

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDAC-
TIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN
J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

MET MEDEWERKING VAN

Dr. H. J. E. BETH
DEVENTER

Dr. E. J. DIJKSTERHUIS
OISTERWIJK

Dr. G. C. GERRITS
AMSTERDAM

Dr. B. P. HAALMEIJER
AMSTERDAM

Dr. C. DE JONG,
LEIDEN

Dr. W. P. THIJSSEN
BANDOENG

Dr. P. DE VAERE
BRUSSEL

Dr. D. P. A. VERRIJP
ARNHEM

11e JAARGANG 1934/35, Nr. 4.



P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN

Prijs per Jg. van 18 vel f 6.—. Voor intekenaars op het
Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde en Christiaan Huygens f 5.—

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijks afleveringen, samen 18 vel druks. Prijs per jaargang *f* 6.—. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6.—) of op „Christiaan Huygens” (*f* 10.—) zijn ingetekend, betalen *f* 5.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

I N H O U D.

	Blz.
Dr. H. C. SCHAMHARDT, Vragen van het mondeling Staatsexamen (<i>Vervolg</i>)	145—151
K. F. HARTUNG, Eine elementare analytische Herleitung sämtlicher dem Würfel einbeschriebenen regelmässigen Oktaeder. . . ,	152—156
Uit het Verslag der Staatsexamencommissie 1934 . . .	157—158
Boekbesprekingen	159—160
Ingekomen Boeken	160—162
Het leven van Archimedes	163—192

COMPOSITIO MATHEMATICA

QUOD PERIODICUM INTERNATIONALE

EDUNT

P. ALEXANDROFF, E. ARTIN, R. BAER, S. BERNSTEIN,
E. BOREL, L. E. J. BROUWER, E. CARTAN, E. ČECH,
J. G. VAN DER CORPUT, G. DOETSCH, TH. DE DONDER,
L. P. EISENHART, G. FEIGL, G. FUBINI, M. FUJIWARA,
R. GARNIER, G. H. HARDY, A. HEYTING, EINAR HILLE,
H. HOPF, G. JULIA, A. KHINTCHINE, S. LEFSCHETZ,
T. LEVI-CIVITA P. LÉVY, A. LOEWY, R. v. MISES,
P. MONTEL, J. v. NEUMANN, N. E. NÖRLUND,
A. OSTROWSKI, F. RIESZ, M. RIESZ, W. SAXER,
J. A. SCHOUTEN, F. SEVERI, W. SIERPIŃSKI, W. SÜSS,
G. SZEGÖ, T. TAKAGI, L. TONELLI, G. VALIRON,
CH.-J. DE LA VALLÉE-POUSSIN, O. VEBLEN, R. WAVRE,
R. WEITZENBÖCK, E. T. WHITTAKER,
B. M. WILSON, J. WOLFF

ADMINISTRANT

L. E. J. BROUWER	TH. DE DONDER	G. JULIA
AMSTERDAM	BRUXELLES	PARIS
B. M. WILSON		
ST. ANDREWS		

VOLUMEN 1

In Aedibus

P. NOORDHOFF - GRONINGEN

1935

VOLUMEN 1

INDEX

Fasciculus 1 (25 I 1934) 1—192

„ 2 (5 VI 1934) 193—304

„ 3 (10 I 1935) 305—476

Baer, Reinhold. Der Kern, eine charakteristische Untergruppe	254—283
Boegehold, H., und Herzberger, M. Kann man zwei verschiedene Flächen durch dieselbe Folge von Umdrehungsflächen scharf abbilden? . . .	448—476
Bosanquet, L. S., and Offord, A. C. Note on Fourier Series	180—187
Bourion, G. Sur les zéros des polynomes-sections des séries de Taylor .	163—176
Cartan, Henri. Sur l'itération des transformations conformes ou pseudo-conformes	223—227
Corput, J. G. van der. Zur Methode der stationären Phase. Erste Mitteilung. Einfache Integrale	15— 38
Doetsch, Gustav. Summatorische Eigenschaften der Besselschen Funktionen und andere Funktionalrelationen, die mit der linearen Transformationsformel der Thetafunktion äquivalent sind	85— 97
Ferrar, W. L. Summation Formulae and their Relation to Dirichlet's Series	344—360
Fubini, G. Sur la géométrie projective des réseaux plans	103—105
Griss, G. F. C. Die Differentialinvarianten eines kovarianten symmetrischen Tensors vierter Stufe im binären Gebiet.	238—247
Griss, G. F. C. Differentialinvarianten von relativen Vektoren . . .	420—428
Herrmann, A. Über Matrixgleichungen und die Zerlegung von Polynomen in Linearfaktoren	284—302
Herzberger, M., und Boegehold, H. Kann man zwei verschiedene Flächen durch dieselbe Folge von Umdrehungsflächen scharf abbilden? . .	448—476
Hille, Einar and Tamarkin, J. D. A Remark on Fourier Transforms and Functions Analytic in a Half-Plane	98—102
Khintchine, A. Eine Verschärfung des Poincaréschen Wiederkehrsatzes	177—179
Khintchine, A. Metrische Kettenbruchprobleme.	361—382
Levi, Friedrich. Zur Reduzibilität der Kreisteilungspolynome	303—304
Levi-Civita, T. Terne die congruenze sopra una superficie ed estensione della trigonometria	115—162
Lévy, Paul. Sur la convergence absolue des séries de Fourier	1— 14
Loewy, Alfred. Anschauliche Interpretation eines linearen homogenen Differentialsystems	188—192
Milloux, Henri. Sur les valeurs asymptotiques des fonctions entières d'ordre infini	305—313
Mordell, L. J. On Some Arithmetical Results in the Geometry of Numbers	248—253

- J. A. Schouten, J. Haantjes, Zur allgemeinen projektiven Differentialgeometrie.
 L. Tchakaloff, Über den Gültigkeitsbereich einer Ungleichung von Darboux und ihrer Erweiterung, angewandt auf Polynome.
 A. Tonolo, Il teorema dei seni per i triangoli tracciati sopra una superficie.
 Y. Why Tschen, Über das Verhalten der Lösungen einer Folge von Differentialgleichungsproblemen, welche im Limes ausarten.
 T. Wazewski, Sur les matrices, dont les éléments sont des fonctions continues.
 R. Weitzenböck, Über einen Satz von Deruyts.
-

Im unterzeichneten Verlag ist der erste Band der mathematischen Zeitschrift *Compositio Mathematica* erschienen, die von 49 Vertretern der mathematischen Wissenschaft aus 15 verschiedenen Ländern herausgegeben wird. Die Aufgabe der *Compositio Mathematica* soll es sein, nicht allein die Entwicklung der Mathematik zu fördern durch Aufnahme wertvoller mathematischer Arbeiten, sondern auch der heute mehr als je erforderlichen internationalen wissenschaftlichen Zusammenarbeit zu dienen. Um dieser Aufgabe gerecht zu werden, genügt es nicht, den Publikationen keinerlei nationale oder sprachliche Schranke aufzuerlegen; eine möglichst internationale Zusammensetzung der Redaktion ist vielmehr erforderlich, um jede Einseitigkeit in nationaler Hinsicht zu vermeiden. Bei der heute auch vielfach bestehenden Spezialisierung der Mathematiker einzelner Nationen auf einzelne Forschungsgebiete und Forschungsmethoden bietet eine solche Zusammensetzung zugleich die Gewähr für die Vermeidung jeder Einseitigkeit mit Bezug auf den mathematischen Charakter der publizierten Arbeiten. Wie das abgedruckte Redaktionsverzeichnis ausweist, hat man sich die größte Mühe gegeben, die Redaktion so vielseitig und international wie nur möglich zu gestalten; durch die grosse Anzahl der Redakteure ist ferner eine schnelle Abwicklung der Redaktionsgeschäfte versichert.

Auch von Seiten des unterzeichneten Verlages soll alles geschehen, um die neue Zeitschrift in jeder Hinsicht gut auszugestalten. Jeder Band erscheint in drei Lieferungen und umfasst 30 Bogen (480 Seiten); der Bandpreis beträgt 20 holl. Gulden (z.Z. ca. RM 34.—). Der Verlag richtet sich an Sie mit der Bitte, Bezieher der neuen Zeitschrift zu werden. Der Bezug kann erfolgen durch jede Buchhandlung oder unmittelbar durch den Verlag

P. NOORDHOFF
 Groningen (Niederlande).

Neumann, J. v. Zum Haarschen Maß in topologischen Gruppen	106—114
Offord, A. C., and Bosanquet, L. S. Note on Fourier Series	180—187
Petrowski, I. Zur ersten Randwertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung	383—419
Saxer, Walter. Über eine Verallgemeinerung des Satzes von Schottky	207—216
Tamarkin, J. D. and Hille, Einar. A Remark on Fourier Transforms and Functions Analytic in a Half-Plane	98—102
Valiron, G. Sur une classe de fonctions entières admettant deux directions de Borel d'ordre divergent	193—206
Warschawski, Stefan. Zur Randverzerrung bei konformer Abbildung	314—343
Watson, G. N. Generating Functions of Class-Numbers	39— 68
Wavre, R. Sur les polydromies que présentent les potentiels newtoniens lorsqu'ils sont prolongés au travers des corps générateurs	69— 84
Weitzenböck, R. Über die Endlichkeit der A -Invarianten	228—237
Witt, Rudolf. Eine relativgeometrische Erweiterung der affinen Flächentheorie	429—447
Wolff, Julius. Sur la représentation conforme des bandes	217—222

A paraître dans les prochains fascicules:

To appear in subsequent numbers:

Aus dem Inhalt der folgenden Hefte:

Articoli, che saranno pubblicati nei prossimi fascicoli:

K. Asano, K. Shoda, Zur Theorie der Darstellungen einer endlichen Gruppe durch Kollineationen.	
Reinhold Baer, Gruppen mit hamiltonischem Kern.	
Reinhold Baer, Zentrum und Kern von Gruppen mit Elementen unendlicher Ordnung.	
Eduard Čech, Sur la connexité locale d'ordre supérieur.	
St. Cohn-Vossen, Kürzeste Wege und Totalkrümmung auf Flächen.	
J. G. van der Corput, G. Schaake, Ungleichungen für Polynome und trigonometrische Polynome.	
D. van Dantzig, Zur topologischen Algebra II, III.	
Hans Freudenthal, Die Hopfsche Gruppe. Eine topologische Begründung kombinatorischer Begriffe.	
Hans Freudenthal, Über die topologische Invarianz kombinatorischer Eigenschaften des Außenraumes abgeschlossener Mengen.	
Hilda Geiringer, Methoden der theoretischen Statistik.	
H. Hopf, Über die Drehung der Tangenten und Sehnen ebener Kurven.	
L. Kantorowitsch, Über die Vollständigkeit eines Systems von Funktionen, die von einem stetigen Parameter abhängen.	
F. de Kok, Über die Randwerte beschränkter harmonischer Funktionen.	
J. F. Koksma, Ein mengentheoretischer Satz über die Gleichverteilung modulo Eins.	
A. Kurosch, Kombinatorischer Aufbau der bikompakten topologischen Räume.	
Alfred Loewy, Über ein Integralsystem mit Stieltjesschen Integralen, seine anschauliche Interpretation und den Infinitesimalkalkül für Matrizen.	
Kurt Mahler, Über transzendente P -adische Zahlen.	
A. Ostrowski, Beiträge zur Topologie der orientierten Linienelemente, I, II, III.	

41. Schets de grafiek van $y = \frac{x^2 - 2x}{x^2 + 4x + 4}$.
42. Als a , b en c de zijden van een driehoek zijn, zijn de wortels van $b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0$ imaginair. Bewijs dit.
43. Schets de grafiek van

$$y = \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4x - 5}$$

44. De vorm $f(x) \equiv 3x^3 + ax^2 + 13x + b$ laat bij deling door $x^2 - x - 6$ tot rest $47x + 99$. Bepaal a en b en los daarna de vergelijking $f(x) = 0$ op.
45. De grafiek van de functie $y = \frac{8x + 7}{x^2 + ax + b}$ heeft 2 asymptoten evenwijdig aan de Y-as, nl. $x = -1$ en $x = -2$. Bepaal a en b en teken de grafiek.
46. Van de vergelijking $ax^3 - x^2 - abx + b = 0$ is één der wortels -3 , terwijl de twee andere wortels elkaars omgekeerde zijn. Bepaal a en b en de andere wortels.
47. Welke betrekking bestaat er tussen p en q , als de vergelijkingen $x^2 + px + p^2 = 0$ en $x^2 + qx + q^2 = 0$ één wortel gemeen hebben? Kunnen p en q beide reëel zijn?
48. Onderzoek de grafiek van de functie

$$y = \frac{x^2 - 2x - 15}{x + 4}$$

49. Herleid $\sqrt{27 + 10\sqrt{2}}$. Als dit geschiedt door de vorm gelijk te stellen aan $\sqrt{x} + \sqrt{y}$, enz., welke eigenschap wordt dan daarbij gebruikt?
Bewijs deze.
50. Van de vergelijkingen $3x^2 - 13x + 2p = 0$ en $2y^2 - 11y - 6 = 0$ is gegeven, dat een der wortels van de tweede vergelijking $3 \times$ zo groot is als een der wortels van de eerste. Bepaal p .
51. De vorm $V \equiv (a + 2)x^4 - (a + 1)x^3 + 2bx^2 + (b + 14)x + 6$ is deelbaar door $(x + 2)$ en geeft bij deling door $(x - 1)$ tot rest -36 . Bepaal a en b . Los daarna op de vergelijking $V = 0$.
52. Gevraagd een vergelijking van de derde graad, waarvan één

wortel 2 is en de andere wortels het drievoud zijn van die van de vergelijking $x^2 - 4x + 10 = 0$.

53. Welke kwadratische functie in x neemt de waarden 0, -2 en 0 aan, als men voor x opv. substitueert -1 , 0 en 2? Bepaal ook de uiterste waarde van die functie.

54. De vorm $\frac{m(x-2)}{x^4 - ax^2 + a - 1}$ is onbepaald voor $x = 2$ en heeft tot grenswaarde $\frac{1}{2}$. Bepaal a en m . Splits daarna de breuk in de som van drie breuken:

$$\frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

55. Als gegeven is:

$$x^4 + 3x^3 - 28x^2 + 18x + m \equiv (x^2 + ax + t)(x^2 + bx + t),$$

bepaal dan m , a , b en t . Los daarna op de vergelijking:

$$x^4 + 3x^3 - 28x^2 + 18x + m = 0.$$

56. De vormen $x^2 - (a+2)x + 2a + 4$ en $x^2 - 4ax + 8a + 4$ hebben een even groot minimum. Bepaal a . Breng daarna één der beide functies in tekening.

57. Gegeven de vergelijking $x^2 - (3m-2)x + (3m^2 - 3m - 2) = 0$. Voor welke waarde van m is $x_1^3 + x_2^3$ maximum?

58. Schets de grafiek van $y = \frac{3x-4}{x+4}$.

59. Gegeven $x^2 - (a-3)x - (a-3) = 0$. Bereken $x_1^2 + x_2^2$. Voor welke waarde van a is deze som minimum? Gevonden wordt, dat de minimumwaarde -1 is voor $a = 2$. Hoe komt het, dat men hier voor de som van twee kwadraten een negatieve uitkomst vindt? Wat is dus op te merken omtrent de wortels van $x^2 + x + 1 = 0$? Los ook eens op $x^3 = 1$. Hoeveel zal zijn x_i^{19} (de 19e macht van één der imaginaire wortels).

60. Los x en y op uit:

$$\begin{cases} \frac{(5x-3y+1)(6x-3y+4)}{4x+3y-7} = 0 \\ 2x-y+2+\sqrt{2x-y+3} = 5 \end{cases}$$

61. Schets de grafiek van

$$y = \frac{(x+5)(x-3)}{x-4} \equiv x + 6 + \frac{9}{x-4}$$

62. Waar liggen in het XOY-vlak de punten (x, y) , waarvoor $z^2 - 3z + (3x + 2y) = 0$ reële wortels heeft?
63. Als p een geheel positief getal is, is $px^{p+1} - (p+1)x^p + 1$ deelbaar door $(x-1)^2$. Bewijs dit.
64. Hoe groot is het aantal oplossingen van $2x - y = 3$? Voor welk stel is nu $x^2 + y^2$ zo klein mogelijk?
65. Herleid $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$. Schat de waarde van $2^{-0,00001}$.
66. Bepaal: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 4x + 4x - 3}{x^3 - 2x^2 - 2x - 3}$.
Vergelijk de grafieken van
 $y = \frac{x^3 - 4x^2 + 4x - 3}{x^3 - 2x^2 - 2x - 3}$ en $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$ met elkaar.
67. Bewijs, dat $17(x^{23} - 1) - 23(x^{17} - 1)$ deelbaar is door $(x-1)^2$.
68. Schets de grafiek van $y = \frac{-x^2}{x^2 + 4x + 4}$.
69. Ga het teken na van de breuk $\frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4x - 5}$ door een grafische voorstelling te maken van teller en noemer afzonderlijk.
70. De vergelijkingen $5x^3 - 5ax^2 - 2(3a - 10)x + 24a = 0$ en $x^2 - ax + 4 = 0$ hebben één gemeenschappelijke wortel. Bepaal a en los de vergelijkingen op.
71. De vorm $ax^2 + bx + c$ bereikt zijn uiterste waarde voor $x = -1$ en geeft bij deling door $(x+2)$ tot rest 9. Verder kan de vorm ontbonden worden in twee gelijke factoren van de eerste graad in x . Bepaal a , b en c .
72. Gegeven de vergelijking $3x^2 - (a-1)x + 2a - 13 = 0$. Voor welke waarde van a is de som van de kwadraten der wortels zo klein mogelijk?
73. Voor welke waarden van m kan $(m-2)x^2 - 2(m-1)x + 3m - 5$ niet nul worden voor reële waarden van x ?
74. De functie $y = \frac{x^2 - 2x + p}{x^2 - 8x + 15}$ heeft 10 als uiterste waarde. Bepaal p en onderzoek de grafiek van de functie.
75. Door $y = (a-1)x^2 - (a+2)x + (a-6)$ worden, als we a laten variëren van $-\infty$ tot $+\infty$, allerlei parabolen voorgesteld. Welke waarden moeten we aan a geven, opdat

hierdoor parabolen worden voorgesteld, die geheel boven de X-as liggen?

76. Bewijs, dat $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ deelbaar is door $a + b + c$.

77. In welk geval is $ax^2 + bx + c \equiv px^2 + qx + r$?

Wanneer hebben beide dezelfde nulpunten?

Wanneer hebben ze één nulpunt gemeen?

78. De wortels van de vergelijking $x^2 - 2(p + 1)x - 67\frac{1}{2}p = 0$ zijn s maal zo groot als die van $x^2 - px - 7\frac{1}{2}p = 0$. Bepaal p en s .

79. Bepaal het maximum van $5 - (x^3 - 6x^2 + 11x - 6)^2$ met de bijbehorende waarden van x .

80. Als de lijn, voorgesteld door $y = mx$ moet raken aan de kromme, voorgesteld door $y = x^2 - 3x + 4$, bepaal dan de waarde van m .

81. Voor welke waarden van x is $\frac{x^2 + 2x - 15}{(x - 6)(3x^2 + 9x + 7)} > 0$?

82. Voor welke gehele waarden van x is

$$3x^2 + 4x < 84 \text{ en tevens } x^2 - 17x < 84?$$

83. Voor welke waarde van a kan de breuk

$$\frac{x^2 - x - 12}{x^3 - (a - 2)x^2 - 10x + a^2 - 1}$$

vereenvoudigd worden?

84. De vergelijkingen $x^2 + (a - 1)x + b - 1 = 0$ en $2x^2 + (3x - 2b)x + 4(a - b) = 0$ hebben dezelfde wortels. Bepaal a en b .

85. Is het mogelijk, dat $mx^2 + (m - 1)x + (m - 1) > 0$ is voor alle waarden van m en alle waarden van x ?

86. Los x op uit:

$$x + 3 + \sqrt{\frac{x + 3}{x - 3}} = \frac{20}{x - 3}.$$

87. De vorm $2x^5 - ax^4 + bx^2 - 7$ geeft bij deling door $(x - 1)$ tot rest 2 en bij deling door $(x - 2)$ tot rest 61. Bepaal a en b en vervolgens de rest bij deling door

$(x - 2)(x + 1)(x - 1)$ zonder de deling uit te voeren.

88. De vorm $x^4 - ax^3 - (10a + 2b)x^2 + (ab + 159)x + 144$ is deelbaar door $x^2 + 6x + 8$. Bepaal a en b .

89. De grafische voorstelling van de functie

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 - x + 1}.$$

snijdt de X-as in A(— 1,0) en de Y-as in B(0,2). Verder is de lijn $y = -1$ een asymptoot. Bepaal a , b en c en schets de grafiek.

90. Voor welke waarde(n) van m verhouden zich de wortels van de vergelijking $x^2 - (m + 1)x + m^2 - 7m + 6 = 0$ als 3 : 2?

91. De grafische voorstelling van de functie

$$y = \frac{ax^2 + (b - 1)x - 6}{x^2 + (a + 3)x - (2b + 1)}$$

snijdt de X-as in A(+ 2,0) en heeft voor $x = -5$ een verticale asymptoot. Bepaal a en b en schets de grafiek.

92. Van het stelsel vergelijkingen:

$$\begin{cases} 2ax - (a + 1)y + a - 1 = 0 \\ (3a + 4)x - (3a + 1)y - 2a + 3 = 0 \end{cases}$$

verhouden x en y zich als 5 : 7. Bepaal a en de wortels x en y .

93. Men vraagt a zo te bepalen, dat de breuk

$$\frac{x^2 - ax + 8}{x^2 + ax - 16}$$

vereenvoudigd kan worden.

94. Gegeven de parabool $y = x^2 - 10x + 21$. Men vraagt de vergelijking te bepalen van de parabolen, die de X-as in dezelfde punten snijden als de gegeven kromme, terwijl hun uiterste waarde, absoluut genomen, het dubbele is.
95. Voor welke waarden van x is

$$\frac{2x - 5}{x - 1} > 3?$$

Toelichten met een grafische voorstelling.

96. Bewijs, dat $x^2 - (p + q)x + p^2 - pq + q^2$ positief is voor alle reële waarden van x , als p en q ongelijke reële getallen zijn.

97. Bepaal a , b en c zodanig, dat de vorm:

$$(a + b)x^2 + (2a + b)xy + cy^2 - x + 13y - 15$$

deelbaar is door $2x - y + 5$.

98. Bepaal a en b zodanig, dat de vorm:

$$x^4 - 2x^2 + ax + b$$

deelbaar is door $x^2 - x - 2$.

99. De functie $y = ax^2 + \frac{8}{3}x + c$ bereikt haar maximum 4 voor $x = 3$. Bepaal a en c en schets de grafiek.
100. Bewijs, dat elke macht van 5, verminderd met 5 deelbaar is door 20.
101. De grafiek van de functie $y = ax^2 + bx + c$ snijdt de X-as in A(— 4,0) en B(+ 2,0) en de Y-as in C(0, — 8). Bepaal a en b en schets de grafiek. Daarna ook die van

$$y = \frac{1}{ax^2 + bx + c}$$

102. De grafiek van $y = ax^2 + bx + c$ gaat door de punten (1, — 2) en (2, — 1), terwijl de uiterste waarde van de functie wordt bereikt voor $x = 2$. Bepaal a , b en c en teken de grafiek.
103. De vergelijking $x^2 + px + q = 0$ gaat over in een zuivere vierkantsvergelijking, als men de wortels met 3 vermeerderd en in een onvolledige, als men ze met 3 vermindert. Bepaal p en q .

104. Onderzoek de grafiek van de functie

$$y = x + (10 - 2x)^{\frac{1}{2}}.$$

105. Schets de grafiek van $y = \frac{x-1}{x+1}$ en daarna die van $y = 2^{\frac{x-1}{x+1}}$

106. De functies $y = x^3 + 3x^2 - 3x + 4$ en $y^1 = x^3 + x^2 - 22x - 40$ hebben hetzelfde nulpunt. Schets de grafieken.

107. Bepaal na vereenvoudiging het teken van

$$y = \frac{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}{x^3 - 2x^2 + 2x - 1}$$

voor verschillende waarden van x .

108. Voor welke waarden van m heeft de vergelijking $mx^2 - 4(m+5)x + m+3 = 0$ reële wortels? Voor welke waarden van m heeft deze vergelijking wortels, die verschillend teken hebben?

109. Voor welke waarden van a , b en c is

$$ax^2 + bxy + cy^2 - x + 19y - 15$$

deelbaar door $x + 2y - 3$?

Waar liggen de punten $P(x, y)$, waarvoor

$$(x + 2y - 3)(2x - y + 5) \geq 0 \text{ is?}$$

110. Splits $\frac{x^2 - x + 1}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}$ in enkelvoudige breuken.

EINE ELEMENTARE ANALYTISCHE HERLEITUNG SÄMTLICHER DEM WÜRFEL EINBESCHRIEBENEN REGELMÄSSIGEN OKTAEDER

Von K. F. HARTUNG in Herford.

Wir nehmen eine beliebige Oktaederdiagonale AA' an (s. Fig. 1), die durch die Mitte O der Würfels $XYZUX'Y'Z'U'$ geht und deren Endpunkte A und A' auf den Gegenflächen $XYZU$ und $X'Y'Z'U'$ liegen. Die Ebene, die durch den Mittelpunkt O geht und senkrecht auf AA' steht, schneidet die übrigen Seitenflächen des Würfels in

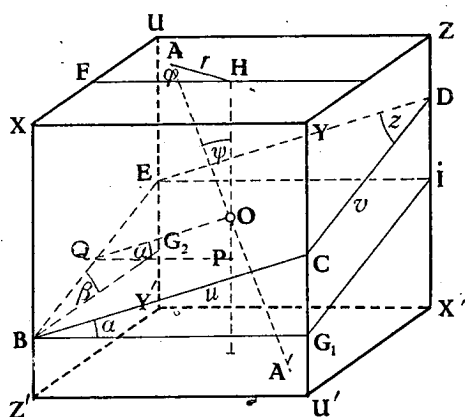


Fig. 1.

dem Parallelogramm $BCDE$. Diesem können wir zwei Quadrate einbeschreiben, deren halbe Diagonalen $s_{1,2}$ sich in ihrer Abhängigkeit von r und φ berechnen lassen. Die Grössen r und φ sind in folgender Weise bestimmt: Bezeichnen wir die Mitte der Grenzfläche $XYZU$ mit H , so ist $AH = r$, und wird durch H zu XY die Parallele

gezogen, die XU in F schneidet, so ist der Winkel $AHF = \varphi$.

In allen Fällen, wo $s_{1,2} = OA = \sqrt{\frac{a_6^2}{4} + r^2}$ ist ¹⁾, haben wir ein eingeschriebenes regelmässiges Oktaeder. Die letzte Gleichung ergibt demgemäss den geometrischen Ort für die A entsprechenden Ecken von sämtlichen eingeschriebenen regelmässigen Achtflichen. Die ausführlichen Darlegung gestaltet sich wie folgt.

Wir zeigen an erster Stelle, dass in jedem Parallelogramm nur 2 eingeschriebene Quadrate möglich sind. Das Parallelogramm und seine sämtlichen eingeschriebenen Quadrate haben einen gemeinsamen Mittelpunkt, weil der geometrische Ort der Diagonalenmitten der eingeschriebenen Quadrate der Schnittpunkt der beiden durch

¹⁾ a_6 soll die Kante des Würfels bedeuten. Streng genommen handelt es sich bei a_6 wie auch bei $s_{1,2}$, r , φ usw. eigentlich nur um die Masszahlen dieser Stücke.

den Mittelpunkt und parallel zu den Seiten des Parallelogramms gehenden Geraden ist. Die durch den Mittelpunkt O des Parallelogramms $BCDE$ senkrecht zu DE und BC gehende Gerade möge

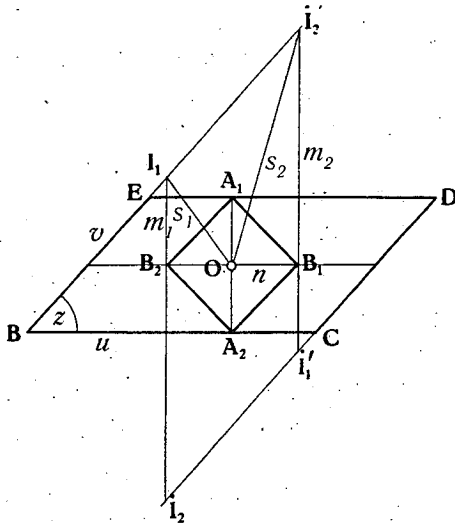


Fig. 2.

diese Seiten in den Punkten A_1 und A_2 schneiden (s. Fig. 2). Errichtet man in O auf A_1A_2 die Senkrechte und trägt auf ihr von O aus die Strecken OB_1 und OB_2 , beide gleich OA_1 , ab, so ist $A_1B_1A_2B_2$ ein Quadrat. Bewegen sich die Eckpunkte A_1 bzw. A_2 auf den Seiten ED bzw. CB , so bewegen sich bei Zunehmen des Quadrats die Ecken B_1 und B_2 auf den durch sie gehenden Geraden, die senkrecht auf

BC stehen. Das einmal trifft B_2 BE in I_1 und B_1 DC in I'_1 , das anderemal trifft B_2 DC in I_2 und B_1 BE in I'_2 . Man erhält so die beiden einbeschriebenen Quadrate. Die halben Diagonalen $s_{1,2}$ der beiden Quadrate — $OI_1 = s_1$ und $OI'_2 = s_2$ — berechnen sich aus den Seiten $BC = u$, $BE = v$ und dem Winkel $CBE = z$ folgendermassen:

$$s_{1,2}^2 = n^2 + m_{1,2}^2.$$

Hierin bedeutet:

$$OB_1 = OB_2 = n, \quad I_1B_2 = m_1, \quad I'_2B_1 = m_2.$$

Es ist:

$$\sin z = \frac{2n}{v} \text{ oder } n = \frac{v}{2} \sin z.$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{m_{1,2}}{u \pm 2n} \text{ oder } m_{1,2} = \frac{\operatorname{tg} z}{2} \cdot (u \pm 2n) = \frac{\operatorname{tg} z}{2} u \cdot (\pm v \sin z)$$

Folglich ist:

$$s_{1,2}^2 = \frac{v^2}{4} \sin^2 z + \frac{\operatorname{tg}^2 z}{4} (u \pm v \sin z)^2$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\operatorname{tg}^2 z}{4} (v^2 \cos^2 z + u^2 \pm 2uv \sin z + v^2 \sin^2 z) \\
 &= \frac{\operatorname{tg}^2 z}{4} (u^2 + v^2 \pm 2uv \sin z) \quad \dots \quad (1)
 \end{aligned}$$

Wir hätten nun noch u, v und z in ihrer Abhängigkeit von r und φ zu berechnen. Zu diesem Zweck müssen die Winkel (s. Fig. 1) $\angle CBG_1 = \alpha$ und $\angle EBG_2 = \beta$ bekannt sein, wo BG_1 parallel zu XY und BG_2 parallel zu XU ist. α, β berechnen wir auf folgende Weise:

Wir legen durch BE die Ebene G_1BEI , die parallel zu XY ist, ziehen durch O zu BC die Parallele, die BE in Q schneiden möge, und verbinden Q mit P , wo P der Schnittpunkt der Geraden HO mit der Ebene G_1BEI ist. Dann ist der Winkel $\angle OQP = \alpha$ und der Winkel $\angle QOH = 90^\circ + \alpha$. Wir kennen in dem Dreikant $O(AHQ)$ die Seite $\angle AOH = \varphi$ und den Winkel φ , den die Ebenen QOH u. OHA miteinander bilden. Hieraus lässt sich α folgendermassen berechnen:

$$\begin{aligned}
 \cos 90^\circ &= \cos \varphi \cdot \cos (90^\circ + \alpha) + \sin \varphi \cdot \sin (90^\circ + \alpha) \cdot \cos \varphi, \\
 0 &= -\cos \varphi \cdot \sin \alpha + \sin \varphi \cdot \cos \alpha \cdot \cos \varphi, \\
 \cos \varphi \cdot \sin \alpha &= \sin \varphi \cdot \cos \alpha \cdot \cos \varphi, \quad \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \varphi \cos \varphi.
 \end{aligned}$$

Es ist aber $\operatorname{tg} \varphi = \frac{r}{b}$, wo $b = \frac{a_0}{2}$ gesetzt ist.

$$\text{Also} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{b} \cos \varphi \quad \dots \quad (2)$$

In entsprechender Weise gewinnt man den Wert für $\operatorname{tg} \beta$, nämlich:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{r}{b} \sin \varphi \quad \dots \quad (3)$$

Mit Hilfe der Werte (2) und (3) lassen sich jetzt z, u und v in der gewünschten Weise berechnen. Für z folgt in Figur 1 aus dem Dreikant $B(CEX)$

$$\cos z = \sin \alpha \cdot \sin \beta \quad \dots \quad (4)$$

und für u und v haben wir die Werte:

$$u = \frac{2b}{\cos \alpha}, \quad v = \frac{2b}{\cos \beta} \quad \dots \quad (5)$$

Es sind in (4) und (5) $\sin \alpha, \sin \beta, \cos \alpha, \cos \beta$ durch die aus (2) und (3) herzuleitenden Werte zu ersetzen. Die Umrechnung ergibt:

$$\sin \alpha = \frac{r \cos \varphi}{\sqrt{r^2 \cos^2 \varphi + b^2}}, \quad \sin \beta = \frac{r \sin \varphi}{\sqrt{r^2 \sin^2 \varphi + b^2}}. \quad (6)$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{r^2 \cos^2 \varphi + b^2}}, \quad \cos \beta = \frac{b}{\sqrt{r^2 \sin^2 \varphi + b^2}}. \quad (7)$$

Werden die Werte für $\cos \alpha$ und $\cos \beta$ aus (7) in (5) eingesetzt, dann erhält man:

$$u = 2\sqrt{r^2 \cos^2 \varphi + b^2}, \quad v = 2\sqrt{r^2 \sin^2 \varphi + b^2}. \quad (8)$$

Setzt man die Werte für $\sin \alpha$ und $\sin \beta$ aus (6) in (4) ein, so folgt:

$$\cos z = \frac{r^2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi}{\sqrt{(r^2 \cos^2 \varphi + b^2)(r^2 \sin^2 \varphi + b^2)}}$$

Durch weitere Umrechnung ergibt sich:

$$\sin z = \frac{\sqrt{r^2 b^2 + b^4}}{\sqrt{(r^2 \cos^2 \varphi + b^2)(r^2 \sin^2 \varphi + b^2)}}, \quad \operatorname{tg} z = \frac{\sqrt{r^2 b^2 + b^4}}{r^2 \cos \varphi \cdot \sin \varphi} \quad (9)$$

Wird $r^2 = x^2 + y^2$ und demgemäss

$$\sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

in (8) und (9) eingesetzt, dann erhalten wir:

$$u = 2\sqrt{x^2 + b^2}, \quad v = 2\sqrt{y^2 + b^2}. \quad (8a)$$

$$\sin z = \sqrt{\frac{b^2(x^2 + y^2 + b^2)}{(x^2 + b^2)(y^2 + b^2)}}, \quad \operatorname{tg} z = \frac{b}{xy} \sqrt{x^2 + y^2 + b^2} \quad (9a)$$

Setzen wir die Werte für u , v , $\sin z$, $\operatorname{tg} z$ von (8a) und (9a) in (1) ein, so wird $s_{1,2} = f(x, y)$. In allen Fällen, wo $s_{1,2} = f(x, y) = \sqrt{b^2 + r^2} = \sqrt{b^2 + x^2 + y^2}$ wird, ist ein einbeschriebenes regelmässiges Oktaeder vorhanden. Aus der letzten Gleichung folgt somit der geometrische Ort. Die Ausrechnung gestaltet sich folgendermassen:

$$b^2 + x^2 + y^2 = \frac{\operatorname{tg}^2 z}{4} (u^2 + v^2 \pm 2uv \sin z).$$

$$b^2 + x^2 + y^2 = \frac{b^2(x^2 + y^2 + b^2)}{4x^2 y^2} [4(x^2 + b^2) + 4(y^2 + b^2) \pm 8\sqrt{b^2(x^2 + y^2 + b^2)}].$$

$$x^2 y^2 = b^2 x^2 + b^2 y^2 + 2b^4 \pm 2b^2 \sqrt{b^2(x^2 + y^2 + b^2)}$$

oder

$$\pm 2b^2 \sqrt{b^2(x^2 + y^2 + b^2)} = b^2(x^2 + y^2 + 2b^2) - x^2 y^2.$$

Quadriert:

$$4b^6x^2 + 4b^6y^2 + 4b^8 = b^4x^4 + b^4y^4 + 4b^8 + 2b^4x^2y^2 \\ + 4b^6x^2 + 4b^6y^2 + x^4y^4 - 2b^2x^4y^2 - 2b^2x^2y^4 - 4b^4x^2y^2$$

oder

$$x^4y^4 - 2b^2x^4y^2 - 2b^2x^2y^4 + b^4(x^4 + y^4 - 2x^2y^2) = 0.$$

Hierfür schreiben wir:

$$x^4y^4 - x^2y^2b^2(2x^2 + 2y^2) + b^4(x^2 - y^2)^2 = 0.$$

Es ist $2x^2 + 2y^2 = (x + y)^2 + (x - y)^2$ und $(x^2 - y^2)^2 = (x + y)^2(x - y)^2$. Also kommt:

$$x^4y^4 - x^2y^2b^2(x + y)^2 - x^2y^2b^2(x - y)^2 + b^4(x + y)^2(x - y)^2 = 0,$$

$$x^2y^2[x^2y^2 - b^2(x + y)^2] - b^2(x - y)^2[x^2y^2 - b^2(x + y)^2] = 0,$$

$$[x^2y^2 - b^2(x + y)^2][x^2y^2 - b^2(x - y)^2] = 0,$$

$$[xy - b(x + y)][xy + b(x + y)][xy - b(x - y)][xy + b(x - y)] = 0.$$

Der geometrische Ort besteht aus den vier gleichseitigen Hyperbeln:

$$xy \pm b(x \pm y) = 0,$$

wo die Zeichen in allen Anordnungen zu wählen sind.

Die Achsen des zugrunde gelegten rechtwinkligen Koordinatensystems fallen dabei mit den durch die Mitte einer Würfel-seitenfläche parallel zu den Seiten gehenden Geraden zusammen.

UIT HET VERSLAG DER STAATSEXAMEN- COMMISSIE 1934.

De subcommissie voor de *wiskunde* kan nagenoeg volstaan met een verwijzing naar vorige verslagen: de opmerkingen, daar gemaakt, zijn nog bijna onverminderd van kracht. Nog steeds bestaat de kennis van een veel te groot aantal kandidaten uit van buiten geleerde formules en stellingen. Vaak komt het voor, dat kandidaten deze uitkomsten niet kunnen bewijzen of met elkaar in verband brengen. Er zij nogmaals op gewezen, dat de subcommissie zich, vooral bij het mondeling examen der A's, tot de eenvoudige zaken beperkt, maar daarbij dan ook gaarne ziet, dat de examinandus kritisch heeft gestaan tegenover de te verwerven kennis; dit laatste toch is een geesteshouding, die zij aanwezig wenscht in elken aanstaanden student. Terwijl hieraan bij menig een bijna alles ontbrak, viel in vele andere gevallen een ontstellend tekort aan feitelijke kennis te constateeren. Bijzondere vermelding verdient een candidaat, die de stelling van Pythagoras niet had behandeld, maar haar wel in zijn boek had zien staan en wist „dat het een evenredigheid is”; ook waren er weer, die geen vierkantsvergelijking wisten op te lossen. Een opmerking van bijna alle examinatoren was, dat de beginselen der stereometrie dikwijls verwaarloosd waren: hoek en afstand van twee kruisende rechten waren dikwijls onbekende begrippen; soms kenden zulke kandidaten wel den „cirkel van Apollinaris”. In enkele gevallen kreeg de subcommissie den indruk, dat ook opleiders mede schuldig zijn aan dergelijke tekortkomingen: één candidaat deelde mede, dat zijn docent voor een der andere vakken hem er toe gebracht had, de wiskunde te verwaarloozen. Met nadruk worde er daarom nog eens op gewezen, van hoeveel belang het is, dat aanstaande examinandi zich stellen onder leiding van voor hun taak ten volle berekende opleiders, die in staat zijn, het geheel der opleiding te overzien.

De subcommissie voor de *natuurkunde* moest tot haar leedwezen bij vele kandidaten belangrijke tekortkomingen in kennis en inzicht vaststellen, zelfs bij kandidaten, wien zij ten slotte nog een voldoende cijfer gaf. De natuurkunde is voor de kandidaten een vak van

tamelijk groote uitgebreidheid geworden, rijk aan allerlei problemen, die behoorlijk verwerkt moeten worden, maar werkt het niet als een prikkel, dat vele van die problemen in zeer nauw contact staan met het dagelijksch leven? Zoo is de kennis van het C. G. S.-stelsel noodig voor een juist begrip van de technische eenheden ampère, volt en watt. Maar naast de dynamische eenheden behooren toch de statische eenheden van kracht, arbeid en effect niet te worden verwaarloosd. Het deed de commissie onaangenaam aan, dat verschillende kandidaten het mechanisch warmte-aequivalent slechts door de formuleering $1 \text{ cal} = 4,2 \text{ joule}$ konden weergeven, in plaats van door de meer historische en sprekende betrekking $1 \text{ cal} = 427 \text{ K.G.M.}$ De begrippen E.M.K., klemspanning, stroomeffect, capaciteit, potentiaal en veldsterkte (alsmede het verband tusschen deze) deden vele kandidaten struikelen. Met het beginsel van transformatoren, dynamo's, electromotoren, gelijkrichters, zoo mogelijk van versterkers, mogen de kandidaten toch wel op de hoogte zijn; evenzoo met de schakeling van ampère- en voltmeters. Verder mogen ze niet schrikken, als hun gevraagd wordt, wat het beteekent, als op een lamp staat $\begin{Bmatrix} 100 \text{ Watt} \\ 220 \text{ Volt} \end{Bmatrix}$ en op een condensator $1 \mu\text{.F.}$ of 1000 cm ; wat een K.W.U. is; waarom het in beginsel niet economisch is elektrische stroomen te gebruiken voor verwarming; waarom gelijkstroom steeds meer door wisselstroom wordt vervangen; waaruit een elektrische trillingskring bestaat; wat Röntgenstralen zijn en hoe ze worden voortgebracht. Evenmin mag het hun bevreemden, als hun gevraagd wordt naar het beginsel van een prismakijker, microscoop, telescoop, als van hen verlangd wordt de werking van een loupe of bril toe te lichten door een constructie. Ook schroomde de commissie niet de kandidaten lastig te vallen met vragen over interferentie en polarisatie (kleuren in dunne vliezen, buiging door een spleet en tralie, nicol enz.) en . . . dikwijls met succes. Wat inzonderheid de leer van de warmte betreft, moesten de kandidaten toonen dat ze woorden als isotherm en adiabatisch verstonden. Er werd hun gevraagd naar het vloeibaar maken van gassen, naar quaesties, waarbij men te maken heeft met in- en uitwendigen arbeid, enz., enz.

Candidaten voor volgende jaren doen verstandig ook verslagen van vorige commissies met zorg door te lezen.

BOEKBESPREKINGEN.

Prof. Dr. Hk. de Vries, Historische Studiën, II.
(Noordhoff).

In dit tweede deel van zijn *Historische Studiën* heeft prof. de Vries wederom een aantal reeds vroeger verschenen verhandelingen op het gebied van de geschiedenis der Wiskunde samengebracht. De titels der hoofdstukken zijn achtereenvolgens: De projectieve meetkunde der Grieken; Desargues; de oudste homogene coördinaten; over Möbius' mechanisch-geometrische studiën; Julius Plücker; Euler; Lagrange.

De schrijver, wiens uiteenzettingen helder en boeiend zijn, weet den lezer van het begin tot het einde bij het onderwerp te houden en hem in sterke mate de opvatting bij te brengen, hoe nuttig, ja nodig, voor het begrijpen der moderne wiskundige methoden de kennis van hun ontwikkeling moet worden geacht. Wij wensen het boek in handen van zeer velen.

d e J.

Natuurkunde en Natuurkundigen. Rede, uitgesproken bij de aanvaarding van het Hoogleeraarsambt aan de Rijks-Universiteit te Leiden op Vrijdag 28 Sept. 1934 door H. A. Kramers.

De moeilijkheid, die er voor een beoefenaar van wiskunde of mathematische physica altijd in gelegen is, om in een academische rede voor een gehoor, dat grootendeels uit niet-vakgenooten bestaat, over zijn wetenschap te berichten — een moeilijkheid, die gelijkelijk voortvloeit uit de ontoegankelijkheid van de begrippenwereld, waarin hij zich beweegt als uit de onverstaanbaarheid, die de taal, waarvan hij zich bedient, voor den niet-ingewijde kenmerkt — is in deze rede op zeer gelukkige wijze omzeild: de spreker heeft er van afgezien, een min of meer populaire schets te geven van de ontwikkeling der moderne physica en in plaats daarvan een onderwerp aan de orde gesteld, dat hem zelf reeds jaren lang heeft beziggehouden en dat ook wel dadelijk de belangstelling van al zijn hoorders zal hebben gewekt, de vraag nl. in hoeverre de persoonlijkheid van een natuurkundige uiting kan vinden en ook inderdaad vindt in den stijl van zijn gepubliceerde verhandelingen.

Als uitgangspunt dient hem daarbij de relatie tusschen persoon en schrijfwijze in het oeuvre van zijn bewonderden voorganger Ehrenfest, die hier als mensch en als geleerde op even mannelijke als gevoelige wijze wordt herdacht; de kern van het betoog wordt gevonden en tevens — wat bij een ambtsaanvaarding als hoogleeraar

toch onvermijdelijk is — de aansluiting aan den huidige staat der natuurkundige wetenschap tot stand gebracht in een behandeling van de moeilijkheden, die aan de vormgeving van de quantumtheorie in den weg staan; en het slot wordt gevormd door een korte en treffende karakteristiek van de paradoxe wijze, waarop de persoonlijkheid van Bohr, die een onuitwisbaren stempel drukte op de ontwikkeling der 20e-eeuwsche physica, in zijn geschriften haar uitdrukking vindt.

E. J. D.

INGEKOMEN BOEKEN.

(Uitgaven van P. Noordhoff, N.V.).

- J. VERSLUYS, *Leerboek der Stereometrie*, 13e druk, herzien
door J. H. Schogt, gec. f 2.90
- C. J. ALDERS, *Driehoeksmeting voor M.O. en V.H.O.* gec. - 1.25
- Dr. H. C. SCHAMHARDT, *Mondelinge Staatsexamens 1934*
(Overdruk uit „Euclides”) - 1.—
Een practisch boekje voor candidaten en voor op-
leiders.
- Dr. H. J. E. BETH, *Meetkunde van de ruimte*, geb. - 2.90

De aandacht van de lezers van „Euclides” wordt gevestigd op het artikel van Prof. Dr. B. L. van der Waerden over „De logische grondslagen der Euklidische meetkunde”, in „Christiaan Huygens” Jaargang XIII, aflevering 2.

E R R A T U M

in het artikel van Prof. Dr. L. E. J. BROUWER.

Jg. IX van Euclides bl. 192, regel 3 v. o. staat: bezitten.
lees: bezitten, terwijl voor $\sigma > \kappa_v$ alle r_σ 's om dezelfde as plaats vinden, als voor $\sigma = \kappa_v$.



VAN ENKELE HERHAALDELIJK GECITEERDE WERKEN
VOLGT HIER DE OPGAVE VAN TITEL EN
TOEGEPASTE AFKORTING.

Euclides Opera Omnia edd. J. L. Heiberg et H. Menge. I—IV. *Elementa* (Leipzig 1883—1885). VII. *Optica, Opticorum Recensio Theonis, Catoptrica, cum scholiis antiquis* (Leipzig 1895). VIII. *Phaenomena et Scripta Musica* (Leipzig 1916). Te citeeren als *Euclidis Opera*; stellingen uit de *Elementen* door vermelding van Boek en Propositie als volgt:

Euclides X, 1 = *Elementen*, Boek X, Prop. 1.

E. J. Dijksterhuis, *De Elementen van Euclides*. I (Groningen 1929). II (Groningen 1930). Te citeeren als *Elementen van Euclides*.

Archimedis Opera Omnia cum Commentariis Eutocii iterum edidit J. L. Heiberg. I (Leipzig 1910). II (Leipzig 1913). III (Leipzig 1915). Te citeeren als *Opera*.

T. L. Heath, *The Works of Archimedes, edited in modern notation with introductory chapters* (Cambridge 1897). Te citeeren als Heath, *Archimedes*.¹⁾

Paul Ver Eecke, *Les Oeuvres Complètes d'Archimède, traduites du grec en français avec une introduction et des notes* (Paris, Bruxelles, 1921). Te citeeren als Ver Eecke, *Archimède*.

Apollonii Pergaei quae Graece exstant cum commentariis antiquis ed. J. L. Heiberg. I (Leipzig 1891). II (Leipzig 1983). Te citeeren als Apollonios, *Conica*.

Heronis Alexandrini Opera quae supersunt omnia. II, Fasc. 1. *Mechanica et Catoptrica* edd. L. Nix et W. Schmidt (Leipzig 1900). III. *Rationes Dimentendi et Commentatio Dioptrica* ed. H. Schöne. (Leipzig 1903). IV. *Definitiones cum variis collectionibus. Geometrica* ed. J. L. Heiberg. (Leipzig 1912). V. *Stereometrica. De Mensuris* ed. J. L. Heiberg (Leipzig 1914). Te citeeren als *Heronis Opera*, II, 1 als *Mechanica*, III als *Metrica*.

Pappi Alexandrini Collectionis quae supersunt ed. F. Hultsch. I (Berlijn 1875) *Librorum* II, III, IV *Reliquiae*. II (Berlijn 1877) *Librorum* VI et VII *Reliquiae*. III (Berlijn 1878) *Libri VIII Reliquiae. Supplementa*. Te citeeren als Pappos, *Collectio*, als volgt:

Collectio VIII, 5; 1030 = Liber VIII, caput 5. pag. 1030 van de geciteerde, doorlopende gepagineerde editie.

¹⁾ Een Duitsche bewerking van deze uitgave is: Fritz Kliem, *Archimedes Werke mit modernen Bezeichnungen und mit einer Einleitung versehen* (Berlin 1914).

T. L. Heath, *A History of Greek Mathematics*. I. II (Oxford 1921).
Te citeeren als Heath, *Greek Mathematics*.

Proposities uit Archimedes worden geciteerd:

α) in het algemeen: door opgave van werk, (eventueel) boek, en propositienummer; hierbij wordt voor de werken een afkorting gebruikt, die aan het eind van Hoofdstuk II wordt meegedeeld, bv. S.C. II, 4 = *Over Bol en Cylinder*, Boek II, Propositie 4.

β) in den loop van de behandeling van het werk, waarin ze voorkomen: alleen door opgave van (eventueel) boek en propositienummer.

Van de Hoofdstukken, waaruit dit werk bestaat, wordt Hoofdstuk III geciteerd als: III, gevolgd door een decimale breuk, die de indeeling uitdrukt.

HOOFDSTUK I.

HET LEVEN VAN ARCHIMEDES.

1. DE PERSOON.

In onze karige kennis der Grieksche mathesis vormen de gegevens, die over het leven van hare beoefenaren ter beschikking staan, wel een der zwakste punten: betrouwbare berichten over levensduur en lotgevallen bezitten we van bijna geen hunner; het tijdvak, waarin zij hun werk verrichtten, is gewoonlijk alleen bij ruwe benadering te bepalen; de plaatsen, waar zij vertoefden, zijn niet zelden geheel onbekend.

Op dezen algemeenen regel vormt Archimedes slechts schijnbaar een uitzondering. Want wel zijn er over hem reeds in de oudheid tal van verhalen in omloop, die tot in onzen tijd onafscheidelijk aan zijn naam verbonden zijn gebleven, maar wat daarin bericht wordt is meestal sterk phantastisch getint en blijkt tegen historische kritiek zelden bestand te zijn. Van het schrijven van een samenghangende en betrouwbare biographie ¹⁾ kan daardoor bij hem al evenmin sprake zijn als bij eenigen anderen Griekschen wiskundige. Men kan niet veel meer doen, dan de overgeleverde mededeelingen ordenen en nauwkeurig vermelden, uit welke bronnen ze afkomstig zijn; slechts een enkele maal zal het mogelijk zijn, de waarde van het bericht te schatten.

Reeds het geboortjaar staat niet geheel vast; men pleegt het op 287 v. Chr. te stellen, omdat hij volgens een bericht van den Byzantijnschen polyhistor Tzetzes ²⁾ vijf en zeventig jaar zou zijn ge-

¹⁾ In de oudheid heeft er een biographie van Archimedes bestaan, geschreven door Herakleides. Eutokios vermeldt haar in zijn commentaar op de *Cirkelmeting* (*Opera* III, 228). Wie deze Herakleides was, is onbekend. Archimedes vermeldt in de voorrede van zijn werk *Over Spiralen* (*Opera*, II, 2) iemand van dezen naam als overbrenger van een zending aan Dositheos.

²⁾ Ioannes Tzetzes leefde te Constantinopel in de 1e helft van de 12e eeuw. Hij schreef o.a. een historisch werk, dat op grond van een later aangebrachte indeeling in boeken van duizend verzen elk als de *Chiliades* bekend staat. De mededeeling over den leeftijd van Archimedes staat *Chiliades* II, *Hist.* 35, 105.

weest, toen hij in 212 v. Chr. bij de verovering van Syracuse door de Romeinen om het leven kwam.

Ook over zijn afkomst is weinig met zekerheid te zeggen. Alle klassieke schrijvers zijn het er over eens, dat hij Syracusaan van geboorte was; terwijl echter Cicero ¹⁾ en Silus Italicus ²⁾ den indruk wekken, dat hij arm was en van geringe geboorte, bericht Plutarchus ³⁾ over zijn familie- en vriendschapsrelaties met den koning van Syracuse Hieroon II ⁴⁾, wat op een geheel andere positie in het leven der stad schijnt te wijzen. Volstrekte tegenstrijdigheid behoeft trouwens tusschen de beide mogelijkheden niet te bestaan. Immers Hieroon, die de onwettige zoon van een edelman bij een zijner slavinnen heet, heeft zijn schitterende loopbaan blijkbaar meer aan persoonlijke verdiensten dan aan geboortevoorrechten te danken gehad en de oorspronkelijke betrekkingen tot Archimedes kunnen wel dezelfde zijn gebleven, zonder dat de wijze wiskundige behoefte had, in de macht en den voorspoed van den tyran te deelen.

Volgens een aanvankelijk niet begrijpbaar getuigenis van Archimedes zelf (een plaats in zijn werk *De Zandrekenaar*, in de overgeleverde lezing der handschriften nietszeggend, maar door F. Blass ⁵⁾ scherpzinnig geëmendeed) was hij de zoon van een astronoom Pheidias, van wiens werk we niets anders weten dan een

¹⁾ Cicero (106—43 v. Chr.) noemt in zijn werk *Tusculanae Disputationes* (V, 23) Archimedes *humilem homunculum* (nederig mannetje), welke woorden trouwens ook wel bedoeld kunnen zijn als oratorische tegenstelling tot den juist te voren vermelden tyran Dionysius.

²⁾ Silus Italicus, Romeinsch dichter en redenaar (25—100) behandelt in zijn epos *Punica* den tweeden Punischen oorlog. Hij vermeldt daarin ook het aandeel van Archimedes in de verdediging van Syracuse en noemt hem *nudus opum* (ontbloot van rijkdommen). XIV, 343; ed. L. Bauer (Leipzig 1892). Vol. II, pag. 94.

³⁾ Plutarchus, *Vita Marcelli* XIV, 7 (305) noemt hem *Ἰέρωνι τῷ βασιλεῖ συγγενὴς καὶ φίλος*.

⁴⁾ Hieroon II, onwettige zoon van een Syracusaansch edelman, werd bevelhebber der troepen in 275 v. Chr. en na een geslaagde veldtocht tegen de Mamertijnen in 270 koning van Syracuse. Na in 263 door de Romeinen te zijn overwonnen, verbond hij zich met hen en bleef hen tot zijn dood in 216 ondersteunen. Onder zijn vrede-lievend bewind kwam Syracuse tot groote welvaart.

⁵⁾ *Opera* II, 220. In de mss. staat *Φειδία δὲ τοῦ Ἀκούπατρος*, waarvoor F. Blass (*Astr. Nachr.* 104 (1883) no. 2488; pag. 255) de conjectuur *Φειδία δὲ τοῦ ἀμῶν πατρὸς* = *onzen vader Pheidias* heeft voorgesteld.

schatting van de verhouding van de diameters van zon en maan, die Archimedes op de bedoelde plaats citeert.

Naast deze vrij vage biographische mededeelingen staan enkele andere van grootere stelligheid, die echter in het geheel geen vertrouwen verdienen ¹⁾); dat een Arabisch schrijver hem een zoon van Pythagoras noemt, moge slechts worden vermeld als staaltje van de ongebreidelde phantasie, waarmee de Arabische wiskundigen over het leven van hun Grieksche voorgangers plegen te schrijven; en dat hij, zooals Linceo Mirabello wil, in zijn jeugd te Syracuse de lessen van Plato zou hebben gehoord, kan slechts op een chronologische vergissing berusten, omdat Plato al zestig jaar dood was, toen Archimedes ter wereld kwam. Over zijn nakomelingschap bestaat een bericht, dat al even verwonderlijk is: Rivault ²⁾), die in 1615 een Latijnsche vertaling van zijn verzamelde werken uitgaf, zegt in zijn biographische inleiding, van een geleerden Griekschen vriend te hebben vernomen, dat de Siciliaansche martelares Santa Lucia een afstammeling van den grooten wiskundige zou zijn geweest.

Over het leven van Archimedes staat wel dit vast, dat hij minstens eenmaal een tijd in Egypte heeft doorgebracht; dat Arabische schrijvers dit vermelden, zegt weliswaar niet veel, maar Diodoros ³⁾ bevestigt het op twee plaatsen van zijn *Bibliotheca Historica* ⁴⁾), waar hij de cochlias (een hydraulisch werktuig, waarop we in § 4 terugkomen) een uitvinding van Archimedes noemt, die deze in Egypte zou hebben gedaan. Bovendien heeft hij, blijkens de voorreden van zijn werken, van Syracuse uit steeds zeer vriendschappelijke betrekkingen onderhouden met verschillende geleerden te Alexandria; het ligt voor de hand, om aan te nemen, dat die banden dateeren uit den tijd van een studieverblijf in het toenmalige centrum der

¹⁾ Ik ontleen deze aan A. Favaro, *Archimede*. Profili No. 21. (Roma 1923); pag. 14.

²⁾ *Archimedis Opera quae extant novis demonstrationibus commentariisque illustrata* per Davidem Rivaltum a Flurantia. Parisiis. Apud Claudium Morellum. 1615. David Rivault de Flurance (1571—1616) was mathematicus aan het hof van Lodewijk XIII.

³⁾ Diodorus van Agurion (Sicilie) was een historicus onder keizer Augustus. Tusschen 60 en 30 v. Chr. schreef hij zijn groot geschiedkundig werk *Bibliotheca Historica*, dat in 40 boeken de wereldgeschiedenis tot Caesar's Gallischen oorlog behandelde.

⁴⁾ Diodoros, *Bibliotheca Historica*, rec. F. Vogel (Leipzig 1890); I, 34 (in een beschrijving van de Nijldelta); V, 37 (in een passage over het leegpompen van zilverbijnen in Spanje).

Grieksche wetenschap, dat op mathematici altijd een bijzondere aantrekkingskracht moet hebben uitgeoefend, omdater in het Mouseion¹⁾ de traditie van Euclides voortleefde. Van de Alexandrijnsche vakgenooten schijnt hij wel het hoogst den astronoom Konoon²⁾ van Samos te hebben geschat, aan wien hij tot aan diens dood zijn wiskundige vondsten vóór de publicatie placht toe te zenden en over wien hij steeds met de grootste bewondering spreekt³⁾. Verder behoorden tot hen de veelzijdige geleerde Eratosthenes van Kurene⁴⁾, voor wien de *Methode* geschreven is en Konoon's leerling Dositheos van Pelousion⁵⁾, aan wien de werken *Over Bol en Cylinder*, *Over Conoiden en Sphaeroiden* en *Over Spiralen* zijn opgedragen.

Volgens een mededeeling in de biographie, waarmee J. Torelli zijn groote Archimedes-editie inleidt⁶⁾, zou Archimedes na zijn terugkeer uit Egypte nog andere landen hebben bezocht. Over een reis naar Spanje wordt in het bijzonder verhaald in een aantekening van Leonardo da Vinci⁷⁾, waarin deze noteert, in een geschiedenis der Spanjaarden te hebben gelezen, dat de Syracusaan Archimedes aan Ecliderides, koning der Cilodastri, bijstand verleende in een zeeoorlog tegen de Engelschen door de uitvinding van een middel, brandend pek op de schepen der tegenstanders te spuiten. Men weet echter heelemaal niet, in welk werk Leonardo

¹⁾ Het Mouseion was een gebouw te Alexandria, waar geleerden gehuisvest waren. Het werd gesticht in 320 v. Chr.

²⁾ Konoon van Samos, astronoom en mathematicus (3e eeuw v. Chr.), schreef een werk over sterrenkunde, waarin hij de oude waarnemingen der Chaldaeërs verzamelde; door zijn meetkundig werk legde hij den grondslag voor het vierde boek van de *Conica* van Apollonios.

³⁾ *Opera* I, 4. II, 2; 262.

⁴⁾ Eratosthenes van Kurene (geb. ca 284 v. Chr.), kwam op zijn 40e jaar op uitnoodiging van Ptolemaios III Euergetes naar Alexandria als leerling van 's konings zoon Philopator; later werd hij daar bibliothecaris. Hij is bekend om een meting van den aardstraal, om zijn zeef (*κόσκινον*) voor het opsporen van de priemgetallen en om een oplossing van het Delisch probleem.

⁵⁾ Over dezen wiskundige zijn geen verdere bijzonderheden bekend. Uit de wijze, waarop Archimedes na den dood van Konoon de correspondentie met hem inleidt (*Opera* II, 262), krijgt men den indruk, dat hij hem niet persoonlijk kende.

⁶⁾ *Archimedis quae supersunt omnia cum Eutocii Ascalonitae commentariis ex rec. Josephi Torelli, Veronensis cum nova versione latina*. Oxonii 1792. pag. XII.

⁷⁾ Geciteerd bij A. Favaro, *Archimede*, pag. 19.

dit gelezen kan hebben en bij kenners der Spaansche geschiedenis zijn zoowel de koning Ecliderides als het volk der Cilodastri onbekend. In verband met de mogelijkheid van een reis naar Spanje verdient een mededeeling van Diodoros over het gebruik der, naar hij zegt, door Archimedes uitgevonden cochlias in de Spaansche zilvermijnen ¹⁾ eenige aandacht.

Het is mogelijk, dat Archimedes ook nog eens naar Egypte is teruggekeerd en dat hij bij die gelegenheid de groote werken op het gebied van dijken- en bruggenbouw en van reguleering van den Nijl heeft uitgevoerd, waarover in Arabische bronnen ²⁾ bericht wordt. Met zekerheid is ook hierover echter niets te zeggen en met het oog op het vele en tijdroovende werk, dat hij op mathematisch en technisch gebied in zijn vaderstad heeft verricht, is het wel het meest waarschijnlijk, dat hij het grootste deel van zijn leven in Syracuse zelf zal hebben vertoefd en dat zich van daaruit de groote faam heeft verspreid, die zijn naam in de oudheid omgeeft.

Zooals uit den aard van wiskundig werk begrijpelijk is, berust die faam niet in de eerste plaats op de geschriften, die hij aan zijn mathematische vrienden toezond en die hem, van de herleving der wiskunde af, de bewondering van alle eeuwen hebben verzekerd. Eerder nog vond hij in bredere kringen waardeering voor zijn werk als astronoom. Hoofdzakelijk echter wordt hij in niet-wiskundige literatuur vermeld naar aanleiding van uitingen van zijn technisch vernuft en die uitingen hebben in het militairistische Romeinsche Rijk blijkbaar weer vooral indruk gemaakt, waar zij de in § 5 nader te bespreken krijgskundige actie mogelijk maakten, die hij bij de verdediging van Syracuse ontwikkeld heeft.

Zelf schijnt hij, wanneer men Plutarchus gelooven mag, zijn geheele technische werkzaamheid als een bezigheid van lagere orde te hebben beschouwd: „hij wilde”, aldus het bericht in het *Leven van Marcellus* ³⁾, „geen geschrift over deze onderwerpen nalaten; hij vond het construeeren van werktuigen en in het algemeen iedere

¹⁾ Zie noot 4 van bl. 165.

²⁾ A. Favaro, Archimede (zie noot 8) pag. 21. De bedoelde mededeeling komt o.a. voor in het bio-bibliographische werk Tar'ikh al-hukamā van den Egyptischen historicus Ibn al-Qifti (1172/73—1248). Zie Eilhard Wiedemann, *Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften III*. Sitzungsber. d. Phys.-med. Soc. in Erlangen 37 (1905), 247—250.

³⁾ Plutarchus, *Vita Marcelli* XVII, 4 (307).

vaardigheid, die om het practisch nut wordt uitgeoefend, laag bij den gronds en onedel en hij richtte zijn streven slechts op die dingen, die in hun schoonheid en voortreffelijkheid buiten alle contact met de noodzakelijkheid blijven."

In de zuivere wiskunde vond hij de mogelijkheid, dit verlangen ten volle te bevredigen en, als men weer afgaat op wat Plutarchus verder verhaalt¹⁾, heeft er zelden iemand geleefd, die zoozeer als hij van de mathesis vervuld is geweest: „voortdurend betooverd door een hem steeds vergezellende Sirene, vergat hij zich te voeden en liet hij de verzorging van zijn lichaam na; en, wanneer hij, zooals dikwijls geschiedde, met dwang naar bad en zalving werd gedreven, teekende hij nog geometrische figuren in de asch en met den vinger trok hij lijnen op het gezalfde lichaam, bezeten als hij was door een groote verrukking en in waarheid een gevangene der Muzen".

Elders²⁾ spreekt Plutarchus nogmaals over de geringe waarde, die Archimedes zelf aan zijn technische vondsten hechtte: „het meeste was bijproduct van een schertsende meetkunde, die hij vroeger eens had beoefend, toen koning Hieroon hem met nadruk had verzocht en overreed, zijn kunst een weinig van het abstracte af en op het concrete te richten en zijn geest te openbaren aan den gewonen mensch, door zich op een of andere tastbare wijze bezig te houden met de eischen der werkelijkheid."

2. ΔΟΣ ΜΟΙ ΠΟΥ ΣΤΩ..... (GEEF MIJ EEN PLAATS, WAAR IK STAAN KAN.....).

Een gelegenheid, waarbij Archimedes aan het verzoek van Hieroon gevolg heeft kunnen geven, schijnt zich te hebben voorgedaan bij den bouw van het beroemde schip Surakosia (later Alexandris), dat de koning, die bekend stond om zijn prachtlievendheid en om zijn neiging, groote bouwwerken te laten uitvoeren, op stapel had laten zetten, om het na voltooiing, vol geladen met levensmiddelen, ten-geschenke te geven aan koning Ptolemaios van Egypte. Over de inrichting van dit befaamde zeekasteel, waarvan de grootte op 4200 ton geschat wordt en dat met alle denkbare wonderen van weelde en techniek toegerust moet zijn geweest, vindt men uitvoerige berichten in de *Deipnosophistai* van Athe-

¹⁾ Plutarchus, *Vita Marcelli* XVII, 6 (307).

²⁾ Plutarchus, *Vita Marcelli* XIV, 4 (305).

PROSPECTUS

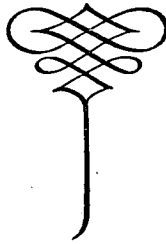
MEETKUNDE VAN DE RUIMTE

EEN LEERBOEK VOOR STEREOMETRIE EN
BESCHRIJVENDE MEETKUNDE VOOR HET
MIDDELBAAR ONDERWIJS

DOOR

Dr. H. J. E. BETH,

DIRECTEUR VAN DE R.H.B.S. TE AMERSFOORT



Prijs van het complete boek,
groot 184 pag.'s geb. f2.90

P. NOORDHOFF N.V. — 1935 — GRONINGEN-BATAVIA

IN DE BOEKHANDEL VERKRIJGBAAR.

In Ned. Oost-Indië uit voorraad verkrijgbaar bij
N.V. Uitgevers-Maatschappij NOORDHOFF-KOLFF,
Laan Holle 7, Batavia C.

VOORBERICHT.

Dit leerboek is te beschouwen als de uitwerking van een denkbeeld, dat ik ontwikkeld heb in Jaargang X van het tijdschrift „Euclides”; een toelichting behoef ik dus hier niet te geven. In de inleiding, die aan de Stereometrie voorafgaat, kom ik op de beginselen van de Planimetrie terug; men zie hiervoor „Euclides”, Jaargang VI (blz. 250).

Ik ben veel dank verschuldigd aan WIJDENES en zijn medewerkers HERREILERS en HARLAAR. Vooreerst heb ik aan werken van eerstgenoemde heel wat mogen ontleen, dat mij te pas kwam. Voorts hebben zij het gehele werk zorgvuldig nagezien, hetgeen leidde tot een aantal waardevolle opmerkingen. Ten slotte dank ik hen voor de welwillendheid, waarmee zij mij van veel tijdrovend en ondankbaar werk ontlast hebben.

Ik beveel dit boek in de welwillende aandacht van de collega's aan, en verzoek hen, mij hun op- en aanmerkingen niet te onthouden.

Januari 1935.

H. J. E. BETH.

I N H O U D

	§§	Blz.
Inleiding	1—14	1
Hoofdstuk		
I. Onderlinge stand van platte vlakken en rechte lijnen	15—30	22
II. Ruimtedelen, veelvlakken; tekenen van ruimtefiguren	31—37	36
III. Loodrechte stand van lijn en vlak	38—43	45
IV. Tweevlakshoeken. Onderling lood- rechte vlakken	44—47	51
V. Loodrechte projecties	48—51	55
VI. Uitvoering van constructies.	52—80	59
VII. Vlakke figuren in orthogonale projectie	81—84	79
VIII. Afstanden. Bol. Cylinder	85—97	86
IX. Prisma's en cylinders. Oppervlakten	98—100	95
X. Hoeken. Kegelvlak.	101—109	100
XI. Pyramiden en kegels. Oppervlakten	110—112	107
XII. Het bolvlak. De drievlakshoek. Opperv- vlakten.	113—128	113
XIII. Constructies van drievlakshoeken. Netwerken	129—135	134
XIV. Congruentie en symmetrie; gelijkvor- migheid van veelvlakken	136—140	139
XV. Regelmatige veelvlakken	141—144	143
XVI. Inhouden	145—156	148
XVII. Algemene herhaling van de Stereo- metrie	157	167
XVIII. Algemene herhaling van de Beschrij- vende meetkunde.	158	176

INLEIDING.

§ 1. De Vlakke Meetkunde, zoals deze ons bij een eerste kennismaking aangeboden wordt, vertoont een aantal leemten. Alvorens tot de Meetkunde van de Ruimte over te gaan (waarbij we de Vlakke Meetkunde nodig zullen hebben), zullen we enkele van die leemten aanwijzen en laten zien, hoe althans in een deel er van kan worden voorzien.

De taak van de meetkunde is de stelselmatige bestudering van de figuren. De figuren en hun eigenschappen worden tot een stelsel verenigd, zodat niet alleen elke figuur en elk van zijn eigenschappen afzonderlijk bekend worden, doch ook het verband blijkt, dat tussen de verschillende eigenschappen bestaat.

Als grondslag van het stelsel, dat men opbouwt, worden een aantal beweringen opgesteld, die men *axioma's* noemt, grondstellingen of niet bewezen stellingen. Uit deze beweringen gaat men nu door redenering andere afleiden. Men mag geen andere hulpmiddelen dan de redenering gebruiken om tot nieuwe uitspraken te komen. Zo mag men bijvoorbeeld geen gebruik maken van wat het oog reeds zonder redenering geneigd is als vaststaand te erkennen: Een nieuwe uitspraak, door redenering uit andere afgeleid, heet een *stelling*; hij drukt een eigenschap van een figuur uit. De redenering, waaruit hij ontstond, heet het *bewijs* van de stelling.

Dat men de axioma's niet bewijst, behoeft niet de vrees te doen ontstaan, dat te eniger tijd zou kunnen blijken, dat zij onjuist zijn. Men mag de axioma's uit de wiskunde niet vergelijken met de hypothesen uit de natuurkunde. De hypothesen in de natuurkunde kunnen op zeker ogenblik onhoudbaar blijken; door het proefondervindelijk onderzoek komen telkens nieuwe waarheden aan het licht; zodra een door de proef nieuw vastgesteld feit in strijd is met de hypothese, moet deze opgegeven worden. In de meetkunde kunnen, zoals we zullen zien, zulke teleurstellingen niet voorkomen.

Toch mag men weer niet zeggen, dat de axioma's waarheden zijn, die onomstotelijk vast staan, en die dus ieder verplicht is, als juist te erkennen. Het stelsel axioma's vormt slechts de grondslag, waarop een bepaald meetkundig stelsel rust. Hun geldigheid behoeft dus slechts erkend te worden door iemand, die dit bepaalde meetkundige stelsel bestuderen wil. Ontkent men de geldigheid van een of meer van onze axioma's, dan kan men een ander stelsel van axioma's nemen, waarop dan ook een ander meetkundig stelsel zal rusten.

Zulk een stelsel axioma's zal aan verschillende voorwaarden moeten voldoen. In de eerste plaats mogen de verschillende axioma's niet met elkaar in strijd zijn. In de tweede plaats mag niet een der axioma's door redenering uit een of meer andere kunnen worden afgeleid; in dat geval zou het bedoelde axioma in werkelijkheid niet een axioma zijn, doch een te bewijzen stelling. In de derde plaats moet het stelsel volledig zijn; het moet voldoende zijn voor de opbouw van het meetkundige stelsel.

Daar er verschillende stelsels van axioma's mogelijk bleken te zijn, die aan deze eisen voldoen, zijn er verschillende meetkundige stelsels, dus verschillende meetkunden, mogelijk. Wanneer wij dus met de bestudering van de meetkunde beginnen, moeten we uit die stelsels een keuze doen. Deze keuze berust op goede gronden. De meetkunde moet als hulpmiddel dienen bij de beschrijving van de natuurverschijnselen; men heeft onderzocht, welke meetkunden daarvoor het best bruikbaar zijn. Die meetkunden hebben nog een verschillende graad van moeilijkheid. De eenvoudigste is de Euclidische meetkunde, aldus genoemd naar EUCLIDES, een wiskundige uit de Oudheid, die dat stelsel tot een hoge graad van volkomenheid ontwikkelde heeft.

Alle begrippen, die we in de meetkunde gebruiken, moeten gedefinieerd zijn; dat wil zeggen, dat er een omschrijving gegeven is, waardoor het begrip van alle andere te onderscheiden is. De definitie bevat dus een of meer eigenschappen van dat begrip, juist voldoende om verwarring met andere begrippen uit te sluiten. Dat een ding met die eigenschap of die eigenschappen inderdaad bestaat, spreekt niet van zelf; dat bestaan moet dus aangetoond worden. We merken op, dat het woord „bestaan” hier een andere zin heeft dan bijvoorbeeld in de natuurkunde, als we daar zeggen, dat er gassen „bestaan”. In de wiskunde bestaat alles, wat denkbaar is, en de dingen, waarover we spreken, bestaan uitsluitend in onze gedachten. Het bewijs van het bestaan van een bepaalde figuur levert men in het algemeen door een constructie te noemen, waardoor, uitgaande van reeds gegeven figuren, de bedoelde figuur voortgebracht wordt.

Indien we het bestaan van een zekere figuur niet aantonen, dan moet dat bestaan in het stelsel van axioma's opgenomen worden.

We beschouwen nu enkele van de leemten, die aan te wijzen zijn in de vlakke meetkunde, zoals deze ons bij de eerste kennismaking aangeboden wordt.

In de eerste plaats maakten we gebruik van een groot aantal niet gedefinieerde begrippen. Zo kan als definitie van rechte lijn gegeven zijn, dat het de lijn is, die een punt beschrijft, dat zich voortdurend in dezelfde richting beweegt. In deze definitie wordt echter gebruik

HOOFDSTUK II.

Ruimtedelen, veelvlakken; tekenen van ruimtefiguren.

§ 31. We denken ons vier punten A, B, C en D, die niet in één plat vlak liggen (fig. 33). In het vlak van de punten A, B en C nemen we een punt E binnen de driehoek ABC en een punt P op het lijnstuk DE. Het punt P ligt nu aan dezelfde zijde van het vlak der drie punten A, B en C als D.

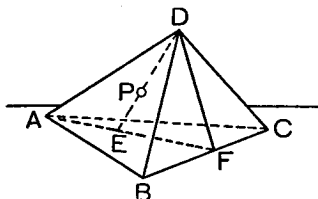


Fig. 33.

P ligt echter ook aan dezelfde zijde van het vlak der drie punten B, C en D als A. Om dit aan te tonen, brengen we het vlak ADE aan. Dit vlak snijdt vlak ABC volgens AE, die BC in F snijdt, en vlak DBC volgens DF. P ligt nu binnen de driehoek ADF, dus aan dezelfde zijde van DF als A en dus ook aan dezelfde zijde van vlak DBC als A. Op dezelfde wijze blijkt, dat P aan dezelfde zijde van vlak ABD ligt als C en aan dezelfde zijde van vlak ACD als B.

De punten, die de genoemde eigenschap met P gemeen hebben, vormen een verzameling, aan welke men de naam geeft van het **viervlak** ABCD. De verzameling wordt begrensd door de driehoeken ABC, ABD, ACD en BCD. Door deze vlakdelen wordt hij van alle zijden begrensd; daarom noemt men het viervlak een **ruimtedeel**.

Het is duidelijk, dat men door samenvoeging van viervlakken ruimtedelen kan doen ontstaan, die door meer dan vier vlakdelen en door andere vlakdelen dan driehoeken begrensd worden.

Ook zullen we ruimtedelen ontmoeten, die door cirkelschijven en door gebogen vlakken begrensd worden.

§ 32. **Definities.** *Onder een veelvlak verstaat men een ruimtedeel, waarvan de begrenzing door vlakdelen gevormd wordt.*

De begrenzende vlakdelen heten zijvlakken van het veelvlak.

De zijden van de zijvlakken heten ribben van het veelvlak. Elke ribbe behoort tot twee zijvlakken.

De hoekpunten van de zijvlakken heten hoekpunten van het veelvlak. Elk hoekpunt is gemeenschappelijk aan minstens drie zijvlakken.

We zullen alleen veelvlakken beschouwen, die de eigenschap

§ 32, 33 II. VEELVLAKKEN; TEKENEN VAN RUIMTEFIGUREN. 37

hebben, dat het veelvlak geheel aan één zijde van elk van zijn zijvlakken ligt.

Een lijnstuk, dat twee hoekpunten verbindt, die niet tot een zelfde ribbe behoren, heet diagonaal van het veelvlak. Ligt een diagonaal in een zijvlak, dan heet hij zijvlaksdiaagonaal; ligt hij niet in een zijvlak, dan lichaamsdiaagonaal.

§ 33. Definities. Een *n*-zijdig prisma is een veelvlak, dat begrensd wordt door vlakdelen, in twee evenwijdige vlakken gelegen en door vlakdelen, in *n* vlakken gelegen, die elkaar volgens evenwijdige lijnen snijden (fig. 34).

De zijvlakken, in de evenwijdige vlakken gelegen, zijn dus veelhoeken, van welke men gemakkelijk de congruentie aantoot; zij heten **grondvlak** en **bovenvlak** van het prisma.

De zijvlakken, in de andere vlakken gelegen, zijn parallelogrammen; zij heten **opstaande zijvlakken**. De ribben, die niet in grond- of bovenvlak liggen, heten **opstaande ribben**. Alle opstaande ribben zijn evenwijdig.

Een vlak door twee opstaande ribben, die niet in één zijvlak liggen, heet **diagonaalvlak**.

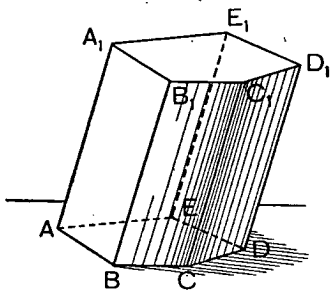


Fig. 34.

Stelling 29. *Twee evenwijdige vlakken, die elk alle opstaande ribben van een prisma snijden, snijden het prisma volgens congruente veelhoeken.*

Het bewijs wordt aan de lezer overgelaten.

De stelling is een bijzonder geval van de algemenere

Stelling 30. *Twee vlakken, die elk alle opstaande ribben van een prisma snijden, snijden het prisma volgens affine veelhoeken.*

Bewijs. We hebben vroeger alleen gesproken over de affiniteit van vlakke figuren, die in hetzelfde platte vlak liggen. Liggen twee figuren in verschillende vlakken, dan noemen we ze affien, indien de figuren, die ontstaan, als we de vlakken laten samenvallen, affien zijn. In de meeste gevallen, zoals ook in het onderhavige, is het voordelig, de vlakken tot bedekking te brengen, door het ene te laten wentelen om de snijlijn.

We zullen namelijk aantonen niet alleen, dat er affiniteit tussen de doorsneden bestaat, doch dat, als we de vlakken U en V van doorsnijding tot bedekking brengen door het ene om de snijlijn te laten wentelen, de verwantschap een perspectievische affiniteit is.

HOOFDSTUK IX.

Prisma's en cylinders. Oppervlakten.

§ 98. **Definities.** De beide delen, waarin een prisma verdeeld wordt door een vlak, dat alle opstaande ribben snijdt, worden **afgeknotte prisma's** genoemd. Een afgeknót prisma wordt dus begrensd door een aantal vlakken, die elkaar volgens evenwijdige lijnen snijden, en nog twee vlakken; van de laatste twee wordt een het **grondvlak**, het andere het **bovenvlak** genoemd (zie fig. 119).

De **hoogte** van een prisma is de afstand van grond- en bovenvlak.

Onder een **rechte doorsnede** van een prisma verstaat men de doorsnede der, desnoods uitgebreide, opstaande zijvlakken van het prisma met een vlak, dat loodrecht staat op de opstaande ribben.

Een prisma heet **recht**, als de opstaande ribben loodrecht op het grondvlak staan.

Een prisma heet **regelmatic**, als het recht is en het grondvlak een regelmatige veelhoek is.

Een **recht blok** is een blok, waarvan een der ribben loodrecht is op een der zijvlakken, dat dan grondvlak heet.

Een **rechthoekig blok** is een recht blok, waarvan het grondvlak een rechthoek is.

Van een rechthoekig blok zijn dus alle zijvlakken rechthoeken. Twee zijvlakken of twee ribben of een zijvlak en een niet daarin liggende ribbe zijn of evenwijdig of loodrecht.

Een **kubus** is een rechthoekig blok, waarvan drie in een hoekpunt samenkomende ribben even lang zijn.

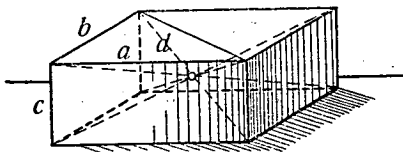


Fig. 120.

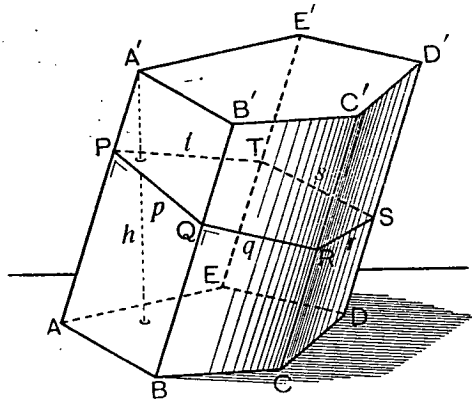


Fig. 119.

Onder **zijdelingse oppervlakte** van een prisma verstaat men de som van de oppervlakten van de opstaande zijvlakken.

naios¹⁾, die ook meedeelt, dat de bouw geleid werd door Archias van Korinthe onder oppertoezicht van Archimedes. Hij vertelt verder dat, toen men niet wist, hoe het schip te water te laten, Archimedes hierin geheel alleen met behulp van enkele werktuigen slaagde. Hetzelfde feit wordt verhaald door Proklos²⁾, die Hieroon het toestel zelf laat bedienen en die hem verbaasd den uitroep laat slaken: „Van dezen dag af moet Archimedes worden geloofd in alles, wat hij zegt”³⁾.

Bij Plutarchus komt de beschrijving van het te water laten van een groot schip in eenigszins anderen vorm voor⁴⁾. Archimedes zou tegen Hieroon hebben beweerd, dat het mogelijk was, met een gegeven macht een gegeven last in beweging te brengen. Hieroon zou hem hebben uitgenoodigd, dit te demonstreeren aan een schip van de koninklijke vloot, dat met moeite aan land was getrokken en daar met veel bemanning en de gewone vracht was belast; waarop Archimedes met kalme handbewegingen een toestel in werking zou hebben gebracht, dat het schip zoo gemakkelijk naar zee trok, alsof het al door het water gleeed. De geschiedenis is vooral beroemd geworden door de gevleugelde woorden: „Geef mij een plaats, waar ik staan kan en ik zal de aarde bewegen”, die Archimedes bij deze gelegenheid zou hebben gesproken.

In den vorm, waarin wij ze hier volgens de overlevering hebben meegedeeld, zijn de berichten over het in beweging brengen van een schip natuurlijk puur fantastisch van aard; toestellen, die zouden kunnen praesteeën, wat Archimedes er van verlangd moet hebben, bestaan alleen in de ideale regionen der rationeele mechanica, waarin wrijving en luchtweerstand zijn opgeheven. Dat echter

¹⁾ Athenaios van Naukratis leefde ca. 200, eerst te Alexandria, later te Rome. Zijn dialoogwerk *Δειπνοσοφισταί* bevat excerpten uit talrijke oude schrijvers over allerlei onderwerpen. De mededeelingen over het schip Surakosia vindt men in *Athenaei Naucratisiae Dipnosophistarum Libri XV*; rec. G. Kaibel (Leipzig 1887). V, 40—44 (206d—209a). Athenaios schijnt zijn beschrijving te hebben ontleend aan een ouderen schrijver, den medicus Moschioon (niet te verwarren met den gelijknamigen gynaecoloog uit de 5e of 6e eeuw). Men kan over het schip ook raadplegen: A. Holm, *Geschichte Siciliens im Alterthum*, III (Leipzig 1898) pag. 39—41. A. Favaro, *Archimede* (Rome 1923) pag. 24.

²⁾ *Procli Diadochi in primum Euclidis Elementorum librum commentarii* rec. G. Friedlein (Leipzig 1873) pag. 63.

³⁾ Ἀπὸ ταύτης τῆς ἡμέρας περὶ παντός Ἀρχιμήδης λέγοντι πιστευτέον. l.c. 63, 24.

⁴⁾ Plutarchus, *Vita Marcelli* XIV, 7 (306).

de verhalen erover een feitelijken grondslag bezitten in de uitvinding of demonstratie van een toestel, waardoor men kracht spaarde bij het bewegen van zware lasten, valt nauwelijks te betwijfelen. En zoo heeft het dan toch wel zin, dat we ons met de klassieke schrijvers verdiepen in de vraag, van welk toestel Archimedes zich in theorie zou hebben kunnen bedienen, om het zware schip in zee te trekken en hoe hij de aarde uit haar hengselen had willen heffen; wanneer hij slechts de plaats had kunnen vinden, waarop hij daarbij kon gaan staan.

De schrijvers, die deze vraag behandelen, zijn in hun antwoorden allerminst eenstemmig. Plutarchus zegt ¹⁾, dat het gebruikte toestel een polypaston (πολύσπαστον) was, d.w.z. een takel met een groot aantal schijven in elk der beide katrolblokken. Tzetzes ²⁾ spreekt in het bijzonder van een trispaston (τρίσπαστον), een takel dus met twee blokken, elk van drie schijven. De ideale verhouding van macht en last zou bij dit toestel 1 : 6 bedragen, wat weinig strookt met zijn bewering, dat er een last van 50.000 medimnen ³⁾ graan mee in beweging zou zijn gebracht. Meer terloops wordt de trispaston ook vermeld door den medicus Oribasios ⁴⁾; hij deelt mee, dat Archimedes het toestel gebruikte, om er schepen mee in zee te trekken en dat de medici het op verkleinde schaal waren gaan toepassen bij het zetten van breuken of luxaties.

Heroon daarentegen behandelt als algemeene oplossing van het probleem, met een gegeven kracht een gegeven last in beweging te brengen, den z.g. Baroukos, d.i. een instrument, waarin een windas wordt gedraaid door een systeem van tandraderen, waarvan het laatste wordt gedreven door een schroef zonder eind ⁵⁾. En waarschijnlijk denkt Athenaios aan een dergelijk toestel, wanneer hij in de *Deipnosophistai* Archimedes een schroef laat gebruiken om het schip Surakosia in beweging te brengen ⁶⁾.

¹⁾ Plutarchus, *Vita Marcelli* XIV, 8 (306).

²⁾ Tzetzes, *Chiliades* II, *Hist.* 35, 107.

³⁾ De medimnos is een Attische korenmaat, groot ca. 54 liter.

⁴⁾ Oribasios is een beroemd geneesheer in de 4e eeuw, lijfarts van keizer Julianus Apostata, schrijver van een groote medische encyclopaedie, de *Ἱατρικαὶ συναγωγαί*. De bedoelde bewijssplaats in *Oribasii Collectionum medicarum reliquiae* ed. J. J. Raeder. IV (Leipzig 1933), 33. De trispaston wordt hier behandeld als uitvinding van Archimedes of Apellis. Op pag. 12 spreekt hij van den polypaston.

⁵⁾ *Heronis Opera* II, 1, 256 seq en III, 306 seq.

⁶⁾ Athenaios, *Deipnosophistai* (zie noot 1 van blz. 169) V, 207, a. b.

Over het bewegen van de aarde lezen we dan weer bij Pappos ¹⁾, die de bekende boven geciteerde formuleering (*Δός μοι ποῦ στῶ καὶ κινῶ τὴν γῆν*) vermeldt; bij Simplicios in den commentaar op de *Physica* van Aristoteles ²⁾, die zegt, dat Archimedes na het construeeren van een weegtoestel, den z.g. charistion (*χαριστίων*) de woorden *πᾶ βῶ καὶ κινῶ τὴν γῆν* (een standplaats! en ik zal de aarde bewegen) zou hebben uitgeroepen; en op twee plaatsen bij Tzetzes, die de eene maal als toestel het trispaston opgeeft ³⁾ en de andere maal de charistion ⁴⁾ en die Archimedes in den Dorischen tongval van Syracuse laat zeggen: *πᾶ βῶ, καὶ χαριστίωνι τὰν γᾶν κινήσω πᾶσαν* (een standplaats! en ik zal de geheele aarde met een charistion in beweging brengen).

Het is nu vooral de vraag, wat we hebben te verstaan onder de charistion, het toestel, dat Simplicios een weeginstrument noemt, dat Tzetzes niet nader omschrijft, maar dat men bij Simon Stevin ⁵⁾ omschreven kan vinden als bevattende „assen met oneijndelicke schrouwen” en waarbij hij zich dus blijkbaar iets in den trant van den Baroukos denkt. Het lijdt nu nauwelijks twijfel, dat in dit meeningsverschil Simplicios gelijk heeft; het ligt namelijk wel zeer voor de hand, om met P. Duhem ⁶⁾ aan te nemen, dat de Charistion identiek is met de z.g. Charasto (ook Carasto, Kanisto of Baracto genoemd), die behandeld wordt in het door Gherard van Cremona uit de Arabische bewerking van Tâbit ibn Qurra in het Latijn overgebrachte werk *Liber Charastonis* en die de balans met ongelijke armen blijkt te zijn, die de Romeinen *statera* noemde, die in het Fransch nog als *balance romaine* bekend staat en die bij ons *unster* heet. De term Charistion, over welks oorsprong veel getwist is, is wellicht oorspronkelijk de naam van den uitvinder of eersten beschrijver van het toestel geweest; zoo kan men althans het eenvoudigst het opvallende feit verklaren, dat een mechanisch instrument een naam draagt, afgeleid van een woord (*χάρις*), dat met

¹⁾ Pappos, *Collectio* VIII, 10; 1060.

²⁾ Simplicios, *In Aristotelis Physicorum Libros Commentaria* ed. H. Diels (Berlijn 1895) pag. 1110.

³⁾ Tzetzes, *Chiliades* III, *Hist.* 66, 62. Hier luiden de woorden *ὅπα βῶ καὶ σαλεύσω τὴν γῆνα*.

⁴⁾ Tzetzes, *Chiliades* II, *Hist.* 35, 130.

⁵⁾ Simon Stevin, *Derde Bouck der Weeghconst. Van de Weeghdaet*. Voorstel 10.

⁶⁾ P. Duhem, *Les origines de la Statique* (Paris 1905) I, 79 seq.

technische aangelegenheden in geenerlei verband staat en dat anderszids geregeld in eigennamen voorkomt ¹⁾).

Indien deze interpretatie juist is, zouden dus de hyperbolische woorden van Archimedes over het bewegen van de aarde geïnspireerd zijn geweest door het in de Charistion tot uiting komende hefboomprincipe, dat in de omgekeerde evenredigheid van macht en last met de afstanden hunner richtlijnen tot het steunpunt bestaat. En inderdaad heeft men in latere tijden, ook in verband met het feit, dat in een over mechanica handelend werk van Archimedes (*Evenwichten van vlakke figuren*) de theorie van den hefboom behandeld wordt, de befaamde uitspraak in den regel met deze theorie in verband gebracht. Niettemin lijkt het twijfelachtig, of hiermee de klassieke overlevering juist wordt weergegeven; immers Plutarchus en Heroon die over een polyspaston of een trispaston spreken en Proklos, die heelemaal geen speciaal toestel vermeldt, kenden het bestaan van de eigenschappen van den hefboom evengoed als de latere schrijvers en zij zouden niet de minste reden hebben gehad, om van de traditie af te wijken, indien deze ondubbelzinnig over het gebruik van een charistion had bericht.

Veeleer lijkt het, of de tegenstrijdigheid der verschillende berichten steun biedt aan de opvatting, dat Archimedes zijn uitspraak over het bewegen van de aarde niet gedaan heeft naar aanleiding van een bepaald toestel, maar op grond van een algemeen mechanisch inzicht, dat hij door de bestudeering van verschillende reeds vóór hem bekende of door hem uitgevonden instrumenten (windas, katrol, hefboom, tandrad, schroef enz.) had verworven. Dit inzicht, dat later geformuleerd zou worden in den z.g. Gulden Regel der Mechanica en dat tot volkomen ontwikkeling zou komen in het principe der virtueele verplaatsingen, leerde de principieele mogelijkheid, de macht, die voor het bewegen van een bepaalde last moet worden aangewend, naar willekeur te verkleinen, wanneer men zich slechts een evenredige vergrooting van den weg, waarover zij moet worden uitgeoefend, wil getroosten en wees dus ook in principe het middel aan, om de aarde met een willekeurige macht vanaf een vast buitenaardsch standpunt in beweging te brengen. Het is alleszins aannemelijk, dat Archimedes dit principe aan de Syracusanen heeft gedemonstreerd door met takels, tandraderen of schroeven zonder

¹⁾ b.v. Χαρισθένης, Χαρίστιος, Χαριτώ e.a.

eind een groote last in beweging te brengen en dat die last in de phantasie der latere generaties is gegroeid tot het zwaargeladen schip, dat een onmisbaar element der Archimedes-legende is geworden.

3. HET KRANSPROBLEEM.

Een even onvervreemdbare trek van de legendaire Archimedes-figuur als de uitlating over het bewegen van de aarde is het verhaal van het z.g. kransprobleem. De geschiedenis is overbekend; ze moge hier echter, in den vorm, waarin de oudste bron¹⁾ haar vermeldt, nogmaals een plaats vinden: koning Hieroon wil uit dankbaarheid voor het slagen van een onderneming een gouden krans²⁾ wijden aan de onsterfelijke goden. De krans blijkt, voltooid, het gewicht van het beschikbaar gestelde goud te bezitten; echter rijst er verdenking, dat een deel van het goud door een hoeveelheid zilver van hetzelfde gewicht is vervangen³⁾. De koning, niet in staat, den bewerker van den krans tot bekentenis te brengen, vraagt Archimedes om een overtuigend middel, de beschuldiging te onderzoeken. Terwijl de wijze zich nu, steeds peinzend over het gestelde probleem, op zekeren dag in een bad begeeft, wordt hij er zich plotseling van bewust, dat, naarmate hij dieper in de badkuip afdaalt, er steeds meer water over den rand uitloopt; dit geeft hem ineens het inzicht, hoe hij de gestelde vraag zal kunnen beantwoorden en de vreugde hierover vervult hem in zoo sterke mate, dat hij opspringt

¹⁾ Vitruvius, *De Architectura* IX, 3. ed. F. Krohn (Leipzig 1912) pag. 198. Vitruvius is een Romeinsch architect onder keizer Augustus.

²⁾ Het was een krans (στέφανος) en geen kroon, zooals vaak vermeld wordt. Dit verschil is, zooals Ch. M. van Deventer, *Grep en uit de Historie der Chemie* (Haarlem 1924), pag. 114 opmerkt, van belang, omdat de wijkrans als heilig voorwerp niet aan chemische analyse mocht worden onderworpen. Het geheele kransprobleem wordt door van Deventer in zijn Zesde Voordracht (pag. 108—127) uitvoerig behandeld.

³⁾ In de Archimedes-vertaling van Paul Ver Eecke (*Introduction XLII*) staat te lezen, dat de ontdekking van het bedrog geschiedde, *lorsqu'on éprouva l'or par la pierre de touche*. Bij Vitruvius staat hiervan echter niets en, zooals van Deventer (l.c. pag. 115) betoogt, is de droge toets, die alleen in aanmerking komt, in het onderhavige geval niet bruikbaar geweest en om haar geringe nauwkeurigheid en omdat de techniek toen reeds middelen bezat, om de oppervlakte van een alliage van zuiver goud te maken.

en onder den uitroep *εὕρηκα, εὕρηκα* (ik heb het gevonden!) naakt naar huis snelt.

Aldus Vitruvius, die dan verder uiteenzet, hoe Archimedes nu het verworven inzicht in praktijk bracht. Hij zou dan een klomp goud en een klomp zilver hebben genomen, elk even zwaar als de krans; achtereenvolgens in een vat vol water gedompeld, deed elk van deze klompen een zeker volume water uitvloeien, dat gemeten werd, door na te gaan, hoeveel water er telkens noodig was, om na verwijdering van het stuk metaal het vat weer tot den rand te vullen. Toen nu deze proef herhaald werd met den krans, bleek d'ze meer water te doen uitvloeien dan het goud en minder dan het zilver. Hieruit kon Archimedes nu bepalen, hoeveel zilver bij het goud in den krans gemengd was ¹⁾.

Een andere voorstelling van het geval wordt gegeven in een Latijnsch leerdicht over maten en gewichten, het *Carmen de Ponderibus*, dat vroeger werd toegeschreven aan den grammaticus Priscianus (5e eeuw na Chr.) ²⁾. In dit gedicht, dat voor de metrologie van belang is door de nauwkeurige uiteenzetting van Romeinsche en Grieksche matenstelsels, die het bevat, wordt de door Archimedes gevolgde methode als volgt uiteengezet:

In een van de schalen van een gelijkarmige balans ligt een libra zuiver goud, in de andere een libra zilver. Men dompelt beide onder water en bepaalt het gewichtsverschil; stel dit drie drachmae. Neem nu de te onderzoeken krans en een even zwaar stuk zilver en bepaal opnieuw het gewichtsverschil bij dezelfde handelwijze; zij dit 18 drachmae; er zitten dan in den krans zes librae zuiver goud. Men overtuigt zich gemakkelijk, dat inderdaad de verhouding van het

¹⁾ Zijn de volumina van den krans en van de evenzware stukken goud en zilver resp. V , V_1 , V_2 en bevat de krans een gewicht x aan goud en een gewicht y aan zilver, dan vindt men de betrekking

$$\frac{x}{y} = \frac{V_2 - V}{V - V_1}$$

²⁾ Dit gedicht werd voor het eerst gedrukt in 1470 in het thans zeer zeldzame werk *Volumen de octo partibus orationis*. De verzen, die betrekking hebben op het kransprobleem zijn later gepubliceerd in de Archimedes-editie van Torelli (zie noot 6 van blz. 166) pag. 364. Het geheele *Carmen de Ponderibus* is te vinden in *Metrologicorum Scriptorum reliquiae* ed. F. Hultsch (Leipzig 1864). II, 88 seq. De verzen, die op Archimedes betrekking hebben, zijn vs. 124—162. Over de redenen, om het gedicht niet aan Priscianus toe te schrijven ibidem II, 24 seq.

waargenomen gewichtsverschil tot het gewichtsverschil per gewichtseenheid het aantal librae zuiver goud aangeeft ¹⁾).

Men brengt gewoonlijk de oplossing van het kransprobleem door Archimedes in verband met de door hem gevonden hydrostatische wet over de opwaartsche kracht, die een in een vloeistof gedompeld lichaam ondervindt en beschouwt dan de ervaring in het bad als den oorsprong van het inzicht, dat in die wet geformuleerd wordt. Deze opvatting vindt blijkbaar in het bericht van Vitruvius geen steun: het uitstroomen van water uit het bad leert niets omtrent de opwaartsche kracht van een in water gedompeld lichaam en de methode van bepaling van een soortelijk gewicht, die er, volgens Vitruvius, uit was afgeleid, berust dan ook niet, zooals die in het *Carmen de Ponderibus* op hydrostatische weging, maar op het volumetrisch beginsel, dat in den pyknometer wordt toegepast ²⁾. Tot verheldering van het inzicht in het ontstaan der beroemde hydrostatische wet draagt de bekende anecdote dus niet bij.

4. ARCHIMEDES ALS TECHNICUS.

De schertsende meetkunde, die we Plutarchus hoorden noemen als bron van zoo menige bewonderde uitvinding van Archimedes, schijnt, zoo men af mag gaan op de verhalen, die daarover in de oudheid in omloop zijn, zijn gedachten toch sterker vervuld te hebben dan de met Platonische geringschatting der techniek behepte wijsgeer van Chaeronea wel wil toegeven. We berichten hier over drie aan hem toegeschreven mechanische constructies ³⁾, de cochlias, het planetarium en het hydraulische orgel, om daarna aan het door hem vervaardigde oorlogstuig een afzonderlijke bespreking te wijden.

¹⁾ Zijn de soortelijke gewichten van goud en zilver resp. s_1 en s_2 , dan vindt men voor het gewichtsverschil per gewichtseenheid van de beide stoffen bij weging onder water $\left(\frac{1}{s_2} - \frac{1}{s_1}\right)$. Weegt de krans G gewichtseenheden, waarvan x aan goud, dan wordt het gewichtsverschil met G gewichtseenheden zilver onder water $x \cdot \left(\frac{1}{s_2} - \frac{1}{s_1}\right)$ waaruit de vermelde conclusie volgt.

²⁾ Deze methode van volumebepaling wordt door Heroon, *Metrica* II, 20 (*Heronis Opera* III, 138) met den naam van Archimedes in verband gebracht; hij drukt zich echter vaag hierover uit: „sommigen vertellen, dat Archimedes de methode had verzonnen.”

³⁾ Voor berichten over een door Archimedes geconstrueerd wateruurwerk zie men Hoofdstuk II.

a) DE COCHLIAS.

De cochlias of schroef van Archimedes (ook limaçon of schroefpomp genoemd) is een toestel voor het omhoogbrengen van water, dat volgens Diodoros in Egypte werd gebruikt voor irrigatie van terreinen, die niet rechtstreeks door het Nijlwater werden overstroomd¹⁾ en in Spanje voor het leegpompen van zilvermijnen²⁾. Volgens Athenaios³⁾ zou Archimedes het zelf hebben toegepast om er de ruimen van het schip Surakosia mee droog te houden. Beide schrijvers zeggen, dat Archimedes er de uitvinder van was; de juistheid van deze bewering is echter aan twijfel onderhevig. Het is niet onmogelijk, dat het toestel van veel ouderen datum is en dat Archimedes het zelf in Egypte heeft leeren kennen⁴⁾. Het valt ook op, dat noch Straboon⁵⁾, noch Philoon van Byzantium⁶⁾, noch Vitruvius⁷⁾, die het alle drie vermelden of beschrijven, er den naam van Archimedes mee in verband brengen.

Een uitvoerige, maar bij gemis aan een figuur niet geheel duidelijke beschrijving van de cochlias vinden wij bij Vitruvius:

Op een houten cylinder, waarvan de hoogte evenveel voeten bedraagt als de diameter vingerbreedten, zijn acht schroeflijnen getrokken, die van de hoekpunten van een regelmatigen veelhoek in het bovenvlak uitgaan en waarvan de spoed gelijk is aan den omtrek van den grondcirkel. Op deze schroeflijnen zijn van buig-

¹⁾ Diodoros, *Bibliotheca Historica* I, 34. Een andere voorstelling geeft A. Favaro, *Archimede* (Rome 1923), pag. 23: het toestel zou gebruikt zijn voor het droogleggen van de plassen, die na het wegtrekken van de overstroming achterbleven.

²⁾ Diodoros, *Bibliotheca Historica* V, 37. Het gebruik in Spanje wordt volgens F. M. Feldhaus, *Die Technik der Antike und des Mittelalters* (Potsdam 1931) pag. 152, bevestigd door een mededeeling van Poseidonios.

³⁾ Zie noot 1 van blz. 169.

⁴⁾ De Egyptische oorsprong wordt echter weer ontkend door F. M. Feldhaus, loc. cit. (noot 2) pag. 137.

⁵⁾ *Strabonis Geographica*, XVII, 2, 4; 30. rec. G. Krämer (Berlijn 1852) pag. 377. Straboon is een Grieksch geograaf (66 v. Chr. — 24 n. Chr.).

⁶⁾ Philo Bizantius ed. Pfeiffer III, 330; geciteerd bij Ver Eecke, *Archimede. Introduction* XV. Philoon is een mechanicus, die waarschijnlijk ca. 200 na Chr. leefde.

⁷⁾ Vitruvius, *De Architectura* X, 6. ed. F. Krohn (Leipzig 1912) pag. 237. In andere edities X, 11. b.v. M. *Vitruvii Pollionis de Architectura libri decem*. (Amsterdam 1649) pag. 217.

zame takken schroefdraden aangebracht, die samen de imitatie van het slakkenhuis (*κοχλίας*, *coclea*) vormen, waaraan het instrument zijn naam ontleent. De hoogte van deze schroefdraden is zoo groot, dat de diameter van den verdikten cylinder gelijk is aan het achtste deel van de cylinderas ¹⁾. De ontstane kanalen zijn weer met hout gedekt, zoodat er acht schroefvormig gewonden buizen ontstaan. Al het hout is in pek gedrenkt; het geheel is door ijzeren banden omgeven.

De cylinder wordt nu draaibaar opgesteld, zoodat de as een helling ten opzichte van den horizon heeft, gelijk aan den kleinsten hoek van den rechthoekigen driehoek met zijdenverhouding 3 : 4 : 5. Wordt hij nu bij een geschikt gekozen peil van indompeling van het grondvlak onder de oppervlakte van het uit te pompen water in de goede richting gedraaid, nl. zoo, dat de opening van iedere buis naar beneden is gekeerd, wanneer zij in de vloeistof treedt, dan blijkt het water in de buizen op te stijgen.

Het is een verschijnsel, dat niet ten onrechte door Galilei ²⁾ als „niet slechts verwonderlijk, maar zelfs wonderbaarlijk” (*non solo maravigliosa, ma miracolosa*) gekenschetst wordt; er zit inderdaad iets paradoxaals in het feit, dat het water omhoog wordt bewogen, terwijl het toch onder invloed van de zwaarte voortdurend naar beneden stroomt. Op de nauwkeurige verklaring hiervan, die o.a. rekenschap moet kunnen geven van het verband tusschen de grootten van de hellingshoeken van de cylinderas ten opzichte van den horizon en van de schroeflijnen ten opzichte van het cylindergrondvlak en het peil van indompeling van het grondvlak, zullen we hier niet ingaan. In beginsel komt zij hierop neer, dat bij de gekozen waarden het beginstuk van iedere buis op het oogenblik, dat de mond daarvan buiten de vloeistof treedt, achterover helt, zoodat het water, dat er in stond, zoolang de mond onder het vloeistof-niveau was, naar binnen stroomt. De volgende winding van de buis ligt dan ten opzichte van dit water juist zoo als de eerste ten opzichte van het wateroppervlak lag en het water komt zoodoende in steeds hoger gelegen windingen terecht.

De beschrijving van Vitruvius is in het bijzonder onduidelijk, waar hij het heeft over de wijze, waarop het toestel in beweging

¹⁾ Uti longitudinis octava pars fiat summa crassitudo; loc. cit. pag. 238. l. 14—15.

²⁾ Galilei, *Della Scienza Meccanica e delle utilita' che si traggono dagl' Instrumenti di quella*. Bologna 1655, pag. 31.

werd gebracht¹⁾. Men kan er slechts met zekerheid uit opmaken, dat dit geschiedde door voortdurend te trappen tegen spaken, die op een of andere wijze aan den cylinder bevestigd waren. Dat deze wijze van aandrijven inderdaad werd toegepast, wordt bevestigd door een vondst, die enkele jaren geleden bij opgravingen te Pompei is gedaan: een aldaar blootgelegd fresco-vertoon een afbeelding van een horizontaal geplaatste cochlias, die door een slaaf, gezeten op een balk boven den cylinder, met regelmatige trapbeweging in draaiing wordt gehouden²⁾.

β) HET PLANETARIUM.

Bij tal van klassieke schrijvers kan men berichten aantreffen over de door Archimedes geconstrueerde sferen, waarin de bewegingen der hemellichamen door een mechanisme werden nagebootst³⁾. Volgens een bericht van Cicero⁴⁾ had Marcellus bij de verovering van Syracuse twee van zulke werkstukken als eenige buit voor zich zelf behouden; het eene, dat hij in den tempel van Virtus had laten opstellen, was blijkbaar een dichte sterrenglobe, waarop de verschillende constellaties waren afgebeeld; het andere echter, dat later in het bezit is gekomen van C. Sulpicius Gallus⁵⁾ moet, volgens de beschrijving, een volledig bolvormig open planetarium zijn geweest, waarin bij één omwenteling zon, maan en planeten dezelfde bewegingen ten opzichte van de sfeer der vaste sterren uitvoerden, als ze dat aan den hemel in één dag doen en waarin men bovendien de opvolgende fasen en de verduisteringen van de maan kon waarnemen.

Archimedes heeft blijkbaar vooral door de constructie van het laatstgenoemde instrument diepen indruk op de klassieke wereld gemaakt; dichte globes, die, eenparig rondwentelend, de dagelijk-

¹⁾ Vitruvius. *De Architectura* X, 6. ed. F. Krohn (Leipzig 1912) pag. 238, 18—22.

²⁾ *Notizie degli scavi di antichità, pubblicati della R. Accademia dei Lincei* 1927. De afbeelding is gereproduceerd door Gino Loria, *Archimede* (I. *Curiosi della Natura* III, Milaan 1928), pag. 64.

³⁾ Over astronomisch werk van Archimedes wordt gesproken in Hoofdstuk XIII, 1.

⁴⁾ Cicero, *De re publica* I, 14. cf. *Tusculanae Disputationes* I, 25. *De natura deorum* II, 34.

⁵⁾ C. Sulpicius Gallus, beoefenaar der sterrekunde, was consul in 166 v. Chr.

sche bewegingen der vaste sterren nabootsten, waren immers reeds lang bekend: Cicero vermeldt er in de boven geciteerde passage een van Thales, die later door Eudoxos van Knidos zou zijn beschreven en door Aratos in een astronomisch poëem¹⁾ was bezongen; bij anderen geldt Anaximander als eerste vervaardiger. Dat Archimedes er echter in slaagde, de onderling onafhankelijk en sterk uiteenlopende bewegingen van zon, maan en planeten door een mechanisme tegelijk met de wenteling van de sterrenspheer voor te stellen, scheen van bovenmenselijk vernuft te getuigen. Geen wonder, dat de literatuur menige herinnering aan deze daad heeft bewaard: Claudianus, in een bekend epigram²⁾, schildert de verbazing van Iuppiter, wanneer hij het werk zijner handen door de kunst van den Syracusaanschen grijsaard in een glazen bol nagebootst ziet; wellicht doelt ook Ovidius erop, wanneer hij in de *Fasti*³⁾ bij de beschrijving van den tempel van Vesta over de kleine afbeelding van den onmetelijken bol spreekt, die door Syracusaansche kunst in metaal staat opgesloten; we vinden het toestel verder o.a. vermeld bij Martianus Capella⁴⁾ en bij Cassiodorus⁵⁾ en nog in verschillende passages van philosophischen of apologetisch-theologischen aard: Cicero gebruikt het⁶⁾ als argument tegen de Epicuræers; Sextus Empiricus⁷⁾, in zijn werk tegen de wetenschap, vindt er aanleiding in, om tegenover de materialisten de superioriteit van het scheppende geestelijke principe boven de

¹⁾ Aratos van Soli (ca. 275 v. Chr.) schreef een leerdicht over astronomie, getiteld *Phaenomena*. Hierin komt echter geen beschrijving van de bedoelde globe voor. *Arati Phaenomena* ed. E. Maass. (Berlijn 1893).

²⁾ *Claudii Claudiani Carmina*; rec. J. Koch (Leipzig 1893). *Carmina Minora* LI. Claudianus leefde ca. 400 na Chr.

³⁾ *Ovidius, Fasti* VI, 277.

⁴⁾ Felix Minaeus Martianus Capella, *De nuptiis Philologiae et Mercurii Libri VIII*. ed. A. Dieck (Leipzig 1925). II, 212. VI, 583. Martianus Capella leefde ca. 470 na Chr. te Karthago.

⁵⁾ *Cassiodori Variae* rec. Th. Mommsen. *Monumenta Germ. Hist. Auct. Antiq.* XII. (Berlijn 1895). I, 45; pag. 41. Cassiodorus was een hooggeplaatst ambtenaar onder de eerste Oost-Gothische koningen; hij leefde ca. 490—580.

⁶⁾ Cicero, *De natura deorum* II, 34.

⁷⁾ Sextus Empiricus. *Adversus Physicos* I, 115. *Opera*; ed. J. A. Fabricius. (Leipzig 1718). pag. 577. Sextus Empiricus is een scepticus in de 3e eeuw na Chr.

materie te betoogen; Lactantius¹⁾ bestrijdt er, op een wijze, die tot in onzen tijd gebruikelijk is (wanneer de mensch zoo iets kan voortbrengen, zou God dan niet de voorbeelden hebben kunnen scheppen van wat het vernuft van zijn creatuur vermag na te bootsen?) de atheïsten mee.

Archimedes zelf schijnt aan de constructie van zijn planetarium grootere waarde te hebben toegekend dan aan eenig ander technisch werk. Hij heeft er namelijk blijkbaar een uitzondering voor gemaakt op zijn gewoonte, over zijn uitvindingen en mechanische werkstukken niets te boek te stellen. Onder zijn verloren gegane werken wordt althans een geschrift *περὶ σφαιροποιίας* (*Over het vervaardigen van sferen*) vermeld²⁾, dat bezwaarlijk iets anders kan hebben behandeld dan de manier, waarop hij toestellen als zijn planetaria samenstelde.

Wellicht zal dit werk ook inlichtingen hebben verschaft inzake de veel besproken vraag, hoe het toestel, dat Cicero beschrijft, eigenlijk in beweging werd gebracht en gehouden. Het meest waarschijnlijk is het, dat dit door een van de hydraulische mechanismen is geschied, die Heroon in zoo groote verscheidenheid beschrijft en waarvan de toepassing althans voor den tijd van keizer Augustus vaststaat³⁾.

γ) HET HYDRAULISCH ORGEL.

Zooals boven reeds bleek, komen de berichten over de technische praestaties van Archimedes niet zelden voor bij schrijvers, waar men ze allerminst zou verwachten: zooals Lactantius in een theologisch werk met apologetische bedoelingen over het planetarium schreef, gebruikt Tertullianus⁴⁾ in zijn geschrift *De Anima* een ander wonder der Archimedische techniek, om het wezen der ziel te verduidelijken. Het is het z.g. hydraulische orgel (waarbij de lucht,

¹⁾ *L. Caeli Firmiani Lactanti Divinae Institutiones* II, 5, 18. rec. S. Brandt *Opera, Pars I. Corpus Script. Eccl. Lat. XIX.* (Weenen 1890). Lactantius leefde ca. 300 na Chr.

²⁾ Dit werk wordt op gezag van Karpos van Antiochie vermeld door Pappos, *Collectio* VIII, 3; 1026.

³⁾ Zie hierover nader A. Favaro, *Archimede* (Rome 1923) pag. 40 seq.

⁴⁾ Tertullianus, *De Anima* II, 14; ed. J. H. Waszink. Amsterdam 1933. pag. 58.

die de pijpen voedde, boven water in een windketel werd samengeperst), waarvan hij de grootte verscheidenheid en ingewikkeldheid der verschillende onderdeelen, die nochtans tot één geheel verwerkt zijn, als allerverwonderlijkst kunstwerk roemt, om het daarna te gebruiken als beeld van de eenheid der ziel onder de veelheid van hare functies.

Men kan hieruit opmaken, dat in de oudheid de constructie van een dergelijk instrument op naam van Archimedes stond; niet, dat hij als uitvinder ervan gold. De eer daarvan wordt door verschillende schrijvers, met name Plinius Secundus ¹⁾, Vitruvius ²⁾ en Athenaios ³⁾ aan den Alexandrijnschen werktuigkundige Ktesibios ⁴⁾ toegeschreven.

5. DE VERDEDIGING VAN SYRACUSE.

De meest verspreide faam, die den naam van Archimedes in de oudheid omgeeft, is hem echter niet zoozeer te beurt gevallen om de tot dusver beschreven vreedzame uitvindingen en werkstukken, dan wel om het werkzaam aandeel, dat hij in de verdediging van Syracuse tegen de Romeinen heeft genomen. Volgens Plutarchus ⁵⁾ had hij op verzoek van koning Hieron reeds vroeger oorlogstuig voor offensief en defensief gebruik geconstrueerd; er was echter, zoolang deze regeerde, nooit aanleiding geweest, het te gebruiken. Toen de Romeinen nu echter in 214 v. Chr. het beleg om de stad sloegen, troffen zij een geduchten en onverwachten tegenstander aan in de persoon van den reeds hoogbejaarden mathenaticus, die, als men de berichten gelooven mag, persoonlijk het gebruik van zijn werktuigen heeft geleid.

Men vindt over deze zijde van het werk van Archimedes uitvoerige inlichtingen bij drie geschiedschrijvers, bij Polubios ⁶⁾, bij

¹⁾ C. Plinii Secundi. *Naturalis. Historiae Libri XXXVII*; ed. C. Mayhoff. (Leipzig 1909) VII, 38. Vol. II, 43—44.

²⁾ Vitruvius, *De Architectura* IX, 8. ed. F. Krohn (Leipzig 1912) pag. 219.

³⁾ Athenaios, *Deipnosophistai* (zie noot 1 van blz. 169) IV, 174b—d.

⁴⁾ Waarschijnlijk een tijdgenoot van Archimedes.

⁵⁾ Plutarchus, *Vita Marcelli* XIV, 9 (306).

⁶⁾ Polubios van Megalopolis, geb. ca. 204 v. Chr. Achaeisch staatsman, schrijver van het historisch werk *πραγματική ιστορία* in 40 boeken, die ten deele bewaard zijn gebleven. Hij staat in den tijd het dichtst bij de Syracusaansche gebeurtenissen. Zijn verhaal erover in *Polybii Historiae* VIII, 5 seq. ed. F. Hultsch. (Berlijn 1868) I, 623 seq.

Livius¹⁾ en bij Plutarchus²⁾). Zij verhalen van krachtige ballistische werktuigen, die vanuit de verte zware steenblokken op de Romeinsche legioenen deden neerkomen en die in samenwerking met geschut voor kleineren afstand, de z.g. schorpioenen, die hun projectielen door schietgaten in de muren wierpen, den vijand aan de landzijde afweerden. Uitvoerig behandelen zij verder de verdediging aan de zeezijde, waar de muren der voorstad Achradina steil in het water afdaalden en waar de Romeinsche veldheer Marcus Claudius Marcellus den aanval van de vloot persoonlijk leidde. Hier waren, behalve de verschillende soorten geschut, kranen in actie, die, naar buiten gedraaid, groote steenen of zware stukken lood op de naderende Romeinsche schepen lieten neervallen of die met een ijzeren hand de voorstevens optilden, om de vaartuigen dan plotseling weer op het water te laten neerploffen. Op deze wijze wist Archimedes zelfs de aanvallen te verijdelen, die met behulp van de z.g. sambuka (σαμβύκη³⁾), een breede stormtrap, die op twee aan elkaar verbonden penteren snel omhoog geheschen, den toegang tot de muren mogelijk moest maken, werden gedaan.

Op de Romeinsche soldaten moet dit alles een zoo sterken indruk hebben gemaakt, dat zij, zoodra ze maar een koord of een stuk hout buiten de muren zagen uitsteken, de vlucht namen, uitroepende, dat Archimedes weer een nieuwe machine had uitgevonden, om hen te verdelen⁴⁾. Marcellus zelf, hoezeer ook in zijn plannen gedwarsboomd, schijnt vol bewondering voor zijn mathematischen tegenstander te zijn geweest. „Zullen we”, laat Plutarchus hem schertsend tot zijn eigen technici zeggen⁵⁾ „maar niet ophouden met te vechten tegen dezen geometrischen Briareos⁶⁾), die de zee uitlepelt met onze schepen, die de sambuka met schande heeft

¹⁾ Titus Livius Palatinus (59 v. Chr.—17 na Chr.) schreef een geschiedenis van Rome (*Ab urbe condita.*) in 142 boeken, die ten deele bewaard zijn gebleven. Over Archimedes XXIV, 34.

²⁾ Plutarchus, *Vita Marcelli* XV—XVII (306—308) Over de verdediging van Syracuse door Archimedes bericht ook Silus Italicus in zijn epos *Punica*, XIV, 292 seq. ed. L. Bauer (Leipzig 1892) II, 92.

³⁾ Dit oorlogstuig, dat zijn naam ontleende aan de gelijkenis met een muziekinstrument, wordt uitvoerig beschreven door Polubios, *Historiae* VIII, 6.

⁴⁾ Plutarchus, *Vita Marcelli* XVII, 3 (307).

⁵⁾ Plutarchus, *Vita Marcelli* XVII, 1 (307):

⁶⁾ Briareos of Aigaioon is een van de drie Hekatoncheiren, reuzen met honderd armen, zonen van Ouranos en Gaia.

weggeranseld en verdreven en die door de vele projectielen, die hij gelijktijdig op ons doet neerkomen, de mythische hekatoncheiren overtreft?" Inderdaad zijn de Romeinen er ten slotte eerst na een langdurig beleg, waarover men bij Polubios en Livius nadere bijzonderheden kan nalezen, erin geslaagd, de stad te veroveren.

Van de traditioneele voorstellingen, die over de verdediging van Syracuse in omloop zijn, maken ook de befaamde brandspiegels deel uit, waarmee Archimedes de zonnestralen zoo intens op de schepen der Romeinen zou hebben geconcentreerd, dat zij in brand vlogen. Dit verhaal, waarvan de technische onwaarschijnlijkheid in het oog springt, komt bij geen der drie boven geciteerde historici voor en het verdient reeds daarom veel minder vertrouwen dan de mededeelingen over de ballistische werktuigen, die, ondanks kennelijke overdrijving, heel goed een kern van waarheid kunnen bezitten. De oudste plaats, waar over het in brand steken van Romeinsche schepen gesproken wordt, staat bij Lukianos¹⁾, die echter van spiegels niet rept en alleen meedeelt, dat Archimedes de vijandelijke trieren kunstmatig in brand deed vliegen; hiermee kan ook wel bedoeld zijn, dat hij ze op de wijze, waarop hij dit volgens de door Leonardo bewaarde mededeeling in Spanje zou hebben gedaan, met brandende stoffen bespoot. Dat hij spiegels zou hebben gebruikt, wordt pas uitdrukkelijk gezegd door den medicus Galenos²⁾ en door den Byzantijschen bouwmeester Anthemios van Tralles, die in de 6e eeuw een boek over brandspiegels schreef, dat van belang is voor de geschiedenis van de focale eigenschappen der kegelsneden. Volgens hem³⁾ zou het toestel van Archimedes opgebouwd zijn geweest uit een groot aantal kleine vlakke spiegels. In latere eeuwen wordt over deze spiegels veel vaker gesproken. Eustathius⁴⁾

¹⁾ Lukianos van Samosata, rhetor en filosoof, leefde in de 1e eeuw na Chr. De bedoelde plaats is *Hippias*, cap. 2. ed. N. Nilén (Leipzig 1906); pag. 19.

²⁾ Galenos (129—199) is na Hippokrates de grootste medicus der oudheid. Zijn mededeeling over Archimedes staat in *De Temperamentis* III, 2 *Galen Opera ex octava Juntarum editione*. Venetie 1609. I, 23.

³⁾ Afkomstig uit Tralles; † 534. De mededeeling over Archimedes in *περί παραδόξων μηχανημάτων* gepubliceerd in *ΠΑΡΑΔΟΞΟΓΡΑΦΟΙ. Scriptorum rerum mirabilium graeci* ed. A. Westermann (Brunswijk 1839) p. 153, 156.

⁴⁾ *Eustathii Archiepiscopi Thessalonicensis Commentarii ad Homeri Iliadem* II, 3 (Leipzig 1828). Eustathius was aartsbisschop van Thessalonica in de 12e eeuw.

vermeldt ze in zijn commentaar op de Ilias, wanneer hij de theorie bespreekt, dat de onuitbluschbare vuurgloed, die schild en helm van den held Diomedes omstraalde¹⁾, door terugkaatsing van zonlicht zou zijn teweeggebracht. Natuurlijk verzuimt Tzetzes niet, erover te spreken²⁾ en ook Zonaras³⁾ zegt op gezag van Dio Cassius⁴⁾ uitdrukkelijk, dat Archimedes de zonnestralen op een spiegel opving, dat hij de lucht door haar eigen dichtheid en door de gladheid van den spiegel deed ontvlammen en dat hij ieder schip, dat in de baan van dit vuur lag, daardoor in brand kon steken. Volgens hem zou Proklos in 514 hetzelfde strijdmiddel te Constantinopel hebben toegepast, toen hij de stad hielp verdedigen tegen de vloot van Vitalianus.

In de 17e en 18e eeuw is de kwestie, of het aan Archimedes toegeschreven effect inderdaad practisch te bereiken is, met voorliefde door verschillende onderzoekers behandeld. We zullen hierop niet ingaan en volstaan dus met vermelding van de beschouwingen van Athanasius Kircher in zijn *Ars Magna Lucis et Umbrae*⁵⁾, van de experimenteele onderzoekingen van Buffon, die behandeld worden in zijn *Histoire Naturelle*⁶⁾ en van die van Peyrard, welke verwerkt zijn in het aanhangsel van zijn Archimedes-vertaling⁷⁾. Bij alle drie valt op te merken, dat zij in overeenstemming met Anthemios het doel trachten te bereiken door een combinatie van een groot aantal vlakke spiegeltjes, die onafhankelijk van elkaar in alle richtingen draaibaar zijn.

¹⁾ *Ilias* V, 4.

²⁾ Tzetzes, *Chiliades* I; *Hist.* 35, 151. IV, *Epistola* vs. 506—507.

³⁾ Ioannes Zonaras is een Byzantijsche monnik, die in de 1e helft van de 12e eeuw een historisch werk schreef over het tijdvak vanaf de schepping tot 1118, getiteld *Επιτομή ιστοριών. Ioannis Zonarae Annales* IX, 4, ed. M. Pinder (Bonn 1844) II, 210.

⁴⁾ Dio Cassius schreef in het eind van de 2e eeuw een werk over Romeinsche geschiedenis, waarvan Zonaras veel gebruik heeft gemaakt.

⁵⁾ *Athanasii Kircheri Fuldensis Buchonis S. J. Ars magna Lucis et Umbrae in decem Libros digesta.* (Rome 1646) Liber X; Pars III. Kircher is een Duitsche Jezuïet, hoogleeraar te Wurzburg, later aan het Collegium Romanum te Rome.

⁶⁾ Buffon, *Histoire naturelle générale et particulière . . . Supplément* I. (Parijs 1774) *Sixième Mémoire. Expériences sur la lumière et sur la chaleur qu'elle peut produire.* pag. 412 seq.

⁷⁾ *Oeuvres d'Archimède traduites littéralement, avec un Commentaire* par F. Peyrard . . . suivies d'un mémoire du Traducteur, sur un nouveau Miroir Ardent (Paris 1807); pag. 543.

6. DE DOOD VAN ARCHIMEDES.

Bij de plundering van Syracuse, waartoe Marcellus, naar het heet onder tranen en niet zonder dat hij tal van beperkende bepalingen had gesteld, verlof had moeten geven¹⁾, is, ondanks de uitdrukkelijke opdracht, hem te sparen, ook Archimedes om het leven gekomen en wel onder omstandigheden, die in hoofdtrekken onuitwischaar in het geheugen van de wereld bewaard zijn gebleven.

Wel zijn echter in den loop der eeuwen de details van het verhaal eenigszins verbasterd; dit geeft aanleiding, om nog eens aandachtig de berichten te beschouwen, die klassieke schrijvers over de geschiedenis meedeelen; de typeerende anecdote heeft ten slotte even goed recht op historische zuiverheid als het bewijsbare feit.

De oudste bewijsplaats staat bij Livius²⁾, Archimedes zou, terwijl hij onder het rumoer, dat de verovering van de stad vergezelde, met gespannen aandacht figuren beschouwde, die hij in het stof had geteekend³⁾, gedood zijn door een soldaat, die niet beseftte, wien hij voor zich had. Plutarchus heeft verschillende lezingen: volgens twee daarvan⁴⁾ zou de oude mathematicus met oog en gedachte zoozeer verdiept zijn geweest in de beschouwing van een figuur, dat hij niets van den inval der Romeinen had gemerkt; er zou toen een soldaat op hem afgekomen zijn met het bevel, mee te gaan naar Marcellus; Archimedes zou dit hebben geweigerd, zoo lang hij zijn probleem niet had opgelost, waarop de soldaat hem vertoornd zou hebben gedood. Volgens anderen zou deze reeds met doodsbedreigingen op hem af zijn gekomen en zou Archimedes hem ernstig hebben verzocht, nog even met de uitvoering van die bedreiging te wachten, tot het probleem was opgelost en het bewijs ervan voltooid. Terwijl hij volgens een derde lezing, met mathematische instrumenten op weg zijnde naar Marcellus, door soldaten, die meenden, dat hij goud bij zich droeg, zou zijn omgebracht.

Bij de lectuur deze berichten vallen voornamelijk twee dingen op; vooreerst, dat men bij geen van deze oudste berichtgevers de gevleugelde woorden aantreft, die Archimedes tot zijn

¹⁾ Plutarchus, *Vita Marcelli* XIX, 1 (308).

²⁾ Livius, *Ab urbe condita* XXV, 31.

³⁾ *intantum formis, quas in pulvere descriperat.*

⁴⁾ Plutarchus, *Vita Marcelli* XIX, 4, 5 (308—309).

belager zou hebben gesproken en die in den vorm *noli turbare circulos meos* (wil mijne cirkels niet verstoren) algemeen bekend zijn geworden; en vervolgens, dat er nergens sprake is van het teekenen van figuren in het zand op den grond, waarvan de in latere eeuwen gangbare overlevering gewaagt. De oudste bron, die den bedreigden wiskundige bepaalde woorden in den mond legt, is Valerius Maximus ¹⁾, die hem, terwijl hij de handen beschermend over zijn figuur uitstrekt, laat zeggen: *noli obsecro istum disturbare* (breng dit alsjeblieft niet in de war). Terwijl hij bij Tzetzes ²⁾, nog meer ongedwongen en natuurlijk, zijn bedreiger toesnauwt: Ἀπόστηθι, ὦ ἄνθρωπε, τοῦ διαγράμματος μου (man, blijf van mijn figuur af). De opvatting echter, dat Archimedes zijn figuren in het zand op den grond zou hebben geteekend (op zich zelf onwaarschijnlijk genoeg, als men de complicatie van zijn bewijzen bedenkt) heeft geen anderen grondslag dan het bericht van Valerius Maximus, waarin, blijkbaar slechts door een vergissing, inplaats van over figuren „in pulvere” over figuren „in terra” wordt gesproken ³⁾.

Want met dit *pulvis*, waarvan behalve Livius ook Cicero ⁴⁾ spreekt, wordt zonder eenigen twijfel iets heel anders bedoeld dan het zand op den grond. Het is namelijk bekend, dat de Grieksche wiskundigen hun figuren maakten in een oppervlak van gladgestreken zand of glasstof, dat een bak vulde, die, evenals het bekende rekeninstrument, abacus heette ⁵⁾. Die vulling nu werd *pulvis* ge-

¹⁾ Valerius Maximus schreef tusschen 26 en 32 een historisch werk *Factorum et dictorum memorabilium Libri 9.*, waarin VIII, 7, 7 ed. C. Kempf (Leipzig 1888) p. 390 het verhaal van den dood van Archimedes wordt gedaan.

²⁾ Tzetzes, *Chiliades II, Hist.* 35, 140.

³⁾ loc. cit. (noot 1): at is, dum animo et oculis in terra defixis formas describit, militi qui praedandi gratia domum inreperat strictoque super caput gladio quisnam esset interrogabat, propter nimiam cupiditatem investigandi quod requirebat nomen suum indicare non potuit, sed protecto manibus pulvere „noli”, inquit, „obsecro istum disturbare” ac perinde quasi neglegens imperii victoris obtruncatus sanguine suo artis suae lineamenta confudit.

⁴⁾ Cicero, *De finibus bonorum et malorum* V, 19, 50.

⁵⁾ De meest sprekende bewijspplaats is wel de mededeeling van den H. Hieronymus in zijn commentaar op Ezechiel Cap. 4, waar sprake is van het afbeelden van de stad Jerusalem op een tichelsteen; hij spreekt daar van een πλινθεῖον quem nos laterculum et abacum appellare possumus; in cuius pulvere solent geometrae grammas i. e. lineas radiosque describere. *Operum D. Hieronymi Quintus Tomus Commentarios in prophetas quos maiores vocant, continet.* Bazel 1553. pag. 387. col. b.

noemd, wat o.a. ook de bij Cicero voorkomende uitdrukking *pulvis eruditus* als metafoor voor wiskunde¹⁾ en zijn aanduiding van Archimedes als *homunculum e pulvere et radio*²⁾ verklaart.

We zullen ons dus Archimedes in het uur van zijn dood moeten voorstellen, niet buitenshuis over den grond gebogen (daar zou het krijgsrumoer hem ook niet zoo gemakkelijk ontgaan zijn), maar binnenkamers gezeten aan een tafeltje, waarop de abacus (die nogal zwaar moet zijn geweest) geplaatst was.

Deze gedachtengang nu wordt op de meest verrassende wijze ondersteund door een in Herculaneum gevonden mozaiek; dat blijkbaar het befaamde tooneel van den dood van Archimedes in beeld brengt; een afbeelding ervan is tegenover ons titelblad geplaatst. Het is afkomstig uit de nalatenschap van Jérôme Bonaparte, is later in bezit gekomen van Frau E. Scabell te Wiesbaden en is in 1924 door F. Winter gepubliceerd³⁾. De uitgever houdt het voor een afbeelding van een schilderij uit het begin van den hellenistischen tijd, dat wellicht nog onder den verschen indruk van het lot van den geleerde gemaakt zou kunnen zijn. Men ziet een man achter een tafeltje, waarop een rechthoekige bak geplaatst is, verontwaardigd opzien naar een krijgsman, die met getrokken zwaard naast hem staat en hem blijkbaar beveelt, mee te gaan. De bedreigde breidt zijn handen beschermend over zijn werk uit en men kan er nauwelijks aan twifelen, of hij spreekt hier de woorden, die den Romein zoozeer vertoornden en die aan zijn kostbaar leven een eind maakten.

Volgens een mededeeling van Plutarchus⁴⁾ zou Archimedes bij zijn leven den wensch hebben uitgesproken, dat op zijn graf een cylinder met ingeschreven bol zou worden geplaatst met een inscriptie, waarin de door hem ontdekte verhouding van de inhoud en de twee lichamen⁵⁾ werd opgegeven. Het schijnt, dat Marcellus, die zich den dood van zijn grooten tegenstander erg moet hebben aangetrokken en die eer bewees aan zijn nagelaten betrekkingen, voor de vervulling van dien wensch zorg heeft gedragen. Cicero vertelt

1) Cicero, *De natura deorum* II, 18, 48.

2) Cicero, *Tusculanae Disputationes* V, 23.

3) Franz Winter, *Der Tod des Archimedes*. 82 Winkelmannsprogramm der Archäologischen Gesellschaft zu Berlin (Berlijn 1924).

4) Plutarchus, *Vita Marcelli* XVII, 7 (307).

5) *Over Bol en Cylinder* I, 34; Porisma.

althans, ¹⁾ dat hij, toen hij in 75 v. Chr. als quaestor op Sicilie kwam, erin geslaagd is, aan de poorten van Achradina een grafzuil te vinden, overwoekerd door struikgewas en doornen, waarop de figuur van bol en cylinder was afgebeeld.

HOOFDSTUK II.

DE WERKEN VAN ARCHIMEDES. HANDSCHRIFTEN EN UITGAVEN.

Archimedes was, zooals we reeds zagen, gewend, zijn mathematische geschriften toe te zenden aan zijn vakgenooten te Alexandria, Konoon, Dositheos, Eratosthenes, die blijkbaar zorg droegen voor verdere verspreiding. De zendingen waren vergezeld van inleidende brieven, waarin een overzicht van de te bewijzen stellingen wordt gegeven en waarin niet zelden ook herinnerd wordt aan wat bij vorige gelegenheden meegedeeld was. Daardoor weten we eenige bijzonderheden over de volgorde, waarin hij zijn vondsten heeft gedaan en over de wijze, waarop hij ze wereldkundig maakte.

Het blijkt, dat hij gewoonlijk eerst alleen stellingen zond met verzoek, die met andere wiskundigen te bespreken en hen er toe aan te sporen, zelf de bewijzen ervan te zoeken; later volgden dan de volledige verhandelingen. De toezending daarvan schijnt grootendeels eerst na den dood van Konoon te hebben plaats gehad: de inleiding van een der oudste werken *Quadratuur van de Parabool* begint nl. met woorden, gewijd aan de nagedachtenis van den bewonderden vriend en bevat tevens het voorstel aan Dositheos, om voortaan als tusschenpersoon met de Alexandrijnsche mathematici op te treden ²⁾. Meer dan eens spreekt Archimedes het daarna bij nieuwe zendingen nog uit, dat Konoon, zoo hij in leven ware gebleven, ongetwijfeld in staat zou zijn geweest, de gedane vondsten te waardeeren en de ontbrekende bewijzen te leveren ³⁾. Of Dositheos in het laatste minder goed is geslaagd of dat hij alleen een

¹⁾ Cicero, *Tusculanae Disputationes* V, 23.

²⁾ *Opera* II, 262.

³⁾ *Opera* I, 4. II, 2.

begrijpelijke sterke belangstelling in de door den ontdekker zelf toegepaste methoden bezat, kan in het midden blijven; telkens weer echter dringt hij aan op toezending der volledige bewijzen ¹⁾). Die wensch schijnt niet steeds even snel vervuld te zijn geworden; uit de inleiding tot het werk *Over Spiralen* blijkt, dat er tusschen de eerste publicatie van stellingen en problemen uit *Over Bol en Cylinder* en de mededeeling der bewijzen en oplossingen vele jaren verloop zijn; wat Archimedes hierdoor motiveert, dat hij gaarne aan iederen mathematicus het genoegen heeft willen gunnen, de dingen zelf uit te vinden ²⁾). Eenig boosaardig opzet heeft daarbij niet ontbroken; hij onthult namelijk bij dezelfde gelegenheid ³⁾), dat twee der vroeger uitgesproken proposities over den bol onjuist zijn en dat hij er die bij gedaan had, om de menschen, die altijd van alles zeggen, dat ze het gevonden hebben, maar die nooit bewijzen leveren, te verleiden tot de bewering, dat ze iets onmogelijks hadden ontdekt ⁴⁾).

De door Archimedes gezonden werken schijnen te Alexandria wel bestudeerd te zijn, maar nooit tot één corpus te zijn vereenigd ⁵⁾; daardoor zijn ze ongetwijfeld ten deele verloren gegaan. Door mededeelingen van Heroon, Pappos en Theoon van Alexandria staat echter vast, dat er in de 3e en 4e eeuw na Chr. nog meer over was, dan wij thans bezitten. Dat meerdere is waarschijnlijk in 391 bij den brand van het Serapeion ⁶⁾ verloren gegaan. Ook die werken, die in de Oudheid al voldoende algemeen verspreid waren, om door dergelijke catastrophen niet in hun bestaan te worden bedreigd, zijn al vroeg blootgesteld geweest aan verminking en verwaarloozing. Een door Archimedes in *Over Bol en Cylinder* aangekondigd

¹⁾ *Opera* I, 168: II, 2.

²⁾ *Opera* II, 2.

³⁾ *Opera* II, 4.

⁴⁾ De bedoelde proposities luiden als volgt:

α) Wanneer een bol door een plat vlak in ongelijke deelen wordt verdeeld, is de reden van de inhouden der segmenten de dubbelreden van die hunner oppervlakten.

β) Van alle bolsegmenten met dezelfde oppervlakte heeft het segment, welks pijl het vierde deel van den diameter is, den grootsten inhoud.

⁵⁾ De nu volgende mededeelingen over de geschiedenis van de Archimedes handschriften zijn ontleend aan de Prolegomena van de tweede tekst-editie van Heiberg. *Opera* III, i-xcviij.

⁶⁾ Tempel van Serapis van Alexandria met beroemde bibliotheek.

bewijs ¹⁾ was reeds in de 2e eeuw voor Chr. niet meer aanwezig ²⁾; en zijn verhandeling *Cirkelmeting*, die ten duidelijkste een fragment van of een excerpt uit een grooter werk is, heeft in de tijden, waarvan de commentator Eutokios kennis heeft, blijkbaar nooit in anderen vorm bestaan, dan waarin wij haar uitsluitend kennen ³⁾. Het schijnt ook, dat men zich al spoedig in het bijzonder heeft toegelegd op de studie van de meer elementaire werken, met name *Over Bol en Cylinder*, *Cirkelmeting* en *Evenwichten van vlakke figuren* en dat de dieper doordringende onderzoekingen daarbij min of meer in vergetelheid zijn geraakt; het valt op, in hoe vage termen een schrijver als Heroon van Alexandria over de vondsten van Archimedes kan spreken ⁴⁾ en hoe gering de invloed van zijn hydrostatische beschouwingen in de geheele oudheid gebleven is ⁵⁾; men krijgt zelfs den indruk, dat de gezaghebbende en nauwkeurige Eutokios, die de drie genoemde werken uitvoerig toelicht, andere thans beroemde geschriften, met name *Quadratuur van de Parabool* en *Over Spiralen* niet of niet anders dan van hooren zeggen gekend heeft ⁶⁾.

Intusschen getuigt de samenstelling der bedoelde commentaren wel van een groeiende behoefte, althans de meer elementaire deelen van het werk van den grooten wiskundige grondig te leeren kennen. Die behoefte is vooral tot uiting gekomen in de school der Byzantijnsche wiskundigen Anthemios ⁷⁾ en Isidoros ⁸⁾, die in 532 door keizer Iustinianus werden belast met de verbouwing der Hagia

¹⁾ *Opera* I, 192; l. 5—6.

²⁾ *Opera* III, 130; l. 19. Eutokios deelt hier mee, dat het bedoelde bewijs in geen enkelen codex op te sporen is geweest en dat Dionusodorus en Diokles (die beiden in de 2e eeuw na Chr. leefden) daarom getracht hebben, de ontbrekende redeneering aan te vullen.

³⁾ *Opera* III, 228.

⁴⁾ Zie b.v. de voorrede van het tweede boek der *Metrica* van Heroon. *Heronis Opera* III, 92. Er is hier sprake van inhoudsbepalingen bij bollen, kegels en cylinders en Heroon zegt nu, dat sommigen de methoden daarvoor, als zijnde verrassend, op Archimedes terugbrengen. Hij laat echter in het midden, of dit terecht geschiedt. Even vaag is al de wijze, waarop hij in het laatste caput der *Metrica* (II, 20, *Heronis Opera* III, 138) over het hydrostatisch werk van Archimedes spreekt.

⁵⁾ Bij de commentatoren van Aristoteles, Alexandros van Aphrodisias, Themistios en Simplicios is van bekendheid zelfs met de beginselen der hydrostatica van Archimedes niets te bespeuren.

⁶⁾ *Opera* III, xcii.

⁷⁾ Zie noot 3 van blz. 183.

⁸⁾ Afkomstig uit Milete; kreeg na 534 de leiding van den bouw der Hagia Sophia.

Sophia te Constantinopel en die, hetzij door de practische problemen der architectuur tot theoretische studie gedreven, hetzij door de liefde tot de zuivere mathesis bezield, voor het werk van Archimedes groote belangstelling aan den dag hebben gelegd. Isidoros heeft door zijn leerlingen blijkbaar vooral de werken *Over Bol en Cylinder* en *Cirkelmeting* met de daarop betrekking hebbende commentaren van Eutokios laten bestudeeren¹⁾. Aan dit gebruik dezer werken voor onderwijsdoeleinden is het waarschijnlijk ook toe te schrijven, dat juist deze alleen uit het door Archimedes gebezigde Siculodorische dialect in het Attisch zijn overgebracht.

De school van Isidoros heeft zich voor de ontwikkeling der wiskunde een niet geringe verdienste verworven, door in een tijd, waarin de bronnen der mathematische scheppingskracht waren uitgedroogd, althans de waarde van de groote werken uit het verleden te beseffen en voor de bestudeering en het behoud daarvan zorg te dragen. Haar traditie voortzettend heeft men zich ook te Constantinopel het eerst bewust tot taak gesteld, de verspreide geschriften van Archimedes te verzamelen en aan dat streven danken de belangrijkste codices, waaruit de avondlandsche wiskunde eens de kennis van het werk van haar grooten leermeester zou putten, hun ontstaan. In de 9e eeuw heeft namelijk de encyclopaedist Leoon van Thessalonika, bijgenaamd de Iatrosophist of de Filosoof²⁾, die door zijn werkzaamheid nieuw leven in de Byzantijsche wetenschap gebracht heeft, zorg gedragen voor de samenstelling van een manuscript (in de notatie van Heiberg codex A³⁾) dat het archetype geworden is van alle handschriften, waaruit vóór 1906 de Grieksche

¹⁾ Deze commentaren bevatten in de handschriften aan het slot de mededeeling, dat ze zijn „herzien door onzen leermeester, den Milesischen mechanicus Isidoros”. Vroeger hield men dit voor een mededeeling van Eutokios, wat echter chronologisch onmogelijk is, omdat deze een tijdgenoot was van Ammonios, den leerling van Proklos en leermeester van Simplicios; hij moet dus aan het eind van de 5e eeuw geboren zijn en was dus zeker geen leerling van Isidoros. De toevoeging is blijkbaar afkomstig van een leerling der Byzantijsche school.

²⁾ Deze Leoon, niet te verwarren met den gelijknamigen keizer Leo VI, bijgenaamd de Filosoof, was aartsbisshop van Thessalonika en hoogleeraar aan de Magnaura-universiteit te Constantinopel. Hij leefde onder de keizers Theophilus (829—842) en Michael III (842—867). Hij is vooral bekend om zijn medische encyclopaedie, de *Σύνοψις ἱατρικῆς*.

³⁾ Opera I, V seq en III, *Prolegomena*.

tekst van Archimedes kon worden opgemaakt. Uit Constantinopel is zeer waarschijnlijk ook de verzameling van werken op het gebied van mechanica en optica afkomstig (bij Heiberg codex $\mathcal{G}$); die we in de 13de eeuw bij de samenstelling van de eerste vertaling van Archimedes in het Latijn zullen zien gebruiken, alsmede het befaamde handschrift (bij Heiberg codex C genoemd), waarvan de ontdekking in het eind van de 19e eeuw een even belangrijke als onverwachte bijdrage tot de kennis van zijn werken geleverd zal blijken te hebben.

We schetsen thans, op grond van de philologische onderzoekingen van Heiberg, in het kort de fata van deze verschillende handschriften. De codices A en $\mathcal{G}$ schijnen hun intrede in West-Europa te hebben gedaan in den tijd, dat onder de heerschappij der Noormannen en hun opvolgers uit het huis Hohenstaufen op Sicilie een nieuw centrum van cultuur opbloede en de eerste begeerte ontwaakte, om het geestelijk leven te verrijken met de schatten der Grieksche wetenschap. Na den slag van Benevento (1266), waarin de laatste der Duitsche heerschers over het Siciliaansche Rijk, Manfred, kroon en leven verloor, zijn, met de geheele bibliotheek van den overwonnenen, ook de beide Archimedes-handschriften overgegaan in het bezit van den Paus. Aan het eind van de 14e eeuw moet A in particuliere handen zijn geraakt; vast staat verder, dat hij in 1491 eigendom was van den Italiaanschen humanist Giorgio Valla. Uit dezen tijd dateert een opsomming van zijn inhoud¹⁾, waaruit blijkt, dat hij de volgende werken bevatte: *Over Bol en Cylinder, Cirkelmeting, Over Conoiden en Sphaeroiden, Over Spiralen*²⁾, *Evenwichten van vlakke figuren, De Zandrekenaar, Quadratuur van de Parabool*, waaraan waren toegevoegd de commentaren van Eutokios en het werk *De mensuris* van Heroon. Valla schijnt van plan te zijn geweest, een volledige Latijnsche editie van deze werken tot stand te brengen; daarvan is echter niets gekomen; men vindt alleen fragmenten uit Archimedes in het na zijn dood (1500) gepubliceerde werk van zijn hand *De expetendis et fugiendis rebus* (Venetie 1501).

Na den dood van Valla is het manuscript voor 800 goudstukken aangekocht door Alberto Pio, vorst der Carpensen, van wien het in 1550 werd geerfd door zijn neef, den kardinaal Rodolfo Pio; deze

¹⁾ *Opera* III, xi.

²⁾ Dit werk wordt blijkbaar bedoeld met de aanduiding *De revolutionibus ad Dositheim*.

Verschenen:

INLEIDING TOT DE DIFFERENTIAAL- EN INTEGRAALREKENING

Met toepassingen op verschillende gebieden

door **Dr. H. J. E. BETH**

Prijs *f* 10.50, geb. *f* 11.50

Antwoorden *f* 1.00

Zo juist verscheen:

BEKNOPT MEETKUNDE

door **P. WIJDENES**

Eerste deel, Achtste druk

Prijs met gradenboog en overzicht gec. *f* 1.70

Verschenen:

C. J. ALDERS

DRIEHOEKSMETING

voor M.O. en V.H.O., gec. *f* 1.25

MEETKUNDIGE VRAAGSTUKKEN

Met de bewijzen van de stellingen en een aantal uitgewerkte voorbeelden voor het Middelbaar en Voorbereidend Hoger onderwijs

door **P. WIJDENES**

Deel I. Prijs met gradenboog en 2 driehoeken gec. *f* 1.40

Deel II. Gec. *f* 2.40



Leraren, die deze vraagstukken niet ontvingen, worden verzocht, een pres. ex. aan te vragen.

UITGAVEN P. NOORDHOFF N.V.—GRONINGEN-BATAVIA

COMPOSITIO MATHEMATICA

QUOD PERIODICUM INTERNATIONALE
EDUNT

R. BAER, S. BERNSTEIN, L. BIEBERBACH, E. BOREL, L. E. J. BROUWER, E. CARTAN, E. ČECH, J. G. VAN DER CORPUT, G. DOETSCH, TH. DE DONDER, L. P. EISENHART, G. FEIGL, G. FUBINI, M. FUJIWARA, R. GARNIER, G. H. HARDY, A. HEYTING, EINAR HILLE, H. HOPF, G. JULIA, A. KHINTCHINE, S. LEFSCHETZ, T. LEVI-CIVITA, P. LEVY, A. LOEWY, R. v. MISES, P. MONTEL, J. v. NEUMANN, N. E. NÖRLUND, A. OSTROWSKI, F. RIESZ, M. RIESZ, W. SAXER, F. SEVERI, W. SIERPINSKI, W. SÜSS, G. SZEGÖ, T. TAKAGI, L. TONELLI, G. VALIRON, CH.-J. DE LA VALLEE-POUSSIN, O. VEBLÉN, R. WAVRE, R. WEITZENBÖCK, E. T. WHITTAKER, B. M. WILSON, J. WOLFF.

ADMINISTRANT

L. BIEBERBACH, *Berlin*; L. E. J. BROUWER, *Amsterdam*;
TH. DE DONDER, *Bruxelles*; G. JULIA, *Paris*; B. M. WILSON, *Dundee*.

Ieder deel zal in drie afleveringen verschijnen en 30 vel (480 blz.) bevatten;
de prijs per deel bedraagt 20 Gulden.

De inschrijving kan geschieden door bemiddeling van elke boekhandel
of direct door den uitgever P. NOORDHOFF, Groningen.

VOLUMEN 1

FASCICULUS 3

INDEX

Henri Milloux, Sur les valeurs asymptotiques des fonctions entières d'ordre infini	305
St. Warschawski, Zur Randverzerrung bei konformer Abbildung	314
W. L. Ferrar, Summation Formulae and their Relation to Dirichlet's Series	344
A. Khintchine, Metrische Kettenbruchprobleme	361
I. Petrowsky, Zur ersten Randwertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung . . .	383
G. F. C. Griss, Differentialinvarianten von relativen Vektoren	420
Rudolf Witt, Eine relativgeometrische Erweiterung der affinen Flächentheorie	429
H. Boegehold und M. Herzberger, Kann man zwei verschiedene Flächen durch dieselbe Folge von Umdrehungsflächen scharf abbilden?	448

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN-BATAVIA

WISKUNDE, Kv.

Schriftelijke opleiding, desgewenst aangevuld met mondelinge lessen, of uitsluitend mondelinge opleiding door

K. HARLAAR

Inlichtingen bij P. Wijdenes, Jac. Obrechtstraat 88, Amsterdam Zuid.