDENES.

INHOUD.

HOOFDSTUK	Fig.	Blz.
I. Inleiding; punt, lijn en vlak . . .	1— 39	1— 20
II. Snijding van lijnen en vlakken. . .	40— 62	21— 40
III. Het omwentelen van lijnen en vlakken; afstanden van punten, lijnen en vlakken	63— 79	41— 51
IV. Figuren in een willekeurig vlak . .	80— 95	52— 74
V. Hoeken van lijnen en vlakken . .	96—109	75— 86
VI. Wentelen om een as loodrecht op een projectievlak	110—116	87— 92
VII. Veelvlakken	117—125	93—105
VIII. Schaduwbeplating	126—134	106—110
IX. Cylinder en kegel	135—147	111—121
Herhaling		122—125
Werkstukken in de trant van de eind-examenopgaven		126—130

De volgende werkstukken van het eindexamen H. B. S. zijn volledig uitgevoerd in dit boek.

1920 de eerste, fig. 107	1921 de eerste, fig. 98
1922 beide, fig. 62 en fig. 90	1924 de tweede, fig. 146
1925 beide, fig. 125 en fig. 142	1926 beide fig. 78 en fig. 124
1927 beide, fig. 91 en fig. 93	1928 beide, fig. 134 en fig. 147
1929 de tweede, fig. 122	1930 beide, fig. 92 en fig. 143
1933 de eerste, fig. 79	1934 de eerste, fig. 102

Verder van de werkstukken van het eindexamen H. B. S. en A. M. S. in Nederlands Indië

1933 de eerste, fig. 95	1934 beide, fig. 94 en fig. 123.
-------------------------	----------------------------------

wetenschappelijk gebied. Waar de moderne oorlog steeds hooger eischen aan de technische officieren stelt, is een degelijke wetenschappelijke vorming voor hen een noodzakelijk vereischte. Niemand minder dan Foch heeft dit in 1920 in een bijeenkomst van de „Société des Amis de l'Ecole" onderstreept.¹⁾

Het bijzondere karakter der school komt tot uiting in haar devies: „Pour la patrie, les sciences et la gloire", woorden, die o.m. prijken op haar vaandel, dat den 3den December 1804 door Napoleon aan den „major" der promotie, den sergeant-majoor Arago, werd uitgereikt en dat den 22en April 1914 uit handen van den President van Frankrijk het Legioen van Eer ontving. De President prees bij die gelegenheid de inrichting in de volgende bewoordingen:

„A son ombre se sont formées des générations d'officiers, d'ingénieurs, de savants qui ont su maintenir intactes de glorieuses traditions de bravoure, de travail et de dévouement. A tous ces artisans de la grandeur française j'exprime aujourd' hui la reconnaissance du pays."

Toen de school nauwelijks was opgericht (1795), verscheen reeds een „Bulletin", waarin wetenschappelijke bijdragen van docenten en leerlingen waren opgenomen. Daaruit is het „Journal de l'Ecole Polytechnique" gegroeid, dat tot de gezaghebbende Fransche periodieken op het gebied der exacte wetenschappen behoort.

Meermalen hebben zich oud-leerlingen der school tot een groote wetenschappelijke hoogte weten op te werken in perioden van hun leven, waarin hun eigenlijke werkkring op technisch terrein lag. In tegenstelling met geleerden, wier leven zich afspeelt tusschen schrijftafel en collegezaal, zijn deze mannen onder dikwijls zeer moeilijke

¹⁾ Wanneer we deze stemmen beluisteren, worden we herinnerd aan den strijd voor een belangrijke reorganisatie van ons middelbaar wiskunde-onderwijs. Eenerzijds wil men door het over boord gooien van betrekkelijk onnuttig cijferwerk enz. tijd vinden voor de behandeling van de beginselen der infinitesimaalrekening, die men toch noodig heeft bij verschillende problemen, al noemt men ze niet bij haar waren naam; anderzijds klagen enkele hoogleraren te Delft over een te geringe vaardigheid in het uitcijferen van de voorkomende problemen en vreezen zij voor het aanleeren van schijngeleerdheid, als onderwerpen, die op de universiteit op veel uitgebreider schaal ter sprake moeten komen, reeds voorgezet worden aan personen, die grotendeels nog niet tot de daarvoor vereischte geestelijke rijpheid zijn gekomen.

omstandigheden wetenschappelijk productief geweest. Dat zij daartoe de energie hebben bezeten, moet grootendeels toegeschreven worden aan de liefde voor de wetenschap, welke hun op de Ecole Polytechnique is blygebracht en aan de methode van werken op de school, waardoor haar abiturienten er aan wennen zich ook onder ongunstige omstandigheden op hun studieobject te concentreren.

We noemen slechts Poncelet, die in Russische krijgsgevangenschap, verstoken van alle vakliteratuur de grondslagen wist te leggen voor zijn beroemde „*Traité des propriétés projectives des figures*”, Malus, de ontdekker van de polarisatie van het licht (1808), die, ziek liggende in een tent in Syrië (tocht naar Egypte), zich ging bezighouden met de studie van het licht, Sadi Carnot, die gedurende zijn verblijf aan de Ecole Polytechnique, zooals zijn studiegenoot Chasles vertelt, dikwijls water liet koken en daardoor geleid werd tot zijn beroemde kringproces, Fresnel, die met zeer eenvoudige hulpmiddelen tot zijn ontdekkingen kwam. „*Une loupe, quelques morceaux de carton et des fils d'araignée lui suffisent pour construire un micromètre, obtenir et observer ces belles franges aériennes et mettre la théorie de l'émission en contradiction évidente avec les faits.*”

Het verblijf op de school is blijkbaar zeer bevorderlijk voor het aankweeken van een hechte kameraadschap tusschen de polytechniciens. Deze wordt bijzonder in de hand gewerkt door 't-systeem van werken, waardoor dezelfde 7 à 8 jongelui gedurende den geheelen studietijd in elkaars directe nabijheid arbeiden en discussiëren. De schoolleiding zorgt er steeds voor leerlingen, afkomstig uit uiteenlopende maatschappelijke milieu's, in zoo'n groepje bijeen te brengen. Dat de genoten opleiding in 't algemeen zeer wordt gewaardeerd, moge blijken uit het bestaan van de „*Société des Amis de l'Ecole*”. Deze vereeniging heeft de uitgave van het in 1932 verschenen werk „*L'Ecole Polytechnique*” mogelijk gemaakt. Trouwens ook de uitgave van het herdenkingswerk over het tijdvak 1794—1894 is aan geldelijke offers van oud-polytechniciens te danken.

In een voorwoord van het werk van 1932 wordt die waardeering voor de genoten opleiding onder woorden gebracht door den oud-leerling Edouard Estaunié, lid van de Académie Française, „*dépourvu à un degré rare de l'imagination mathématique*”. Estaunié behoorde op de school tot de middelmaat, voor wie „*l'enseignement*

dont le principe est qu'il demeure étranger à la pratique immédiate", volgens veler meening onvruchtbaar moet blijven. Deze meening deelt Estaunié niet. In de eerste plaats, getuigt hij, heb ik er leeren werken. In de tweede plaats wordt er een in het later leven onvervreemdbare intellectuele wapenrusting gesmeed, die haar vruchten afwerpt, ook al verwijderd men zich nog zoo ver van de wetenschap.

„A Polytechnique on apprend à peser tous les termes, à ne jamais détourner un fait ou une expression soit de ses limites, soit de sa stricte signification et à conclure avec bon sens. Rien de plus peut-être, mais c'est énorme. Instituer une telle habitude d'esprit suffit pour orienter une vie."

Maar het voornaamste is z.i., dat er onderwijs wordt gegeven, dat in tegenstelling met vakonderwijs „désintéressé" is, dat er systematisch utiliteitsoverwegingen worden uitgeschakeld, dat men er leert onderzoekingen uitvoeren om der wille van die onderzoekingen zelf: „On prend le goût et le désir de la recherche pour elle-même." Het zijn z.i. dus voor een niet onbelangrijk deel de geestelijke factoren, die mede het succes van de Ecole Polytechnique hebben bepaald.

Merkwaardig is het in dit verband te vermelden, dat de polytechniciens er een door hen zelf ontworpen eerecode op na houden, de „code X" van 1850. Dit handvest wordt aan het einde van de ontgroeningsperiode plechtig aan de nieuwelingen, „rassemblés à genoux dans la cour," voorgelezen. Daarin zijn opgenomen regels „pour le maintien de la bonne tenue et la conservation du respect de l'uniforme". Het is een „charte de l'honneur tellement stricte que les pouvoirs établis s'inclinent devant elle, mais aussi, mais surtout, charte de charité tant elle s'applique à maintenir la liberté morale."

Hiermede moge dan deze schets besloten worden van een onderwijsinrichting, die het intellectuele leven, voor wat de exacte vakken betreft, vooral in de eerste helft der vorige eeuw meer heeft beïnvloed dan eenig ander opleidingsinstituut.

DE LOGARITHMISCHE BETREKKING TUSSEN TRILLINGSSTERKTE EN GELUIDSSTERKTE

DOOR

R. SWIERSTRA.

In het midden van de vorige eeuw werd door E. H. Weber vastgesteld dat, als men op de buitenkant van de hand een gewicht plaatst, de gewichtsvermeerdering ongeveer 33 % moest bedragen, eer men een grotere druk waarneemt.

Later stelde Fechner vast, dat ook voor het lichtzintuig, het oog, een dergelijke betrekking bestaat en wel in die zin, dat de prikkelwaarde met tenminste 1 % moet toenemen voor dat dit door ons wordt waargenomen. Ook voor de reukzin en gehoorzin bestaat een dergelijke betrekking, die door de wet van Weber-Fechner als volgt tot uitdrukking wordt gebracht: als de prikkelwaarde volgens een meetkundige reeks toeneemt, neemt de gewaarwordingssterkte volgens een rekenkundige reeks toe.

Men ziet direct in, dat men hier met een exponentieële of logaritmische betrekking te doen heeft. We willen hier nagaan, hoe deze betrekking bij de geluids-gewaarwording is.

Zoals wel bekend is, zullen de in de lucht voortgebrachte trillingen, welke het oor treffen, een geluidsindruk veroorzaken. Dit is echter slechts ten dele waar. Trillingen van een frequentie kleiner dan circa 16 cycli per seconde ¹⁾ en groter dan ca. 20000 c/sec veroorzaken geen geluidsindruk; ons oor is hiervoor blijkbaar ongevoelig. Er is dus een hoorbaarheidsgebied wat de trillingsfrequenties betreft. Er is nog een tweede beperking. Trillingen binnen dit

¹⁾ De uitdrukking „cycli per seconde” is internationaal in gebruik; zij is ontleend aan het feit, dat een enkelvoudige trilling een periodisch verschijnsel is, dat volkomen afgeleid kan worden van een eenparige beweging langs een cirkelomtrek (cyclus of kringloop) en daarom ook door een sinusoïde kan worden voorgesteld. De Duitsers eren den groten duitsen natuurkundigen Hertz door één cyclus per sec, een Hertz te noemen.

frequentiegebied kunnen te zwak zijn, zodat ze beneden de *hoorbaarheidsdrempel* liggen. Nu is deze drempel zeer verschillend bij de verschillende trillingen tussen 16 en 20000 c/sec. Kunnen trillingen te zwak zijn, ze kunnen ook zo sterk zijn, dat ze een onaangenaam gevoel, een soort pijngevoel veroorzaken; men heeft dan de *pijngrens* bereikt.

Willen we omtrent de trillingssterkte iets meer kunnen mededelen, dan is het gewenst, dat we weten met welke fysische eenheid we dan meten. Als een lichaam trilt, ontstaan golven in de lucht; de golven bezitten een zekere energie. De trillingssterkte, die op een plaats optreedt, wordt nu bepaald door de energie, die per seconde door een oppervlakte van 1 cm^2 , loodrecht op de voortplantingsrichting geplaatst, gaat. Men heeft dus te doen met een hoeveelheid arbeid per seconde, dus met vermogen, zodat we de bedoelde energie in de eenheid watt (gewoonlijk microwatt = μW) kunnen uitdrukken.

De hoorbaarheidsdrempel bedraagt voor een toon van 150 c/sec ongeveer $2,4 \times 10^{-8}$ en voor een toon van 1000 c/sec ongeveer $2,4 \times 10^{-10} \mu \text{ watt/cm}^2$.

De Amerikaan Fletcher, van het Bell-Telefoon-Laboratorium, heeft zeer uitgebreide proeven genomen om na te gaan met welk percentage men de trillingssterkte moet laten toenemen om een sterkere geluidsindruk te krijgen. Hierbij bleek, dat dit percentage ten eerste voor alle frequenties verschillend is en bovendien verandert, als de trillingssterkte toeneemt, zodat eigenlijk de wet van Weber-Fechner maar bij ruwe benadering opgaat. Fletcher vond verder dat bij trillingen sterker dan die, welke bij zacht ritselen der bladeren ontstaan, het bedoelde percentage varieert tussen 125 % en 5 % en vond, dat 25 % een alleszins tolerabel gemiddelde is. Hiervolgens zou dus, vasthoudende aan de wet van Weber-Fechner, de trillingssterkte voortdurend met ca. 1,25 moeten worden vermenigvuldigd om telkens een sterkere geluidsindruk te krijgen.

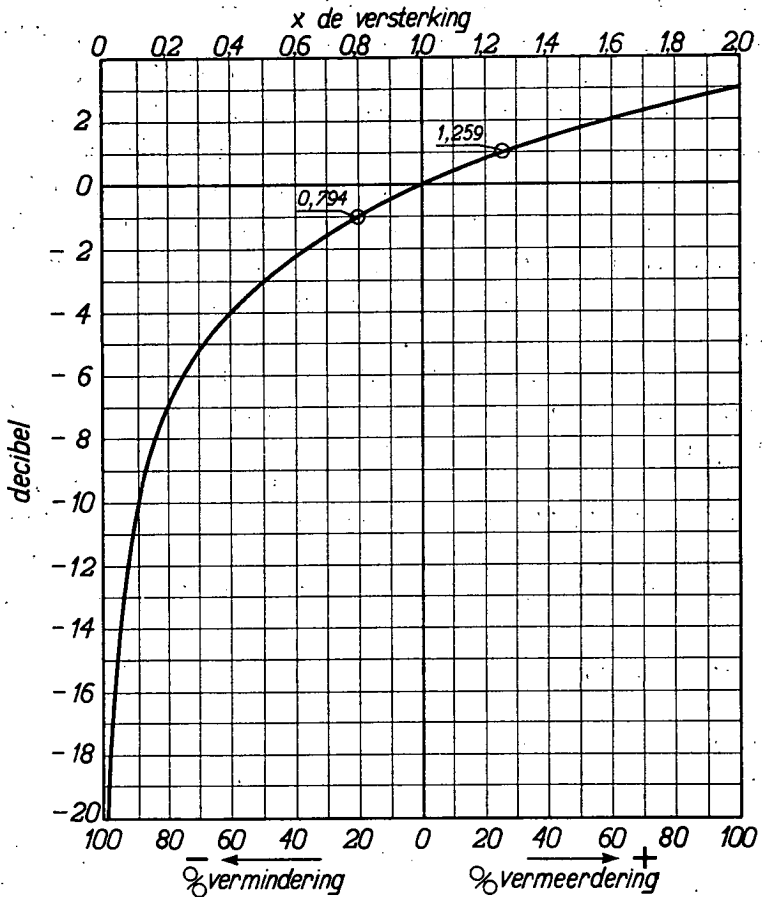
Wanneer men nu opschrijft:

$10^{0,1} = 1,259 \dots$, $10^{0,2} = 1,585 \dots$, $10^{0,3} = 1,995 \dots$ enz. dan ziet men dat de getalwaarden telkens 1,259... maal zo groot worden, terwijl de logaritmie met trapjes van 0,1 opklimmen.

De Amerikanen voerden voor deze trapjes de naam *decibel* in, wat dus veronderstelt dat $\log 10 = 1$ bel is.

Wordt een trilling dus 100 maal zo sterk, dan is het geluid slechts

20 trapjes sterker geworden en men zegt: de trillingssterkte is met 20 decibel toegenomen. ($\log 100 = 2$ bel $= 20$ decibel). Is een trilling met 30 decibel verminderd, dan is deze 10^3 of 1000 maal zo klein geworden. Treedt naast een sterke trilling een veel zwakkere op, die b.v. het $10^{1.7}$ deel van de eerste is, dan bedraagt het ver-



schil 47 decibel en men zegt, dat het niveau van de zwakste trilling op -47 db ligt.

Uit fig. 1 kunnen we de betrekking zien tussen trillingssterkte en geluidssterkte, voor het geval men een trillingssterkte tot 100 % laat toenemen en tot 99 % laat afnemen.

Bij de tegenwoordig zo algemeen toegepaste elektrische geluidsversterking drukt men bij voorkeur de versterking der trillingen in

decibel uit. Vanzelfsprekend doet zich nu ook de behoefte gevoelen om de werkelijke sterkte van een geluid in eenheden uit te drukken. Daartoe kan men een geluidsschaal aanleggen met het nulpunt op de hoorbaarheidsdrempel. Daar deze echter voor verschillende frequenties verschillend is, moet men de frequentie vastleggen en kiest daartoe een frequentie van 1000 c/sec. Nu geeft de bepaling van deze hoorbaarheidsdrempel ook al weer moeilijkheden, ten eerste omdat hij voor alle personen niet gelijk is en de meetmethode ook van invloed is. Het moet ons dan ook niet verwonderen, dat de Amerikanen niet een zelfde nulpunt hebben aangenomen als de Duitsers, waarvan het nulpunt ongeveer 4 decibel hoger ligt.

De Duitsers wijken bovendien daarin van de Amerikanen af, dat zij hier voor de eenheid decibel, de naam *phon* invoerden. Zegt dus de Amerikaan dat de trilling de sterkte van 78 decibel heeft, dan zegt de Duitser, dat deze 74 phon is.

Een paar jaar geleden is door het dagblad „De Telegraaf” een „antilawaai campagne” in ons land ingeluid. Men heeft toen met behulp van Amerikaanse instrumenten geluidsmetingen gedaan, die destijds in het blad werden gepubliceerd.

Wij geven hier enkele toen gemeten waarden:
een gespannen kar in aantocht circa 35 decibel

„ „ „ passerende „	63 „
motorrij wiel „	75 „
„ met open uitlaat „	95 „
autohoorn „	84 „

Verder geven we hier nog een paar waarden volgens Duitse opgave:

bladergeritsel	20 phon
fluisteren	circa 30 „
normale spreeksterkte	40 „
sterke luidspreker weergave	60 „
zeer sterke luidspreker	80 „
vliegtuig op 5 m afstand	120 „

Het geluid-isolerend vermogen van muren, plafonds en diverse bouwstoffen wordt in decibel aangegeven. Voor een behoorlijke geluids-isolering wordt voor buitenmuren en etagewoningen 60 db vereist. Door de „Geluidsstichting” te Delft zijn reeds zeer vele

stoffen op de z.g. isolatiecoëfficiënt onderzocht, welke dan steeds in decibel wordt aangegeven.

Ongetwijfeld zullen de woorden decibel en phon op den duur buiten de kring der geluidstechnici meer en meer gebruikt worden en zal het nodig zijn, dat deze begrippen ook in meerdere natuurkundige boeken een plaats vinden. Mocht men daaraan nog niet de behoefte gevoelen, dan kan dit artikel voorlopig althans dit voordeel hebben, dat men iets meer begrijpt van de naam, die de A.V.R.O. aan een harer ensembles gaf.

LAGERE ALGEBRA

LEERBOEK VOOR DE
AKTE WISKUNDE L.O.

DOOR

P. WIJDENES

AMSTERDAM

DEEL II

VERGELIJKINGEN, FUNCTIES,
GRAFIEKEN EN REEKSEN.

DERDE DRUK

480 bladzijden, 152 nieuwe figuren.
Gebonden in linnen band f 8,50

 Voor intekenaars op onze wiskundige tijdschriften *Compositio Mathematica*, *Nieuw Archief voor Wiskunde*, *Christiaan Huygens*, *Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde*, *Euclides*, tot 1 Dec. 1935 slechts f 6,50.

In Indië tot 1 Febr. 1936.



1 9 3 5

P. NOORDHOFF N.V.
GRONINGEN - BATAVIA

VOORBERICHT.

De derde druk is vergeleken bij de tweede bijna een nieuw boek; de ondervinding, opgedaan bij het dagelijks gebruik, heeft ons aanleiding gegeven om een en ander te veranderen en te verbeteren en vooral te vereenvoudigen.

Lange stukken theorie zijn gesplitst in kleinere, die dan onmiddellijk gevolgd worden door voorbeelden en vraagstukken; daardoor wordt de theorie het best vastgelegd. Men zie de inhoudsopgave. De gemiddelde omvang van een paragraaf theorie met inbegrip van de voorbeelden en de vraagstukken is 9 bladzijden. Wat van minder gewicht is, of bij eerste lezing kan worden overgeslagen, is, met kleine letter gedrukt.

Bij de keuze van de onderwerpen, bij de diepte en de omvang van behandeling, is vooral rekening gehouden met de eisen van de examens Wiskunde L.O., hier te lande en in Indië. Van zelf ontstaat daardoor een werk, waarin alles, wat tot de lagere algebra behoort, uitgebreider en degelijker tot zijn recht kan komen dan in een schoolboek.

De voornaamste veranderingen, die zijn aangebracht en die verbeteringen zullen blijken, zijn: de bekorting van de binomiaalvergelijkingen; eenvoudiger voorbeelden voor de ontwikkeling van het functiebegrip en dus tevens van de eerste grafieken; zorgvuldige bespreking en splitsing in onderdelen van de theorie der gebroken functies en van hun uiterste waarden; de ongelijkheden zijn naar de eis behandeld, niet alleen de lineaire, maar ook de kwadratische en de exponentiële; de onbepaalde vergelijkingen, die niet zoveel voorkomen en de normale stof onderbreken, zijn naar het eind verplaatst.

De vele opleiders voor de acte Wiskunde L.O., die dit werk gebruiken, zullen zelf nog wel meer verbeteringen opmerken, die met hun wensen stroken; ze voldoen in elk geval ten volle aan die van de heren TOUSSAINT en VAN WEELE, de leiders van de cursus „*Die Haghe*”, die bij hun lessen de Lagere Algebra met stijgend succes gebruiken.

In het hele boek wordt de uiterste zorg besteed aan het aanbrengen van heldere begrippen door een zuivere theorie. Als voorbeeld zie men de behandeling van de irrationale vergelijkingen, waarbij de wortels eenwaardig zijn genomen; de behandeling is verder geheel gewijzigd en verbeterd. Men zie ook, hoe de theorie van de gelijkwaardigheid van stelsels vergelijkingen niet beperkt is tot de lineaire, maar ook zorgvuldig wordt uiteengezet bij de irrationale, de exponentiële en de logaritmische, wat nog dringender noodzaak is dan bij de lineaire; ook bij de eliminatie is er volle aandacht aan gewijd.

Nog te veel heerst de verkeerde mening, dat het werken met algebraïsche vormen, de techniek van het vak dus, algebra is; dat moge het zijn voor sommig schoolonderwijs, in geen geval kunnen volwassenen, die door een examen onderwijsbevoegdheid wensen te verwerven, er mee volstaan; deze hebben behoefte aan en recht op een boek, waarin de gehele stof zuiver wordt behandeld. Wij twijfelen niet, of deze nieuwe druk geeft alles, wat geëist kan worden.

Hoewel de hoeveelheid en de aard van de vraagstukken de kandidaten geheel op het peil brengen van het examen, zal het toch nuttig zijn, dat ze de „Gids voor Wiskunde L.O.” van VERKAART met de opgaven en uitwerkingen L.O. en de honderden vragen van mondelinge examens ijverig bestuderen. Een onmisbare vraagbaak en krachtmeter is het *Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde* met zijn talrijke vraagstukken (o.a. van de examens L.O., ook uit Oost-Indië) en de model-oplossingen, alle op de hoogte van het examen en de vele verslagen van de mondelinge examens.

Als iemand enige voorkennis nodig acht alvorens aan de Lagere Algebra te beginnen, dan neme hij *Nieuwe School-algebra* door P. WIJDENES en DR. H. J. E. BETH (thans, Juli 1935, I 7e druk, II 6e druk, III 5e druk). Ook hierin vindt hij, zij het op lager plan, goed verzorgde theorie en voldoende oefening.

Het is mij een behoefte mijn dank uit te spreken aan HERREILERS en HARLAAR voor al het werk, dat zij verricht hebben om deze arbeid naar behoren te voleindigen; verder aan DR. J. G. VAN DE PUTTE voor enige opmerkingen, waarmee rekening is gehouden in § 76.

Gebruikers van dit boek, waaronder begrepen de studerenden, zullen mij ten zeerste verplichten met alle mogelijke op- en aanmerkingen.

Amsterdam Zuid.

P. WIJDENES.

Jac. Obrechtstraat 88.

De antwoorden en uitwerkingen zijn ter perse en verschijnen voor September 1935.

INHOUD.

LINEAIRE VERGELIJKINGEN.

Par.		Blz.
1.	Inleiding	1
2.	Vergelijkingen met één onbekende. Algemene eigenschappen.	6
3, 4.	De lineaire vergelijking $ax + b = 0$	11
5, 6.	Twee vergelijkingen met twee onbekenden	15
7, 8.	Afhankelijk en strijdig bij twee vergelijkingen met twee onbekenden	26
9, 10.	n vergelijkingen met n onbekenden	33
11, 12.	Afhankelijk en strijdig bij stelsels vergelijkingen met meerdere onbekenden	47
13, 14.	Eliminatie	60
15—17.	Lineaire ongelijkheden	69

LINEAIRE FUNCTIES.

18, 19.	Het begrip functie	86
20, 21.	Grafische voorstelling van een functie	92
22, 23.	Coördinaten	96
24, 25.	De lineaire functie $y = px + q$	98
26, 27.	Grafieken in verband met de oplossing van lineaire vergelijkingen en ongelijkheden	108

VIERTANTSVERGELIJKINGEN.

28, 29.	Oplossing van $ax^2 + bx + c = 0$	119
30, 31.	Aard van de wortels	129
32, 33.	Eliminatie bij vierkantsvergelijkingen	142
34, 35.	Symmetrische functies van de wortels	151
36, 37.	Kwadratische ongelijkheden	167

KWADRATISCHE FUNCTIES.

38, 39.	De grafiek van $y = ax^2 + bx + c$	174
40, 41.	Grafieken in verband met de oplossing van kwadratische vergelijkingen en ongelijkheden	184
42, 43.	Uiterste waarde van $ax^2 + bx + c$	196
44, 45.	Uiterste waarden van een paar symmetrische functies met voorwaarde-vergelijking	209

GEHELE RATIONALE VERGELIJKINGEN.

46, 47.	Hogere-machtsvergelijkingen met gehele wortels	221
48, 49.	Wederkerige vergelijkingen	227

Par.		Blz.
50, 51.	Binomiaalvergelijkingen	234
52, 53.	Twee vergelijkingen met twee onbekenden van de tweede graad	240
54, 55.	Stelsels vergelijkingen van hogere graad	253
56, 57.	Eliminatie	260
58.	Grafieken in verband met de oplossing van twee vergelijkingen met twee onbekenden	266

ANDERE VERGELIJKINGEN EN FUNCTIES.

59, 60.	Gebroken rationale vergelijkingen	273
61.	De functies $y = \frac{c}{x}$ en $y = \frac{c}{x^2}$; asymptoten	284
62, 63.	De functie $y = \frac{ax + b}{px + q}$	287
64, 65.	De functie $y = \frac{ax^2 + bx + c}{px + q}$	292
66, 67.	De functie $y = \frac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r}$	298
68, 69.	Irrationale vergelijkingen	314
70, 71.	Grafieken van irrationale functies	329
72, 73.	Exponentiële en logaritmische vergelijkingen	338
74, 75.	Grafieken van de exponentiële en logaritmische functies	350

ONBEPAALTE VERGELIJKINGEN VAN DE EERSTE GRAAD.

76, 77.	Eén vergelijking met twee onbekenden	356
78, 79.	Onbepaalde vergelijkingen met meer dan twee onbekenden	370
80, 81.	VERGELIJKINGEN IN WOORDEN	381

REEKSEN.

82—85.	Rekenkundige reeksen	391
86—89.	Meetkundige reeksen	400
90, 91.	Reken-meetkundige reeksen	413
92, 93.	Harmonische reeksen	418
94—99.	Samengestelde intrest	423

100.	ALGEMENE HERHALING	455
------	------------------------------	-----

101.	Vraagstukken van het examen Wiskunde L.O. in Ned. Oost-Indië van 1930—1934	471
	Register	473
	Lijst van artikelen over Lagere Algebra uit de jaargangen van het N. T. v. W.	481
	Idem uit die van Euclides	484

	Blz.		Blz.
Complex getal	234	Evenwijdige rechten	107, 111
toegevoegd —	129	Expliciet	90
Complexe vlak	235	Exponentiële functie	350, 403
Contante waarde	417, 426	„ ongelijkheden	347
Convergent	408	„ vergelijkingen	338
Coördinaatassen	96	Extrapoleren	392, 395, 401, 420
Coördinaten	96	Extreem, zie uiterste waarde.	
imaginaire —	272		
Coördinatenstelsel	96	Factoren	
Deellijn van een kwadrant	100	aard der —	132
Deling van vergelijkingen	255	imaginaire —	133
Derde evenredige	393, 402	irrationale —	133
Dezelfde vergelijkingen	8	rationale —	133
Disconto	439	reële —	133
„ tafels	427, 440	Functie	89
samengesteld —	440	„ van een nat. getal	391
Discriminant	130	„ „ „ veranderlijke	89, 90
Discussie, zie bespreking.		„ „ twee verander-	
Dubbele wortel	121	lijken	90
Eenheid		eenwaardige —	89, 90
wortels uit de —	235	expliciete —	90
Eenwaardige functie	89, 90	exponentiële —	350, 403
Eenzijdig gesloten interval	305	gebroken rationale —	284
Eerste lid	3, 75	gehele rationale	7
„ soort	228	impliciete —	90
Eindbedrag	423, 434	inverse —	351
Eindig interval	305	irrationale —	329
Eindpunten van een interval	305	kwadratische —	174
Eindwaarde	423, 434	lineaire —	86, 98
Eliminatie	19, 60, 142, 260, 281	logarithmische —	351
„ bij rationale verg.	281	meerwaardige —	89
„ bij stelsels van		rationale —	
„ hogere graad	260	273, 284, 287, 292, 298	
„ bij vierkantsverg.	142	symmetrische —	151
„ door gelijkstell.	19, 62	Gebied	114
„ door opt. en aftr.	21, 63	negatief —	114
„ door substitutie	20, 63	positief —	114
Elimineren	61, 66, 142, 260	Gebroken rationale functies	284
Ellips	270, 271, 331	„ „ ongelijk-	
Enkelvoudige intrest	424	heden	81, 283
Euclides	69	Gebroken rationale vergelij-	
Evenredig		kingen	273
gedurig —	402	Gedurig evenredig	402
Evenredige interpolatie	354	Gehele oplossingen	356
derde —	393, 402	„ positieve oplossingen	356, 364
middel —	402	„ rationale functie	7

	Biz.		Biz.
Termijn	423	exponentiële —	338
Toegevoegd complex	129	gebroken rationale —	273
„ imaginair	129	gehele rationale —	5, 7, 221
Top van de parabool	179	gelijkwaardige —	7, 16, 17, 276, 316, 317, 340, 341
Topraakklijn	183	goniometrische —	6, 275
Transformatie	160	hogere machts —	5, 161, 164
Transitieve eigenschap	69	homogene —	41, 65, 250
Twee verg. met twee onb. 15, 240, 253, 325, 346		identieke —	6, 26
Tweede lid	3, 75	ingeklede —	381
„ soort	228	irrationale —	314
Tweevoudig onbepaald	51	kubische —	5
Tweevoudige pool	299, 306	kwadratische —	5, 119, 184
„ wortel	121	lineaire —	5, 11
Uiterste waarde	199	logarithmische —	339
absolute — —	207	onafhankelijke —	27
relatieve — —	207	onbepaalde —	356
Uiterste waarde(n) van:		rationale —	5, 273
$ax^2 + bx + c$	196	resulterende —	62
$\frac{ax^2 + bx + c}{px + q}$	293	strijdige —	26, 48, 111
$\frac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r}$	301, 303	uitgeklede —	381
symmetrische functies	209	valse —	6, 26, 109, 315
Uitgeklede vergelijkingen	381	vierkants —	5, 119, 184
		wederkerige —	227
Valse ongelijkheidsopgave	79	Verhoudingen der onbekenden	42
„ vergelijking 6, 26, 109, 315		Verschil van een rekenk. reeks	391
Variant	391, 407	Verticale as	96
Veelterm	7, 155	„ asymptoot 286, 295, 299	
symmetrische —	155	Verwant	
Veranderlijke	89	affien —	201
afhankelijk —	89	Verzekeringswiskunde	425
onafhankelijk —	89	Vierkantsvergelijking	5, 119, 184
Verbinding		gemengde —	119
lineaire —		onvolledige	119
18, 35, 64, 110, 246, 254, 370		zuivere —	119
Verduisteren van wortels		Vliet, (Dr. P. G. van de —)	427, 440
10, 273, 339		Volgorde	
Vergelijking(en)	3	grondeigenschappen van —	69
„ in woorden	381	Voorschrift	86, 89
„ van een kromme	100	Voorstelling	
„ „ „ rechte	100	grafische —, zie grafiek.	
afhankelijke —	27, 49, 112	Vooruitbetaling van rente, zie disconto.	
binomiaal —	234	Vraagstukken van het examen L.O. in N.O.I. van 1930-1934	471
dezelfde —	8	Waaier	110

LES CONCOURS D'ADMISSION A L'ECOLE MILITAIRE DE BELGIQUE

par Dr. V. HERBIET.

I. Préliminaires.

Il y a deux concours d'admission à l'Ecole Militaire de Belgique.

- 1) le concours pour la section Artillerie et Génie.
- 2) le concours pour la section Infanterie et Cavalerie.

Il y a pour chaque concours deux séries d'épreuves:

- a) l'épreuve littéraire: français, néerlandais, histoire, géographie.

A cette épreuve on ajoute un examen sur la physique, la chimie et le dessin.

Cette épreuve est commune aux deux sections (Artillerie-Génie et Infanterie-Cavalerie).

b) l'épreuve mathématique, distincte pour les deux sections, comporte des examens écrits et des examens oraux.

Pour être admis à subir les épreuves mathématiques, tout candidat doit avoir obtenu dans la première série d'épreuves, la moitié des points, sur la connaissance approfondie de sa langue maternelle (français pour les wallons, néerlandais pour les flamands) et les 2/5 des points dans chacune des autres branches (excepté le dessin).

Les épreuves littéraires de 1935 ont eu lieu du 15 au 20 juillet. Les épreuves mathématiques pour la section *Artillerie et Génie* commencent le 16 septembre, et pour la section *Infanterie et Cavalerie*, vers le 15 octobre. — Sur 497 candidats ayant participé à la 1ère épreuve, 150 seulement ont été rappelés pour les épreuves mathématiques, dont 103 pour la section Artillerie (A) et 47 pour la section Infanterie (I). Il y avait 60 places à conférer dans chacune des sections. Le candidat de la section (A) qui n' a pas réussi ou qui

n'est par classé en ordre utile peut se présenter à l'épreuve mathématique de la section (I).

II. Epreuves mathématiques de la Section Artillerie et Génie.

Programme: Le programme complet des athénées belges (section scientifique). Moyenne exigée: 10 sur 20.

a) Epreuves écrites. Cinq épreuves de trois heures maximum: Arithmétique, Algèbre, Géométrie, Trigonométrie et Géométrie analytique. En plus, un calcul logarithmique (comprenant un calcul suivant la division centésimale et un calcul suivant la division sexagésimale) (durée: 3 heures maximum). Enfin, une épreuve de Géométrie descriptive, (durée: 5 heures).

b) Epreuves orales: Deux séances de 45 minutes chacune.

Branches: 3 branches fixes: Algèbre, Géométrie, Géométrie analytique.

1 branche tirée au sort: Trigonométrie en 1932 — Descriptive en 1933 — Arithmétique en 1934 et 1935.

III. Epreuves mathématiques de la section Infanterie et Cavalerie.

Programme: Programme des athénées belges (section gréco-latine). Cote exigée: 8 sur 20.

Date: vers le 15 octobre.

Epreuves écrites: Cinq épreuves, d'une durée maximum de trois heures chacune, réparties comme suit: Arithmétique, Algèbre, Géométrie, Trigonométrie, Calcul logarithmique.

Epreuves orales: Durée: une heure environ — Divisées en deux séances.

1933. I. SECTION DE L'ARTILLERIE ET DU GENIE.

Arithmétique.

Déterminer un nombre entier N sachant:

- 1o. Qu'il n'a comme facteurs premiers que 3, 5 et 7.
- 2o. Que $5N$ a 8 diviseurs de plus que N .
- 3o. Que $27N$ a 18 diviseurs de plus que N .

Algèbre.

On demande 1o. d'appliquer la formule de Moivre au calcul de l'expression:

$$[\cos a + i \sin a]^{2n}$$

pour $a = \frac{\pi}{4}$ et n = un multiple de 4 augmenté de 1.

20. De déduire du résultat obtenu au 10. la relation suivante:

$$C_{2n}^1 - C_{2n}^3 + C_{2n}^5 - \dots - C_{2n}^{n-2} = 2^{n-1} - \frac{1}{2} C_{2n}^n.$$

Geométrie.

On donne un angle XOY et deux points P et Q situés dans son plan.

On demande de mener par P une sécante telle que le segment AB compris entre les côtés de l'angle XOY soit vu du point Q sous un angle donné α .

Indiquer le nombre de solutions.

Examiner le cas où l'angle XOY est nul, c'est-à-dire où ses côtés sont remplacés par deux droites parallèles.

Trigonométrie.

On donne un quadrilatère sphérique convexe AOSO': par le sommet A, opposé à S, on mène un arc de grand cercle quelconque coupant en M et M' les côtés non adjacents OS et O'S. Etablir qu'il existe entre les segments déterminés une relation de la forme:

$$\frac{\sin OM}{\sin MS} + l \frac{\sin O'M'}{\sin M'S} = m,$$

où l et m sont des constantes indépendantes du grand cercle choisi.

Que devient cette relation dans l'hypothèse où le quadrilatère AOSO' se réduit à un carré?

Géométrie Analytique.

I. On donne:

Deux axes rectangulaires Ox et Oy, une circonférence de rayon r et de centre O.

On demande:

10. D'écrire l'équation de la famille des paraboles ayant Oy comme axe et tangentes à la circonférence donnée sur le demi-axe Oy' négatif;

20. De montrer que la conique d'équation:

$$x^2 - 4ry - 4r^2 = 0 \quad (1)$$

appartient à la famille, et de déterminer son foyer.

II. On donne:

Une tangente mobile à la circonférence précédente.

Cette tangente rencontre la parabole (1) en deux points P et Q, par lesquels on mène les tangentes à la parabole.

On demande:

1o. De chercher le lieu du point d'intersection M de ces tangentes;

2o. De déterminer la nature du lieu et d'en donner éventuellement le centre et les axes.

Géométrie descriptive.

On donne:

1o. Trois points A, B, C;

2o. Une droite horizontale h .

Coordonnées:

$$\begin{array}{ll}
 A^v \ x = 70 & A^h \ x = 70 \\
 y = 260 & y = 130 \\
 1^o) \quad B^v \ x = 50 & B^h \ x = 50 \\
 y = 200 & y = 60 \\
 C^v \ x = 120 & C^h \ x = 120 \\
 y = 220 & y = 110 \\
 & h^v \equiv y = 230 \\
 2^o) \quad h^h \equiv \text{passe } x = 0 \text{ et } x = 120 \\
 & y = 80 \quad y = 160
 \end{array}$$

On demande:

1. De construire un plan α passant par h , faisant un angle de 20 degrés avec un plan horizontal et descendant vers l'arrière;

2. De mener par le milieu M de AC une perpendiculaire au plan ABC, et de construire sur cette perpendiculaire le point D distant de M de 85 millimètres et situé au-dessus de M;

3. De considérer le tétraèdre ABCD et de construire la vraie grandeur de la face ACD par une rotation suivie d'un changement de plan de projection;

4. De construire la section faite dans le tétraèdre ABCD par le plan α après avoir amené α à être projetant au moyen d'un changement de plan de projection;

5. De représenter dans le système de projection primitif le

tétraèdre ABCD dont on suppose enlevée la partie située au-dessus du plan α .

La vraie grandeur construite au 30. sera couverte de hachures.

Calcul par logarithmes.

I. 1) On demande de calculer en grades la plus petite valeur positive de l'arc x satisfaisant à la relation:

$$\frac{\log \sin^2 x}{(\log a^3)^2 \operatorname{tg} \alpha} = 1$$

dans laquelle:

$$a = 1,2405$$

$$\alpha = 163 \text{ grades } 305.$$

2) On demande d'exprimer ce résultat:

10. En grades avec trois décimales;

20. En radians avec quatre décimales.

II. On demande de calculer avec trois décimales le nombre x satisfaisant à la relation suivante:

$$\log x = \frac{(\sin B)^{\cos C}}{\operatorname{tg} A}$$

dans laquelle:

$$A = 28^\circ 00' 13''$$

$$B = 17^\circ 21' 42''$$

$$C = 91^\circ 07' 27''$$

II. SECTION DE L'INFANTERIE ET DE LA CAVALERIE.

Arithmétique.

Un cycliste a parcouru, en 4 h. 16 m 20 s $\frac{5}{10}$, une route accidentée comportant des paliers, des descentes et des montées dont les longueurs sont respectivement proportionnelles aux fractions

$$\frac{3}{5}, \frac{4}{7} \text{ et } \frac{2}{11}.$$

a) Calculer, en heures, minutes et secondes, les temps mis par le cycliste pour parcourir:

10. Les paliers;

20. Les descentes;

30. Les montées,

sachant que la roue motrice de la bicyclette a fait, en moyenne, 186 tours par minute dans les paliers, 224 tours par minute dans les descentes et 96 tours par minute dans les montées.

b) Calculer la longueur de la route, sachant que les roues de la bicyclette ont 0 m 70 de diamètre.

On prendra $\pi = 3,14$.

Algèbre.

On donne l'équation: $x^2 - 2ax + 1 = 0$ (1)
dont les racines sont x' et x'' .

On demande:

10. De former l'équation en y dont les racines sont:

$$y' = x' + \frac{b}{x''} \text{ et } y'' = x'' + \frac{b}{x'}$$

où b désigne un nombre donné différent de zéro.

20. De trouver la relation entre a et b exprimant que l'équation (1) et l'équation en y ont des racines réelles, celles de l'équation en y comprenant entre elles une, et une seule, des racines de l'équation (1).

Géométrie.

Diviser un pentagone régulier convexe en trois parties équivalentes par des droites issues d'un des sommets.

Trigonométrie.

Résoudre un triangle, étant donné:

$$A, b - a = p \text{ et } c - a = q.$$

Calculs par logarithmes.

I. On demande:

10. De calculer en grades la valeur de x , compris entre 0 grade et 200 grades, à l'aide des relations

$$\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} = \frac{\cos \frac{\pi}{\sqrt{2}}}{\sin 3\varphi}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = -1,443$$

$$0 < \varphi < 200 \text{ grades.}$$

20. De transformer en radians, la valeur trouvée.

Remarque. Les résultats demandés seront fournis chacun avec trois décimales.

II. On demande de calculer, en degrés, minutes et secondes, les trois angles A, B, C, d'un triangle à l'aide des formules

$$\cos A = \frac{2}{3 + \sqrt{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{B - C}{2} = \sqrt{\frac{22348 \sin A}{89.825}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{B + C}{2}$$

1934 I. SECTION DE L'ARTILLERIE ET DU GENIE.

Arithmétique.

Avec quelle approximation peut-on calculer le rayon d'une sphère dont le volume est de 1,182 mètres cubes, à moins de un décimètre cube près, par défaut, si l'on prend pour π la valeur approchée 3,1416.

Calculez ce rayon en conservant le minimum de décimales.
 $\pi = 3,14159 \dots$

Algèbre.

On demande: 1) de trouver la condition pour qu'on puisse décomposer le polynôme: $x^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + f$ en un produit de deux trinômes du second degré en x , tel que, la somme de ces deux trinômes soit un carré parfait.

2) Sachant que cette condition est satisfaite pour

$$b = 3; \quad c = 9; \quad d = 27; \quad f = 27,$$

de calculer les racines de l'équation

$$x^4 + 12x^3 + 54x^2 + 108x + 27 = 0.$$

3) De représenter dans le plan de deux axes rectangulaires le quadrilatère dont les sommets ont ces racines comme „affixes”.

Géométrie.

On donne: une droite a située dans un plan P et deux points A, B situés d'un même côté de ce plan.

On demande de trouver sur a un point M tel que les droites AM et BM fassent des angles égaux avec l'intersection i des plans ABM et P .

Indiquez le nombre de solutions.

Trigonométrie.

1) Résoudre un triangle plan connaissant les rayons des cercles exinscrits r , r' et r'' .

2) Démontrer qu'un triangle est isocèle quand on a la relation suivante:

$$a = 2b \sin \frac{A}{2}.$$

Géométrie analytique.

On donne:

- a) Deux axes rectangulaires Ox et Oy .
- b) Deux droites mobiles, symétriques par rapport à la bissectrice du premier quadrant et issues de l'origine.
- c) Une parabole de paramètre p , ayant son axe parallèle à Ox et son sommet en un point B ($o\beta$) de l'axe Oy .

On demande:

- 1o. L'équation de la famille des coniques passant par les points d'intersection des deux droites (b) avec la parabole (c);
- 2o. La condition pour que les coniques aient leurs centres sur la bissectrice;
- 3o. L'équation de la famille particulière en question;
- 4o. Conditions pour qu'une courbe de cette famille puisse avoir son centre au point d'intersection de la bissectrice et de l'axe de la parabole primitive.

Géométrie descriptive.

On donne:

1o. La droite:

$$a \left\{ \begin{array}{l} a^v \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 330 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} x = 210 \\ y = 130 \end{array} \\ a^h \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} x = 210 \\ y = 190 \end{array} \end{array} \right.$$

PROSPECTUS

ALGEBRA

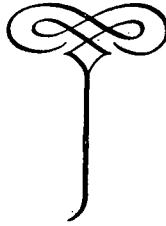
VOOR M.O. EN V.H.O.

DEEL II

DOOR

C. J. ALDERS

LERAAR R.K. LYCEUM TE HAARLEM



Deel I, gec. f 1.50

Deel II, gec. f 2.50

P. NOORDHOFF N.V. — 1935 — GRONINGEN-BATAVIA

Verkrijgbaar in de boekhandel.

In Ned. Oost-Indië uit voorraad verkrijgbaar bij
N.V. Uitgevers-Maatschappij NOORDHOFF-KOLFF,
Laan Holle 7, Batavia C.

VOORBERICHT.

Het is mijn bedoeling geweest in dit boekje de theorie overzichtelijk, volledig en begrijpelijk voor de leerlingen uiteen te zetten. De afwijkingen met verschillende andere werken van deze soort komen in hoofdzaak neer op het volgende.

1. In de eerste klasse wordt bij de ontbinding in factoren niet méér gegeven dan de typen $ap + bp$; $a^2 - b^2$; $a^2 \pm 2ab + b^2$ en $ax^2 + bx + c$. Deze zijn voor de verdere opbouw van de algebra ruim voldoende, terwijl ze zeker genoeg stof leveren om de vaardigheid te ontwikkelen; al het meerdere op dit gebied is m.i. een nodeloze plaag voor leraar en leerlingen. Ik heb dus weggelaten o.a. de ontbinding van $a^3 \pm b^3$; van $a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ en van $x^4 + x^2 + 1$.

2. Over „verduisteren” van wortels bij het oplossen van een vergelijking is niet gesproken; de ervaring leert, dat men de leerlingen eraan kan wennen de methode van § 52 te gebruiken.

3. Het invoeren van wortels is besproken op een, zover ik weet, oorspronkelijke wijze, die de toets van critiek kan doorstaan (§ 53).

4. Bij de worteltrekking heb ik het standpunt ingenomen, dat deze bewerking eenduidig is, en dit consequent doorgevoerd. M.i. is dat het meest natuurlijke; het is mij een raadsel, hoe men kan afspreken, dat men onder $\sqrt{4}$ zal verstaan $+2$ en even verder aan de vergelijking $\sqrt{x+5} = -3$ kan laten voldoen door $x = 4$.

5. Men zal in het eerste deeltje de merkwaardige quotienten missen. Met vele anderen ben ik van mening, dat deze behandeld moeten worden met de reststelling, en dat de uitkomsten niet in goed vertrouwen aanvaard moeten worden, maar bewezen dienen te worden met een Bernoulliaans bewijs. Dit is dan ook in het tweede deeltje gedaan (hoofdstuk XV); ik denk me deze stof bestemd voor de vierde klasse.

6. De complexe getallen behoort men niet te bespreken of goed, en dit laatste lijkt me alleen mogelijk in de hoogste klasse. Ik heb ze daarom geplaatst aan het slot van het tweede deeltje, geleid door Wijdenes' overtuigend artikel in Euclides.

7. Nu voor het gymnasium en de H.B.S. de samen-

gestelde interestrekening niet meer op het schriftelijk examen gevraagd wordt, is het gelukkig niet meer nodig om daarover allerlei rariteiten te maken; ik heb deze stof dan ook binnen redelijke grenzen gehouden.

8. Bij het onderzoek der grafieken van zekere functies moeten verschillende begrippen, zoals „oneindig groot”, relatieve extremen, asymptoten enz. nauwkeurig worden behandeld, anders ontaardt het onderzoek in een gecijfer volgens zekere regeltjes, en daarin kan ik geen nut zien. Aan deze begrippen is een apart hoofdstuk (XVI) gewijd, dat men desgewenst ook later kan bespreken.

9. Voor het werken met limieten geldt nog sterker dan voor complexe getallen: men moet het goed doen of helemaal niet. En dit laatste zou hoogst betreurenswaardig zijn, want het limietbegrip acht ik een der belangrijkste voor het wiskunde onderwijs, en beslist nodig om in de hoogste klasse grondig te bespreken. (Hoofdstuk XXV).

10. Hoofdstuk XXVI en XXVII bevatten een inleiding tot de hogere analyse; als de tekenen niet bedriegen, dan is de tijd niet ver meer, dat deze stof wordt opgenomen in het voorgeschreven programma, waarmee ik van harte zal instemmen. De ervaring bewijst overtuigend, dat dit gedeelte niet gaat boven het begrip van de gemiddelde leerlingen der hoogste klasse.

Ik betuig mijn dank aan den heer Wijdenes voor het tekenen der figuren en aan de firma Noordhoff voor de wijze, waarop aan mijn wensen werd voldaan.

Haarlem, Juli 1935.

C. J. Alders.

INHOUD DEEL I

	Blz.
INLEIDING	1
HOOFDSTUK I. De hoofdbewerkingen met algebraische getallen	7
§ 25. Herhaling	25
HOOFDSTUK II. Lineaire vergelijkingen met een onbekende	27
HOOFDSTUK III. Merkwaardige producten.	36
HOOFDSTUK IV. Ontbinding in factoren	42
§45. Herhaling	49
HOOFDSTUK V. Breuken	52

HOOFDSTUK VI.	Vergelijkingen met één onbekende	62
HOOFDSTUK VII.	Twee lineaire vergelijkingen met twee onbekenden	68
HOOFDSTUK VIII.	Drie en meer lineaire vergelijkingen met drie en meer onbekenden. .	78
§ 66.	Herhaling over vergelijkingen	84
HOOFDSTUK IX.	Ongelijkheden	86
HOOFDSTUK X.	Wortelvormen	89
HOOFDSTUK XI.	Oneigenlijke machten	106
HOOFDSTUK XII.	Grafische voorstellingen	109
	De lineaire functie.	
§ 90.	Algemene herhaling	118

INHOUD DEEL II

Hoofdstuk XIII.	Vierkantsvergelijkingen . . .	1
Hoofdstuk XIV.	Vergelijkingen, die teruggebracht worden tot lineaire of kwadratische	22
Hoofdstuk XV.	De kwadratische functie . . .	29
Hoofdstuk XVI.	Reststelling en merkwaardige quotienten	49
Hoofdstuk XVII.	Hogere machtsvergelijkingen .	55
	Wederkerige vergelijkingen . .	55
Hoofdstuk XVIII.	Functies	61
Hoofdstuk XIX.	De functie $y = \frac{ax + b}{cx + d}$.	70
Hoofdstuk XX.	De functie $y = \frac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r}$.	75
Hoofdstuk XXI.	Logarithmen	85
Hoofdstuk XXII.	Exponentiële en logarithmische vergelijkingen	94
Hoofdstuk XXIII.	Reeksen	102
Hoofdstuk XXIV.	Samengestelde intrest	121
Hoofdstuk XXV.	Limieten.	132
Hoofdstuk XXVI.	Inleiding tot de differentiaalrekening	147
Hoofdstuk XXVII.	De grondformule der integraalrekening	166
Hoofdstuk XXVIII.	Complexe getallen.	177
§ 188.	Herhaling der theorie	186
§ 189.	Algemene herhaling	197

20. Le point:

$$A \begin{cases} A^v \begin{cases} x = 50 \\ y = 210 \end{cases} \\ A^h \begin{cases} x = 50 \\ y = 140 \end{cases} \end{cases}$$

On demande:

10. De construire par le point A un plan α perpendiculaire à la droite a ;

20. De construire le point de percée B de la droite a dans le plan α ;

30. De construire dans le plan α par rabattement autour de l'horizontale du point A un hexagone de centre B et de sommet A;

40. De porter sur la droite a une longueur 100 millimètres à partir du point B et vers l'avant et de noter S ce point;

50. De représenter comme un corps solide et opaque la pyramide de sommet S dont la base est l'hexagone construit au 30.;

60. De construire la vraie grandeur de la face la plus en avant au moyen de rotations;

70. De construire la vraie grandeur de la face la plus au-dessus par changements de plans de projection.

Calculs par logarithmes.

10. On demande de calculer en degrés, minutes et secondes la plus petite valeur positive x satisfaisant à la relation:

$$100 \sin^3 x = \operatorname{tg} A (\cos B)^{\log \sqrt{N}}$$

dans laquelle:

$$A = 91^\circ 33' 27''.$$

$$B = 343^\circ 02' 04''.$$

$$N = 0,00081.$$

20. On demande de calculer en grades, avec trois décimales, la valeur de l'arc x satisfaisant aux relations:

$$\operatorname{tg} x = \frac{a \cdot \cos^3 B}{\sqrt{\operatorname{tg}^5 C}}$$

$$0 < x < 200 \text{ gr.},$$

dans lesquelles:

$$a = 0,04454.$$

$$B = 148 \text{ gr. } 327.$$

$$C = 238 \text{ gr. } 496.$$

II. SECTION DE L'INFANTERIE ET DE LA CAVALERIE.

Arithmétique.

10. Trouvez les fractions telles que le plus grand commun diviseur de leurs deux termes soit 4 et que la différence entre le carré du dénominateur et celui du numérateur soit égale à 669392.

20. Considérez la fraction $\frac{567}{996}$ et déterminez, en indiquant le procédé employé, le nombre qu'il faut ajouter à ses deux termes pour obtenir une fraction égale à $\frac{2}{3}$.

Algèbre.

On donne l'équation

$$\sqrt{1-x^2} + \sqrt{2x-x^2} = m,$$

les symboles $\sqrt{\quad}$ signifiant que l'on prend la racine carrée positive de chacune des quantités qu'ils recouvrent et m étant un paramètre réel.

On demande de déterminer, pour quelles valeurs de m , l'équation a une ou plusieurs racines réelles que l'on calculera.

Géométrie.

On donne un point A et une droite d ne passant pas par ce point. Par le point A, on mène une droite de direction variable qui rencontre la droite d en B. Par le point B, on mène dans le plan Ad une droite Bx faisant avec AB un angle constant donné. Sur Bx on porte, de B vers X, une longueur BC telle que le rapport $\frac{AB}{BC}$ ait une valeur constante donnée. On demande le lieu géométrique du point C.

Trigonométrie.

1) Résoudre un triangle connaissant les trois hauteurs h , h' et h'' .

2) Si l'on a: $2 \operatorname{tg} a = 3 \operatorname{tg} b$

vérifier que:

$$\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} b}{2 + 3 \operatorname{tg}^2 b}.$$

Calculs par logarithmes.

1) On demande de calculer en degrés, minutes et secondes, le plus petit arc positif x satisfaisant à la relation:

$$\frac{\cotg x}{\sqrt[3]{a}} = \frac{\cos a}{\sin 5a \operatorname{tg} \beta}$$

dans laquelle

$$a = -0,08562$$

$$a = 131^{\circ} 49' 25''$$

$$\beta = 36^{\circ} 43' 26''$$

2) On demande de calculer en grades, avec trois décimales, la plus petite valeur positive de l'arc x satisfaisant à la relation:

$$\cotg (x - A) = \log \sin^2 2 A$$

dans laquelle:

$$A = 73^{\text{Grades}} 462.$$

TOELATING TOT DE KONINKLIJKE MILITAIRE ACADEMIE ¹⁾

DOOR

Prof. J. W. N. LE HEUX.

Aan de K.M.A. kunnen jongelieden worden opgeleid tot officier bij de wapens der infanterie, cavalerie, artillerie en genie, alsmede bij het dienstvak der militaire administratie, voor het leger hier te lande en voor dat in Nederlandsch-Indië.

Overtreft voor eenig wapen het aantal aspiranten, dat aan de gestelde eischen beantwoordt, dat der daarvoor beschikbaar gestelde plaatsen, dan hebben de betrokken aspiranten ter bepaling van de rangorde, waarin zij voor indeeling bij het wapen hunner keuze in aanmerking komen, zich te onderwerpen aan een rangschikkings-onderzoek, dat eind Augustus, zoo noodig in de eerste dagen van September, plaats vindt, als regel te Breda.

Leeftijd, voor den dienst hier te lande: 17 jaar bij den aanvang van het eerstvolgend leerjaar (16 Sept.) en niet ouder dan 21.

Voor den dienst in Ned. Indië 16 jaar en niet ouder dan 22.

Voor toelating komen in aanmerking zij, die bij geneeskundig onderzoek voor den dienst bij het wapen hunner keuze geschikt zijn bevonden en die, in het jaar van toelating dan wel in het jaar, onmiddellijk daaraan voorafgegaan, in het bezit zijn gekomen van 1o. einddiploma H.B.S. 5 j. cursus (zoo er een A en B afdeeling is, alleen einddiploma B).

¹⁾ Om een idee te geven op welke hoogte het wiskundig onderwijs in België staat, heeft Dr. Herbiet op mijn verzoek iets opgeschreven over de toelating tot de „Ecole militaire”. Daarop heb ik Prof. Le Heux van de Koninklijke Militaire Academie gevraagd, ons in te lichten over „Breda”.

Bij de vergelijking van de wiskundige opgaven bedenke men, dat in België lang niet zoveel gedaan wordt aan Natuurkunde, Scheikunde en Mechanica als bij ons.

20. getuigschrift van bekwaamheid tot studie aan een universiteit in de faculteit der geneeskunde of der wis- en natuurkunde.
30. getuigschrift van bekwaamheid tot studie aan de Technische hoogeschool.
40. getuigschrift of diploma, krachtens eenige wet met de vorige gelijkgesteld.

Jongelieden in Indië kunnen zich aldaar eveneens voor toelating tot de K.M.A. aanmelden, echter alleen voor het wapen der infanterie bij het leger in Ned. Indië. Zoo noodig moeten ze zich aldaar aan een rangschikkingsonderzoek onderwerpen.

Het rangschikkingsonderzoek heeft slechts ten doel vast te stellen, in welke volgorde de aspiranten in aanmerking komen voor de vervulling van de opengestelde plaatsen.

Het bestaat in:

10. een rangschikkingsexamen (wiskunde eischen eindexamen H.B.S.).
20. een onderzoek naar de lichamelijke gesteldheid en bedrevenheid in lichaamsoefeningen.
30. een onderzoek naar de algemeene geestesontwikkeling, den verstandelijken aanleg en den studiezin.

Het rangschikkingsexamen omvat *a.* rekenen, *b.* stelskunde met gonio- en trigonometrie, *c.* meetkunde (vlakke meetk., ruimte meetk. en beschrijvende meetk.), *d.* geschiedenis, *e.* Nederl. taal, *f.* Fransche taal, *g.* Hoogduitsche taal, *h.* Engelsche taal.

In de vakken, genoemd onder *a*, *b*, *c*, *d*, en *e* wordt schriftelijk en in de vakken onder *f*, *g* en *h* mondeling examen afgenomen. Het vak *e* wordt met een afzonderlijk cijfer beoordeeld naar de beantwoording der vragen bij vak *d* gedaan. De vakken *a*, *b* en *c* tezamen worden door één sub-commissie met één cijfer (wiskunde) beoordeeld; de vakken *f*, *g* en *h* eveneens met één cijfer.

Als regel heeft elke candidaat één dag schriftelijk en één dag mondeling examen (dit laatste gecombineerd met het onderzoek naar lichamelijke gesteldheid en algemeene ontwikkeling). Het schriftelijk examen werd in 1935 op 12 Augustus aangevangen met 160 candidaten (bij de keuring waren 44 % afgefallen van het oorspronkelijke aantal). Het mondeling examen duurde van 14 Aug.—2 Sept.; per dag werden 8 candidaten geëxamineerd. Wanneer de voorzitter het noodig oordeelt, kan een candidaat ook nader gehoord worden omtrent een der vakken *a* t.m. *e*.

Elke candidaat krijgt twee rangnummers: één voor de infanterie-, cavalerie- en mil.adm.lijst, en één voor de genie- en artillerielijst; voor deze laatste telt het wiskundecijfer 3 maal. Bij de vaststelling van het eindcijfer hebben ook de cijfers van het einddiploma H.B.S. (of ander getuigschrift) invloed.

In de laatste jaren werden voor het leger in Nederland uitsluitend leerlingen van de scholen voor reserve-officieren der infanterie, cavalerie, bereden artillerie en militaire administratie — welke scholen onderscheidenlijk gevestigd zijn te Kampen en Breda, Amersfoort, Ede en Kampen — aangenomen, indien zij met goed gevolg het vaandrags- c.q. kornetsexamen hadden afgelegd en na een vergelijkend onderzoek voor plaatsing in aanmerking kwamen.

Deze jongelieden komen dan direct in het tweede studiejaar (met meer uitgebreid wiskundeprogramma) en worden alleen opgeleid voor het leger hier te lande. Zij kunnen echter ook dingen naar een plaats^o in het eerste studiejaar voor het wapen der genie hier te lande en voor alle wapens (dienstvak) van het leger in Ned. Indië.

KONINKLIJKE MILITAIRE ACADEMIE.

Schriftelijk gedeelte van het Rangschikkingsonderzoek in 1935.

Rekenen. 1ste vraag, 10 minuten.

Hoe berekent ge $125875375 \times 987654321$. De geheele berekening op te schrijven.

2de vraag, 10 minuten.

Een der formules over logarithmen luidt:

$$\log (1 + x) = M \left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \right)$$

waarin $M = 0.434294481903251$.

Bereken hiermede tot in 12 decimalen $\log 1.001$.

3de vraag, 10 minuten.

Voor groote waarden van n is

$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \dots \times (n-1) \times n$ volgens Stirling gelijk te stellen aan $n^n \cdot e^{-n} \sqrt{2 \pi n}$.

Hoe groot is, met logarithmen van 5 decimalen berekend, het verschil dezer twee uitdrukkingen voor $n = 10$? $\log e = 0.434294$.

Meetkunde. 1ste vraag, 55 minuten.

Teeken op de linkerbladzijde van een vel ongelinieerd papier een gelijkzijdigen driehoek ABC met zijde a . (teeken de zijde AB verticaal; C links van AB en maak a ongeveer 4.5 cm).

Beschrijf op AB, BC en CA opnieuw gelijkzijdige driehoeken, waarvan de toppen resp. zijn D, E en F.

De driehoeken ABD, BCE en CAF zijn de grondvlakken van drie gelijke, regelmatige, driezijdige pyramiden met hoogte h (maak h ongeveer 9 cm).

In de ruimte tusschen deze pyramiden laat men een bol zakken tot deze op de zijvlakken der pyramiden rust. Wanneer in dezen stand de bol juist raakt aan het horizontale vlak, door de drie toppen der pyramiden gebracht, vraagt men zijn straal te berekenen. Welken vorm krijgen de pyramiden, wanneer de bol tevens rust op het horizontale vlak ABC. Van welk lichaam is in dat geval de bol een aangeschreven (ingeschreven) bol?

Meetkunde. 2de vraag, 55 minuten.

Van een vlak V maakt V_1 een hoek van 30° en V_2 een hoek van 45° met de as van projectie. (teeken deze op de linkerbladzijde van een vel ongelinieerd papier 16 cm van den bovenrand) beide openingen naar rechts; het snijpunt met de as is V en ligt 5 cm van den linkerkant van het papier. Een punt A ligt in het vlak V ; 2.5 cm vóór het verticale en 3 cm boven het horizontale projectievlak.

a. Construeer door A een lijn, welke de as van projectie kruist onder een hoek van 60° en welke in het vlak V ligt (van de twee oplossingen alleen de lijn, welke bovenwaarts naar links loopt). Deze lijn snijdt V_1 en V_2 resp. in P en Q ; P ligt dus rechts van A .

b. Construeer het middelpunt van den ingeschreven cirkel van driehoek PQV .

Stelkunde met Gonio- en Trigonometrie. Eerste vraag $\frac{3}{4}$ uur.

$$\text{Los } x \text{ en } y \text{ op uit: } \begin{cases} 2x^2 + xy + 3y^2 = 13 \\ 3x^2 - 2xy^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

Tweede vraag, 1 uur.

a. Welke is de grootste waarde $\sin x + \cos x$?

b. Schrijf $\sin x \cos x$ als een functie van $(\sin x + \cos x)$.

c. Los x op uit:

$$12 \sin x + 12 \cos x - 25 \operatorname{tg} x - 25 \operatorname{cotg} x + 25 \sec x + 25 \operatorname{cosec} x = 38.$$

Daarna één vraag van geschiedenis met medebeoordeling van de Nederl. taal. Tijd $1\frac{1}{2}$ uur. Keuze uit 5 onderwerpen. De punten die behandeld moeten worden, zijn aangegeven.

NA-EXAMEN VOOR INDISCHE CANDIDATEN.

Rekenen. 1ste vraag, 10 minuten.

Als π^2 gelijk aan 10 gesteld wordt, hoe groot is dan de fout, uitgedrukt tot in $\frac{1}{10000}$ procent? $\pi = 3.141592653589793 \dots$

2de vraag, 10 minuten.

Bereken met logarithmen in vijf decimalen

$$\sqrt[4]{1 - \frac{5ab^2}{\sqrt[3]{c}}}$$

als $a = 0.40856$, $b = 0.17434$ en $c = 9.95425$.

3de vraag, 10 minuten.

Drie getallen hebben 3, 4 en 5 cijfers. Hun gedurig product is zonder rest deelbaar door een getal van 8 cijfers. Het quotient dezer deeling verheft men tot de derde macht en uit deze macht trekt men den tweedemachtswortel. Tusschen welke grenzen ligt de uitkomst?

Meetkunde. 1ste vraag, 50 minuten.

Van een viervlak DABC is gegeven, dat het voetpunt H van de hoogtelijn, uit D neergelaten op het grondvlak ABC, samenvalt met het hoogtepunt van dit vlak. Bewijs, dat de middens van de ribben van het viervlak op eenzelfde bol liggen.

Teeken de ribben in het grondvlak minstens 8 cm lang en de hoogte minstens 12 cm. Noem de middens in het grondvlak P, Q en R (P tegenover A enz.), die op de opstaande ribben S, T en U (S op DA enz.).

Meetkunde. 2de vraag, 1 uur.

Van een regelmatige vierzijdige pyramide, top T, ligt het grond-

VERSCHENEN

MEETKUNDIGE VRAAGSTUKKEN

MET DE BEWIJZEN VAN DE STELLINGEN EN
MEER DAN 70 UITGEWERKTE VOORBEELDEN

 Een leerboek er naast is niet nodig

DOOR

P. WIJDENES

AMSTERDAM

Een verzameling vraagstukken met sterk didactisch karakter voor H. B. S., Gymnasium, Lyceum, Kweekschool, Zeevaartschool, Middelbare Technische School en meer scholen met ongeveer dezelfde leerstof voor Meetkunde. Bijzonder geschikt voor hen, die beginnen met de studie voor Wiskunde L. O.: meer dan 70 model-oplossingen.

Deel I. 100 blz., 144 fig., 20 oplossingen, 4 volledige werkstukken en 3 meetkundige plaatsen; gec. met gradenboog en twee driehoeken f 1.40

Deel II. 166 blz., 189 fig., 26 oplossingen, 11 volledige werkstukken en 8 meetkundige plaatsen; gec. . . f 2.40

P. NOORDHOFF N.V. — 1934 — GRONINGEN-BATAVIA

BIJ DE BOEKHANDEL VERKRIJGBAAR.

In Ned. Oost-Indië uit voorraad verkrijgbaar bij
N.V. Uitgevers-Maatschappij NOORDHOFF-KOLFF,
Laan Holle 7, Batavia C.

VOORBERICHT.

Elk hoofdstuk wordt voorafgegaan door een inleiding, waarin de begrippen worden genoemd, die men moet aanbrengen en waarin korte bewijzen worden gegeven van de stellingen, die toegepast moeten worden bij de oplossing van de vraagstukken, die er op volgen.

Van de eerste les af aan is het wenselijk, dat de leerlingen zelf doen, zelf handelen: tekenen, meten en construeren; bevordering van de zelfwerkzaamheid op eenvoudige vraagstukken, ook door de leerlingen wel eens zelf te laten vinden, wat er aan een figuur is op te merken.

Werkstukken worden langzaam aan uitgerekt tot een volledige behandeling; voor leerlingen in de eerste en tweede klas is de vierledige bewerking nog te zwaar; zo ergens, dat doet men hierbij wijs, wat water in de wijn te doen. Daarentegen wordt de uitwerking van vraagstukken over meetkundige plaatsen op het laatst beperkt tot een zorgvuldig onderzoek op de manier, zoals wij dat zelf ook doen.

Het is wel nuttig, als de leerlingen in hun boek eens kunnen nagaan, hoe een vraagstuk wordt opgelost, een werkstuk wordt voorbereid en uitgevoerd, een meetkundige plaats wordt onderzocht en besproken en daarna geconstrueerd; vandaar de vele voorbeelden, meer dan 70, door het hele boek heen; zie de lijst onder de inhoudsopgave.

Stelling 23 blz. 31 is niet geformuleerd als geval van congruentie; mij dunkt, dat het zo beter is; het voordeel springt al dadelijk in het oog bij het bewijs van 15d op blz. 35.

De enige stelling, die bij de gewone stof is gekomen, is 57 van blz. 117; het bewijs is zeer eenvoudig en men heeft er veel nut van, nl. bij stelling 60 van blz. 118, nr. 12 van blz. 122, nr. 20b van blz. 125, stelling 68 van blz. 132, nr. 44 van blz. 152 en nr. 53 van blz. 153 en in wat vraagstukjes. Ieder weet, dat dit vervelende dingen zijn bij het lesgeven. Met stelling 57 worden ze alle tegelijk sierlijk en afdoend behandeld. Als AB een lijnstuk is, is er immers voor elk punt P van de lijn AB een verhouding $PA : PB$ (als P niet in B valt) en omgekeerd wordt door elke verhouding $k \neq 1$ één punt P bepaald; dit nu wordt uitgedrukt in st. 57.

De stof, in deze vraagstukken verwerkt, is opzettelijk eenvoudig gehouden; natuurlijk is niet opgenomen de congruentie van veelhoeken en dus ook niet de gelijkvormigheid daarvan; verder is de vermenigvuldiging van figuren bekort, de onderlinge ligging van twee cirkels tot een minimum beperkt; er wordt met geen woord gerept van ongelijkslachtige vormen voor lijnstukken.

Enige aandacht verzoek ik voor de behandeling van de meetkundige plaatsen; zie hoofdstuk XI blz. 79 en de zorgvuldig bewerkte voorbeelden. De enige theorie, die onverkort is gegeven, is die van hoofdstuk XXII blz. 240—242; deze wijze van behandeling wijkt af van de gewone; ze is sober en streng.

Voor*alle mogelijke op- en aanmerkingen, die bij het gebruik allicht gemaakt zullen worden, houd ik mij ten zeerste aanbevolen.

Amsterdam Zuid.

P. WIJDENES.

Jac. Obrechtstraat 88.

Onmiddellijk, nadat de eerste exemplaren in Indië waren gekomen, werd per vliegbrief de opmerking gemaakt, dat de volgorde anders was, dan men daar gewoon was. Schrijver vond, dat zijn volgorde de juiste was en had dus aan een verdediging daarvan niet gedacht. Het volgende is bedoeld als antwoord; wellicht stellen ook anderen er belang in te horen, wat ik er van denk.

Over de volgorde van de leerstof in
WIJDENES MEETKUNDIGE VRAAGSTUKKEN.

Reeds bij de eerste druk van mijn Beknopte Meetkunde (thans, November 1934, is de achtste ter perse) heb ik een en ander gezegd over de volgorde van de leerstof.

Ik haal aan, wat ik daarover schreef:

„In vele boeken is de volgorde zo, dat het onderwijs telkens hokt en zo, dat een zelfde zaak twee keer voorkomt.

’t Hokt bij de congruentie van driehoeken, als men die reeds bij eerste oefening uitbreidt tot: basis, verschil van de basishoeken en som van de opstaande zijden”; dit slag heb ik veel verderop pas genomen bij de werkstukken.

Men loopt vast in de tweede klas bij de behandeling van de evenredigheid van lijnstukken en de gelijkvormigheid, ’t zij deze op de verouderde, ’t zij op de nieuwe manier behandeld wordt. Geen wonder: de onderlinge vergelijking van vier lijnstukken en van twee ongelijke figuren, is veel lastiger dan de beschouwing van één figuur, b.v. wat betreft de oppervlakte . . . , die pas in de derde klas komt.

Dan, ’t loopt spaak in het laatst van de tweede klas met de berekening van lijnstukken in driehoeken, bij u als bij mij, vroeger, thans en als we die niet wat verschuiven, ook in ’t vervolg. Daar toch zeker een allereerste eis van goed onderwijs is, dat men de leerstof in moeilijkheid laat opklimmen, acht ik het gewenst de leerlingen deze stof niet in de tweede klas toe te dienen, maar in de derde, waar men door de meerdere vaardigheid in de algebra, met name in de wortelvormen, betere resultaten krijgt.

Ook zei ik: omdat een zelfde zaak tweemaal voorkomt: ik bedoel daarmee de stellingen over de rechthoekige driehoek en de evenredigheid van lijnstukken in de cirkel; ook de theorie van de gelijkvormigheid bij rechtlijnige figuren en bij de cirkel; dit begrip later en dan in zijn geheel ontwikkelen, is veel beter. Overal heb ik er voor gezorgd, dat de leerling niet optornt tegen de stof, omdat die voor zijn ontwikkeling te vroeg valt.”

Er staat in dat voorbericht wel meer, dat de overdenking waard is, maar dat laten we rusten.

Gaarne nog het volgende over de volgorde van de stof, verwerkt in de Meetkundige vraagstukken; wat onveranderd is gebleven, neem ik eerst, nl. het begin en het eind.

Inleiding, evenwijdige lijnen, driehoeken, congruentie van driehoeken, vierhoeken en veelhoeken (dus in deel I tot en met hoofdstuk IX) is *in dezelfde orde behandeld* als in de meeste gebruikelijke boeken.

Metten van hoeken door cirkelbogen, lijnstukken in een cirkel, om-, in- en aangestreeven cirkels (in mijn Vraagstukken geen afzonderlijk hoofdstuk), regelmatige veelhoeken, oppervlakte en omtrek van de cirkel (dus hoofdstuk XIX—XXII van deel II), ook hierin is *geen verandering* aangebracht.

De hoofdstukken VII, XII, XVI, XXIII en XXIV tellen niet mee bij de opsomming; dat zijn herhalingen, hopelijk welkom als vindplaatsen voor proefwerkvraagstukken.

En nu de middelmoot, waarmee men omstreeks Kerstmis in de tweede klas begint; ziehier, wat er dan te doen staat.

Oud.		Nieuw
Hfdst. V	Gelijkvormigheid	in de vraagstukken.
„ VI	Berekening van	XIV, XV
„ VII	lijnstukken	XVII, XVIII
„ VIII	Meetkundige plaatsen	XI
„ IX	Oppervlakte	XII
„	Cirkel	X

De meetkundige plaatsen staan bij beide ongeveer middenin; daarover behoeven we dus niets te zeggen.

Zoals men ziet, is de volgorde verder vrijwel omgekeerd; gelijkvormigheid en berekening hebben hun plaats verwisseld met cirkel en oppervlakte. Zijn daar ook redenen voor? Zeer zeker en overwegende ook. In Oud IX treft men aan, let wel, na de grote moeilijkheden, die Oud V en VI bieden, ettelijke bladzijden en stellingen als (iet of wat verkort weergegeven);

Een koorde is kleiner dan een middellijn.

De loodlijn uit M op een koorde, deelt die koorde middendoor.

Ligging van een punt en van een rechte t. o. van een cirkel.

De centraal van twee cirkels deelt de gemeenschappelijke koorde middendoor; enz. enz.

Dit alles is zo eenvoudig, dat men het kan behandelen, direct na de veelhoeken; ook wel eerder, maar dat wordt niet gedaan om de behandeling van driehoeken en vierhoeken niet te onderbreken. In elk geval sluit het, wat de leerstof zelf en wat de graad van moeilijkheid aangaat, daar onmiddellijk bij aan. En het is geheel bezijden een gezonde didactiek, Oud V, VI, VII en VIII daaraan te laten voorafgaan. Nog een groot bezwaar, als de cirkel zo achteraan komt hinken; bij een groot aantal werkstukken, die vooraf zijn gegaan, eer Oud aan IX toe is, heeft men al deze eigenschappen al gebruikt en berust de bespreking van werkstukken dikwijls op wat in Oud IX pas geleerd wordt: De eigenschappen van de cirkel zijn zo eenvoudig; ze kunnen eerder aan de beurt komen en moeten dat dan ook.

Wat te zeggen van een volgorde, waarbij de eenvoudige oppervlaktebepaling achter Oud V en VI komt? We weten, dat deze twee hoofdstukken maanden en maanden in beslag nemen en dat ze beide stroef lopen, zo niet erger; natuurlijk, want ze zijn toepassingen van algebra op meetkundige figuren; voor de leerlingen een dubbele belasting dus. (Vandaar ook, dat ik in al mijn boeken in die hoofdstukken werk met kleine letters, net als in de algebra, dus b.v. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bp$). Natuurlijk vallen Oud V en VI te vroeg; bij de nieuwe volgorde hebben we bovendien bij de berekeningen veel steun aan de oppervlakte.

Waarom die oude volgorde zo averechts? Ik zal het u zeggen; vroeger, ik bedoel niet heel vroeger, maar zo'n 40 à 50 jaar geleden, werd alles berekend, alles; de logaritmen waren alles; nog steeds zijn er, die weigeren tafels te raadplegen, waarin zo maar $\sin 12^\circ 15'$ is te vinden en $1,05^{10}$ en $\sqrt{6}$. (Zie ook maar de boeken in over Analytische Meetkunde uit die tijd; gecijfer en niet veel meer). Niet waar, in de Vlakke Meetkunde moest men „Pythagoras” bewijzen; natuurlijke meetkundige bewijzen, zo zonneklaar, konden niet dienen (de meetkunde moest algebra zijn!), misschien wel, omdat ze eenvoudig waren en het meetkunde was! Neen, dat moest gehaald worden uit $a^2 = pc$ en $b^2 = qc$; maar $a^2 = pc$ volgt uit twee gelijkvormige driehoeken. Dus eerst de gelijkvormigheid en daar weer voor dus de evenredige lijnstukken; zo ontstond dan de volgorde.

Evenredigheid van lijnstukken: een heel stuk en niet zo heel eenvoudig.

Gelijkvormigheid van driehoeken.

Toepassing daarvan op de rechthoekige driehoek.

Wel een heel moeilijke weg! En dan pas, na wat verademing te hebben genoten bij de meetkundige plaatsen en bij de oppervlakte, kon men gaan bewijzen, dat een middellijn de langste koorde is, enz.

Dat moet toch zeker anders; zie de volgorde onder Nieuw: cirkel, meetkundige plaatsen, oppervlakte en dan evenredigheden, gelijkvormigheid en berekeningen en . . . dan nog zijn deze twee hoofdstukken tamelijk zwaar. Van de oppervlakten hebben we bij die lastige algebraïsche meetkunde ook nog aardig wat hulp; die ontbreekt bij de oude volgorde ten enen male.

Het voornaamste doel van de omzetting is, dat het eenvoudigste eerder komt dan het moeilijker gedeelte. Ik zet hier beide ter vergelijking nog eens naast elkaar.

Oud

Nieuw

Eerste kwart onveranderd in volgorde.

Gelijkvormigheid	Cirkel
Berekening van lijnstukken	Meetkundige plaatsen
Meetkundige plaatsen	Oppervlakte
Oppervlakte	Gelijkvormigheid
Cirkel	Berekening van lijnstukken

Laatste kwart onveranderd in volgorde.

Uit didactisch oogpunt is er m.i. maar één keuze mogelijk.

Amsterdam, November 1934.

P. WIJDENES.

In Wijdenes Meetkunde voor MULO

„ Beknopte Meetkunde

„ Planimetrie bestaat de juiste volgorde reeds van de eerste druk af.

In Wijdenes en De Lange, Vlakke Meetkunde staat tot heden alleen „Oppervlakte” op een verkeerde plaats; die moet staan voor de „Evenredigheid van lijnstukken”. Bij herdruk wordt dat in orde gemaakt; van die gelegenheid zal ik tevens gebruik maken tot enige vereenvoudiging, die wel gewenst is.

vlak ABCD in het horizontale projectievlak; AB maakt met de as een hoek van 60° , opening naar rechts, terwijl het verlengde van AB de as snijdt in een punt P, dat 5 cm van den linkerkant der bladzijde ligt.

PA is 3.5 cm, AB is 5 cm. D ligt dicht bij de as dan A. De hoogte van de pyramide is 8 cm.

Een vlak V snijdt de as in een punt V_1 2 cm links van P; V_1 is evenwijdig aan AB en V_2 maakt een hoek van 30° met de as, opening naar rechts. Dit vlak snijdt de pyramide volgens een vierhoek $A'B'C'D'$ (A' op TA enz.).

Teeken op ongelinieerd papier de projecties van de pyramide met de doorsnede $A'B'C'D'$. Draai het gedeelte $TA'B'C'D'$ van de pyramide om de lijn $A'B'$ over een hoek van 90° en construeer de projecties van dit gedeelte in den gedraaiden stand.

Stelkunde met gonio- en trigonometrie. 1ste vraag, 1 uur.

Gegeven zijn de vergelijkingen $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = a$ en $\sec x + \sec y = b$.

Gevraagd wordt achtereenvolgens te berekenen:

$$1^\circ. \frac{\sin \frac{1}{2}(x+y)}{\cos \frac{1}{2}(x-y)} \quad 2^\circ. \cos \frac{1}{2}(x+y) \quad 3^\circ. \cos \frac{1}{2}(x-y)$$

2de vraag, $\frac{3}{4}$ uur.

Bereken de grootste en kleinste waarde, die de breuk

$$\frac{x^2 - 5x + 16}{x^2 + 5x + 16}$$

aanneemt voor reële waarden van x .

Geschiedenis als voren.

BOEKBESPREKINGEN.

E. W. BETH, Rede en aanschouwing in de wiskunde, Groningen 1935, Proefschrift.

Om tot klaarheid te komen over de rol, welke de aanschouwing in de wiskunde speelt, analyseert de schrijver eerst het ruimtebegrip. Dit valt uiteen in een mathematisch, een fysisch ruimtebegrip en het begrip der aanschouwingsruimte. Nagegaan wordt, hoe deze zich in de historie van elkaar hebben onderscheiden. Deze 3 ruimtebegrippen worden door den schrijver zelf opnieuw tegen elkaar afgegrensd in hoofdstuk IX. Ze komen daar te voorschijn als resultaten van toepassingen der rekonstruktieve methode volgens verschillende beschouwingswijzen. Het mathematisch ruimtebegrip (evenals de overige mathematische begrippen) vindt nu zijn fundering in de fenomenologische beschouwingswijze. Beth sluit zich hier bij Brouwer aan. Tegelijkertijd blijkt nu, dat deze beschouwingswijze de korrelatie fundeert tussen de taak der aanschouwing en der rede in de wiskunde. Hoewel schrijver het formalisme verwerpt, toont hij toch aan, dat ook vanuit formalistisch standpunt deze korrelatie niet ontkend kan worden.

Hoewel ik grote waardering heb voor de fraaie probleemstelling, die in de dissertatie tot uitdrukking is gebracht, spijt het me, dat de oplossing der problemen veelal vroegtijdig is onderbroken. Veel gerechtvaardigde vragen blijven bestaan: wat is een konstruktie, waaruit bestaat het mathematisch verifikatieproces, wat is evidentie, wat is een waarnemingsoordeel, een wezenlijke eigenschap, een „model”, wat is de rol van het konventionalisme? Wat is de grond der formele overeenstemming van hoofdstuk VII § 4 en de logistiek? En is de logistiek niet miskend door hem alleen in dienst te stellen van het formalisme? Is schrijver verder wel een konsekwent intuitionist? Zijn weerlegging van het formalisme op pag. 6 is geenszins bevredigend. Zijn eindkonklusie op pag. 88—89: „een element van willekeur ligt daarin alleen in zooverre, als het bewustzijn zich de wetten van dien opbouw zelf stelt” is juist in overeenstemming met hetgeen hij op pag. 52 zegt over het formalisme.

Waarom is verder bij de eindkonklusies het logicisme niet verder in zijn konsekwenties onderzocht, maar alleen het formalisme? En is er in het formalisme nog niet een geheel ander aanschouwelijk moment: het teken, zijn onderscheidbaarheid en rangschikking (Hilbert)?

Het is echter niet mijn bedoeling door deze opmerkingen afbreuk

te willen doen aan het feit, dat Beth er in geslaagd is een interessante dissertatie te produceren, die zeker lezenswaard genoemd mag worden.
P. G. J. Vredenduin.

Dr. G. C. GERRITS, Leerboek der Natuurkunde. Derde deel. 15e, herziene druk. Leiden, E. J. Brill, 1935. Prijs geb. f 3.—.

Dat van dit derde deel van Dr. Gerrits' Natuurkunde reeds de vijftiende druk verschenen is (de eerste dateert van 1909) strekt dit degelijke, voortdurend op de hoogte des tijds gehouden werk tot aanbeveling. Er zullen waarschijnlijk niet veel vakgenooten zijn, die het boek niet kennen, maar als er zulken bestaan, zij hun ernstig aangeraden, kennis te maken met dit boek, waarin op zoo gelukkige wijze het evenwicht is bewaard tusschen leer- en examenstof enerzijds, en anderzijds illustratie door technische en historische paragrafen en portretten van de grooté figuren der vroegere en der heden-daagsche natuurkunde.
J. H. S.

INGEKOMEN BOEKEN.

Van P. NOORDHOFF, Groningen.

Compositio Mathematica, vol. 2, fasc. 3 (156 blz.). Dit nummer bevat artikelen van

Van der Corput—Schaake (Groningen); Tschakaloff (Sofia), Yü-Why Tschen (Peiping, China); De Kok (Utrecht), Kantorowitsch (Leningrad), Loewy († Freiburg), Tonolo (Padua), Ruse (Edinburgh), Erdős-Szekeres (Manchester), Kurosch (Moskou).

Christiaan Huygens, afl. I Jg. XIV bevat o.a.

Prof. Dr. F. SCHUH, Oplossingen schriftelijk K V 1935; de aflevering verscheen zo tijdig, dat alle kandidaten de oplossingen voor hun mondeling examen nog konden bestuderen.

Dr. B. GONGGRIJP, Tafel D, **6e druk** geb. f 2,50

Enige nooit gebruikte bijtafels zijn vervallen; de overblijvende bijtafels zijn op groen papier gedrukt en vormen een duidelijke afscheiding tussen de logaritmen-sinustafel en de sinustafel. Deze tafel is in elk opzicht zeer aan te bevelen.

Dr. P. MOLENBROEK—P. WIJDENES, Stereometrie voor middelbaar en voorbereidend hoger onderwijs, **4e, vereenvoudigde druk**. 142 blz., 161 fig., ing. f 1,90, geb. - 2,25

P. W. FREDERIK en J. DE RAAD, De perspectievische verschijnselen ten dienste van de onderwijzersopleiding. 63 blz., 89 fig. - 1,25

P. WIJDENES, Stereometrisch tekenen - 0,50
43 blz., 76 fig. Overdruk uit het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde.

P. WIJDENES en Dr. H. J. E. BETH, Nieuwe schoolalgebra II. **7e druk** geb. - 2,25

Van de schrijvers.

H. C. M. van Dijk, Involuties in de stralenruimte. Academisch proefschrift.

E. W. Beth, Rede en aanschouwing in de Wiskunde. Academisch proefschrift (in de letteren en wijsbegeerte).

4. DE AMBLYTOME.

4.0. Als voortbrengingswijze leerden we reeds kennen (1,1) de snijding van een rechten cirkelkegel, waarvan de meridiaandoorsnede een stompen tophoek heeft, met een plat vlak loodrecht op een beschrijvende rechte; als symptoom de betrekking tusschen den afstand van een punt der snede tot de as van rechte symmetrie en de twee abscissen, die het voetpunt van de ordinaat bepaalt op het lijnstuk, dat de zijden van de meridiaandoorsnede van de symmetrieas afsnijden (fig. 26):

$$[T(\Gamma\Delta), O(A\Delta, B\Delta)] = \text{const. (twee-abscissen-vorm).}$$

. Daar de beschouwing van de amblytome vóór Apollonios beperkt

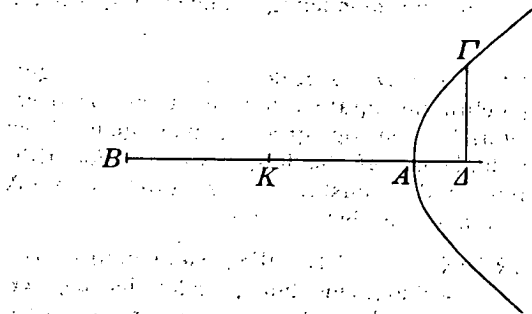


Fig. 26.

blijft tot één van de twee takken; waaruit de hyperbool bestaat, is er maar één lijn van rechte symmetrie; ook kan de constante verhouding niet als bij de oxytome worden geïnterpreteerd als verhouding van de vierkanten van twee halve diameters. Het symptoom wordt ook vaak toegepast in den vorm

$$[T(\Gamma\Delta), T(K\Delta) - T(KA)] = \text{const.}$$

waarin K het midden van het lijnstuk AB is. Dit midden heet uit den aard der zaak niet centrum; het wordt aangeduid als *punt, waar de lijnen, die het dichtst bij de snede liggen, elkaar ontmoeten* (τὸ σαιμεῖον, καθ' ὃ αἱ ἐγγιστα τὰς τομᾶς συμπέτουντι).

Het bestaan en de ligging van deze lijnen kan worden ingezien op de volgende wijze, die in beginsel overeenkomt met de methode, die Apollonios in het begin van het tweede boek der *Conica* toepast.

4.1. (verg. Conica II, 1) Bepaalt men (fig. 27) op de lijn, die door den top A der snede loodrecht op den diameter is getrokken, een lijnstuk $A\Delta$, zoodat

$$[T(\Delta A), T(KA)]$$

gelijk is aan de constante verhouding van het vierkant op een ordinaat en den rechthoek, omvat door de twee bijbehorende abscissen, dan zal de rechte $K\Delta$ de snede niet ontmoeten en iedere rechte door K , die binnen den hoek ΔKA ligt, zal dit wel doen.

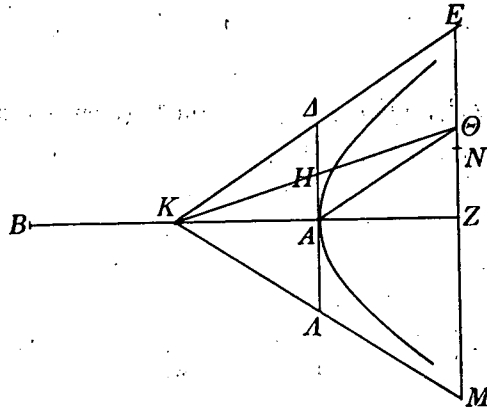


Fig. 27.

a) Stel, dat $K\Delta$ de snede ontmoette in een punt E met ordinaat EZ , dan was

$$[T(EZ), O(AZ, BZ)] = [T(\Delta A), T(KA)] = [T(EZ), T(KZ)]$$

dus

$$O(AZ, BZ) = T(KZ)$$

wat onmogelijk is, omdat wegens Euclides II,6

$$O(AZ, BZ) = T(KZ) - T(KA).$$

β) Zij KH een rechte door K binnen den hoek ΔKA . Trek door A een rechte parallel aan $K\Delta$, die KH snijdt in een punt Θ . De loodlijn door Θ op den diameter snijdt $K\Delta$ in E , den diameter in Z , de rechte $K\Delta$, die met $K\Delta$ symmetrisch ligt ten opzichte van AB , in M . Wanneer KH de snede niet ontmoet, ligt Θ buiten de snede, dus moet er een punt N van de snede liggen tusschen Θ en Z . Nu is

$$[T(NZ), O(AZ, BZ)] = [T(\Delta A), T(KA)] = [T(EZ), T(KZ)].$$

Hieruit volgt

$$[T(NZ), T(EZ)] = [T(KZ) - T(KA), T(KZ)] \text{ en daarna} \\ [T(EZ) - T(NZ), T(KA)] = [T(EZ), T(KZ)]$$

dus

$$[O(EN, MN), T(KA)] = [T(\Delta A), T(KA)]$$

dus

$$O(EN, MN) = T(\Delta A).$$

Dit is echter onmogelijk wegens $EN > E\theta = \Delta A$ en $MN > \Delta A$

Op grond van de bewezen eigenschap heeten de rechten $K\Delta$ en KA *de rechten, die het dichtst bij de snede liggen*. We zullen ze verder met den Apollonischen term *asymptoten* aanduiden, terwijl we hun snijpunt korthedshalve, hoewel oneigenlijk, ook reeds *centrum* zullen noemen.

4.2. *Twee amblytomes zijn dan en slechts dan gelijkvormig, wanneer de verhouding van het vierkant op de ordinaat en den rechthoek op de twee abscissen voor beide sneden dezelfde is.*

Het bewijs kan op dezelfde manier geleverd worden als dat van 3,6, mits men slechts nalaat, de constante verhouding, die in elke snede bestaat tusschen het vierkant op de ordinaat en den rechthoek op de twee abscissen als verhouding van vierkanten van lijnstukken te interpreteren.

4.3. *Mutatis mutandis* gelden voor de amblytome de stellingen, die voor de orthotome zijn geformuleerd 2,01—2,03.

5. OXYTOME EN AMBLYTOME.

5.0. We behandelen in het volgende een aantal eigenschappen, die aan oxytome en amblytome gemeen zijn. De bewijzen voor beide sneden verloopden geheel analoog; waar ze van elkaar verschillen, betreft het verschil gewoonlijk niet meer dan het teeken van een uitdrukking. In het volgende wordt onder *snede* een der twee genoemde kegelsneden verstaan, onder *diameter* bij de oxytome den grootsten, bij de amblytome den eenigen; het woord duidt zoowel het diameterlijnstuk aan, dat de zijden van de meridiaan-doorsnede op de symmetrieas bepalen als de geheele rechte, die dit lijnstuk draagt. *Top* heet bij beide sneden een snijpunt van diameter en snede. De rechte, bepaald door het centrum eener snede en een willekeurig punt daarvan, heet *voerstraal* van dat punt; het woord

beduidt zoowel deze rechte als het lijnstuk daarvan, dat de twee punten begrenzen.

5,1. We zagen reeds (1,62), dat de rechte, door den top in ordinaat-richting getrokken, de snede raakt. Voor de aanvullende stelling, dat tusschen snede en raaklijn geen andere rechte kan vallen, kunnen we niet, zooals voor de orthotome (2,1), het bewijs ontleenen aan de *Conica* van Apollonios, omdat daar gebruik wordt gemaakt

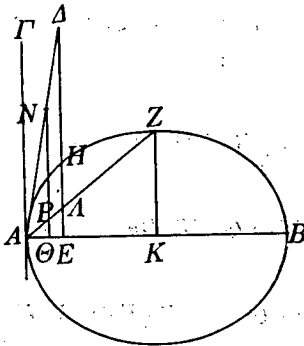


Fig. 28a.

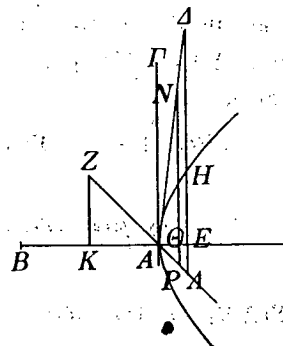


Fig. '28b.

van een bij Archimedes nog niet voorkomend snedesymptoom voor oxytome en amblytome. Met prae-Apollonische hulpmiddelen kan het bewijs als volgt geleverd zijn:

Zij (fig. 28 a, b) voor een der beide sneden AB de diameter, de top A , de raaklijn in den top AT . Laat AA' , door A getrokken aan die zijde van AT , waar de snede ligt, de snede niet ontmoeten. De rechte, door een willekeurig punt A' van deze rechte in ordinaatrichting getrokken, snijde de snede in H , den diameter in E . Dan geldt de ongelijkheid

$$[\mathbf{T}(\Delta E), \mathbf{O}(AE, BE)] > [\mathbf{T}(HE), \mathbf{O}(AE, BE)] = \text{constant.}$$

De constante is voor de oxytome de reden, $[\mathbf{T}(KZ), \mathbf{T}(KA)]$, als K het centrum der snede is en KZ de helft van den anderen diameter; voor de amblytome kan KZ zoo bepaald worden, dat dezelfde gelijkheid bestaat. Laat nu AZ de rechte ΔE ontmoeten in A . Dan is

$$[\mathbf{T}(\Delta E), \mathbf{O}(AE, BE)] > [\mathbf{T}(\Delta E); \mathbf{T}(AE)]$$

dus

$$[\mathbf{T}(\triangle E); \mathbf{T}(AE)] \geq (BE, AE).$$

Bepaal nu op AB een punt Θ , zoodat

$$[T(AE), T(AE)] = (B\Theta, A\Theta)$$

dan is

$$(B\Theta, A\Theta) > (BE, AE)$$

waaruit men afleidt (0,42)

$$(A\Theta, AB) < (AE, AB)$$

dus

$$A\Theta < AE.$$

Laat nu de rechte, door Θ in ordinaatrichting getrokken, de rechten $A\Delta$ en AZ opv. ontmoeten in N en in P .

Dan is

$$(B\Theta, A\Theta) = [T(AE), T(AE)] = [T(N\Theta), T(P\Theta)]$$

dus

$$[O(B\Theta, A\Theta), T(A\Theta)] = [T(N\Theta), T(P\Theta)]$$

dus

$$[T(N\Theta), O(A\Theta, B\Theta)] = [T(P\Theta), T(A\Theta)] = [T(KZ), T(KA)]$$

waaruit volgt, dat N op de snede ligt. De rechte $A\Delta$ moet dus de snede ontmoeten.

5,2. Een voorwaarde, die voldoende is, opdat een rechte de snede zal raken in een ander punt dan de top, wordt uitgesproken in de volgende stelling (verg. *Conica* I, 34) (fig. 29 a, b):

Is Γ een punt der snede met ordinaat $\Gamma\Delta$ en abscissen $A\Delta$ en $B\Delta$ en is op den diameter een punt E zoo bepaald, dat

$$(A\Delta, B\Delta) = (AE, BE)$$

dan zal van de rechte $E\Gamma$ ieder punt, dat van Γ verschilt, buiten de snede vallen. De rechte $E\Gamma$ zal dus de snede in Γ raken.

Apollonios bewijst deze stelling synthetisch en indirect, wat de redeneering weinig doorzichtig maakt; duidelijkheidshalve formuleeren we het betoog analytisch en direct, door den eisch te stellen, dat een willekeurig punt Z van $E\Gamma$ buiten de snede ligt. Dat wil zeggen: als de loodlijn uit Z op AB de snede in Θ , den diameter in H ontmoet, wordt geeischt: $ZH > \Theta H$.

Nu is wegens gelijkvormigheid

$$[T(ZH), T(\Gamma\Delta)] = [T(EH), T(E\Delta)]$$

en wegens het snedesymptoom

$$[T(\Theta H), T(\Gamma\Delta)] = [O(AH, BH), O(A\Delta, B\Delta)].$$

Daar alle stappen der redeeneering zijn om te keeren, is de afgeleide voorwaarde ook voldoende. Men kan de synthese natuurlijk ook wel direct, inplaats van, zooals Apollonios doet, indirect geven; hij toont, uitgaande van de voorwaarde $(A\Delta, B\Delta) = (AE, BE)$ de ongerijmdheid van de onderstelling $ZH < \Theta H$ aan; men kan even goed bewijzen, dat, als de voorwaarde vervuld is, steeds geldt $ZH > \Theta H$. We ontmoeten hier dus opnieuw een van de vele voorbeelden van de voorliefde der Grieksche geometers voor een reductio ad absurdum.

5,21. Bij Apollonios vormt de stelling, dat de afgeleide voorwaarde noodig is, het onderwerp van een afzonderlijke propositie (I, 36), die geheel analoog verloopt aan de overeenkomstige propositie voor de orthotome (2,23).

5,22. De in 5,2 afgeleide raaklijneigenschap is nog als volgt om te vormen (verg. *Conica* I, 37):

Uit $(A\Delta, B\Delta) = (AE, BE)$
volgt

voor de oxytome	voor de amblytome
$(AB, A\Delta) = (AE + BE, AE)$	$(AB, A\Delta) = (BE - AE, AE)$
dus, als K het centrum is,	

	$(2KA, A\Delta) = (2KE, AE)$
	$(KA, K\Delta) = (KE, KA)$
dus	$T(KA) = O(K\Delta, KE)$.

5,23. Een andere vorm der eigenschap ontstaat als volgt
 $O(A\Delta, B\Delta) = T(KA) - T(K\Delta) = O(K\Delta, KE) - T(K\Delta) = O(K\Delta, AE)$

5,3. Het doel der volgende proposities is nu om, evenals bij de orthotome is geschied, het snedesymptoom in scheeve toevoeging af te leiden.

5,31. *Trekt men aan een snede raaklijnen in den top en in een willekeurig punt, dan bepalen deze rechten met den diameter en den voerstraal van het gekozen punt twee driehoeken van gelijke oppervlakte.*

Zij (fig 30 a, b) AZ raaklijn in den top A , TE raaklijn in het punt T (E op den diameter), K het centrum der snede. Te bewijzen is

$$\triangle KTE = \triangle KAZ.$$

Bewijs:

Wegens 5,22 is

$$T(KA) = O(KE, K\Delta)$$

dus

$$[T(KA), T(K\Delta)] = (KE, K\Delta)$$

dus

$$(\Delta KAZ, \Delta K\Delta\Gamma) = (\Delta K\Gamma E, \Delta K\Gamma\Delta)$$

dus

$$\Delta KAZ = \Delta K\Gamma E.$$

5,32. Uit de bewezen stelling volgt

$$\Delta E\Delta\Gamma = \square A\Delta\Gamma Z \text{ en } \Delta \Sigma EA = \Delta \Sigma\Gamma Z.$$

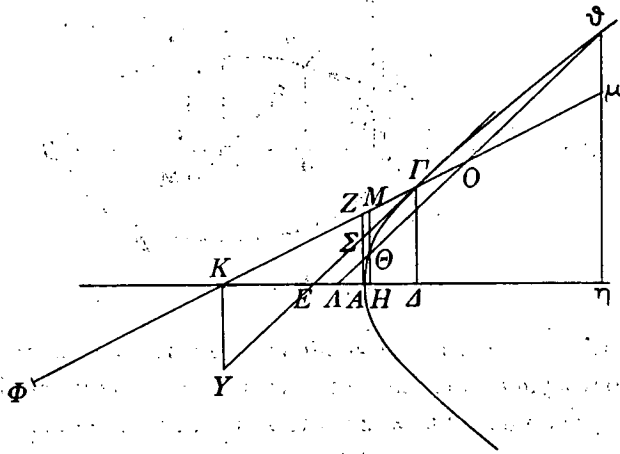


Fig. 30a.1)

5,33. Trekt men door een veranderlijk punt eener snede rechten opv. parallel aan de raaklijnen in den top en in een willekeurig vast punt der snede, dan bepalen deze twee rechten met den diameter een driehoek, waarvan de oppervlakte gelijk is aan het verschil van de oppervlakten der driehoeken, die de diameter en de voerstraal van het vaste punt opv. met de raaklijn in den top en met de ordinat van het veranderlijke punt bepalen.

Laat (fig. 30 a, b) Θ het veranderlijke punt der snede zijn, waardoor getrokken zijn ΘH parallel aan de raaklijn in den top A , ΘA parallel aan de raaklijn in Γ . Te bewijzen is nu

voor de oxytome

voor de amblytome

$$\Delta \Theta H A = \Delta K A Z - \Delta K H M.$$

$$\Delta \Theta H A = \Delta K H M - \Delta K A Z.$$

Bewijs:

$$\begin{aligned} (\Delta \Theta H A, \Delta \Gamma \Delta E) &= [T(\Theta H), T(\Gamma \Delta)] = \\ &= [O(AH, BH), O(A\Delta, B\Delta)] = \\ &= [T(KA) - T(KH), T(KA) - T(K\Delta)] = [T(KH) - T(KA), T(K\Delta) - T(KA)] = [\Delta K H M - \Delta K A Z, \\ &\quad \Delta K A Z - \Delta K \Delta \Gamma] \quad \Delta K \Delta \Gamma - \Delta K A Z]. \end{aligned}$$

¹⁾ In Fig. 30a is de letter B weggefallen bij het punt, op het verlengde van AK zoo gelegen, dat $BK = KA$.

$$[T(\theta O), O(\Gamma Y, \Gamma E)] = [O(\Gamma O, \Phi O), T(K\Gamma)]$$

of

$$[T(\theta O), O(\Gamma O, \Phi O)] = [O(\Gamma Y, \Gamma E), T(K\Gamma)] = \text{const.}$$

waardoor het symptoom in scheeve toevoeging is afgeleid.

5,35. De behandeling van de sneden in scheeve toevoeging is pas volledig, wanneer ook nog is aangetoond, dat iedere rechte door het centrum lijn van scheeve symmetrie is voor een daaraan toegevoegde ordinaatrichting i.c. de richting van de raaklijn in een snijpunt met de snede. Deze eigenschap wordt uitgesproken in de volgende propositie (verg. *Conica* I, 47):

De voerstraal van een punt der snede verdeelt de koorden parallel aan de raaklijn in dat punt in twee gelijke deelen.

Het bewijs voor de amblytome verloopt als volgt (fig. 30 a):

Zij $\theta\theta$ een koorde parallel aan de raaklijn in Γ , die den voerstraal $K\Gamma$ in O snijdt. Nu is. (5,33)

$$\triangle \theta H \Lambda = \triangle K H M - \triangle K A Z.$$

$$\triangle \vartheta \eta \Lambda = \triangle K \eta \mu - \triangle K A Z.$$

dus $\triangle K H M - \triangle \theta H \Lambda = \triangle K \eta \mu - \triangle \vartheta \eta \Lambda$

of, door wederzijds af te trekken van $\triangle A O K$,

$$\triangle \theta O M = \triangle \vartheta O \mu$$

dus $O\theta = O\vartheta$.

5,36. Nu het snedesymptoom in scheeve toevoeging bewezen is, kunnen al de eigenschappen vanaf 5,1 als bewezen worden beschouwd, wanneer men den daarin vermelden diameter met loodrecht daarop staande ordinaatrichting vervangt door den voerstraal van een willekeurig punt met scheef toegevoegde ordinaatrichting. De eigenschap 5,33 is daardoor in algemeenen vorm aldus te formuleeren:

De rechten, door een veranderlijk punt eener snede parallel aan de raaklijnen in twee vaste punten, bepalen met den voerstraal van een dezer twee punten een driehoek, waarvan de oppervlakte gelijk is aan het verschil van de oppervlakten der driehoeken, die de voerstralen der twee punten opv. met de raaklijn in het gekozen punt en met de daaraan door het veranderlijke punt parallel getrokken rechte bepalen.

Zoo is dus b.v. in fig. 31, waarin op een oxytome de vaste punten A en Γ zijn gekozen en het veranderlijk punt θ

alle drie soorten kegelsneden, die Archimedes citeert **C.S. 3** en die de uitbreiding op kegelsneden vormt van de machteigenschap van den cirkel.

Indien uit een punt raaklijnen zijn getrokken aan een willekeurige kegelsnede en er zijn binnen de kegelsnede ook rechten getrokken, parallel aan de raaklijnen en elkander snijdend, dan zullen de rechtehoeken, omvat door de stukken $<$ waarin het snijpunt der koorden deze verdeelt $>$ dezelfde reden tot elkander hebben als de vierkanten op de $<$ aan de koorden parallele $>$ raaklijnen.

We deelen het bewijs hier mee voor de oxytome; voor de amblytome verloopt het op geheel dezelfde manier met enkele tekenwisselingen; voor de orthotome blijft het beginsel hetzelfde; men gebruikt dan de stellingen 2,31 seq.

Beschouw in fig. 31 de koorden $\theta\Omega$ en $\vartheta\omega$, (opv. evenwijdig aan de raaklijnen in Γ en in A), die elkaar in Σ snijden. Nu is

$$O(\theta\Sigma, \Omega\Sigma) = T(O\theta) - T(O\Sigma).$$

Ook is

$$[T(O\theta) - T(O\Sigma), T(O\theta)] = [\Delta O\theta M - \Delta O\Sigma\mu, \Delta O\theta M]$$

$$\text{en} \quad [T(O\theta), T(\Gamma T)] = [\Delta O\theta M, \Delta \Gamma TZ]$$

dus ex aequali

$$[T(O\theta) - T(O\Sigma), T(\Gamma T)] = [\Delta O\theta M - \Delta O\Sigma\mu, \Delta \Gamma TZ]$$

of

$$[O(\theta\Sigma, \Omega\Sigma), T(\Gamma T)] = (\square \Sigma\theta M\mu, \Delta \Gamma TZ).$$

Evenzoo is

$$[O(\vartheta\Sigma, \omega\Sigma), T(TA)] = (\square \Sigma\vartheta\lambda A, \Delta TAE).$$

Wegens 5,37 en 5,32 zijn de tweede leden gelijk, waaruit de gelijkheid der eerste leden en dus de juistheid der stelling volgt.

5,4. Met behulp van de eigenschappen der scheeve toevoeging zijn nu nog enkele door Archimedes gebruikte eigenschappen van oxytome en amblytome gemakkelijk in te zien.

5,41. *De verbindingslijn van de raakpunten van twee parallele raaklijnen van een oxytome gaat door het centrum.*

Zijn (fig. 32) A en B de raakpunten der parallele raaklijnen en is K het centrum, dan verdeelt zoowel de rechte KA als de rechte KB alle koorden parallel aan de parallele raaklijnen in twee gelijke deelen, zoodat deze rechten samenvallen.

5,42. *Trekt men door het centrum eener oxytome een voerstraal parallel aan twee parallele raaklijnen, dan is de raaklijn in het*

VERSCHENEN:

De vierde, verkorte en vereenvoudigde druk van

MOLENBROEK—WIJDENES

Stereometrie voor M. O. en V. H. O.
ingen. f 1.90, gec. f 2.25

„Beperking tot redelijke eisen”.

Theorie met 142 fig. 123 bladz.

Twee projectiemethoden 18 fig. 8 bladz.

Ter perse:

WIJDENES

Meetkunde M.U.L.O. II

7e druk met de examenopgaven A, B en H.B.S.
3-jarige cursus tot 1935

Uitgave van P. NOORDHOFF
GRONINGEN-BATAVIA N.V.

Tekent in op

Christiaan Huygens

XIVe Jaargang 1935/36 onder redactie van Prof. Dr. F. SCHUH, ass.-red. K. HARLAAR.

Afl. I en II bevatten:

Prof. Dr. F. SCHUH, Oplossingen schriftelijk K V.

Ir. J. F. SCHUH, Contribution à la théorie de la déformation élastique des disques circulaires.

Prof. Dr. Hk. DE VRIES, De meetkunde van het aantal. Verder vraagstukken en oplossingen, voor studerenden K V volstrekt noodzakelijk.

Verwacht het vervolg van:

Prof. Dr. B. L. VAN DER WAERDEN, De grondslagen van de Euklidische meetkunde.

Dr. E. W. BETH, La mathématique et ses applications au problème de la non-contradiction de la logique et de l'arithmétique.

Mondelinge examens K V.

P. WIJDENES

MEETKUNDIGE VRAAGSTUKKEN

Met de bewijzen van de stellingen en meer dan 70 uitgewerkte voorbeelden.

Een leerboek er naast is niet nodig.

Een verzameling vraagstukken met sterk didactisch karakter voor H.B.S., Gymnasium, Lyceum, Kweekschool, Zeevaartschool, Middelb. Technische School.

Deel I. 100 blz. 144 fig., 20 oplossingen, 4 volledige werkstukken en 3 meetkundige plaatsen; gec. met gradenboog en twee driehoeken f 1.40

Deel II. 166 blz. 189 fig., 26 oplossingen, 11 volledige werkstukken en 8 meetkundige plaatsen; gec. f 2.40

Pres. ex. voor leraren op aanvraag bij P. NOORDHOFF - GRONINGEN

VERSCHENEN:

- P. WIJDENES en Dr. D. DE LANGE, Rekenboek voor de H.B.S. I
16e druk gec. f 1.70
- P. WIJDENES en Dr. H. J. E. BETH, Nieuwe Schoolalgebra II
7e druk geb. f 2.25
- Dr. B. GONGGRIJP, Logarithmentafel D **6e druk** . . . geb. f 2.50
- Dr. P. MOLENBROEK—P. WIJDENES, Stereometrie voor M.O.
 en V.H.O. **4e druk** ing. f 1,90
- K. H. W. VISSER, Analytische Meetkunde en Diff. en Int.
 Rek. voor de M.T.S. ing. f 1,75
- J. C. ALDERS, Algebra voor M.O. en V.H.O. II gec. f 2.50
- P. WIJDENES, Algebra voor M.U.L.O. I **28e druk** . . geb. f 1,40
 „ Grafiekenschrift **6e druk** ing. f 0.50

COMPOSITIO MATHEMATICA

QUOD PERIODICUM INTERNATIONALE

EDUNT

R. BAER, S. BERNSTEIN, P. ALEXANDROFF, E. ARTIN, E. BOREL,
 L. E. J. BROUWER, E. CARTAN, E. ČECH, J. G. VAN DER CORPUT,
 G. DOETSCH, TH DE DONDER, L. P. EISENHART, G. FEIGL, G. FUBINI,
 M. FUJIWARA, R. GARNIER, G. H. HARDY, A. HEYTING, EINAR HILLE,
 H. HOPF, G. JULIA, A. KHINTCHINE, S. LEFSCHETZ, T. LEVI-CIVITA,
 P. LÉVY, A. LOEWY, R. v. MISES, P. MONTEL, J. v. NEUMANN, N. E.
 NORLUND, A. OSTROWSKI, F. RIESZ, M. RIESZ, W. SAXER, J. A. SCHOUTEN,
 F. SEVERI, W. SIERPINSKI, W. SÜSS, G. SZEGÖ, T. TAKAGI, L.
 TONELLI, G. VALIRON, CH.-J. DE LA VALLÉE-POUSSIN, O. VEBLEN,
 R. WAVRE, R. WEITZENBÖCK, E. T. WHITTAKER, B. M. WILSON,

J. WOLFF.

ADMINISTRANT

L. E. J. BROUWER, *Amsterdam*; TH. DE DONDER, *Bruzelles*;

G. JULIA, *Paris*; B. M. WILSON, *St. Andrews*.

Ieder deel zal in drie afleveringen verschijnen en 30 vel (480 blz.) bevatten;
 de prijs per deel bedraagt 20 Gulden.

De inschrijving kan geschieden door bemiddeling van elke boekhandel
 of direct door den uitgever P. NOORDHOFF, Groningen.