

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDAC-
TIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN
J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

MET MEDEWERKING VAN

Dr. H. J. E. BETH
DEVENTER

Dr. E. J. DIJKSTERHUIS
OISTERWIJK

Dr. G. C. GERRITS
AMSTERDAM

Dr. B. P. HAALMEIJER
AMSTERDAM

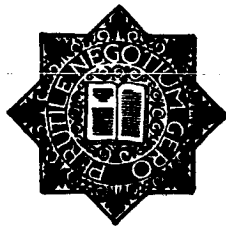
Dr. C. DE JONG,
LEIDEN

Dr. W. P. THIJSSEN
BANDOENG

Dr. P. DE VAERE
BRUSSEL

Dr. D. P. A. VERRIJP
ARNHEM

11e JAARGANG 1934/35, Nr. 3.



P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN

Prijs per jg. van 18 vel f 6.—. Voor intekenaars op het
Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde en Christiaan Huygens f 5.—

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijks afleveringen, samen 18 vel druks. Prijs per jaargang *f* 6.—. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6.—) of op „Christiaan Huygens” (*f* 10.—) zijn ingetekend, betalen *f* 5.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrucken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

I N H O U D.

	Blz.
K. F. HARTUNG, Die zu einem regelmässigen Sechs-, Acht-, Zwölf- und Zwanzigflach ein- und umbeschriebenen reziproken regulären Polyeder (<i>Vervolg</i>)	97—104
Ir. D. J. KRUIJTBOSCH, De eerste kennismaking met de logaritmen	105—117
Dr. D. P. A. VERRIJP, Resultaten bij het onderwijs in de wiskunde	118—123
Boekbesprekingen	124—129
Ingekomen Boeken	
Dr. H. C. SCHAMHARDT, Vragen van het mondeling Staatsexamen	130—144

kegel ergeben sich dadurch, dass man je 2 auf einem Durchmesser unserer Hilfskugel gelegene Mittelpunkte der 8 Umkreise verbindet.

Bei mehr als drei durch einen Punkt gehenden Geraden mit *beliebigen Richtungen* gibt es keine Lösung unserer Aufgabe, es sei denn, dass solche Gerade in besonderen Fällen auf Geraden Kreiskegeln liegen.

Die gewonnenen Resultate wenden wir im folgenden auf die Diagonalen der regelmässigen Körper an.

4. Man kann das Diagonalentripel des regelmässigen Oktaeders und das Diagonalenquadrupel des Würfels nach dem vorhergehenden nur um die Achsen der von ihnen bestimmten geraden Kreiskegel so bewegen, dass jede Diagonale mit der entsprechenden des Ausgangstripels bzw. -quadrupels gleiche Winkel bildet. Das Diagonalen-Tripel des regelmässigen Oktaeders liegt auf 4 verschiedenen geraden Kreiskegeln, deren Achsen die von dem Körpermittelpunkt aus auf die Seitenebenen des regulären Oktaeders gefällten Lote sind. Beim Würfel liegen nur auf dreifache Weise 4 Endpunkte der durch den Mittelpunkt gehenden Diagonalen in einer Grenzebene auf einem Kreise und ihre Gegenpunkte in der gegenüberliegenden Seitenfläche ebenfalls auf einem Kreise. Durch die 4 Diagonalen des Würfels gehen demzufolge drei gerade Kreiskegel, deren Achsen die von dem Körpermittelpunkt aus auf die Seitenebenen des Würfels gefällten Lote sind.

Es ist aber beim regelmässigen Dodekaeder bzw. Ikosaeder nicht möglich, 6 bzw. 10 Endpunkte der durch den Körpermittelpunkt gehenden Diagonalen so auszuwählen, dass diese Punkte in einer Ebene auf einem Kreise und ihre Gegenpunkte in einer entsprechenden Gegenebene ebenfalls auf einem Kreise liegen. Man kann also diese beiden regulären Polyeder bei festem Körpermittelpunkt nicht so bewegen, dass hierbei alle Diagonalen mit ihren entsprechenden Ausgangsdiagonalen gleiche Winkel bilden. Hieraus folgt, dass sich dem regelmässigen Dodekaeder und Ikosaeder nur durch Verbinden der benachbarten Flächenmitten je ein reziproker regelmässiger Körper einbeschreiben lässt.

5. Um für den Würfel alle einbeschriebenen regulären Oktaeder herzuleiten, gehen wir von dem regelmässigen Achtfach aus, dessen Ecken in den Mitten der Würfelseitenflächen liegen, und lassen dies der Reihe nach um die vier Achsen der von den Oktaederdiago-

nal en gebildeten geraden Kreiskegel — das sind die 4 Würfelkörperdiagonalen. — rotieren. Bei jeder erreichten Stellung unterwerfen wir die Oktaederdiagonalen einer solchen gleich- oder gegensinnigen Streckung, dass dann ihre Endpunkte in je eine entsprechende Würfebene zu liegen kommen. Es ergibt sich als geometrischer Ort für die Ecken der dem Würfel einbeschriebenen regelmässigen Achteckfläche die Durchdringung der von den Oktaederdiagonalen gebildeten 4 geraden Kreiskegel mit den Würfelseitenflächen. Jeder dieser 4 Kegel enthält als Mantellinien die drei aufeinander senk-

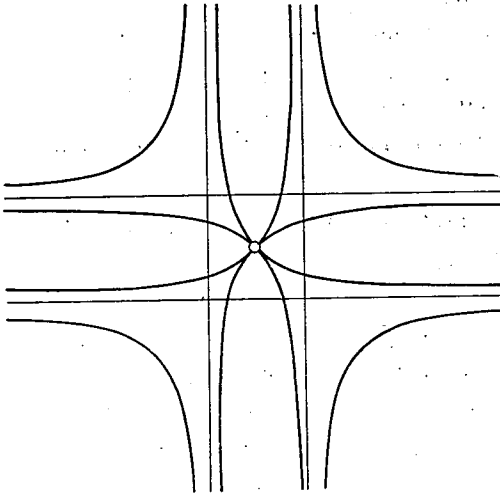


Fig. 1.

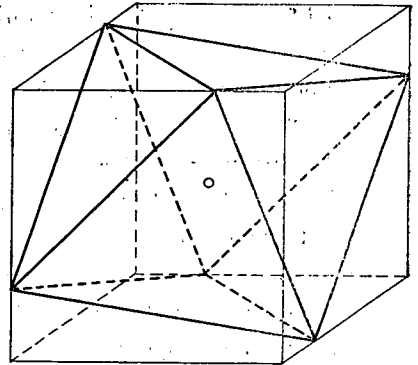


Fig. 2.

recht stehenden Oktaederdiagonalen. Kegel, die drei aufeinander senkrecht stehende Kanten enthalten, heissen *gleichseitige Kegel*. ¹⁾ Jede Würfelgrenzfläche ist senkrecht zu je einer Erzeugenden der 4 betreffenden gleichseitigen Kegel. Da jede auf einer Erzeugenden eines gleichseitigen Kegels senkrechte Ebene aus der Fläche eine gleichseitige Hyperbel ausschneidet, ²⁾ so folgt, dass jede Würfelseitenfläche von den 4 geraden Kreiskegeln in 4 gleichseitigen Hyperbeln geschnitten wird. Die 4 gleichseitigen Hyperbeln

¹⁾ Die Gleichung eines solchen Kegels kann für rechtwinklige räumliche Koordinaten auf die Form gebracht werden:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}, \text{ wo } \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c^2} \text{ ist.}$$

²⁾ Ein elementarer Beweis für diesen Satz ist in 7. angegeben.

einer Seitenfläche, die Figur 1 wiedergibt, schneiden sich im Mittelpunkt der Fläche. Sie teilen ferner die Quadratseiten im Verhältnis $1 : 3$. Diese Punkte führen auf ein besonderes regelmässiges Oktaeder: Man trägt von zwei Gegeneckpunkten eines Würfels aus auf jeder Kante, die von einem unter ihnen ausgeht, drei Viertel der Kante ab und erhält damit die Eckpunkte eines einbeschriebenen regelmässigen Achtfachs (s. Figur 2). Sodann sei folgendes hervorgehoben. Verbindet man in einem Würfel die Mitten der benachbarten Seitenflächen und lässt das so erhaltene regelmässige Achtfach um eine Würfelmkörperdiagonale rotieren, so ergeben sich bei einer Schar von Stellungen durch *gleichsinnige* Streckungen, bei einer anderen Schar von Stellungen durch *gegensinnige* Streckungen reguläre Oktaeder, die dem Würfel einbeschrieben sind. Die Eckpunkte der zu der ersteren Schar gehörigen einbeschriebenen regelmässigen Achtfache liegen in Figur 1 auf einem der Hyperbelzweige, die durch den Mittelpunkt der Würfel- fläche gehen, wohingegen die Eckpunkte der zu der anderen Schar zugeordneten einbeschriebenen regulären Oktaeder auf dem anderen Zweige der betreffenden gleichseitigen Hyperbel in Figur 1 liegen.

Bezieht man die dem Würfel einbeschriebenen regelmässigen Oktaeder reziprok auf eine Kugel, deren Mittelpunkt mit dem gemeinsamen Mittelpunkt der regulären Körper zusammenfällt, so erhält man unendlich viele Würfel, die einem regelmässigen Oktaeder umbeschrieben sind. Die Grenzflächen sämtlicher dem regelmässigen Oktaeder umbeschriebenen Würfel sind Tangentialebenen von gleichen geraden Kreiskegeln, von denen je 4 gemeinsame Scheitel besitzen, die in einem Oktaedereckpunkt liegen, wobei die Achsen dieser vier Kegel auf den von dem betreffenden Eckpunkt ausgehenden Grenzflächen senkrecht stehen.

6. Um für das regelmässige Oktaeder alle einbeschriebenen Würfel nachzuweisen, gehen wir von dem bekannten Würfel aus, der aus dem regelmässigen Achtfach durch Verbinden der Mitten der benachbarten Seitenflächen erhalten wird. Diesen lassen wir der Reihe nach um die drei Achsen der von den Würfelmkörperdiagonalen gebildeten geraden Kreiskegel — das sind die drei Oktaederdiagonalen — rotieren und verändern bei der jeweiligen Lage des Würfels dessen Körperdiagonalen durch eine geeignete *gleich- oder* gegensinnige Streckung so, dass ihre Endpunkte in je eine

entsprechende Oktaedergrenzfläche fallen. Als geometrischer Ort für die Ecken der einbeschriebenen Würfel ergibt sich somit die Durchdringung der von den Würfelkörperdiagonalen gebildeten drei geraden Kreiskegel mit den Grenzebenen des regelmässigen Oktaeders. Diese Kegel sind ebenfalls gleichseitig nach folgendem Satz: „In zwei regelmässigen reziproken Vielflachen besitzen die geraden Kreiskegel, deren Scheitel im Mittelpunkt O des Körpers liegen und zu deren Erzeugenden die von O aus auf die von einem Eckpunkt ausgehenden Grenzflächen gefällten Senkrechten gehören, gleiche

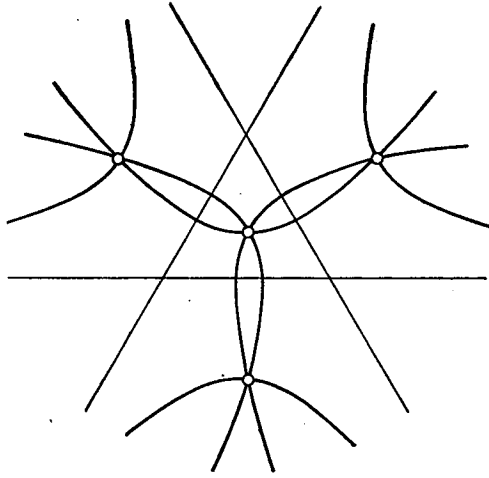


Fig. 3.

Oeffnungswinkel.” Die drei Kegel werden also von den Oktaederebenen, die zu je einer Erzeugenden der Kegel senkrecht stehen, in je drei gleichseitigen Hyperbeln geschnitten. Figur 3 zeigt den geometrischen Ort der Eckpunkte aller einbeschriebenen Würfel auf einer Seitenfläche des regelmässigen Achtecks: drei gleichseitige Hyperbeln, die sich im Mittelpunkte der Fläche schneiden, sowie in weiteren drei Punkten, den Mittelpunkten für die dem gleichseitigen Dreieck anbeschriebenen Kreise. Die letzteren Punkte führen auf einen dem Oktaeder einbeschriebenen Würfel, dessen Eckpunkte in den betreffenden Mittelpunkten der den Oktaederseitenflächen anbeschriebenen Kreise liegen. Hierbei befinden sich die Ecken des regulären Oktaeders in den Mitten der Würfelgrenz-

flächen (s. Figur 4). Es ist somit das Oktaeder dem Würfel eingeschrieben und gleichzeitig der Würfel dem regelmässigen Achteck. Anders ausgedrückt: Der Würfel ist dem regulären Oktaeder und gleichzeitig das Oktaeder dem Würfel umschrieben — oder in folgender Form: der Würfel ist dem regelmässigen Oktaeder gleichzeitig ein- und umschrieben, und ebenfalls ist das regelmässige Achteck dem Würfel gleichzeitig ein- und umschrieben. Die zu den verschiedenen Zweigen einer gleichseitigen Hyperbel in Figur 3 gehörigen eingeschriebenen Würfel lassen sich in der Weise unterscheiden, dass man von dem Ausgangswürfel zu

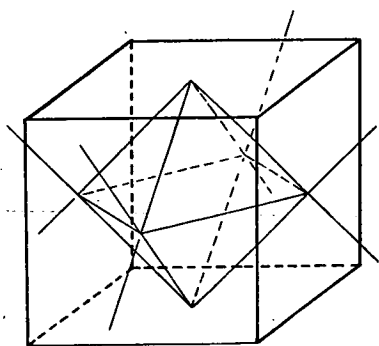


Fig. 4.

der einen Schar durch Drehung und *gleichsinnige* Streckung, zu der anderen Schar durch Drehung und *gegensinnige* Streckung gelangen kann.

Aus dem Vorhergehenden folgt dual: Die Grenzflächen aller dem Würfel umschriebenen regelmässigen Oktaeder sind Tangentialebenen von gleichen geraden

Kreis Kegeln. Die durch einen

Würfeleckpunkt gehenden Seitenflächen umhüllen drei Kegel, deren Achsen mit den von der betreffenden Würfecke ausgehenden Kanten zusammenfallen.

Wir bemerken noch, dass die Kegel, die von den Seitenebenen der dem regulären Oktaeder sowie dem Würfel umschriebenen reziproken regelmässigen Vielfläche umhüllt werden, gleiche Öffnungswinkel haben. Sie sind nämlich kongruent zu den geraden Kreis Kegeln, deren Scheitel in einem Oktaeder- bzw. Würfeckpunkt liegen und deren Oberflächen die von dieser Ecke ausgehenden Seitenebenen berühren. Für diese besteht der Satz: „In zwei reziproken regelmässigen Körpern besitzen die geraden Kreis kegel, die ihren Scheitel in einem Eckpunkt haben und die von diesem ausgehenden Grenzflächen berühren, gleiche Scheitelwinkel.“

7. Im vorausgegangenen wurde wiederholt der Satz benutzt, dass die auf einer Erzeugenden eines gleichseitigen Kegels senkrechte Ebene aus der Kegelfläche eine gleichseitige Hyperbel aus-

schneidet. Wir wollen uns von diesem Satz unabhängig machen und im folgenden auf eine elementare Weise zeigen, dass z.B. die Schnittlinien der Seitenebenen des regelmässigen Oktaeders mit den geraden Kreiskegeln, die die von dem Körpermittelpunkt O aus auf die Seitenflächen des Oktaeders gefällten Lote als Mantellinien enthalten, gleichseitige Hyperbeln sind. Zu dem Zweck legen wir durch die Achse eines solchen geraden Kreiskegels die Ebene, die durch den Mittelpunkt A und den Eckpunkt S einer Seitenfläche des

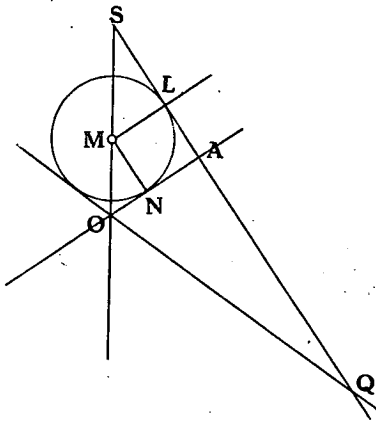


Fig. 5.

Oktaeders geht. Der in Figur 5 wiedergegebene Achsenschnitt enthält die zwei Seitenlinien OA und OQ des Kegelmantels, ferner die in der betreffenden Oktaeder-Grenzfläche liegende Schnittgerade SA, die senkrecht auf der Erzeugenden OA steht. Bezeichnen wir den Radius der dem Oktaeder eingeschriebenen Kugel mit ρ_8 und die Kante des Oktaeders mit a_8 , so ist

$$OA = \rho_8 \text{ u. } SA = \frac{a_8}{3} \sqrt{3}.$$

Wird der Winkel $\angle SOA = \varphi$ gesetzt, so hat man:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{a_8}{3} \sqrt{3}}{\rho_8} = \frac{\frac{a_8}{3} \sqrt{3}}{\frac{a_8}{6} \sqrt{6}} = \sqrt{2}.$$

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2 \operatorname{tg} \varphi}{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{2\sqrt{2}}{1 - 2} = -2\sqrt{2}.$$

$\operatorname{tg} 2\varphi$ ist negativ, d.h. $2\varphi > 90^\circ$. Hieraus folgt, dass SA die andere Erzeugende in einem Punkte Q schneidet, und dass die Oktaedergrenzebene den Kegel in einer Hyperbel durchdringt. Man kann die grosse und kleine Achse: a_1 , b_1 der nachgewiesenen Hyperbel leicht berechnen. Es ist

$$AQ = 2a_1, \quad \text{tg}(\text{AOQ}) = \text{tg}(180^\circ - 2\varphi) = -\text{tg} 2\varphi = \frac{2a_1}{a_8},$$

$$\text{also} \quad a_1 = \sqrt{2} \cdot \frac{a_8}{6} \sqrt{6} = \frac{a_8}{3} \sqrt{3}.$$

Um b_1 zu finden, berechnen wir zunächst die Brennweite e . Ist M der Schnittpunkt von OS mit der Medianen des Winkels OQA , so beschreiben wir um M als Mittelpunkt den Kreis, der dem Dreieck OAQ anbeschrieben ist. Werden die Berührungspunkte auf AQ und OA mit L bzw. N bezeichnet, so ist $ALMN$ ein Quadrat, dessen Seite s sein möge. Es ergibt sich dann:

$$\text{tg } \varphi = \frac{s}{a_8 - s}, \quad s = \frac{a_8 \text{tg } \varphi}{1 + \text{tg } \varphi} \quad \text{oder} \quad s = \frac{\frac{a_8}{6} \sqrt{6} \cdot \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = \frac{a_8}{3} \sqrt{3} (\sqrt{2} - 1)$$

Nun ist

$$e = a_1 + s \quad \text{oder} \quad e = \frac{a_8}{3} \sqrt{3} + \frac{a_8}{3} \sqrt{3} (\sqrt{2} - 1) = \frac{a_8}{3} \sqrt{6}$$

und endlich

$$b_1^2 = e^2 - a_1^2 = \frac{2}{3} a_8^2 - \frac{a_8^2}{3} = \frac{a_8^2}{3}.$$

Also

$$b_1 = \frac{a_8}{3} \sqrt{3},$$

d.h. die nachgewiesene Hyperbel ist gleichseitig.

8. Zum Schluss wollen wir noch auf eine Verallgemeinerung eingehen, die sich auf die Einbeschreibung der regelmässigen Oktaeder in einen Würfel erstreckt. Den Würfel ersetzen wir durch ein Parallellach, dessen Seitenflächen die beliebigen Ebenen E_1, E_2, E_3 und die hierzu der Reihe nach parallelen Ebenen E'_1, E'_2, E'_3 sein mögen. Die Fusspunkte der von einem beliebigen Punkte O aus auf die Ebenen $E_1, E'_1, E_2, E'_2, E_3, E'_3$ gefällten Lote bezeichnen wir nacheinander mit $D_1, D'_1, D_2, D'_2, D_3, D'_3$. Wir fragen nach dem geometrischen Ort der Eckpunkte sämtlicher dem Parallellach einbeschriebenen, zu dem Achteck $D_1 D_2 D_3 D'_1 D'_2 D'_3$ ähnlichen Viereck. Es gibt 4 gerade Kreiskegel, zu deren Erzeugenden die 3 Geraden $D_1 O D'_1, D_2 O D'_2$ u. $D_3 O D'_3$ gehören. Um jede der 4 Kegelachsen lassen wir das von den letzteren Diagonalen gebildete Dreieck rotieren und üben bei jeder erreichten Stellung auf die

drei Diagonalen eine solche gleich- u. gegebenenfalls auch gegen-
sinnige Streckung aus, dass dann ihre Endpunkte in je eine ent-
sprechende Seitenebene des Parallelflachs fallen. Man erhält so als
den gesuchten geometrischen Ort die Durchdringung der betref-
fenden geraden Kreiskegel mit den Seitenflächen des Parallelflachs.
Da die Seitenebenen des Parallelflachs sämtlich senkrecht auf je
einer Erzeugenden eines fraglichen Kegels stehen, so werden sie
von einem solchen Kegel in je einem ähnlichen Kegelschnitt durch-
drungen. Den 4 Kegeln entsprechend gibt es auf jeder Seitenfläche
des Parallelflachs 4 Kegelschnitte, die durch einen Punkt gehen,
wobei jede dieser Kurven 2. Ordnung zu den entsprechenden der
anderen Seitenebenen ähnlich ist.

VERSCHENEN

BEKNOPTE BESCHRIJVENDE MEETKUNDE

DOOR

P. WIJDENES

AMSTERDAM

DERDE DRUK

130 blz. 147 figuren.

 In dit boek zijn niet alleen de eenvoudige grondconstructies opgenomen, maar als toepassing ook 21 volledig uitgevoerde werkstukken van de eindexamens van de H.B.S.

Prijs gec. f 2.—

P. NOORDHOFF N.V. — 1935 — GRONINGEN-BATAVIA

IN DE BOEKHANDEL VERKRIJGBAAR.

In Ned. Oost-Indië uit voorraad verkrijgbaar bij
N.V. Uitgevers-Maatschappij NOORDHOFF-KOLFF,
Laan Holle 7, Batavia C.

UIT HET VOORBERICHT VAN DE TWEEDE DRUK.

Alles, wat opgenomen is, is geboden door de eisen van het eindexamen; misschien kan men het zesde hoofdstuk (blz. 86—92) overslaan; de manier, waarop fig. 110 van blz. 89 is geconstrueerd, leek mij echter wel zo leerzaam, dat ik niet kon nalaten dit werkstuk volledig te behandelen met het weinige, dat er noodzakelijk aan vooraf moet gaan; deze wenteling treedt in verdere studie bovendien op de voorgrond.

Behalve de grondeconstructies, die de theorie van de Beschrijvende Meetkunde vormen, heb ik ook de **volledige uitvoering gegeven van 21 eindexamenvraagstukken**; de maten zijn bij verscheidene daarvan iets gewijzigd om de figuur op de bladzijde te houden en ook zijn wel eens wat meer lijnen getrokken, dan strikt noodzakelijk is; dit ter instructie en voor de proef.

Een ruim gebruik is er gemaakt van de affiniteitsassen; over de noodzakelijkheid deze eenvoudige leerstof te onderwijzen, heb ik in jaargang VII van het tijdschrift Euclides een artikel geschreven; in jaargang VIII is een overdruk opgenomen van een artikel van Prof. Dr. Hk. de Vries over hetzelfde onderwerp, van ruim dertig jaar geleden. In beide wordt betoogd en met voorbeelden aangetoond, dat het gebruik van de affiniteitsassen de volgende voordelen biedt boven verouderde methoden: **een beter begrip, de theorie duidelijker, inniger samenhang met de Stereometrie, beter zicht op de figuur, minder lijnen en nauwkeuriger tekeningen**. Zie fig. 21, 43, 44, 64, 66 als vooroefeningen; uiteenzetting en bepaling bij fig. 86 en 87; verder fig. 88, 89, 90, 92, 93, 94, 95, 98, 106, 107, 116, 118, 119, 124, 125, 143, 147.

Het overzicht over de leerstof heb ik gemakkelijk gemaakt door het aangeven in randschrift van hetgeen daar ter plaatse behandeld wordt en door onder elke figuur te zetten, wat deze behelst. Beide stellen den leraar onmiddellijk op de hoogte van wat er aan de beurt is, terwijl de leerlingen bij het leren en nadoen en herhalen slechts goed alle figuren hebben na te gaan met de onderschriften, want alles, wat in de tekst staat, is door een figuur verhelderd. De nummers achter vele vraagstukken verwijzen naar de „Oefenbladen” van schrijver dezes; die verzameling is een kostelijk hulpmiddel bij het onderwijs in de Beschrijvende Meetkunde.

BIJ DE DERDE DRUK.

Enige figuren heb ik door nieuwe vervangen; toegevoegd zijn de werkstukken van het eindexamen H. B. S. 1933 (blz. 50), 1934 (blz. 80) en van het eindexamen H. B. S. in Nederlands Indië 1933 (blz. 73) en beide van 1934 (blz. 94 en 100).

Door deze uitbreiding, niet van de leerstof dus, en door duidelijker druk van de vraagstukken, is het boekje enige bladzijden groter geworden.

Voor alle mogelijke op- en aanmerkingen houd ik mij ten zeerste aanbevolen.

Amsterdam, Zuid
Jac. Obrechtstraat 88.

P. WIJDENES.

INHOUD.

HOOFDSTUK	Fig.	Blz.
I. Inleiding; punt, lijn en vlak . . .	1— 39	1— 20
II. Snijding van lijnen en vlakken. . .	40— 62	21— 40
III. Het omwentelen van lijnen en vlakken; afstanden van punten, lijnen en vlakken	63— 79	41— 51
IV. Figuren in een willekeurig vlak .	80— 95	52— 74
V. Hoeken van lijnen en vlakken . .	96—109	75— 86
VI. Wentelen om een as loodrecht op een projectievlak	110—116	87— 92
VII. Veelvlakken	117—125	93—105
VIII. Schaduwbepaling	126—134	106—110
IX. Cylinder en kegel	135—147	111—121
Herhaling		122—125
Werkstukken in de trant van de eind-examenopgaven		126—130

De volgende werkstukken van het eindexamen H. B. S. zijn volledig uitgevoerd in dit boek.

1920 de eerste, fig. 107	1921 de eerste, fig. 98
1922 beide, fig. 62 en fig. 90	1924 de tweede, fig. 146
1925 beide, fig. 125 en fig. 142	1926 beide fig. 78 en fig. 124
1927 beide, fig. 91 en fig. 93	1928 beide, fig. 134 en fig. 147
1929 de tweede, fig. 122	1930 beide, fig. 92 en fig. 143
1933 de eerste, fig. 79	1934 de eerste, fig. 102

Verder van de werkstukken van het eindexamen H. B. S. en A. M. S. in Nederlands Indië

1933 de eerste, fig. 95	1934 beide, fig. 94 en fig. 123.
-------------------------	----------------------------------

DE EERSTE KENNISMAKING MET LOGARITHMEN

DOOR

Ir. D. J. KRUIJBOSCH.

„De specifieke onbegaafdheid is juist voor de exacte vakken een veel minder algemeen phenomeen, dan vele ouders wel denken.”

Prof. Dr. H. A. Kramers.

(Euclides, jaargang 11, blz. 35).

Van het geheimzinnige boek vol cijfers met de mysterieuze naam „logarithmen” gaat voor onze jeugdige derde klassers een suggestieve invloed uit. Ze verlangen er naar het te gebruiken, het te begrijpen en voelen tevens een huivering voor de misschien ondoordringelijke geheimen, die het in zich besluit. Als dan eindelijk wordt aangekondigd, dat de volgende les met de logarithmen zal worden begonnen, zullen zeker alle leerlingen het kabbalistische werk mee naar school slepen, ook al heeft de leraar het niet uitdrukkelijk gezegd. Ik hoop niet, dat hij gezegd heeft: „laat dat boek maar thuis, daar zijn we voorlopig nog lang niet aan toe”, aldus bij voorbaat een dömper zettend op teveel jeugdig enthousiasme en als 't ware weer een serie doodgewone alledaagse lessen in uitzicht stellend over het nieuwe onderwerp, dat zonder het wonderboek direct al veel van zijn aantrekkelijkheid inboet.

„De onbegaafdheid voor de exacte vakken is veel minder algemeen dan men wel denkt” is een uitspraak, waarmee ik mij, op grond van jarenlange ervaring, volkomen kan verenigen. Daarnaast mogen we echter niet blind zijn voor het feit, dat het onderwijs in de exacte vakken zware eisen stelt aan leerling en docent. Boven alles moet zin voor orde, stiptheid, netheid en geconcentreerde aandacht gaan, terwijl zowel droogheid als stugge strengheid vermeden moeten worden. Het onderwijs moet minder deductief, dus meer inductief, meer socratisch of dialectisch zijn, er moet meer in geprobeerd en geëxperimenteerd worden. Stugge strengheid, die vaak het masker is waarachter onverschilligheid tegenover de kinderziel, gebrek aan vertrouwen, voorkeur voor

dressuur schuil gaat, heeft menig kind voor goed ontmoedigd en minderwaardigheidsgevoelens aangekweekt, die hem later over „die ellendige wiskunde” doen spreken en met verbittering doen getuigen, dat dit vak elke opvoedende waarde mist; terwijl hij opnieuw voedsel geeft aan het malle sprookje, dat het merendeel der stervelingen geen aanleg heeft voor wiskunde.

„Smeed het ijzer, als het heet is” — is een prachtig vaderlands spreekwoord. Het moment, waarop met iets geheel nieuws begonnen wordt, moet worden uitgebuit. Wanneer dit op de juiste wijze geschiedt, zal later dit moment scherp en precies in de herinnering staan gegrift. De docent, die de gespannen verwachting naar het nieuwe weet te bevredigen, die de gelegenheid gebruikt om weer opnieuw in praktijk te brengen het gebod om vóór alles de kinderen zelfstandig te leren denken, ze zelf de waarheden te leren vinden en ze te laten experimenteren met de nieuw gewonnen begrippen, zal niet alleen later de vruchten plukken van zijn werk, maar zich ook de dankbare genegenheid van zijn discipelen verwerven. Ten slotte is bij het onderwijs niet het kennisobject zelf de hoofdzaak, maar de weg er heen. Niet op het *wat*, maar op het *hoe* komt het allereerst aan.

Helaas wordt het geluk niet altijd als een druiventros, die boven onze hoofden hangt, geplukt. Ik mag misschien daarover een frappant staaltje meedelen? Een goede vriend, thans hoogleraar, vertelde mij eens, hoe hij vol illuzies na zijn eindexamen zijn natuurwetenschappelijke studies zou beginnen. Zijn eerste collegeur naderde. Straks zou een zijner bij voorbaat hoogvereerde leermeesters binnentreden en hem inleiden in de hogere regionen der wetenschap. Professor kwam binnen, zei niets, keerde zijn gehoor de rug toe, nam een krijtje en schreef op het bord het volgende toevierkant:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & . & . & . & a_{2n} \\ a_{31} & . & . & . & . & . & . & a_{3n} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & . & . & . & . & a_{nn} \end{vmatrix}$$

„Dit noemen we nu een determinant van de *n*de graad” — klonk

het gemelijk in de oren van den verbaasden student. „Dit noemen we de rijen” en „dat de kolommen” enz. enz. Professor ging deductief te werk. Over de illusies van een student had hij waarschijnlijk nooit nagedacht. Er werd niet getoverd met het vierkant, het was alles dor en nuchter wat hij vertelde. De hooggespannen verwachtingen van den zoekende kregen een geduchte knauw.

Dit is geen op zichzelf staand geval. Zowel bij het middelbaar als bij het hoger onderwijs worden dikwijls initiatief en geestdrift gefnuikt en wordt het fundament ondergraven, waarop alleen vruchtdragend onderwijs zich kan ontwikkelen.

We beginnen natuurlijk onze inleiding over de logaritmen niet met een zwaarwichtige definitie, zoals de professor met zijn determinant, maar met een eenvoudig voorbeeld. We schrijven b.v. op:

$$2^5 = x$$

en vragen naar de waarde van x en de naam van de uitgevoerde bewerking. Daarna schrijven we op:

$$y^5 = 32$$

en vragen naar de waarde van y en naar de naam der toegepaste bewerking. Dan wordt gevraagd of er nog een derde mogelijkheid bestaat dat een der getallen in onze betrekking onbekend is. Natuurlijk antwoorden allen, dat de exponent nog onbekend kan zijn, zodat dus de betrekking

$$2^z = 32 \quad \text{nog mogelijk is.}$$

z wordt noch door machtsverheffing, noch door worteltrekking gevonden, zodat de nieuwe bewerking een nieuwe benaming vereist.

We laten dan de kinderen de exponenten der machten bepalen, waartoe 2 moet worden gebracht om $\frac{1}{64}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64..... op te leveren en proberen dan hen de definitie van een logaritme te leren geven, totdat na aanmoedigend corrigeren de goed geformuleerde definitie te voorschijn komt

Natuurlijk komt daarna de meer algemene betrekking — een inleidend voorbeeld met bekende getallen houdt altijd de moed en belangstelling er in —:

$$a^b = c \quad \text{aan de orde.}$$

Ook worden dan de beide omkeringen

$$a = \sqrt[b]{c} \quad \text{en} \quad b = {}^a\log c \quad \text{opgeschreven.}$$

Zeker mag dan niet verzuimd worden er op te wijzen, dat uit:

$$a^b = c \quad \text{volgt:}$$

$$c^{\frac{1}{b}} = a \quad \text{en dus ook:} \quad \frac{1}{b} = {}^c\log a.$$

Dus: ${}^a\log c \times {}^c\log a = 1$, welke eigenschap we natuurlijk in woorden laten brengen.

De nieuwe definitie wordt enige malen herhaald, totdat het dus tot allen doorgedrongen is dat ${}^a\log c$ als exponent boven a geschreven moet worden om c tot uitkomst te verkrijgen. We lijsten het netjes in:

$$a^{{}^a\log c} = c$$

en blijven er nog even bij stilstaan, dat deze formule niets anders is dan de definitie van een logarithme en verklappen nog, dat ze later het uitgangspunt zal zijn voor de afleiding van talrijke interessante en belangrijke eigenschappen.

Dan volgen nog enige kleine berekeningen, zoals b.v.

$${}^5\log 625, {}^{625}\log 5, {}^{16}\log 32, {}^{32}\log 16, \text{ enz.}$$

We vestigen er nog eens de aandacht op, dat de machtsverheffing van gehele getallen steeds weer tot gehele getallen voert, maar dat de worteltrekking uit gehele getallen tot een nieuwe soort getallen aanleiding gaf en dat voor de benadering van die nieuwe getallen een nieuwe rekenwijze nodig was. We wijzen er op, dat b.v. ${}^{10}\log 2$ ons in dergelijke moeilijkheden brengt en dat daarvoor misschien ook wel een nieuwe rekenwijze is te vinden.

Het uur zal dan wel verstreken zijn, we hebben dus niets meer te doen dan de leerlingen mede te delen de volgende les hun tafels mee te nemen, omdat we daarin een kleine ontdekkingsreis willen ondernemen.

In de tweede les laten we de definitie telkens herhalen en enige eenvoudige voorbeelden berekenen. Toch is het kennen van die definitie nog volstrekt geen waarborg, dat het juiste begrip aan-

wezig is. Kinderen — jongens vooral — hebben altijd moeite met die lange zinnen, waarin ze de verschillende bestanddelen, zoals hier: logarithme, exponent, macht, getal en grondtal, door elkaar haspelen. Bij examens bleek me dikwijls, dat ze b.v. de woorden exponent en macht en ook grondtal en getal verwisselden, maar geen fouten maakten in de toepassing. Daarentegen ging dikwijls het correct opzeggen der definitie gepaard met een volslagen wanbegrip. Deze kinderen weten niet hoe ze de definitie als formule moeten projecteren. Ze zouden misschien te helpen zijn, als ze de definitie als volgt gaven: „De logarithme van het getal x bij het grondtal y , dus $\log x$, is de exponent van de macht, waartoe we het grondtal y moeten verheffen om het getal x te krijgen”.

Maar niet altijd hebben we lust en geduld die moeizaam gestotterde definitie enige malen aan te horen en het zal goed zijn de kinderen telkens alleen maar te laten herhalen: „*logarithmen zijn exponenten*”, steeds maar weer, onder het motto: „*frappez toujours*”. Want in die lange definitie *dringt die hoofdzaak niet steeds voldoende tot hen door*. Dus: „logarithmen zijn exponenten” — is de hoofdzaak. Dit is waarlijk niet overbodig. Ik woonde eens een examen bij, waar de examinerator vroeg: „Heb je de laatste tijd nog wel eens met gebroken exponenten gewerkt?” „Nee”, zei de candidaat, „ik geloof voor het laatst in de tweede of derde klas”. „Kom”, zei de leraar, „vergis je je niet? Ik meen wel zeker te weten, dat je een boek hebt, dat vol staat met gebroken exponenten, waarin zo goed als niets anders staat en dat je de laatste tijd nog veel hebt gebruikt”. De candidaat bleef het antwoord schuldig en kon zich dit vreemde boek niet te binnen brengen. Zou examenkoorts hiervoor de enige verklaring zijn?

Het was nog in de jaren van het z.g. Staatsexamen, dat ik met een collega samen examineerde, die er van hield om op opgewekte, aanmoedigende toon te vragen: „Ik zie daar in die tafel staan: $\log 2 = 0,30103$, wat hebben we daaronder te verstaan?” Het kostte dan soms heel wat moeite totdat de candidaat opschreef:

$$10^{0,30103} = 2$$

Menig slachtoffer geloofde dan heilig aan de juistheid van deze betrekking. Anderen echter zeiden dat 0,30103 een tot 5 decimalen afgeronde waarde was. Dan vroeg de examinerator: „Maak me dan maar eens duidelijk, dat $10^{0,30103}$ niet gelijk aan 2 kan zijn en dan

volgde, zelden echter zonder hulp van onze zijde, onderstaande, m. i. zeer instructieve herleiding:

$$\begin{aligned} 10^{0,30103} &= 2 \\ 10^{30103} &= 2^{100000} \\ (2 \times 5)^{30103} &= 2^{100000} \\ 5^{30103} &= 2^{69897} \end{aligned}$$

Vinden nu werkelijk de strenge heren mathematici dit bewijs met bekende getallen niet afdoende? Is het niet volkomen bevredigend dat een jongen met gezond verstand hieruit dadelijk de conclusie trekt, dat „dat niet kan”, want een product van niets dan ondeelbare factoren vijf kan toch niet gelijk zijn aan een product van niets dan ondeelbare factoren twee?

Maar ik moet tot de tweede les terugkeren. We slaan die eerste, vertrouwde halve bladzijde van de tafel op, die geen nadere uitleg behoeft. „Wat een getallen! Hoe zouden ze daaraan gekomen zijn?” — zullen de vragen zijn, die uit het onderbewuste opstijgen. We zien daar staan: $\log 2 = 0,30103$ en $\log 4 = 0,60206$. Wat merk je op? Tweemaal zo groot, prachtig! Waarom? Dan komt er natuurlijk:

$$10^{0,30103} = 2 \text{ en } 10^{0,60206} = 4$$

maar ook is: $4 = 2^2 = 10^{2 \times 0,30103}$ Q. E. D.

Dan sluiten we de tafel en schrijven op het bord:

$$\log 2 = 0,30103.$$

Hoe groot zijn nu: $\log 8 = 3 \log 2$, $\log 16 = 4 \log 2$ enz.?

Dan wordt de tafel weer geopend en worden de uitkomsten bevestigd gevonden. Zouden de leerlingen nu al niet enig vertrouwen krijgen in het toverboek? En dat het met al die vreemde getallen nog al losloopt? Maar we gaan verder: We zien daar staan:

$$\log 2 = 0,30103 \text{ en } \log 5 = 0,69897.$$

Wat merken jullie op? Na enig turen roept er een juichend: „ze zijn samen precies één!” (dat „precies” is zo heerlijk jongensachtig!) Hoe zou dat komen? En we schrijven samen op:

$$10^{0,30103} = 2 \text{ en } 10^{0,69897} = 5.$$

Dus $2 \times 5 = 10^1 = 10^{0,30103 + 0,69897}$ Q. E. D.

Dan komen verdere experimenten aan de beurt! We schrijven eens onder elkaar:

$$\log 2 = 0,30103$$

$$\log 3 = 0,47712$$

$$\log 6 = 0,77815, \text{ die we alle drie aan}$$

de tafel ontlelen. Zien jullie iets bijzonders? Geen antwoord! Dan zullen wij het nog eens opschrijven:

$$\log 2 = 0,30103$$

$$\log 3 = 0,47712$$

$$\log 6 = 0,77815$$

En dan geeft de hele klas antwoord en formuleert de ontdekking: $\log 2 + \log 3 = \log 6$.

Waarom zou dat zo moeten zijn?

Wel, natuurlijk is weer:

$$10^{0,30103} = 2; \quad 10^{0,47712} = 3 \quad \text{en} \quad 10^{0,77815} = 6.$$

Maar $2 \times 3 = 6$, dus:

$$10^{0,30103 + 0,47712} = 10^{0,77815}, \quad \text{Q. E. D.}$$

Het begint dus door te dringen, dat we slechts een optelling van logarithmen van priemfactoren — al dan niet met bepaalde coëfficiënten vermenigvuldigd — hebben uit te voeren, om de logarithmen van ontbindbare getallen te krijgen.

Maar er is nog meer! Weer sluiten we de tafel, nadat we er aan ontleend hebben:

$$\log 3 = 0,47712$$

en schrijven dan op het bord: $\log 9 = 2 \log 3 = 0,95424$

$$\log 27 = 3 \log 3 = 1,43136$$

$$\log 81 = 4 \log 3 = 1,90848$$

Vervolgens wordt de tafel opgeslagen en zien we, dat het klopt met $\log 9$ en $\log 27$, maar niet met $\log 81$. Daar staat:

$$\log 81 = 1,90849!$$

Grote verbazing! Misschien een drukfout, waarop de legendarische beloning van 10 gulden staat! De twijfel is het begin van aile wijsheid!

Nu zijn we dus toe aan ons hierboven gegeven bewijs, dat b.v. $10^{0,30103}$ niet precies gelijk aan 2 kan zijn. We weten nu, dat die logarithmen ontmeetbare getallen zijn — immers ons bewijs ver-

andert niet bij een willekeurig aantal decimalen of een gewone breuk in de exponent —, die tot 5 decimalen zijn afgerond.

We bespreken de wijze van afronden, constateren dat $\log 3$ naar beneden is afgerond, willen ons zelfs de vraag stellen of we van $\log 3$ een zesde decimaal kunnen bepalen. We zoeken de logarithmen der machten van 3 op tot en met 6561, (de grootste macht van 3 van 4 cijfers, waarvan de logarithme zonder interpolatie aan de tafel kan worden ontleend), om tot de conclusie te komen, dat $\log 3$ zo wel b.v. 0,47712 | 14 als 0,47712 | 15 zou kunnen zijn. Immers $\log 6561 = 8 \log 3$ zou dan worden 3,81697 | 12, of 3,81697 | 20, die beide tot 3,81697 afgerond worden. We zijn er dus niet zeker van of de afgeronde zesde decimaal 1 of 2 zal zijn. Natuurlijk kan de *niet* afgeronde zesde decimaal niet 2 zijn, omdat er dan reeds afwijking tussen $3 \log 3$ en $\log 27$ zou bestaan.

We verzuimen ten slotte niet op te laten schrijven:

$$10^{0,477120} < 3 < 10^{0,477122}$$

Ik geloof dat dergelijke excursies hoogst leerzaam zijn.

We zullen ook zien, dat $\log 2$ in vijf decimalen een zeer nauwkeurige waarde is, omdat er zelfs geen verschil bestaat tussen $\log 8192$ (de grootste met 4 cijfers geschreven macht van 2) en $13 \log 2 = 3,91339$. We weten nu niet of $\log 2$ naar boven of beneden is afgerond, ze zal er in 6 decimalen dus als volgt uitzien:

$$\log 2 = 0,30103 \quad | \quad 0 \dots \text{ of } \log 2 = 0,30102 \quad | \quad 9 \dots$$

Ik ben nog nooit een examencandidaat tegengekomen die wist dat die welbekende, veel gebruikte $\log 2 = 0,30103$ zóó nauwkeurig was, d.w.z. nauwkeurig tot op één eenheid van de zesde decimaal. Vanzelf rijzen bij dit onderzoek, waarbij een summiere toelichting tot de inrichting der tafels wordt vereist, vragen naar aanleiding van wijzer en mantisse, die voorlopig kort en bevredigend kunnen worden beantwoord.

Reeds nu wordt de leerlingen duidelijk gemaakt, dat ze met logarithmen sober en voorzichtig moeten omgaan. Ze zullen nu bij een berekening zeker nooit $\log 3^4$ berekenen als $4 \log 3$, maar wel als $\log 81$. En als ze later meer geoefend zijn, zullen ze zeker $\log (\frac{1}{2}\sqrt{7})$ vervangen door $\log \sqrt{1,75}$. Ze zullen later moeten inzien — we mogen nooit rekenautomaten van hen maken — dat het geen wet van Meden en Perzen is om bij een berekening alles

VERSCHENEN

MEETKUNDIGE VRAAGSTUKKEN

MET DE BEWIJZEN VAN DE STELLINGEN EN
MEER DAN 70 UITGEWERKTE VOORBEELDEN

 Een leerboek er naast is niet nodig

DOOR

P. WIJDENES

AMSTERDAM

Een verzameling vraagstukken met sterk didactisch karakter voor H. B. S., Gymnasium, Lyceum, Kweekschool, Zeevaartschool, Middelbare Technische School en meer scholen met ongeveer dezelfde leerstof voor Meetkunde. Bijzonder geschikt voor hen, die beginnen met de studie voor Wiskunde L. O.: meer dan 70 model-oplossingen.

Deel I. 100 blz., 144 fig., 20 oplossingen, 4 volledige werkstukken en 3 meetkundige plaatsen; gec. met gradenboog en twee driehoeken f 1.40

Deel II. 166 blz., 189 fig., 26 oplossingen, 11 volledige werkstukken en 8 meetkundige plaatsen; gec. . . f 2.40

P. NOORDHOFF N.V. — 1934 — GRONINGEN-BATAVIA

BIJ DE BOEKHANDEL VERKRIJGBAAR.

In Ned. Oost-Indië uit voorraad verkrijgbaar bij
N.V. Uitgevers-Maatschappij NOORDHOFF-KOLFF,
Laan Holle 7, Batavia C.

VOORBERICHT.

Elk hoofdstuk wordt voorafgegaan door een inleiding, waarin de begrippen worden genoemd, die men moet aanbrengen en waarin korte bewijzen worden gegeven van de stellingen, die toegepast moeten worden bij de oplossing van de vraagstukken, die er op volgen.

Van de eerste les af aan is het wenselijk, dat de leerlingen zelf doen, zelf handelen: tekenen, meten en construeren; bevordering van de zelfwerkzaamheid op eenvoudige vraagstukken, ook door de leerlingen wel eens zelf te laten vinden, wat er aan een figuur is op te merken.

Werkstukken worden langzaam aan uitgerekt tot een volledige behandeling; voor leerlingen in de eerste en tweede klas is de vierledige bewerking nog te zwaar; zo ergens, dat doet men hierbij wijs, wat water in de wijn te doen. Daarentegen wordt de uitwerking van vraagstukken over meetkundige plaatsen op het laatst beperkt tot een zorgvuldig onderzoek op de manier, zoals wij dat zelf ook doen.

Het is wel nuttig, als de leerlingen in hun boek eens kunnen nagaan, hoe een vraagstuk wordt opgelost, een werkstuk wordt voorbereid en uitgevoerd, een meetkundige plaats wordt onderzocht en besproken en daarna geconstrueerd; vandaar de vele voorbeelden, meer dan 70, door het hele boek heen; zie de lijst onder de inhoudsopgave.

Stelling 23 blz. 31 is niet geformuleerd als geval van congruentie; mij dunkt, dat het zo beter is; het voordeel springt al dadelijk in het oog bij het bewijs van 15d op blz. 35.

De enige stelling, die bij de gewone stof is gekomen, is 57 van blz. 117; het bewijs is zeer eenvoudig en men heeft er veel nut van, nl. bij stelling 60 van blz. 118, nr. 12 van blz. 122, nr. 20b van blz. 125, stelling 68 van blz. 132, nr. 44 van blz. 152 en nr. 53 van blz. 153 en in wat vraagstukjes. Ieder weet, dat dit vervelende dingen zijn bij het lesgeven. Met stelling 57 worden ze alle tegelijk sierlijk en afdoend behandeld. Als AB een lijnstuk is, is er immers voor elk punt P van de lijn AB een verhouding $PA : PB$ (als P niet in B valt) en omgekeerd wordt door elke verhouding $k \neq 1$ één punt P bepaald; dit nu wordt uitgedrukt in st. 57.

De stof, in deze vraagstukken verwerkt, is opzettelijk eenvoudig gehouden; natuurlijk is niet opgenomen de congruentie van veelhoeken en dus ook niet de gelijkvormigheid daarvan; verder is de vermenigvuldiging van figuren bekort, de onderlinge ligging van twee cirkels tot een minimum beperkt; er wordt met geen woord gerept van ongelijkslachtige vormen voor lijnstukken.

Enige aandacht verzoek ik voor de behandeling van de meetkundige plaatsen; zie hoofdstuk XI blz. 79 en de zorgvuldig bewerkte voorbeelden. De enige theorie, die onverkort is gegeven, is die van hoofdstuk XXII blz. 240—242; deze wijze van behandeling wijkt af van de gewone; ze is sober en streng.

Voor alle mogelijke op- en aanmerkingen, die bij het gebruik allicht gemaakt zullen worden, houd ik mij ten eerste aanbevolen.

Amsterdam Zuid.

P. WIJDENES.

Jac. Obrechtstraat 88.

Onmiddellijk, nadat de eerste exemplaren in Indië waren gekomen, werd per vliegbrief de opmerking gemaakt, dat de volgorde anders was, dan men daar gewoon was. Schrijver vond, dat zijn volgorde de juiste was en had dus aan een verdediging daarvan niet gedacht. Het volgende is bedoeld als antwoord; wellicht stellen ook anderen er belang in te horen, wat ik er van denk.

Over de volgorde van de leerstof in WIJDENES MEETKUNDIGE VRAAGSTUKKEN.

Reeds bij de eerste druk van mijn Beknopte Meetkunde (thans, November 1934, is de achtste ter perse) heb ik een en ander gezegd over de volgorde van de leerstof.

Ik haal aan, wat ik daarover schreef:

„In vele boeken is de volgorde zo, dat het onderwijs telkens hokt en zo, dat een zelfde zaak twee keer voorkomt.

’t Hokt bij de congruentie van driehoeken, als men die reeds bij eerste oefening uitbreidt tot: basis, verschil van de basishoeken en som van de opstaande zijden”; dit slag heb ik veel verderop pas genomen bij de werkstukken.

Men loopt vast in de tweede klas bij de behandeling van de evenredigheid van lijnstukken en de gelijkvormigheid, ’t zij deze op de verouderde, ’t zij op de nieuwe manier behandeld wordt. Geen wonder: de onderlinge vergelijking van vier lijnstukken en van twee ongelijke figuren, is veel lastiger dan de beschouwing van één figuur, b.v. wat betreft de oppervlakte . . . , die pas in de derde klas komt.

Dan, ’t loopt spaak in het laatst van de tweede klas met de berekening van lijnstukken in driehoeken, bij u als bij mij, vroeger, thans en als we die niet wat verschuiven, ook in ’t vervolg. Daar toch zeker een allereerste eis van goed onderwijs is, dat men de leerstof in moeilijkheid laat opklimmen, acht ik het gewenst de leerlingen deze stof niet in de tweede klas toe te dienen, maar in de derde, waar men door de meerdere vaardigheid in de algebra, met name in de wortelvormen, betere resultaten krijgt.

Ook zei ik: omdat een zelfde zaak tweemaal voorkomt: ik bedoel daarmee de stellingen over de rechthoekige driehoek en de evenredigheid van lijnstukken in de cirkel; ook de theorie van de gelijkvormigheid bij rechte lijnige figuren en bij de cirkel; dit begrip later en dan in zijn geheel ontwikkelen, is veel beter. Overal heb ik er voor gezorgd, dat de leerling niet optornt tegen de stof, omdat die voor zijn ontwikkeling te vroeg valt.”

Er staat in dat voorbericht wel meer, dat de overdenking waard is, maar dat laten we rusten.

Gaarne nog het volgende over de volgorde van de stof, verwerkt in de Meetkundige vraagstukken; wat onveranderd is gebleven, neem ik eerst, nl. het begin en het eind.

Inleiding, evenwijdige lijnen, driehoeken, congruentie van driehoeken, vierhoeken en veelhoeken (dus in deel I tot en met hoofdstuk IX) is *in dezelfde orde behandeld* als in de meeste gebruikelijke boeken.

Metten van hoeken door cirkelbogen, lijnstukken in een cirkel, om-, in- en aangeschreven cirkels (in mijn Vraagstukken geen afzonderlijk hoofdstuk), regelmatige veelhoeken, oppervlakte en omtrek van de cirkel (dus hoofdstuk XIX—XXII van deel II), ook hierin is *geen verandering* aangebracht.

De hoofdstukken VII, XII, XVI, XXIII en XXIV tellen niet mee bij de opsomming; dat zijn herhalingen, hopenlijk welkom als vindplaatsen voor proefwerkvraagstukken.

En nu de middelmoot, waarmee men omstreeks Kerstmis in de tweede klas begint; ziehier, wat er dan te doen staat.

Oud.		Nieuw
		in de vraagstukken.
Hfdst. V	Gelijkvormigheid	XIV, XV
„ VI	Berekening van lijnstukken	XVII, XVIII
„ VII	Meetkundige plaatsen	XI
„ VIII	Oppervlakte	XII
„ IX	Cirkel	X

De meetkundige plaatsen staan bij beide ongeveer middenin; daarover behoeven we dus niets te zeggen.

Zoals men ziet, is de volgorde verder vrijwel omgekeerd; gelijkvormigheid en berekening hebben hun plaats verwisseld met cirkel en oppervlakte. Zijn daar ook redenen voor? Zeer zeker en overwegende ook. In Oud IX treft men aan, let wel, na de grote moeilijkheden, die Oud V en VI bieden, ettelijke bladzijden en stellingen als (iet of wat verkort weergegeven);

Een koorde is kleiner dan een middellijn.

De loodlijn uit M op een koorde, deelt die koorde middendoor.

Ligging van een punt en van een rechte t. o. van een cirkel.

De centraal van twee cirkels deelt de gemeenschappelijke koorde middendoor; enz. enz.

Dit alles is zo eenvoudig, dat men het kan behandelen, direct na de veelhoeken; ook wel eerder, maar dat wordt niet gedaan om de behandeling van driehoeken en vierhoeken niet te onderbreken. In elk geval sluit het, wat de leerstof zelf en wat de graad van moeilijkheid aangaat, daar onmiddellijk bij aan. En het is geheel bezijden een gezonde didactiek, Oud V, VI, VII en VIII daaraan te laten voorafgaan. Nog een groot bezwaar, als de cirkel zo achteraan komt hinken; bij een groot aantal werkstukken, die vooraf zijn gegaan, eer Oud aan IX toe is, heeft men al deze eigenschappen al gebruikt en berust de bespreking van werkstukken dikwijls op wat in Oud IX pas geleerd wordt. De eigenschappen van de cirkel zijn zo eenvoudig; ze kunnen eerder aan de beurt komen en moeten dat dan ook.

Wat te zeggen van een volgorde, waarbij de eenvoudige oppervlaktebepaling achter Oud V en VI komt? We weten, dat deze twee hoofdstukken maanden en maanden in beslag nemen en dat ze beide stroef lopen, zo niet erger; natuurlijk, want ze zijn toepassingen van algebra op meetkundige figuren; voor de leerlingen een dubbele belasting dus. (Vandaar ook, dat ik in al mijn boeken in die hoofdstukken werk met kleine letters, net als in de algebra, dus b.v. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bp$). Natuurlijk vallen Oud V en VI te vroeg; bij de nieuwe volgorde hebben we bovendien bij de berekeningen veel steun aan de oppervlakte.

Waarom die oude volgorde zo averechts? Ik zal het u zeggen; vroeger, ik bedoel niet heel vroeger, maar zo'n 40 à 50 jaar geleden, werd alles berekend, alles; de logaritmen waren alles; nog steeds zijn er, die weigeren tafels te raadplegen, waarin zo maar $\sin 12^\circ 15'$ is te vinden en $1,05^{10}$ en $\sqrt{6}$. (Zie ook maar de boeken in over Analytische Meetkunde uit die tijd; gecijfer en niet veel meer). Niet waar, in de Vlakke Meetkunde moest men „Pythagoras” bewijzen; natuurlijke meetkundige bewijzen, zo zonneklaar, konden niet dienen (de meetkunde moest algebra zijn!), misschien wel, omdat ze eenvoudig waren en het meetkunde was! Neen, dat moest gehaald worden uit $a^2 = pc$ en $b^2 = qc$; maar $a^2 = pc$ volgt uit twee gelijkvormige driehoeken. Dus eerst de gelijkvormigheid en daar weer voor dus de evenredige lijnstukken; zo ontstond dan de volgorde.

Evenredigheid van lijnstukken: een heel stuk en niet zo heel eenvoudig.

Gelijkvormigheid van driehoeken.

Toepassing daarvan op de rechthoekige driehoek.

Wel een heel moeilijke weg! En dan pas, na wat verademing te hebben genoten bij de meetkundige plaatsen en bij de oppervlakte, kon men gaan bewijzen, dat een middellijn de langste koorde is, enz.

Dat moet toch zeker anders; zie de volgorde onder Nieuw: cirkel, meetkundige plaatsen, oppervlakte en dan evenredigheden, gelijkvormigheid en berekeningen en ... dan nog zijn deze twee hoofdstukken tamelijk zwaar. Van de oppervlakten hebben we bij die lastige algebraïsche meetkunde ook nog aardig wat hulp; die ontbreekt bij de oude volgorde ten enen male.

Het voornaamste doel van de omzetting is, dat het eenvoudigste eerder komt dan het moeilijker gedeelte. Ik zet hier beide ter vergelijking nog eens naast elkaar.

Oud

Nieuw

Eerste kwart onveranderd in volgorde.

Gelijkvormigheid

Cirkel

Berekening van lijnstukken

Meetkundige plaatsen

Meetkundige plaatsen

Oppervlakte

Oppervlakte

Gelijkvormigheid

Cirkel

Berekening van lijnstukken

Laatste kwart onveranderd in volgorde.

Uit didactisch oogpunt is er m.i. maar één keuze mogelijk.

Amsterdam, November 1934.

P. WIJDENES.

In Wijdenes Meetkunde voor MULO

„ Beknpte Meetkunde

„ Planimetrie bestaat de juiste volgorde reeds van de eerste druk af.

In Wijdenes en De Lange, Vlakke Meetkunde staat tot heden alleen „Oppervlakte” op een verkeerde plaats; die moet staan voor de „Evenredigheid van lijnstukken”. Bij herdruk wordt dat in orde gemaakt; van die gelegenheid zal ik tevens gebruik maken tot enige vereenvoudiging; die wel gewent is.

met behulp van logaritmen te doen. Ze zullen inzien, dat b.v. een uitkomst uit een opgave voor samengestelde intrest van de vorm

$\frac{1,04^{13} - 1}{1,04^{14} \times 0,04}$ beter vervangen kan worden door:

$$\frac{1 - \frac{1}{1,04^{13}}}{1,04 \times 0,04} = \frac{1 - \frac{1}{1,04^{13}}}{0,0416}$$

Immers $1,04^{13}$, afzonderlijk met logaritmen berekend, geeft een getal van 5 cijfers, waarvan het laatste cijfer een interpolatiecijfer is. Aangezien het eerste cijfer 1 is, zal na vermindering met 1 een getal van slechts vier cijfers overblijven, waarvan het vierde het onnauwkeurige interpolatiecijfer is. Dit bezwaar geldt niet voor:

$1 - \frac{1}{1,04^{13}}$ en bovendien is door de herleiding de uitkomst vereenvoudigd!

Het recept bij de herleiding van wortelvormen, nl.: „geen breuk onder het wortelteken of geen wortelteken in de noemer van een breuk”, dat vroeger in verschillende leerboeken werd gegeven, heeft heel wat omslachtigheid bij berekening met logaritmen op zijn geweten. Het is volstrekt geen zeldzaamheid op het werk van een eindexamencandidaat de volgende berekening aan te treffen:

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{4} \sqrt{2}$$

$$\log \operatorname{tg} x = \log 1 - \log 4 + \frac{1}{2} \log 2, \text{ enz.}$$

Meestal worden dan de beide laatste termen niet samengenomen. Een leerling behoort te weten dat in dit geval $\operatorname{tg} x = \sqrt{0,125}$ voor de logarithmische berekening de eenvoudigste schrijfwijze is.

Bij de derde les — misschien is het wel de vierde geworden — zal de vraag: „Hoe berekenen we nu een logarithme?” — werkelijk een „brandende” geworden zijn. Immers het onderling verband tussen vele dier geheimzinnige getallen is nu duidelijk geworden, waardoor genoemde vraag nu meer dan ooit in het brandpunt der belangstelling komt te staan. Ik heb vroeger dikwijls onderstaande methode gevolgd, die er inging als koek.

Zij gevraagd ${}^{10}\log 2$ te berekenen. Uit $10^0 < 2 < 10^1$ volgt:

$$0 < \log 2 < 1, \text{ dus: } \log 2 = \frac{1}{x} \quad (x > 1). \text{ Dus:}$$

$$10^{\frac{1}{x}} = 2 \text{ of: } 10 = 2^x.$$

Nu is echter: $2^3 < 10 < 2^4$, dus: $3 < x < 4$. Stel daarom:

$$x = 3 + \frac{1}{y} \quad (y > 1). \text{ Hieruit volgt:}$$

$$10 = 2^{3+\frac{1}{y}} \text{ of: } \frac{5}{4} = 2^{\frac{1}{y}} \text{ of: } \left(\frac{5}{4}\right)^y = 2.$$

Nu is echter $\left(\frac{5}{4}\right)^3 < 2 < \left(\frac{5}{4}\right)^4$, dus: $3 < y < 4$.

Stel daarom: $y = 3 + \frac{1}{z} \quad (z > 1)$. Hieruit volgt:

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{3+\frac{1}{z}} = 2 \text{ of: } \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{z}} = \frac{128}{125} \text{ of: } \frac{5}{4} = \left(\frac{128}{125}\right)^z.$$

Nu is enig cijferen nodig, maar de beloning wenkt. Kinderen cijferen slecht en met tegenzin is tegenwoordig de klacht. Ik verzeker U, dat ze het graag en goed doen, als ze maar weten, dat van hun gecijfer een belangrijk resultaat afhangt!

Men zal goed doen deze berekening niet later te geven, als onze leerlingen reeds in het gebruik van logarithmen doorkneed zijn; immers dan gaan ze z met logarithmen berekenen en maken we ons niet alleen aan een „petitio principii” schuldig, maar is ook de aardigheid er grotendeels af.

Vrij gauw wordt de moeite van het vermenigvuldigen beloond en vinden we:

$$\left(\frac{128}{125}\right)^9 < \frac{5}{4} < \left(\frac{128}{125}\right)^{10}; \text{ dus } 9 < z < 10.$$

Nu staken we het procédé, dat volkomen doorzichtig is geworden. Ook al uit vrees, dat de volgende becijfering nu werkelijk lang niet mals zal uitvallen.

We hebben dus gevonden:

$$\frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{10}}} < \log 2 < \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{9}}} \text{ of:}$$

$$\frac{31}{103} < \log 2 < \frac{28}{93} \text{ of: } 0,30097 < \log 2 < 0,30108.$$

We vinden nu een betere benadering door te nemen

$$\frac{0,30097 + 0,30108}{2} = 0,301025,$$

afgerond tot 0,30103,

waarvan we nu echter niet weten of ze te groot of te klein is. Me dunkt, dat het resultaat onze becijfering wel waard was.

Van cijferen gesproken —, het is een onomstotelijk feit dat deze technische vaardigheid bij het eindexamen sterk afneemt, terwijl het zeer de vraag is of hier winst, in de vorm van beter wiskundig inzicht, tegenover staat. De tegenwoordige examenopgaven voor algebra en trigonometrie eisen aanzienlijk minder cijferwerk dan vroeger. Op zich zelf is dat niet verkeerd, mits er niet uit voortvloeie, dat minder en eenvoudiger cijferwerk noodzakelijk moet leiden tot ergerlijk knoeiwerk, dat van fouten krioelt. De allerkleinste becijfering met logaritmen wordt tegenwoordig bijna niet zonder fouten gemaakt en dat is een treurig verschijnsel. De docenten werken dit zelf soms ook wel in de hand door bij de taxatie van het examenwerk natuurlijk wel het nauwkeurig, vlug en vooral beknopt cijferen te waarderen, maar voor slordig, traag, omslachtig en foutief gecijfer weinig in mindering te brengen.

Te uitsluitend wordt op de aanleg, te weinig op de vorderingen gelet. Te veel wordt de wil voor de daad genomen. Wat heeft men aan een goede aanleg in de tegenwoordige maatschappij, als deze niet door voldoende ontwikkeling en training tot bekwaamheid is uitgegroeid?

Op een normenvergadering maakte ik eens mee, dat voor het correct opstellen van een vergelijking van het type $a \sin x + b \cos x = c$ uit de gegevens van een eenvoudig vraagstuk 3 à 4 punten werden toegekend, maar voor de correcte oplossing der vergelijking slechts 1 punt. Voor een van fouten wemelende oplossing werd dan later slechts $\frac{1}{2}$ punt afgetrokken, omdat de candidaat dan toch maar de methode van oplossen kende!

Na deze eerste kennismaking met de logaritmen, die 3 à 4 lessen in beslag neemt, gaat men natuurlijk de eigenschappen in 't algemeen afleiden. De belangstelling is nu gewekt en dat zal ter dege merkbaar zijn bij de volgende lessen. Veel nieuwe gezichtspunten zou ik daarbij niet kunnen ontwikkelen, ik wil dus slechts nog enkele opmerkingen maken.

We zullen allicht eens onze leerlingen het voorstel doen een logarimentafel, b.v. voor het grondtafel 2 te ontwerpen en schrijven dan het volgende op:

Log 2 3 4 5
 Getal 32 16 8 4 2 1

We wijzen dan op de rekenkundige reeks met het verschil 1 en de meetkundige reeks met de reden 2 of $1 + 1$, die opvolgend de logaritmen en de getallen aangeven. We zien dat — naar rechts gaande — de intervallen der tweede reeks steeds groter worden en dat b.v. tussen 16 en 32 reeds 15 gehele getallen liggen, wier logaritmen liggen tussen 4 en 5, dat onze tafel dus ergerlijke lacunes vertoont, dat een interpolatie met evenredige delen wel zeer onbetrouwbare uitkomsten moet geven, enz. We kunnen dan die intervallen verkleinen door het verschil der rekenkundige reeks gelijk aan een zeer klein getal Δ te nemen, i. p. v. 1 en als reden der meetkundige reeks het getal $1 + \Delta$, i. p. v. $1 + 1$. Worden dan de reeksen weer opgeschreven, dan komt de logaritme $n \Delta$ boven het getal $(1 + \Delta)^n$ te staan en gaan we ons afvragen wat nu het nieuwe grondtal is. Wordt dit gelijk x gesteld, dan volgt dadelijk:

$$x = (1 + \Delta)^{\frac{1}{\Delta}} \text{ uit de betrekking: } x^{n\Delta} = (1 + \Delta)^n$$

Op deze wijze kan tegemoet worden gekomen aan de steeds weer opduikende vraag: „Wat zijn toch die *natuurlijke* logaritmen, die ook in de tafel staan?” Scheept men dan den vrager af met het antwoord: „Dat zijn logaritmen met het grondtal

$$e = \lim_{\Delta \rightarrow 0} (1 + \Delta)^{\frac{1}{\Delta}}$$

en verder kan ik je daarvan niets vertellen, omdat dat nog te moeilijk is”, dan zal tien tegen één de reactie zijn, dat die wiskundigen toch hoogst zonderlinge mensen zijn en dat die meneer Neper toch wel een beetje getikt moet zijn geweest om zo’n raar stelsel uit te vinden, terwijl dan aan meneer Briggs met zijn grondtal 10 wat meer gezond verstand wordt toegekend.

De laatste jaren is mij als deskundige bij de eindexamens gebleken, dat de kandidaten hoogst zelden of nooit op de hoogte zijn van de grafische voorstelling van de exponentiële en logaritmische functie. Dit is jammer, omdat de grafiek van $y = \log x$ zo bijzonder instructief is. Immers door een klein deel der kromme,

dat niet te dicht bij het snijpunt met de X-as ligt, als recht te beschouwen, (de kinderen zien hoe uiterst gering de kromming is) kan de lineaire interpolatie, die we bij de berekening van logaritmen met meer dan vier cijfers toepassen, op fraaie wijze worden verduidelijkt. P. Wijdenes en Dr. H. J. E. Beth wijden dan ook terecht in hun „Nieuwe School-Algebra” aan dit onderwerp een vijftal bladzijden¹⁾. Zij laten zien, dat de grafieken van $y = a^x$ en $y = {}^a\log x$ elkaars spiegelbeeld zijn ten opzichte van de deel-lijn van het 1e en 3e kwadrant en verduidelijken aan de hand van de grafieken de algemene eigenschappen der logarithmen en de evenredige interpolatie.

Ik kan dan ook alleen maar de gesignaleerde onwetendheid verklaren door een te letterlijke opvolging van de toelichting op het eindexamenprogramma voor enige jaren door de inspecteurs M. O. gegeven²⁾. In deze toelichting werd slechts de kennis der grafieken van $y = ax + b$; $y = ax^2 + bx + c$ en $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ verplicht gesteld. Maar er is toch geen voorschrift dat ons belet onderwerpen te behandelen, die *niet* op het schriftelijk gedeelte van het eindexamen worden gevraagd?

¹⁾ Deel III, vijfde druk, § 132, blz. 70—75.

²⁾ Weekblad Gymn. en M. O. van 6-November 1929, blz. 314.

RESULTATEN BIJ HET ONDERWIJS IN DE WISKUNDE

DOOR

Dr. D. P. A. VERRIJP.

In jg. XI no. 2 van „Euclides” komt een lange beschouwing voor get. „Didaktiek of Exactheid door B. Coster (Bandoeng)”. Men kan het hierin ontwikkelde betoog wel in hoofdzaak aldus samenvatten: 1. De resultaten bij het onderwijs in de wiskunde op H.B.S. (en gymnasium toch ook?) zijn onbevredigend. 2. De van de L. S. afkomstige leerlingen zijn sterk geselecteerd en behooren tot de 20 % best begaafden. 3. Uit 1 en 2 volgt, dat ons onderwijs niet deugt. 4. Dit niet deugen moet gezocht worden in het teveel aan epistemisch onderwijs, dat aanvankelijk gegeven wordt. 5. Verbetering is te verwachten van aansluiting bij de psychologie en samenwerking met psychologen (meer passende leerboeken).

Ik zal het niet zoolang maken, als de heer Coster (24 blz.), maar ik wil toch met het oog op het algemeen belang, dat hier op het spel staat, in 't kort op zijn beschouwing ingaan om te betoogen, dat hij de zaak, waarom het gaat, totaal verkeerd ziet. Helaas, zijn er maar al te veel collega's, die — welke verschillende motieven hen dan ook beheerschen — niet tegelijk de rol van docent en van rechter zoo kunnen spelen, dat hun objectieve kijk op het geheel niet in 't gedrang komt.

1. „*De resultaten bij het onderwijs in de wiskunde zijn onbevredigend*”. Dit is juist en was al juist in de jaren, waarin ik de 3e, 4e en 5e klasse van de H. B. S. 5 te 's Gravenhage (1883—1886) bezocht. Men behoeft zich trouwens in dit opzicht omtrent andere leervakken, waarbij de intelligentie de hoofdrol vervult, evenmin illusies te maken. In mijn lezing voor het Genootschap, in 1921 gehouden, heb ik op grond van de gelijkschakeling van 't L. O. en de vergemakkelijking van leer- en eindexamen-programma's bij het M. en G. O. nog een achteruitgang voorspeld en inderdaad wijst mijn

met zorg opgemaakt statistisch cijfer-materiaal voor wiskunde van mijn eigen school (een gymnasium; waar de mathematicus door zijn uitzonderlijke positie het niet gemakkelijk had) er op, dat ik gelijk heb gehad. In drie perioden van het tijdvak 1902—1932 waren de middelwaarden (waardeeringsstelsel 1—5) opv. 2,86 — 2,76 — 2,68, de centraalwaarden 2,91 — 2,81 — 2,78.

2,68 kan niet meer met 3— worden gewaardeerd!

2. „De van de L. S. afkomstige leerlingen zijn sterk geselecteerd en behooren tot de 20 % bestbegaafden”. Van sterke selectie kan zeker niet gesproken worden, als onze leerlingen behooren tot de 20 % bestbegaafden. Immers:

a. Als het waar was, dat die leerlingen tot de 20 % bestbegaafden behooren, dan zouden er — aangenomen, dat onder hen een eenigszins regelmatige verdeling van intelligentie plaats vindt — toch nog veel te veel leerlingen op onze scholen zijn, voor welke die scholen niet bestemd zijn. Volgens de indeeling van Piorkowski zouden onze leerlingen moeten behooren tot B 3 (B 2 bestemd voor de middenberoepen als telefonist(e), letterzetter, typiste, boekhouder, kantoorbediende, controleur enz., waarvoor bij ons het U.L.O. kan zorgen; B 3 bestemd voor *alle* hogere beroepen, waarbij het wezenlijke ligt in het zelfstandig beslissen, organiseren, kritiseren, onderzoeken en constateeren, dus *alle* wetenschappelijke, artistieke, organisatorische en technische beroepen). Nu kan men zeggen, dat het bekende Amerikaansche onderzoek van 1918 (A. M. T.), dat zeker niet zoo bijzonder scrupuleus is ingesteld, toch slechts 12 % (dus belangrijk minder dan 20 %) voor die hogere beroepen bestemt. En het zou mij niet verwonderen, als bij Nederlandsche toestanden een maximum van 3 % niet ver van de waarheid zou verwijderd zijn. In herinnering breng ik hierbij (ook de heer Coster constateert het), dat de psychologie van de laatste kwart eeuw ons wel zooveel geleerd heeft, dat we kunnen weten, dat er in de intellectuele ontwikkeling van het kind geen of weinig discontinuïteiten voorkomen, dus dat men niet moet verwachten, dat het met onze leerlingen — grosso modo — anders gesteld is dan met de A. M. T.-onderzochten.

De heer Coster spreekt zich zelf trouwens hier wel eens tegen en hecht aan een (misschien schijn-) uitzonderingsgeval te veel waarde.

b. Sterke selectie van de op onze scholen toegelatenen is ook niet te verwachten. De beter gesitueerde ouders nemen in onze (zeker Nederlandsche) maatschappij alle middelen te baat om hunne vaak van behoorlijke intelligentie verstoken kinderen *coute que coute* — op de middelbare (en gymnasiale) scholen geplaatst te krijgen; privaattlessen, plaatsing op *bepaalde* scholen enz. zeggen hier 't noodige.

c. Verschillende middelen zijn aangewend en aanbevolen om de selectie beter te maken: tot nu toe echter zonder behoorlijk resultaat. Toen voor eenige jaren van Regeeringswege werd ingezien, dat het met verklaringen der hoofden van scholen niet ging is een toelatingsexamen ingesteld, waarvan destijds reeds door mij (N. R. *courant* van 29 April 1928) voorspeld is, dat het geen succes zou geven (vele gymnasia zijn hierin ook niet meegegaan). Ook het sedert kort voorgestelde ingewikkelde plan der commissie-Bolkestein zou m. i. bij invoering hetzelfde lot beschoren zijn. Te Arnhem heeft men aan het gymnasium een middel beproefd: een proefklasse gedurende een maand vóór de zomervacantie, waarin les gegeven werd door schoolhoofden en docenten; is daar ingevoerd en hoewel een correlatieonderzoek, door mij hierop toegepast, heeft aangetoond, dat er in zoo'n proefklasse wel wat zit, is toch het resultaat niet van dien aard geweest, dat men zeggen kan, dat nu daarmee de oplossing gevonden is.

d. De hoofdzaak: het sedert eenige jaren gelijkgeschakelde L. O. is er *absoluut niet* op ingericht om een scherpe selectie *mogelijk* te maken. De L. S. beoordeelt haar leerlingen — natuurlijk — naar een gemiddeld intelligentiepeil, terwijl het M. en G. O. veel meer *moet* verlangen. Vandaar begrijpelijke controversen, waarvan ik frappante voorbeelden heb gezien, ook bij de door ons gehouden proefklassen.

3. „Uit 1 en 2 volgt, dat ons onderwijs niet deugt". Deze conclusie moet op grond van mijn beschouwing, in het voorgaande ontwikkeld, als onvoldoende gefundeerd beschouwd worden en mag dus niet uitgesproken worden. De heer Coster spreekt in zijn stuk — het is een fout, die door ouders geregeld gemaakt wordt — maar steeds van „de" kinderen, van „het" kind, alsof die kinderen alle hetzelfde zijn." De 35 % apathen en amorphen bij het M. O. tegenover de 10 % bij het onderzoek Heymans—Wiersma zijn alles-

zins begrijpelijk. Alles is hier natuurlijk relatief ten opzichte van de eischen die men stelt *en stellen mag*.

Ik wil echter een stap verder gaan en mijn overtuiging uitspreken, dat de resultaten van het wiskunde-onderwijs, in den tegenwoordigen vorm gegeven, een degelijk criterium bieden voor de vraag, of onze leerlingen later in de maatschappij een werkelijk beteekenisvolle plaats zullen kunnen innemen. Zorgvuldig volg ik mijn oud-leerlingen gedurende 42 jaren en vergelijk hun maatschappelijke beteekenis met mijn cijferlijsten en ik kan zeggen, dat mij slechts één geval is voorgekomen, dat op het eerste gezicht niet klopte: een zeer gerenommeerd predikant had op onze school over het geheel maar zeer matig voldaan. Die predikant kwam eens in Arnhem preeken. Opdat ik zelf niet een vooringenomen oordeel zou kunnen vellen, verzocht ik een ander uit mijn omgeving er heen te gaan. Toen kwam het oordeel: een zéér belezen man, maar met geen haar „eigens” in zijn rede!

4. *„Dit niet deugen moet gezocht worden in het teveel aan epistemisch onderwijs, dat aanvankelijk gegeven wordt”.*

Hiervan kan nog dit gezegd worden, dat mijn lange ervaring mij geleerd heeft, dat het struikelen der leerlingen beslist veel meer geschiedt op de „empeiria” dan op het „epistemisch” deel van het onderwijs. Een typisch voorbeeld: Ik heb met een matige eerste klasse eens een jaar geprobeerd het planimetrie-boek van Schogt te gebruiken. Tegen dit boek is nog al strijd gevoerd als zijnde te moeilijk. Maar dit bleek mij voor het begrip der leerlingen geenszins het geval te zijn. Dat ik het boek na een jaar weer heb laten varen, had een heel andere oorzaak: ik kwam tijd te kort voor het laten oplossen van het noodige aantal vraagstukken.

5. *„Verbetering is te verwachten van aansluiting bij de psychologie en samenwerking met psychologen (meer passende leerboeken)”.* M. i. ligt het nu wel voor de hand op welke wijze verbetering zou kunnen komen. Zeker niet door wijziging der leerboeken.

Heusch, zoo gek zijn de docenten niet: ze gebruiken een leerboek wel niet anders dan als leiddraad. Het levende woord, waarvan de heer Coster zich blijkbaar op *zijn* wijze bedient, is er toch zeker bij anderen ook nog! Verder laat de heer Coster zich bovendien declineerend uit over hetgeen de laatste tien jaar onder de leeraren in de exacte vakken heeft plaats gevonden, maar ik zou

zeggen: wat weet hij er van? Was hij ooit op onze bijeenkomsten? En dan: ervaring doet ons heel wat meer *practische* psychologie opdoen, dan welke theoretische psycholoog ons kan geven.

Welnu, als de leerlingen bij de intrede op de M. en G. school niet zijn en niet te krijgen zijn, zooals dit eigenlijk zou behooren, dan zou alleen een grondige reorganisatie van het L. O. hierin verbetering kunnen brengen. Ik heb 't al meer gezegd: men moet op circa 9-jarigen leeftijd een splitsing krijgen met scherpe selectie. Op de afdeeling, die bestemd is voor die leerlingen, die later het M. en G. O. zullen bezoeken, kan men een zoodanig onderwijs (Fransch, rekenen in een zoodanigen vorm, dat dit vak voorbereidt voor het latere wiskunde-onderwijs) geven, dat van een discontinue overgang naar het door ons te geven voortgezet onderwijs geen sprake meer behoeft te zijn.

Inderdaad zou dit de eenige oplossing zijn, die ons grootendeels zou verlossen van die leerlingen, die vooreerst het onderwijs maar gebrekkig of matig kunnen volgen en in den tegenwoordigen tijd ook *geen diploma's moeten kunnen behalen*, die voor de hogere ambten of beroepen vereischt zijn. De tegenwoordige maatschappij heeft zooveel „intellectueelen” nu eenmaal niet noodig; het kweken van een wetenschappelijk proletariaat is uit den boeze. Toen ik van het Arnhemsch gymnasium afscheid nam, waren er voor mijn — heusch thans niet bijzonder bezoldigde — betrekking circa 100 sollicitanten! En hoe is het elders? Ieder weet het uit zijn omgeving: zelfs knappe afgestudeerde jongens kunnen absoluut niets krijgen (terwijl anderen dan nog soms door protectie hun de loef afsteken). Moet men nu door kunstmiddelen (werken met theoretische psychologen, die, gewend als ze zijn met het publiek *in 't algemeen* om te gaan, veel te conciliant zouden zijn) het schoolbezoek nog vergrooten, zoodat niet, zooals thans, een niet scherp genoeg geselecteerd aantal van 5 % van de Nederlandsche jeugd van 12—18 jaar op onze scholen zou komen, maar wie weet hoeveel méér, tot nog grootere schade voor het onderwijs en nog meer kapitaalverlies voor de maatschappij?

Een enkele opmerking, eenigszins aansluitende aan hetgeen ik boven bij het noemen van privaatllessen gezegd heb, wil ik hieraan nog toevoegen. Een enorm verkeerde invloed op het onderwijs

is in den tegenwoordigen tijd de hulp, die aan de leerlingen veelal geboden wordt door ouders, z.g. toezieners op huiswerk enz. Alle denk-moeilijkheden worden daardoor al bij voorbaat den leerlingen ontnomen. Ik heb den indruk, dat dit euvel veel sterker is dan in mijn schooltijd. Het wordt bovendien, helaas, door sommige rectoren en directeuren in de hand gewerkt. Twee oorzaken lijken mij hierin een rol te spelen: 1e. het relatief veel grooter aantal leerlingen op onze scholen dan vroeger, dat de opgegeven taak moeilijk kan verwerken en 2e. het relatief veel grooter aantal ouders (dan vroeger), die het onderwijs zelf gevolgd hebben en die zich daardoor in staat en geroepen meenen om de helpende hand te bieden tot werkelijk nadeel voor hun kroost (ook moreel nadeel, omdat dit ons dan veelal tracht wijs te maken, dat het het werk *zelf* gemaakt heeft!).

BOEKBESPREKINGEN.

P. Wijd en e s. *Meetkundige vraagstukken. I en II.* Groningen-Batavia, P. Noordhoff-N.V., 1934. Prijs: gec. f 1.40 en f 2.40.

De volledige titel: Meetkundige vraagstukken met de bewijzen van de stellingen en een aantal uitgewerkte voorbeelden voor het middelbaar en voorbereidend hoger onderwijs, doet reeds zien, dat wij hier te doen hebben met een werk, welks opzet afwijkt van dien der gebruikelijke vraagstukkenverzamelingen voor vlakke meetkunde. Van de theoriestellingen worden beknopte bewijzen gegeven, en deze stellingen worden ook geformuleerd, daarentegen worden definities in den regel niet gegeven, maar wordt volstaan met een opsomming der te definieeren begrippen. Iets dergelijks is reeds eerder toegepast in de algebra, o. a. door den Schrijver in zijne Algebraische Vraagstukken, maar in de meetkunde is het, voor zoover ik weet, iets nieuws. Voorts is een belangrijk verschilpunt met de bestaande vraagstukkenverzamelingen gelegen in den aard der opgaven; vaak moeten de leerlingen zelf vinden en formuleeren, wat er bij een gegeven onderstelde bewezen moet worden. Aan hun vindingrijkheid worden daardoor hooge eischen gesteld; door allerlei vragen wordt hun zelfwerkzaamheid geprikkeld. Schrandere leerlingen zullen geheele bladzijden van dit werk zonder hulp van den leeraar kunnen doorwerken (het ontbreken van definities maakt het boek echter weer minder geschikt voor zelfstudie). Een derde belangrijk onderscheid met de meest gebruikte boeken is, dat niet is vastgehouden aan de volgorde der onderwerpen van den hier te lande gebruikelijken leergang. Na de vierhoeken volgen namelijk: De cirkel (eigenschappen, die bij constructies worden gebruikt), Oppervlakte, Evenredigheid van lijnstukken, Vermenigvuldiging en gelijkvormigheid, Berekeningen in driehoeken, waarna met de betrekkingen tusschen hoeken en cirkelbogen de gebruikelijke volgorde weer wordt opgevat. Het wil mij voorkomen, dat de Schrijver hierdoor een verbetering heeft bereikt. Hoe meer de moeilijke beschouwingen, die aan de evenredigheid vastzitten, naar het einde van den cursus worden verschoven, hoe beter het is; uit didactisch oogpunt beschouwd. Daarbij moet men bedenken, dat de in Nederland gebruikelijke volgorde uit wetenschappelijk oogpunt niet de minste waarde heeft, en slechts een voortbrengsel is van critieklooze traditie. De Schrijver had op dit gebied nog veel verder kunnen gaan; door bij voorbeeld op te merken, dat de stelling van den omtrekshoek in een cirkel niets met evenredigheid te maken heeft, en dan de betrekkingen tusschen hoeken en cirkelbogen, alsmede eenige stellingen over koorden- en raaklijnvierhoeken, — allemaal typische

congruentiestellingen —, naar voren te verplaatsen. Hij zal dit echter wijselijk hebben nagelaten omdat hij wel weet, dat de tijd, om dergelijke wijzigingen hier te lande ingang te doen vinden, zoo die al ooit komen zal, thans nog niet is aangebroken, en omdat zijn doel is, een bruikbaar schoolboek te schrijven, niet een soort program. Hieruit zal ook wel te verklaren zijn, dat is vastgehouden aan de zeer weinig fraaie, maar in Nederland muurvast verankerde evenwijdigheidstheorie van Ptolemaeus. De lezer, die het boek aandachtig doorziet, zal bemerken, dat de Schrijver op menig ander gebied tamelijk diep op zijn onderwerpen ingaat, en heldere begrippen aanbrengt, meestal door uitstekend gekozen vragen, en met terzijdestelling van de traditie. Bijzonder geslaagd lijkt mij het hoofdstuk over meetkundige plaatsen, waar in het licht wordt gesteld de groote verscheidenheid van structuur der puntverzamelingen, die als eenvoudige meetkundige plaatsen kunnen optreden.

De heer Wijdenes is mijns inziens zeer gelukkig geslaagd in de uitvoering van het plan, dat hij had opgevat, en ik beveel zijn werk gaarne in de aandacht mijner collega's aan. J. H. S.

Dr. H. J. E. Beth, Inleiding tot de Differentiaal- en Integraalrekening, met toepassing op verschillende gebieden, 417 blz., P. Noordhoff N.V. 1934. Groningen—Batavia, geb. f 11.50 (voor abonné's op de Wisk. tijdschriften tijdelijk f 9.50).

Laat ik beginnen met een woord van respect voor de firma Noordhoff: in nauwelijks een half jaar tijds de uitgave van twee werken van ongeveer denzelfden omvang over hetzelfde onderwerp: Landau en Beth voorzien hunne boeken van denzelfden begintitel. Echter is de bestemming van Landau's Einführung een heel andere dan van Beth's Inleiding. Landau bedoelt zijn boek te doen gebruiken door hem, wien het zuiver om de wiskunde te doen is; Beth denkt daarentegen aan de tallozen, die de wiskunde als onmisbaar instrument noodig hebben voor hun vak. Kon men nog niet onlangs vernemen in een door een hoogleeraar in de chemie uitgesproken inaugureele rede, hoe noodig het is, dat men beschikke over mathematisch goed onderlegde chemici en ik kan er aan toevoegen, dat dit, mutatis mutandis, gebleken is waar te zijn voor biologen om over anderen (over physici behoeft natuurlijk als over een evidenten eisch, niet gesproken te worden) nu maar te zwijgen.

Werken als dat van Beth ziet men in den loop der jaren in verschillende talen verschijnen. Ik zou daarbij kunnen noemen Lorentz, Leerb. der Diff. en Integr. rek. enz.; E. Fabry, Traité de Mathématiques générales; J. W. Mellor, Higher Mathematics for Students of Chemistry and Physics; J. Salpeter, Einführung in die höhere Mathematik für Naturforscher und Ärzte; Leonor Michaelis, Einführung in die Mathematik für Biologen und Chemiker en ik herinner mij nog wel andere boeken onder de noogen te hebben gehad, waarvan de titels mij ontschoten zijn.

Vergelijkenderwijs gesproken geeft Beth véél en op velerlei gebied en als men dan nog bedenkt, dat men zijn boek gecombineerd kan

denken met Wijdenes' Middellalgebra, dan ontbreekt het nog alleen aan een geschikt boek over analytische meetkunde (iets in toch nog anderen trant dan Schrek of Rutgers) om een aardig geheel te vormen voor hem, die de wiskunde voor bovengenoemd doel noodig heeft.

Om nu wat nader op Beth's boek in te gaan, moet ik zeggen, dat het een goed boek is, dat niet alleen — in 't algemeen gesproken — de wiskunde zelf met voldoende exactheid en in voldoende omvang (in verband met 't gestelde doel) behandelt, maar ook een schat van toepassingen en vraagstukken (opgaven) geeft, zoodat mij een woord van lof uit de pen moet vloeien voor den schrijver, die toch de noodige werkkraft moet bezeten hebben om dit boek samen te stellen. Het werk zal zeker in de bovengenoemde kringen van studeerenden veel nut kunnen stichten.

Echter moet ik, hoezeer ik het bestaan van boeken als dit van Beth op hoogen prijs stel, niet verzwijgen, dat die boeken gebreken hebben en dan denk ik niet zoozeer aan het toch voldoende gemotiveerde gebrek aan exactheid, dat sommige plaatsen bezitten, als aan iets heel anders nl. het niet voldoende ingaan op bepaalde onderwerpen. Nu zegt Beth in zijn voorrede wel: „voor de eigenlijke studie moet naar de vakliteratuur verwezen worden”, maar men vraagt dan toch onmiddellijk: waar is de grens? Zal de lezer niet graag in sommige gevallen nu eens dadelijk min of meer compleet ingelicht worden over een bepaald onderwerp? Soms had men met weinig het onderwerp kunnen completeeren, soms ook was 't wel wenschelijk geweest er heel wat meer van te zeggen. Zoo zie ik b.v. op blz. 248 wel vermeld, dat de inhoudsformule $I = \frac{1}{6} H (G + 4M + B)$ een veel algemeenere beteekenis heeft dan die van de inhoudsformule der prismoïde, maar dat de doorsnede O een functie van x mag zijn die hoogstens van den derden graad is, wordt niet behandeld of vermeld. Belangrijker dan deze opmerking is een andere, waartoe mij blz. 276 aanleiding geeft. Men vindt daar (met een klein drukfoutje), als invoering van nieuwe veranderlijken in een dubbele integraal, het resultaat

$$\int \int F \left(f(u, v), g(u, v) \right) \left| \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \right| du dv.$$

(In de figuur had ik liever, om den weinig geschoolden lezer niet in een teeken-moeilijkheid te brengen, de beteekenis der punten Q en R verwisseld.)

Nu komt 't mij in de eerste plaats wel wenschelijk voor hier de determinant-schrijfwijze te bezigen en in de tweede plaats — de schrijver kan natuurlijk, als hij dat wil, afzien van het bewijs — te vermelden, dat men hier ook bij een groot aantal veranderlijken (oude $x_1 \dots x_n$ en nieuwe $u_1 \dots u_n$) de determinant van Jacobi

$$\Delta = \frac{D(x_1 \dots x_n)}{D(u_1 \dots u_n)}$$

aantreft, waarvan de beteekenis nader kan worden omschreven. En wat nu verder het onderwerp „§ 135 frequentiekromme, foutenwet”

aangaat, moet ik zeggen, dat dit onderwerp inderdaad wel wat al te stiefmoederlijk is behandeld. Met het oog op de behoefte der biologen was het zeer zeker wenschelijk geweest hier iets te geven, dat in uitgebreidheid een combinatie beteekende van het bedoelde onderwerp in Michaelis (maar dan zonder de daarin aanwezige fouten!), het boekje van P. Riebesell (Die Mathematischen Grundlagen der Variations- und Vererbungslehre) en den opzet van den arbeid van Kapteyn—van Uven.

Een euvel, waarop ik thans nog moet wijzen is dit, dat de mathematicus wel eens gevaar loopt zijn wetenschap te gaan toepassen op verschijnselen, die minder eenvoudig zijn, dan men aanvankelijk meende, terwijl hij aan de traditie van het eenvoudige aspect heeft vastgehouden. Een voorbeeld van dit laatste vormt de wet van Weber—Fechner. Deze laatste wet is — althans voor het licht — gebleken onjuist te zijn. (Zie o.a. Nederl. Tijdschrift voor Geneeskunde jg. 75, II. 17 blz. 2280.) En daarom was het beter geweest als in het hier besproken boek het laatste deel van § 36 handelende over genoemde wet (blz. 69 en 70) — afgezien van andere bezwaren, die over de behandeling zouden kunnen worden te berde gebracht, als niet volkomen duidelijkheid en integratie, waar nog slechts over differentiatie is gesproken — achterwege was gelaten.

Laat ik nog een paar opmerkingen maken, meer uit bewijs van belangstelling dan wel om ernstig aanmerking te maken. Op blz. 1 zie ik, wat mij altijd hindert, weer eens bij de limiet van een variant de foutieve uitdrukking „zoo dicht kan naderen als men verkiest”. Verder had op blz. 174 wel iets meer kunnen staan over het, dikwijls zoogenaamde, „axioma” van ’t arithmetisch gemiddelde als waarschijnlijkste waarde en ten slotte kan de vraag gedaan worden, of ’t bij verschillende stellingen ook wenschelijk zou zijn om wat meer namen te noemen, als b.v. d’Alembert (blz. 90), Cauchy (blz. 91), Guldberg en Waage (blz. 204). Niet dat de lezer dan zooveel werkelijk wijzer wordt, maar bij verdere lectuur ziet hij misschien zoo’n naam genoemd en weet dan niet, welke regel, stelling of wet bedoeld is.

Doch laat ik eindigen met de verzekering, dat al mijn aanmerkingen in ’t niet verzinken bij mijn lof over het zeer vele verdienstelijke, dat Beth’s boek bevat.

D. P. A. V.

Dr. M. J. Langeveld, De Psychologie der Middelbare-schoolklasse, 94 blz. N.V. Boekhandel W. ten Have, Amsterdam 1934. f 1.90.

Eenige jaren geleden kwamen te Utrecht verschillende besturen van organisaties en commissies van leeraren in de exacte vakken bijeen met de bedoeling om zich bezig te houden met een verhooging van het *didactisch* peil der leeraren in de genoemde vakken. Ook twee inspecteurs waren aanwezig. Ik bracht, op instigatie van een der aanwezigen de vraag ter sprake, of we ons in de eerste plaats ook zouden bezig houden met de *zuiver paedagogische* zijde der kwestie. En terwijl ik de vraag stelde, zag ik al op de meeste van de gezichten der vijftien ter vergadering gekomenen een misnoeg-

den trek. Toen dan ook daarna een der inspecteurs het woord nam om te verklaren, dat hij van zijn vader — een geacht schoolhoofd — steeds vernomen had, dat de beste paedagogen de slechtste onderwijzers waren, was het pleit beslist. Onderdaad, al dat „gepraat naar buiten” over paedagogische kwesties maakt niet van ons, zelven, noch van anderen, een goed leeraar; het bewijst van den „prater” of een groote zelfingenomenheid, of een zucht om eigen gebreken — welke die dan ook mogen zijn — te vergoelijken of te bedekken. (Misschien heeft soms beide plaats.) Het zijn ook zelden ervaren docenten, die zich met de behandeling van die kwesties bezig houden. (Ik zag in 't handboekje voor 1933 van 't Genootschap, dat dr. Langeveld, sedert '31 leeraar in 't Nederlandsch te Baarn, juist 29 jaar is geworden.)

Laat ik trachten de voorwaarden voor het worden en zijn van een goed leeraar in het kort samen te vatten: Men moet 1e. geen „slapeling” zijn, 2e. absoluut eerlijk en betrouwbaar zijn, 3e. steeds beschaafd optreden, 4e. met liefde voor zijn ambt en voor zijn vak vervuld zijn. Nu kan men hieraan nog wel heel wat toevoegen, maar bij nader inzien zal dit grootendeels onder het genoemde vallen. Bovendien: alle leeraren zijn niet van dezelfde gaardheid en dat is maar goed ook: in de maatschappij, waarin de leerling later opgenomen wordt, moet hij zich aanpassen aan de habitus van verschillende menschen. Natuurlijk zal de jonge docent in den beginne, zelfs wanneer aan de genoemde voorwaarden voldaan is, wegens gebrek aan ervaring wel eens mistasten — en met 't grooter worden der klassen zal dit er niet beter op worden —, maar na verloop van tijd komt alles wel in orde. Wel moet in aanmerking genomen worden, dat er op de school een voorwaarde gehandhaafd moet worden, die men niet steeds zelf in de hand heeft: enkele elementen (maar die zijn hoogst zeldzaam), die er *bepaaldelijk* wegens hun gedrag niet thuis behooren, moeten zoo spoedig mogelijk verwijderd worden en vervolgens moet misplaatste humaniteit (waardoor men de maatschappij niet anders dan schade doet) bij overgangen van de eene naar de andere klasse vermeden worden.

En wat nu sexueele of puberteitskwesties aangaat, heb ik de ervaring opgedaan, dat men, als leeraar, 't beste doet daaraan weinig of geen aandacht te schenken. Wat wil men daaraan doen? Natuurlijk bepalen die dingen de gedachtensfeer der leerlingen voor een groot deel, maar de docent doet beter door zijn onderwijs de aandacht der leerlingen op andere onderwerpen te richten, hun voor te houden, dat ze in den harden strijd om het bestaan, zich een passende en eervolle plaats in de maatschappij moeten veroveren.

Wat zal ik nu dan van het boekje zelf zeggen? Natuurlijk komen er een menigte vanzelfsprekende waarheden in voor. Doch er zijn ook uitspraken, die niet met mijn ervaring strooken. Zoo o.a. heb ik in de vierde klasse steeds de grootste belangstelling ondervonden en niet de geringste neiging om uit den band te springen.

Ik wil met het vermelden van een zin uit het boekje eindigen. Op blz. 44 staat: „Niet elk vak maakt het even makkelijk een dgl. contact (het gaat over psychologische motieven der beroepskeuze) te ontwikkelen, want gesprekken met de klasse als geheel en met

leerlingen afzonderlijk komen toch 't gemakkelijkst los in de lessen in de geesteswetenschappen" (ik spatieer).

Wat belooft u? Geesteswetenschappen? Moeten we dat woord weer opvatten in den ongelukkig gekozen zin, die in den laatsten tijd meer opgang heeft gemaakt, of bedoelt onze jonge vriend nu eens wat werkelijk geesteswetenschappen zijn en waartoe in de eerste plaats... de wiskunde moet gerekend worden? Mag ik dr. Langeveld de verzekering geven, dat in mijn lessen — mijn leerlingen zullen die lessen nog wel niet vergeten zijn — steeds ongezocht en in 't voorbijgaan — „lesjes" gegeven werden in heel wat onderwerpen, waarbij geest, wetenschap en maatschappij werden aangeroerd!

D. P. A. V.

INGEKOMEN BOEKEN.

- P. WIJDENES, *Beknopte Algebra II*, 6e druk, gec. f 1,70
P. WIJDENES, *Beknopte Driehoeksmeting*, 6e druk, gec. f 2,25
P. WIJDENES en Dr. H. J. E. BETH, *Nieuwe Schoolalgebra II*, 7e druk, gec. f 2,25
P. WIJDENES en Dr. H. J. E. BETH, *Nieuwe Schoolalgebra III*, 5e druk, geb. f 2,25
NOORDHOFF's *Schooltafel*, 5e—10e duizendtal in slap linnen f 1,50
P. WIJDENES, *Meetkundige Vraagstukken voor het M. en V. H. Ond.* met aantal uitgewerkte voorbeelden I, gec. f 1,40; II f 2,40
Dr. B. P. HAALMEIJER, *Leerboek der Vlakke meetkunde II*, 109 fig., 128 blz. f 1,90, geb. f 2,30

VRAGEN VAN HET MONDELING STAATSEXAMEN

DOOR

DR. H. C. SCHAMHARDT.

1. Meetkunde.

1. Construeer een driehoek, die gelijkvormig is met een gegeven driehoek ABC en waarvan de oppervlakte driemaal zo groot is als die van $\triangle ABC$.
2. Construeer $x = \sqrt[4]{abcd}$, als a , b , c en d gegeven lijnstukken zijn.
3. Hoe construeert men een lijn, die twee kruisende lijnen a en b snijdt en twee andere kruisende lijnen c en d loodrecht kruist?
4. In een regelmatig viervlak wordt een bol beschreven. Welk deel van de oppervlakte van de bol ziet men uit een hoekpunt?
5. Gegeven twee snijdende lijnen a en b en een lijn c , die a en b kruist. Hoe construeert men de lijnen, die a en b snijden en bovendien c loodrecht snijden?
6. Van een afgeknotte vierzijdige pyramide is gegeven: het grondvlak $ABCD$ in ware gedaante en de projectie op het grondvlak van de ribbe A_1B_1 van het bovenvlak, alsmede de hoogte. Maak de projectie van het bovenvlak af. Construeer vervolgens de ware gedaante van het opstaande zijvlak ABB_1A_1 ; daarbij de constructie verklaren met behulp van een ruimtefiguur.
7. In $\triangle ABC$ trekt men de hoogtelijnen AD en BE , die elkaar in H snijden; bewijs, dat $AH \times HD = BH \times HE$ is. Waarom liggen de punten A , B , D en E op een cirkel? Bewijs omgekeerd, dat dit laatste altijd het geval is, als gegeven is, dat $AH \times HD = BH \times HE$ is en de punten niet op een rechte liggen.
8. Van een regelmatige vierzijdige pyramide $TABCD$ is gegeven: de ribbe van het grondvlak $= a$, de opstaande

- ribbe $= a\sqrt{2}$. Construeer de doorsnede van deze pyramide met het vlak door B loodrecht op de ribbe TD.
9. Teken in ware gedaante het zijvlak TAD van de in 8. genoemde pyramide. Het vlak van doorsnede snijdt TAD volgens een lijn. Hoe loopt deze? Hoe liggen de snijpunten van deze lijn met TA en TD? Bereken de stukken, waarin het lijnstuk TA verdeeld wordt.
 10. $\triangle ABC$ ligt in 't vlak van tekening en wordt om AB gewenteld. De projectie van C op 't vlak van tekening is C_1 . Construeer de hoek, waarover men de driehoek moet wentelen, opdat $\angle AC_1B = 90^\circ$ is. Wat beschrijft BC bij die wenteling; wat het punt C?
 11. Een kegel is in een bol beschreven. De ronde oppervlakte van de kegel is anderhalf maal de ronde oppervlakte van het bolsegment, waarop de kegel staat. Hoe verhouden zich de hoogten van 't bolsegment en van de kegel?
 12. Construeer een hoek van 12° .
 13. Van een regelmatige driezijdige pyramide is het netwerk gegeven. Construeer de afstanden van de hoogtepunten der opstaande zijvlakken tot elkaar en tot dat van het grondvlak.
 14. In viervlak ABCD zijn Z_1, Z_2, Z_3 en Z_4 de zwaartepunten van de zijvlakken. Hoe verhoudt zich de inhoud van viervlak $Z_1Z_2Z_3Z_4$ tot die van viervlak ABCD?
 15. Verander een driehoek in een gelijkbenige met dezelfde top-hoek en met gelijke oppervlakte.
 16. Op de zijde AB van $\triangle ABC$ is een parallelogram $ABED_1$ en op de zijde AC een par. $ACFD_2$ beschreven. Deze figuur is een deel van het netwerk van een driezijdig prisma. Construeer van dit prisma: de hoogte en de stralen van de in- en omgeschreven cylinders; ook de hoek, die AD met het grondvlak maakt.
 17. In een viervlak DABC brengt men het vlak aan door het zwaartepunt van het grondvlak, evenwijdig aan de ribben BD en AC. Construeer de doorsnede en bereken de verhouding van de inhouden der delen, waarin dit vlak het viervlak verdeelt. Als D_1 de projectie is van de top op het grondvlak, welke hoek is dan groter, $\angle DAC$ of $\angle DAD_1$? En waarom?
 18. Van $\triangle ABC$ (basis AB) zijn de zijden $AC = 6, CB = 8,$

18. $AB = 10$. Bereken de afstand M_1M_2 van de middelpunten van de om- en de ingeschreven cirkel. Wat is de meetkundige plaats van M_1 , als C de halve cirkel op AB doortoëpt? Bewijs door berekening, dat $\angle AM_1M_2 = 90^\circ$ is.
19. In viervlak $D.ABC$ brengt men een bol aan, die door A , B en C gaat en AD raakt. Hoe krijgt men het middelpunt? Waar snijdt deze bol DB en DC , als $AD = 6$, $DB = 8$, $DC = 9$ cm is? Noem de snijpunten met DB en DC op v. S en T . Bepaal de verhouding van de inhoud en der delen, waarin het vlak AST het viervlak verdeelt.
20. Neem L op AD en P op BC . Construeer het punt, waar PL het vlak AST snijdt.
21. In $\triangle ABC$ trekt men de hoogtelijnen AD en BE en verbindt E met D . Bewijs, dat opp. $\triangle CED = \frac{1}{2}$ opp. $\triangle ABC$ is, als $\angle C = 45^\circ$ is. Laat ook zien, dat de omgeschreven cirkels van $\triangle CED$ en van vierhoek $AEDB$ even groot zijn. Onder welke hoek snijden deze cirkels elkaar?
22. In een koördenvierhoek laat men uit het snijpunt der diagonalen loodlijnen neer op de zijden. Bewijs, dat de vierhoek, die de voetpunten tot hoekpunten heeft, een raakklijnvierhoek is.
23. Verander een vierhoek in een gelijkbenige driehoek, met even grote oppervlakte, die één zijde van de vierhoek tot been heeft.
24. Een kegelmantel geeft bij ontwikkeling een halve cirkelschijf met straal a . Bereken de inhoud van de kegel; construeer de asdoorsnede. Welk deel van de oppervlakte van de ingeschreven bol ziet men uit de top? Breng door een gegeven lijn l , die door de top gaat, de beide raakvlakken aan de kegel. Construeer in ware grootte de hoek, die deze raakvlakken met elkaar maken.
25. Gegeven de 5-zijdige pyramide $TABCDE$; neem op AT het punt P , op BT het punt Q en op TD het punt R ; construeer de doorsnede van het vlak PQR met de pyramide.
26. Leid de formule af voor de inhoud van de afgeknotte pyramide.
27. Wat verstaat ge onder de uitdrukking: een lijnstuk is in uiterste en middelste reden verdeeld? Hoe berekent men het

grootste stuk? En hoe wordt het geconstrueerd? In welke figuren komt deze gulden snede voor? Bewijs, dat de diagonalen van een regelmatige vijfhoek elkaar in uiterste en middelste reden verdelen.

27. Wat verstaat men onder een zwaartelij n van een viervlak? Welke eigenschap hebben de zwaartelij nen? Bewijs dit. Als van een viervlak gegeven zijn: het grondvlak in ware gedaante, de hoogte en het voetpunt van de hoogtelij n uit de top, construeer dan het netwerk en de afstand van een hoekpunt van het grondvlak tot het zwaartepunt van het viervlak.

28. Construeer een parallelogram, waarvan een hoek en de beide diagonalen gegeven zijn.

29. Door een lij n buiten een bol brengt men vlakken, die de bol snijden. Wat is de meetkundige plaats van de middelpunten der doorsneden van die vlakken met de bol?

30. Evenwijdig aan de basis van een driehoek een lij n te trekken, zodat het afgesneden stuk van een der opstaande zijden, dat aan de top grenst, tweemaal zo groot is als het afgesneden stuk van de andere opstaande zijde, dat aan de basis grenst.

31. Leid de formule af voor de straal van de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$.

32. Verdeel $\triangle ABC$ in 2 (of 3) delen van gelijke oppervlakte door lijnen te trekken uit een punt P op een der zijden.

33. Construeer de doorsnede van een prisma met het vlak, bepaald door drie punten, die op de opstaande ribben gelegen zijn.

34. Van een vierzijdige pyramide zijn gegeven: het grondvlak in ware gedaante en drie van de opstaande ribben. Construeer het volledige netwerk. Neem vervolgens op drie van de opstaande ribben de punten P, Q en R en construeer de doorsnede van het vlak, dat door die punten bepaald is, met de pyramide, zowel in een ruimtefiguur als in ware gedaante.

25. Construeer een gelijkzijdige driehoek (een vierkant), waarvan de oppervlakte gelijk is aan de som van de oppervlakten van twee gegeven gelijkzijdige driehoeken (of twee gegeven vierkanten).

36. Verander een gegeven driehoek in een vierkant met even grote oppervlakte.

37. De zwaartepunten van drie der zijvlakken van een viervlak worden op het vierde zijvlak geprojecteerd. Welk deel van de inhoud van het viervlak bedraagt de inhoud van het prisma, waarvan die zwaartepunten en hun projecties de hoekpunten zijn?
38. Construeer de doorsnede van een regelmatige vierzijdige pyramide met een vlak, dat gaat door het midden van de hoogtelijn op het grondvlak en de middens van twee opeenvolgende ribben van het grondvlak.
39. Een trapezium is in een halve cirkel beschreven (straal R). De middellijn is een der evenwijdige zijden, de andere is $2x$. Verder kan in dat trapezium een cirkel worden beschreven. Druk eerst de straal r van de ingeschreven cirkel uit in R en x en vervolgens x in R . Construeer ten slotte x .
40. In een regelmatige 4-zijdige pyramide $TABCD$ neemt men op TB het punt P , zodat $TP : PB = 2 : 1$ en Q op 't midden van TC . Men brengt een vlak door A , P en Q . Construeer de doorsnede en bereken de verhouding van de inhoud der beide delen, waarin dit vlak de pyramide verdeelt.
41. Van een viervlak $DABC$ is het grondvlak een driehoek met zijden $AB = 10$, $AC = 6$, $BC = 8$ cm. De opstaande ribben maken hoeken van 60° met het grondvlak. Bepaal de inhoud en de straal R van de omgeschreven bol; eveneens de afstand, waarop de hoogtelijnen DD_1 en AA_1 elkaar kruisen. (*Aanwijzing*: twee hoogtelijnen liggen in evenwijdige standvlakken.)
42. Van het prisma $\begin{smallmatrix} DEF \\ ABC \end{smallmatrix}$ zijn de zijden van het grondvlak $AB = 13$, $BC = 14$, $CA = 15$ cm. Er kan een bol in en ook een bol om beschreven worden. Bereken de inhoud. Neem vervolgens op DF het punt P , op DE het punt Q en op EB het punt R . Construeer de doorsnede van het vlak PQR met het prisma. Verbind F met een punt G op AB en bepaal het punt, waar FG het vlak PQR snijdt.
43. In $\triangle ABC$ trekt men uit een punt P op AB twee lijnen PQ (Q op AC) en PR (R op BC) zo, dat $PQCR$ een koorden-vierhoek is. Bewijs, dat de vorm van $\triangle PQR$ constant is.

- Laat nu P zich langs AB bewegen. Bewijs, dat de verhouding van de stralen der omgeschreven cirkels van $\triangle ACP$ en $\triangle BCP$ niet verandert, evenmin als de hoek, waaronder die cirkels elkaar snijden.
44. Construeer de doorsnede van een vierzijdige pyramide met een vlak, dat gaat door twee punten, die op overstaande opstaande ribben gegeven zijn en een punt, dat in het uitgebreide grondvlak gegeven is.
 45. In viervlak $ABCD$ staan de ribben door A twee aan twee loodrecht op elkaar. Bepaal in de stereometrische figuur de ligging van het middelpunt M van de omgeschreven bol. Toon vervolgens aan, dat het snijpunt van AM met vlak BCD het zwaartepunt is van $\triangle BCD$.
 46. Construeer een cirkel met straal r door een punt P en die van een lijn l een koorde $2k$ afsnijdt.
 47. Een rechthoekige driehoek TAM met zijden $AM = 6$, $MT = 8$, $AT = 10$, wentelt om TM als as en beschrijft dus een kegel. Verder beschrijft men een bol met T als middelpunt met straal $TQ < TM$. Welk deel van de boloppervlakte ligt binnen de kegel? Bewijs, dat die oppervlakte gelijk is aan de ronde oppervlakte van een cylinder met dezelfde hoogte als het bolsegment en met een straal, die gelijk is aan de straal van de bol. Ontwikkel het zijdelingse oppervlak van de kegel in een plat vlak en construeer de middelpuntshoek van de cirkelsector, die daardoor ontstaat.
 48. Teken een afgeknotte 4-zijdige pyramide en daarin de diagonalen. Welke snijden elkaar en welke kruisen elkaar? Noem de top van de pyramide T , het bovenvlak van de afgeknotte pyramide $PQRS$ en het grondvlak $ABCD$ (P ligt op TA enz.). In welk geval snijden BS en CP elkaar? Als dit zo is, dan snijden ook AR en DQ elkaar. Neem $PT : PA = 3 : 2$; hoe groot is dan de verhouding van de inhouden van $\frac{T}{PQRS}$ en $\frac{PQRS}{ABCD}$?
 49. Op een lijn neemt men $RQ = QP$ en trekt door R en Q twee evenwijdige lijnen. Door P trekt men een lijn, die deze evenwijdigen snijdt in S en T . Gevraagd PST zo te trekken, dat opp. trap. $QSRT = a^2$ is (opp. van een gegeven vierkant).

Vervolgens vouwt men $\triangle PQS$ om QS om over een hoek van 90° . Gevraagd van de pyramide $QSTR$ de hoek te construeren van de vlakken PQS en PRT , alsmede die van vlak QPR met vlak PST .

50. Door hoeveel punten is een bol bepaald? Hoe vindt ge het middelpunt? Construeer een bol, die door drie gegeven punten gaat en een gegeven lijn raakt.

51. Construeer twee lijnstukken, als hun verschil (opv. hun som) en hun middelevenredige gegeven zijn.
Leid de formule af voor de straal van de ingeschreven cirkel van een driehoek. Bereken ook de afstanden van de hoekpunten tot de raakpunten met de in- en de aangeschreven cirkels.

52. Van een kubus $EFGH$ is de ribbe a . Men neemt op EA een punt P , zodat $AP = EP$ is en op EF een punt Q , zodat $QF = \frac{1}{3}a$ is. Construeer de doorsnede van vlak PQG met de kubus en bereken de inhouden der delen, waarin dit vlak de kubus verdeelt.

53. In $\triangle ABC$ snijden de zwaartelijnen AD , BE en CF elkaar in Z . Men laat de driehoeken CEZ , AEZ en AFZ om CF wentelen. Hoe verhouden zich de inhouden van de omwentelingslichamen, die aldus ontstaan?

54. Construeer $\triangle ABC$ als gegeven zijn de basis a , de tophoek C en een punt P van de deellijn van de tophoek.

55. Construeer een cirkel, die een cirkel M in een punt P raakt en bovendien een rechte lijn l raakt.

56. Construeer $x = a\sqrt{3}$, als a een gegeven lijnstuk voorstelt.

57. In een kubus $EFGH$ brengt men een vlak door H en de middens P van EA en Q van BC . Construeer de doorsnede van dit vlak met de kubus en bereken de inhoud van het onderste afgesneden deel van het lichaam.

58. Construeer een koordenvierhoek $ABCD$, waarvan gegeven zijn de beide diagonalen, hoek B en de hoogtelijn uit B uit $\triangle ABC$. Neem vervolgens deze koordenvierhoek tot grondvlak van een pyramide, waarvan nog gegeven zijn de hoogte

ZOO JUIST VERSCHEEN
HET 5e TOT 10e DUIZENDTAL
VAN

NOORDHOFF'S
SCHOOLTAFEL

UITGAVE P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN-BATAVIA

De eerste druk werd ingeleid als volgt:

Men kan niet zeggen, dat er geen goede Nederlandse tafels bestaan; immers we hebben de tafels van Van Pesch, Versluys en Gonggrijp. Deze zijn nl. volstrekt betrouwbaar, daar ze ook de nodige aanwijzingen bevatten ter behandeling van moeilijke intervallen. Tafels, waarin die ontbreken, zijn misleidend en dus onbruikbaar, omdat noch de leerling, noch de leraar het zonder de aanwijzingen kan stellen. Deze zijn nodig ter vermindering van foutieve interpolaties en het ontbreken er van is de reden, dat de leerlingen er onkundig van worden gelaten en dat het tot het merendeel nooit doordringt, dat ze niet in allen deelen op hun tafel kunnen vertrouwen.

De bovengenoemde tafels, hoe uitnemend ook, ieder in haar bijzondere bewerking, hebben als schooltafel tegen, dat de interpolatie in de moeilijke intervallen, bijzondere zorg eist. Nu is daar m.i. niets tegen en de vele gebruikers beschouwen dit blijkbaar evenmin als een bezwaar; leraren, die een van bovengenoemde tafels gebruiken, zou ik dus willen raden: „blijf er bij”. — Er zijn er echter ook, die een tafel wensen, waarbij deze moeilijkheid zich niet voordoet en die nochtans zuivere geïnterpoleerde waarden wensen; bovendien een tafel van de goniometrische functies om de minuut. Om aan hun wensen tegemoet te komen, is deze tafel samengesteld. Op de volgende wijze zijn de moeilijkheden opgelost.

Het interval tot 20' van log sin en log tg wordt om de seconde gegeven en wel in één tafel; dit is mogelijk, omdat ze hoogstens een eenheid van de vijfde decimaal verschillen; van interpolatie dus geen sprake. Verder van 20' tot 2° om de 10 seconden, waardoor gewaarborgd wordt, dat de evenredige delen juiste uitkomsten

geven. Tafel III, de sinustafel, in tegenstelling met tafel II, de logarithmen sinustafel, geeft de waarden van de goniometrische functies om de minuut met aanwijzing, in hoeverre geïnterpoleerde waarden van de cotangens nog betrouwbaar zijn.

De inrichting van tafel II verschilt iets van de gewone; als toch de getallen van lange kolommen beginnen met hetzelfde drietal cijfers, doet men beter, die maar weg te laten; daardoor heeft men beter zicht op de getallen. Het vlugge zoeken en terugzoeken wordt mede bevorderd, doordat men in Tafel II op twee naast elkaar liggende bladzijden twee volle graden overziet, in Tafel III zelfs vier.

Mochten er nog wensen zijn voor deze tafel, die niet reeds vervuld zijn door Gonggrijp's Tafel D of Versluys' Tafel H, dan zal men mij zeer verplichten mij daarvan in kennis te stellen. Tevens verzoek ik gebruikers mij te wijzen op mogelijke drukfouten.

Amsterdam Zuid
Jac. Obrechtstraat 88.

P. WIJDENES.

BIJ DE TWEEDE DRUK.

Tevreden gebruikers hebben mij nog het volgende meegedeeld om bij voorkomende gelegenheid van gebruik te maken; deze doet zich thans reeds voor.

1) Ook de tafel van de gewone logarithmen is heel handig, daar men op twee bladzijden naast elkaar een vol honderdtal overziet.

2) De logarithmen-sinustafel heeft alle secondentafeltjes rechts; op elke bladzijde staat een volle graad, dus van 5° af op twee naast elkaar staande bladzijden twee volle graden.

3) Toe te juichen is het opnemen van de sinustafel; (men vindt deze echter ook reeds in Gonggrijp's tafel D, in Versluys' tafel H en thans ook in de tafel van Van Pesch). Een tafel met opklimming om de minuut is nodig, om de 15 minuten is volstrekt doelloos; immers het nut gaat weer verloren wegens tijdrovende interpolaties, waarvan bovendien niet is aangegeven, in hoeverre die juist zijn.

Van deze gelegenheid maak ik tevens gebruik om mijn zienswijze te geven over de rentetafels en om een paar vragen te beantwoorden.

a) We hebben bij ons onderwijs zo mogelijk rekening te houden met de practijk; moeten we onze leerlingen het weinige practische leren volgens een methode, die in de practijk nooit wordt toe-

gepast? Het gebruik van logarithmen is toch waarlijk op andere en betere manier toe te passen dan op de machtsverheffing van $1 + i$. Een bezwaar bij de examens, waarbij men het werken met logarithmen eist? Men heeft immers keus te over van percenten, die de tafel niet geeft b.v. $4\frac{1}{4} \%$; $5\frac{3}{4} \%$; $6,2 \%$.

b) „Waarom zo'n drukte gemaakt van de kleine hoeken? Ze komen haast niet voor", merkt men op. Mijn antwoord daarop is: inderdaad, als de H.B.S. en het Gymnasium ze vermijdt, komen ze daar niet voor en op vele scholen moesten de leraren de kleine hoeken wel vermijden, omdat hun tafel hen in de steek laat, waar het er juist op aankomt. Beperkt men zich tot driehoeken en vierhoeken, dan ontgaat men de kleine hoeken gemakkelijk; maar de practijk zal ze dikwijls eisen b.v. bij wegebouw. Nu weet ik wel, dat de middelbare school zich niet met allerlei toepassingen al van te voren kan bezighouden, maar ik vind toch, dat men op voldoende belangstelling zal kunnen rekenen, als men b.v. opgeeft: „De afstand van de aarde tot de maan is 384395 km; de middellijn van de maan is 3472,8 km; onder welke hoek wordt de maan door ons gezien?" of: „Bereken de kimduiking, die een vliegenier kan waarnemen op 3000 m hoogte; de straal van de aarde te rekenen op 6378,4 km". Bij beide komen „kleine hoeken" voor. De lezer zal ze met meerdere kunnen aanvullen. Of men nu zulke vraagstukjes maakt of niet, doet er niet toe, moet ieder voor zich zelf weten, maar dat men het bestaan van enige zwaarigheid in de logarithmentafel voor het interval tot 2° en boven 88° verzwijgt, lijkt me toch minder goed.

De tafels van Van Pesch, Versluys en Gonggrijp besteden natuurlijk behoorlijke zorg aan de genoemde intervallen, ook de Schooltafel, deze op een geheel andere manier; deze alle vier voldoen aan alle eisen, die de school kan stellen.

c) Men heeft mij gevraagd om interpolatietafels in de sinus-tafel; het aantal verschillen is door de sterke afwijking van de cotangens echter zo groot, dat deze zeker drie vel druks zouden moeten beslaan. Bovendien zouden alle bijzondere manieren om in 5 decimalen nauwkeurig te kunnen interpoleren ook moeten worden opgenomen. Volledig en afdoende is daarin echter reeds voorzien door Versluys Groote tafel H.

In de „sinustafel" kan men tussen de minuten overal evenredig interpoleren, behalve in de cotangenten tot $9^\circ 30'$, in de tangenten van $80^\circ 30'$ tot 90° .

Bijzondere dank ben ik verschuldigd voor de belangstelling, in dit tafelwerk betoond, aan den Heer Dr. Boks, leraar aan de Chr. H.B.S. te Leiden en aan den Heer Giesen, toen nog leraar aan de H.B.S. te Bandoeng, thans hier te lande.

Aug. 1934.

P. W.

LOGARITHMEN- EN RENTETAFELS.

Voor scholen, waar men geen goniometrie leert, maar wel sam. intrest.

P. WIJDENES, Log.- en Rentetafel A, 6e druk, gec. . . . f 0.60.
Deze bevat: Aanwijzingen. Gewone log. Log. van constanten. Log. van rentefactoren. Rentetafels I $(1+i)^n$; II $(1+i)^{-n}$ voor de procenten 2, $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$, 4, $4\frac{1}{2}$, 5, $5\frac{1}{2}$ en 6. Machten, wortels en omgekeerden.

P. WIJDENES, Log.- en Rentetafel B, 9e druk, gec. . . . f 0.85.
Inhoud als A en bovendien Rentetafel III $\Sigma (1+i)^n$; IV $\Sigma (1+i)^{-n}$; V Annuïteitentafel.

P. WIJDENES, Log. tafel C, 2e druk f 0.40.
Inhoud als A maar zonder rentetafels en aanwijzingen.

Voor Wisk. L.O.; H.B.S.; Gymn.

P. WIJDENES, Rentetafel D, 2e druk f 0.50.
Deze bevat de rentetafels I, II, III, IV en V onder A en B hierboven genoemd, met 50 termijnen.

Voor examens in Handelsrekenen, H. Handelscholen, banken, kantoren, accountants.

P. WIJDENES en Dr. P. G. VAN DE VLIET, Log.- en Rentetafel E, 2e druk, gec. met hulpboekje f 3.25.
Deze bevat de gewone log. en de vijf tafels voor samengestelde interest, verder de vijf overeenkomstige voor samengesteld disconto in 100 termijnen en procenten van $\frac{1}{2}$ tot 8 met $\frac{1}{2}$ % opklimmende.

H.B.S. 5-1. c., Gymn., Kl., Delft Landmeter, Wiskunde L.O.; Studenten.

J. VERSLUYS, Grootte tafel H, in drie kleuren, 298 blz. 2de druk, gebonden f 2.90
Wit I. Gewone logarithmen blz. 1-32. — Rose II. De log. der gon. functies blz. 1-96. — Wit III. De gon. functies met interpolatietafels blz. 1-128. — Groen IV. Bijtafels blz. 130-170.

- A. Natuurlijke logarithmen.
- B. Omzetting van natuurlijke logarithmen in gewone.
- C. Gon. verh. van hoeken in radialen uitgedrukt.
- D. Exponentieele en hyperbolische functies.
- E. Factorentafel en tafel der priemgetallen.
- F. Machten, wortels en omgekeerden.
- G. Eenige constanten met hun logarithmen.

Wilt gij weten, welke tafel voor U of voor Uw school geschikt is, vraag dan inlichtingen aan P. WIJDENES, Jacob Obrechtstraat 88, Amsterdam Zuid, Tel. 27119.

P. NOORDHOFF N.V. TE GRONINGEN EN BATAVIA.

58. Construeer het netwerk van de pyramide. ¹Waarom kan om die pyramide een bol beschreven worden? ²Construeer de straal van die omgeschreven bol.

59. Bewijs, dat de lijnstukken, die de hoekpunten van 't grondvlak van een afgeknotte driezijdige pyramide verbinden met de middens van de overstaande ribben van het bovenvlak, door één punt gaan. Als deze lijnstukken elkaar verdelen in reden van 3 : 1, welk deel is dan de inhoud van de afgeknotte pyramide van de inhoud van de pyramide, die ontstaat door verlenging van de opstaande ribben?

60. In hoekpunt A van $\triangle ABC$ trekt men de raaklijn aan de omgeschreven cirkel; in B richt men de loodlijn op BC op, die de eerstgenoemde raaklijn in D snijdt. Vervolgens trekt men de middellijn AF van de omgeschreven cirkel, die BC in E snijdt en verbindt E met D. Bewijs, dat $AB \times DE = AF \times BD$ is.

61. In de rechthoekige $\triangle ABC$ ($C = 90^\circ$) trekt men de zwaartelijnen AD en BE. Als $AD = \sqrt{73}$ en $BE = 2\sqrt{13}$ is, bereken dan de zijden, de straal van de om- en die van de ingeschreven cirkel van $\triangle ABC$.

62. Van pyramide TABCD is het grondvlak een vierkant (zijde a) en staat TA $\perp$ a loodrecht op het grondvlak. Men brengt het bissectrice-vlak aan door de ribbe BC. Construeer de doorsnede van dit vlak met de pyramide, zowel in een ruimtefiguur als in ware gedaante.

63. In een cirkel trekt men twee elkaar snijgende koorden AC en BD. Uit D trekt men BQ $\perp$ AC en uit C de lijn CR $\perp$ BD. De lijn RQ snijdt, verlengd, de cirkel in E en F en de lijn CB in G. Bewijs, dat $GE \times GF = GQ \times GR$ is en dat QR $\parallel$ AD loopt.

64. Wat is de meetkundige plaats van de toppen der driehoeken, die alle dezelfde basis en gelijke tophoeken hebben? Construeer die meetkundige plaats. Leid nu af de meetkundige plaats van de zwaartepunten van deze driehoeken.

65. Bewijs, dat de rechten, die een cirkel raken in de uiteinden van twee koorden, die loodrecht op elkaar staan, een koorden-vierhoek vormen.

66. In een kubus $EFGH$ $ABCD$ brengt men een vlak door een punt P op EH , een punt Q op AB en een punt R op CG . Teken de doorsnede. Bepaal de afstand, waarop DF en GC elkaar kruisen; eveneens die van DF en AC . Vervolgens brengt men twee kegels aan, die de ribben van de drievlakshoeken A en G tot beschrijvende lijnen hebben; bepaal de inhoud van het deel der ruimte, dat deze kegels gemeen hebben. Waar ligt het middelpunt van de bol, die door G gaat en raakt aan de ribben, die in A samenkomen? Construeer de meridiaandoorsnede van de kegel, beschreven om de drievlakshoek A . DHC, in ware grootte.
67. Twee cirkels snijden elkaar. Uit een punt S , dat buiten de cirkels op de gemeenschappelijke snijlijn is gelegen, trekt men een snijlijn SAB door de ene en SCD door de andere cirkel. Waarom is nu $ABDC$ een koordenvierhoek? Als we nu deze figuur projecteren op een ander vlak, dat niet evenwijdig is aan het vlak van tekening, en de projecties zijn A_1 , B_1 , D_1 en C_1 , kan dan $A_1B_1D_1C_1$ ook een koordenvierhoek zijn? Men vouwt nu het ene deel van de figuur om de gemeenschappelijke snijlijn over een hoek van 90° om. Construeer de straal van de bol, die door de beide cirkels bepaald is.
68. Gegeven een driehoek ABC ($\angle ACB$ is stomp). Als CP de hoogtelijn is, is dan CP middelevenredig tussen AP en BP ? Hoe zou men CP moeten trekken, dat dit wel het geval is?
69. Van een gegeven driehoek een vierhoek af te snijden, waarom en waarin een cirkel beschreven kan worden.
70. Verdeel een vierhoek in twee delen van gelijke oppervlakte door een lijn uit een hoekpunt.
71. Construeer een driehoek, als gegeven zijn de tophoek, de verhouding van de opstaande zijden en de hoogtelijn op de basis.
72. Verdeel $\triangle ABC$ in twee delen van gelijke oppervlakte door een lijn, evenwijdig aan een gegeven lijn l .
73. In een driezijdige pyramide $T.ABC$ brengt men het vlak $PQR \parallel ABC$ aan, zodat $TP : PA = 2 : 3$. Men verbindt P met het midden D van BC ; Q met het midden E van AC ;

- R met het midden F van AB. Bewijs, dat PD, QE en RF door één punt gaan. Als de inhoud van pyramide S.PQR = 1 cm^3 is, bereken dan de inhoud van de hele pyramide. (Aanwijzing: bereken eerst de verhouding PS : SD en vergelijk daarna de inhoud van SPQR met TPQR, enz.).
74. In de rechthoekige $\triangle ABC$ ($\angle C = 90^\circ$) is D het voetpunt van de hoogtelijn uit C. Door D trekt men een lijn DQ (Q op CB) en loodrecht daarop DP (P op AC). Bewijs, dat de vorm van $\triangle PDQ$ onveranderd blijft, als Q de zijde CB doorloopt. In welke stand is opp. $\triangle PDQ = \frac{1}{2}$ opp. $\triangle ABC$?
75. In een gelijkbenig trapezium met evenwijdige zijden 5 en 3,2 kan een cirkel beschreven worden; bereken de straal van deze cirkel. Vervolgens beschouwt men dit trapezium als grondvlak van een pyramide met hoogte = 4,8. De top ligt loodrecht boven het middelpunt van de ingeschreven cirkel van het grondvlak. Construeer het netwerk; waarom kan in deze pyramide een bol beschreven worden? Construeer en bereken de straal van de ingeschreven bol.
76. Van $\triangle ABC$ is $AB = 21$, $BC = 20$, $AC = 13 \text{ cm}$. Op AB neemt men $AD = 12 \text{ cm}$ en beschrijft met CD als middellijn een cirkel, die AC in E snijdt. Bereken EC.
77. Van een afgeknotte pyramide is het grondvlak een parallelogram. Bewijs, dat de lichaamsdiagonalen door één punt gaan.
78. Van een viervlak is gegeven, dat twee hoogtelijnen door de middelpunten gaan van de omgeschreven cirkels van de zijvlakken, waarop zij loodrecht staan. Bewijs, dat die hoogtelijnen elkaar snijden.
79. Hoe zoudt ge door een punt P een lijn construeren, die een lijn l loodrecht kruist en die evenwijdig loopt aan een vlak V?
80. Construeer een koordenvierhoek, waarvan gegeven zijn: een hoek, de beide diagonalen en de hoek, die de diagonalen met elkaar maken.
81. Van een pyramide is het grondvlak een ruit met een hoek van 60° ; in de pyramide kan een rechte cirkelkegel beschreven worden. De ontwikkeling van het zijdelingse oppervlak van deze kegel geeft een cirkelsector met een middelpuntshoek van 120° . Bereken de inhoud van de pyramide. Heeft

de pyramide ook een ingeschreven bol? En ook een omgeschreven bol?

82. Gegeven een cirkel; construeer een tweede cirkel met gelijke straal zo, dat de gemeenschappelijke koorde gelijk is aan de zijde van de ingeschreven regelmatige vijfhoek. Verbind de uiteinden van die koorde met het verst verwijderde punt van de tweede cirkel en beschouw deze figuur als een deel van het netwerk van een regelmatige 5-zijdige pyramide. Construeer de hoogte van die pyramide.

83. Men verlengt de hoogtelijnen AD, BE en CF van $\triangle ABC$ tot zij de omgeschreven cirkel opv. in P, Q en R snijden. Bewijs, dat $bg\ AQ = bg\ AR$, enz.; vervolgens, dat $HD = DP$, $HE = EQ$ en $HF = FR$ is. Wat zijn de hoogtelijnen van $\triangle ABC$ in $\triangle PQR$? Waaraan herinnert dit? Welk verband is er tussen $\triangle DEF$ en $\triangle PQR$? Wat weet ge van de omgeschreven cirkels van deze twee driehoeken? Noem de middens van de bovenste stukken der hoogtelijnen opv. K, L, en M. Wat is er te zeggen van de omgeschreven cirkel van $\triangle KLM$?

84. Bewijs, dat in een vierzijdige pyramide T. ABCD de lijnstukken, die de middens van de ribben van het grondvlak met de zwaartepunten Z_1, Z_2, Z_3 en Z_4 der overstaande zijvlakken verbinden, door één punt gaan. In welke verhouding verdelen die lijnstukken elkaar? Welk deel is de inhoud van de pyramide T. $Z_1Z_2Z_3Z_4$ van die van pyramide TABCD?

85. Construeer in $\triangle ABC$ een gelijkzijdige driehoek, waarvan de hoekpunten liggen op de zijden van $\triangle ABC$ en één zijde evenwijdig aan AB loopt.

86. Wat is een prismoïde? Leid de formule voor de inhoud van een prismoïde af. Noem enkele lichamen, die als prismoïde beschouwd kunnen worden.

87. Door een lijn a een vlak te brengen, zodat de projecties van twee kruisende lijnen b en c op dat vlak evenwijdig lopen.

88. Om een gegeven cirkel een gelijkbenig trapezium te beschrijven, waarvan de oppervlakte gelijk is aan die van een gegeven vierkant.

89. Teken een regelmatige vierzijdige pyramide. Onderzoek, in welk geval de om- en de ingeschreven bol concentrisch zijn.
90. Twee cirkels snijden elkaar in A en B. Door A wordt een lijn getrokken, die de cirkels nogmaals snijdt in P en Q. Toon aan, dat de verhouding van BP en BQ standvastig is.
91. Op de verlengden van de benen BA en BC van een gelijkbenige $\triangle ABC$ neemt men opv. de punten P en Q zo, dat $PA \times QC = AC^2$ is. Wat is de meetkundige plaats van het snijpunt S van AQ en CP?
92. Van een bolsector is de bolvormige oppervlakte gelijk aan de kegelvormige oppervlakte. Druk de hoogte van het bolsegment uit in de straal van de bol.
93. In een driehoek twee cirkels te construeren, met gelijke straal, die beide de basis raken, elkaar raken en ieder aan een opstaande zijde raken.
94. In een kegel een bol te construeren.
95. In een cirkel trekt men twee onderling loodrechte stralen MA en MB. P ligt op het verlengde van MB, Q op het verlengde van MA, terwijl AP en BQ elkaar op de cirkel snijden.

Bewijs, dat $AQ \times BP = 2r^2$ is. (r is de straal).

II. Algebra

1. De vorm $x^4 + ax^3 + (6a + 5b)x^2 + abx + 144$ is deelbaar door $x^2 + 6x + 8$. Bepaal a en b en ontbind daarna de vorm in factoren van de 1e graad in x .
2. Gegeven de vergelijking $(a^2 + 2)x^2 + (a + 1)x + (a^2 - 4a) = 0$; waarvoor welke reële waarden van a heeft het product van de wortels een uiterste waarde?
3. Los x op uit: $\sqrt{x^2 - 8x + 31} + (x - 4)^2 = 5$.
4. Bepaal een vergelijking van de 4e graad, die tot wortels heeft de kwadraten en de derde machten van de wortels van $x^2 + 3x + 1 = 0$.
5. Voor welke waarden van x is

$$\frac{2x + 10}{x - 3} > \frac{x + 11}{x - 4}?$$

6. Gegeven de vergelijking: $x^2 + mx + 2m - 14 = 0$. Voor welke waarde van m is de som van de kwadraten der wortels minimum?
7. Maak een graphische voorstelling van de functie $y = x^2 - 5x - 6$. Bepaal de snijpunten met de assen en het minimum. Voor welke waarden van x is de functie positief en voor welke negatief?
8. Ontbind $a^{12} - b^{12}$ in factoren.

Schrijf de uitkomst op van het quotient $\frac{a^{12} - b^{12}}{a^3 + b^3}$.

Noem de merkwaardige quotiënten en leid ze af.

9. Onderzoek de grafiek van $y = \frac{-2x + 3}{x^2 - 6x + 9}$.
10. Toon aan, dat de wortels van $x^2 - (3a + 4)x + 2a^2 + 5a - 4 = 0$ reëel zijn, als a reëel is.
11. Van de vergelijking $4x^5 - 22x^4 + 30x^3 + px^2 - 34x + 12 = 0$ is een der wortels 3. Bepaal p en de andere wortels. Bewijs, dat een veelterm, die nul wordt voor $x = 3$, deelbaar is door $x - 3$.
12. Maak een grafische voorstelling van de functie $y = -x^2 + 3x + 4$. De functie $y = ax^2 + bx - 42$ bereikt haar maximum voor $x = -3$ en dit maximum is gelijk aan
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + x^2 - 7x + 2}{x^2 - x - 2}$.
- Bepaal a en b en maak een grafiek van de functie.
13. Gegeven de breuk

$$\frac{x^2 + (p - 2)x - p}{x^3 + (m + 2)x^2 - (8m + 2)x - 120}$$

- De noemer is deelbaar door $x - 5$. Bepaal m en daarna de waarde van p , waarvoor de breuk te vereenvoudigen is. Noem en bewijs de reststelling.
14. De uiterste waarde van $ax^2 + bx + c$ is 10; deze wordt bereikt voor $x = 5$. Deeling van de vorm door $x - 7$ geeft tot rest -2 . Bepaal a , b en c .
15. Gegeven de vierkantsvergelijking $x^2 - 4x + 7 = 0$ (wortels x_1 en x_2). Bepaal een vierkantsvergelijking, die $2x_1^2 + 3x_2^2$ en $3x_1^2 + 2x_2^2$ tot wortels heeft.

16. Symmetrische functies van de wortels van een vierkantsvergelijking. Afhankelijkheid en strijdigheid van 2 lineaire vergelijkingen met 2 onbekenden.
17. Maak een grafische voorstelling van de functie $y = 2^x$.
Oneigenlijke machten!
18. Los x op uit:

$$(17x^2 + 83x - 100) \{ (x - 3)^{1/2} + (x + 2)^{1/2} \} =$$

$$= (17x^2 + 83x - 100) (3x + 4)^{1/2}$$
19. $px^2 - 2(p - 1)x + p^2 - 2p + 1$ bereikt zijn minimum $4a$ voor $x = a$. Bepaal p .
20. Bepaal a zodanig, dat de wortels van de vergelijking $x^2 - (a + 4)x + 5a - 6 = 0$ zich verhouden als 2:3.
21. Schets de grafiek van $y = \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - x + 1}$.
22. Eveneens van $y = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 6x + 8}$.
23. $x^{20} - 4x^{11} + 5x - 3$ wordt gedeeld door $x(x - 1)(x + 1)$.
Bepaal de rest zonder de deling uit te voeren. (Denk om de algemene gedaante van de rest!)
24. Voor welke waarden van x bestaat $\sqrt{x^2 - 3x - 10}$ niet?
Dezelfde vraag voor $\sqrt{-x^2 + x + 30}$. Schrijf een wortelvorm op, die voor alle waarden van x bestaat. Bepaal $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 10} - \sqrt{x^2 - 3x - 10})$. Denk daarbij aan de herleiding van $\frac{1}{2 - \sqrt{3}}$.
25. Bepaal m zodanig, dat de breuk $\frac{x^2 + (m - 3)x - 20}{x^3 - mx^2 - x + m}$ vereenvoudigd kan worden.
26. Welke betrekking bestaat tussen a , b en c , als de wortels van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ zich verhouden als 1:2?
27. Voor welke waarden van a is voor alle waarden van x :

$$x^2 - (a - 3)x - (a - 3) > 0?$$
28. In welk deel van het platte vlak liggen de punten, waarvoor

$$(y - x^2)(y - x - 1) > 0$$
 is?

29. In welk geval is $\frac{ax+b}{cx+d}$ onafhankelijk van x ?

Voor welke waarden van a is $\frac{(a-1)x+3a+1}{x+(a^2+a+1)}$ onafhankelijk van x ?

30. Schets de grafiek van $y = \frac{2x^2}{x^2 - 2x + 1}$.

31. Voor welke waarden van x is $(x+2)(2x-5)(x-4) < 0$?

32. Bewijs, dat $2^{6n+3} + 3^{4n+2}$ deelbaar is door 17.

33. Gevraagd een vergelijking samen te stellen van de 4e graad, die tot wortels heeft $3 - \sqrt{2}$ en $3 + \sqrt{2}$ en bovendien de imaginaire wortels van $x^3 - 1 = 0$.

34. Voor welke waarden van x ligt de waarde van de functie

$$y = 5^{\frac{1}{x^2 - x - 5}}$$

tussen 1 en 5?

35. De uiterste waarden van $y = x^2 - (a+2)x + 2a$ en $y = x^2 + ax + a - 1$ zijn gelijk. Bepaal a .

36. Voor welke waarde van a is de som van de derde machten van de wortels van $x^2 - (a+2)x + \frac{1}{3}a^2 + 2 = 0$ zo klein mogelijk?

37. Gegeven de vergelijking $x^2 - (a+3)x + (2a-7) = 0$. Gevraagd een vergelijking samen te stellen van de 4e graad, waarvan 2 wortels even groot zijn als die van de gegeven vergelijking, terwijl de beide andere wortels elk één groter zijn.

Bepaal daarna voor welke waarde van a de som van de kwadraten der vier wortels minimum is.

38. Voor alle waarden van x geldt:

$$(p+1)x^2 - 2(p-1)x + 3p - 3 < 0;$$

welke waarde moet p dan hebben?

39. Van de vergelijking $x^3 - ax^2 - 13x + 5a = 0$ is $x_1 = 5$. Bepaal a en vervolgens $x_2^3 + x_3^3$. (Reststelling!)

40. Gegeven de viërkantsvergelijking $4x^2 - 2x + 1 = 0$ (wortels x_1 en x_2). Gevraagd wordt een vergelijking van de 4e graad te bepalen, die tot wortels heeft $\frac{1}{x_1}$, $\frac{1}{x_2}$, x_1^3 en x_2^3 .

Wiskundige Werken van WIJDENES

Uitgaven van P. NOORDHOFF, Groningen.

Rekenkunde.

- P. WIJDENES, **Rekenkunde voor K I**, 2e dr. f 2.50
 * —, **Theorie der Rekenkunde** 2.75
 —, **Beknopte Rekenkunde** 2e druk, ing. f 2.—, geb. 2.50
 —, **Voorlooper op de rekenboeken**, 2e druk 0.60
 —, **Rekenboek voor M. U. L. O.**, I. 5e druk 1.60
 III. Herhaling Examenstukjes voor A en B. 3e druk 1.50
 —, **Rekenboek voor M. U. L. O.** Vereenvoudigde uitgave B. 1e stukje gec. f 1.40, 2e stukje, gec. 1.40
 —, **Vraagstukken uit Rekenboek I**, 8e druk 1.—
Vraagstukken uit Rekenboek II, met de Opgaven der M.U.L.O.-examens, 4e druk . 1.—
 — en Dr. D. DE LANGE, **Rekenboek voor de H.B.S.** I. 15e druk, II. 10e druk, à . 1.70
 — en H. J. VAN DER PLOEG, **Rekenen voor het Nijverheidsonderwijs**, 2e druk gec. 1.30
 —, in samenwerking met M. G. H. BIRKENHÄGER en H. J. D. MACHIENSEN, **Nieuw Rekenboek**, geb., I f 0.85, II f 1.—, III 1.20
 —, **Vraagstukken over Hoogere Algebra en Rekenkunde**, 2e druk, geb. 4.—
 —, **Handelsrekenen**, 4e druk, geb. 1.70
 — en F. VAN GUNST, **Rekenboek voor Handelsscholen**, gec. 1.85

Uit de bespreking door Dr E. J. Dijksterhuis van Wijdenes, Lagere Algebra:

De leerboeken van den heer Wijdenes kenmerken zich door een vlotte, heldere schrijfwijze, door een origineelen, menigmaal met taale traditie brekenden opzet en door een onvermoeid streven, HET ONDERWIJS IN DE ELEMEN- TAIRE WISKUNDE in ons land te vrijwaren voor de versteening, die het nog steeds in niet onbedenkelijke mate bedreigt. Door deze eigenschappen oefenen ze een onmiskenbaren en, naar mijne meening, heilzamen invloed uit op het middelbaar en gymasiaal onderwijs en op de wiskundige ontwikkeling van allen, die voor de acte L.O. studeeren of zich op de studie voor de acte K I voorbe- reiden. Zij zijn bovendien van groote waarde voor den beginnenden leeraar in wiskundige vakken, die vreemd staat tegenover die deelen van zijn vak, die hij te onder- wijzen zal hebben.

Algebra.

- P. WIJDENES en Dr. D. DE LANGE, **Leerboek der Algebra**. Deel I, 10e druk f 1.90
 Deel II, 8e druk 1.90
 Deel III, 6e druk 1.90
 —, **Uitgewerkte Mondelinge examens Hoogere Algebra**, 2e druk, doorschoten met schrijfpapier 6.—
 —, **Algebraische Vraagstukken**, I, 7e druk 2.25
 II, 6e druk 3.25

- P. WIJDENES, **Algebraisch teekenschrift**, 4e druk f 1.—
Definities en formules. 3e druk 0.75
 —, (in overleg met A. A. D. BOUWHOF, en J. C. LAGERWERFF), **Algebra voor examens in Handelsrekenen**, ing. f 2.75 geb. . 3.25
 — en Dr. P. G. VAN DE VLIET, **Algebra voor Hoogere Handelsscholen en voor de akte K XII**, 2e druk geb. . 2.50
 —, **Algebra voor Middelbare Handels- scholen**, 1e deeltje, 6e druk, f 1.75, 2e deeltje, 5e druk 1.75
 —, **Algebra voor M.U.L.O.**, I, 27e druk . 1.40
Algebra voor M.U.L.O., II A, 10e druk . 1.50
Algebra voor M.U.L.O., II B, Examen- uitgave, 10e druk 2.25
 —, **Klein Leerboek der Algebra**, ten dienste van Meisjesscholen, Technische scholen en voor onderwijzersopleiding. I, 2e druk en II geb. à . 1.60
 — en H. J. VAN DER PLOEG, **Algebra voor Nijverheidsonderwijs**. 2e druk, gec. . 1.50
 — en A. C. P. E. VERMEULEN, **Wiskunde voor Zeevaartscholen**. I. **Rekenen, Algebra en Meetkunde**, gec. . 3.90
 — en Dr. H. J. E. BETH, **Nieuwe Schoolalgebra**, I, 7e druk, geb. . 2.25
Nieuwe Schoolalgebra, II, 6e druk, geb. . 2.25
Nieuwe Schoolalgebra, III, 5e druk, geb. . 2.25
Nieuwe Schoolalgebra, IV, Diff. en Int. rekening geb. . 2.25
 —, **Indische uitgave van de Nieuwe School- algebra**, bewerkt door Dr. P. J. VAN LOO. Deel I, f 1.50. II, f 2.—, III, . 2.25
 —, **Grafiekenschrift bij de Nieuwe School- algebra en de Algebraische Vraag- stukken**, 5e druk 0.50
 —, **Beknopte Algebra**. I, 6e druk 1.70
 II, 6e druk 1.70
 —, **Vraagstukken over Hoogere Algebra en Rekenkunde**, 2e druk 4.—
 —, **Lagere Algebra**. I, 3e druk geb. . 5.50
Lagere Algebra. II, 2e druk (3e in be- werking) geb. . 8.50
 —, **Middel-Algebra**, 2e geheel omge- werkte druk geb. . 12.50
 —, **Functies en Grafieken** voor H. B. S., Gymnasium, Kweekschool en Wiskunde L.O. . 1.25
 —, **Twaalf wandplaten met grafieken**, 56×66 cm. 1 plaat, 12 pl.
 Onopgeplakt zonder staven f 0.60, f 6.50
 Onopgeplakt met staven - 0.70, - 7.50
 Op karton geplakt - 1.—, - 11.—
 Op linnen geplakt met staven - 1.25, - 13.—
 —, **Verkleinde reproducties** van de twaalf wandplaten met grafieken f 0.40

- P. WIJDENES, 30 **Teekenbladen voor Graphische voorstellingen** in map . . . f 1.20
 100 vel los f 2.90; 200 vel los f 5.20;
 300 vel los - 7.20
 —, **Geruite grafiekenbladen** per 12 stuks - 3.20
 6 bladen (om zelf op te tekenen). . . . - 1.80
 L. VAN ZANTEN, **Leerboek der Algebra**
 voor ambachtslieden, 8e druk herzien door
 P. WIJDENES - 0.60

Er bestaat in onze taal maar **één volledige serie leerboeken** voor de algebra. Deze wordt gevormd door:

- WIJDENES, P., **Lagere Algebra I.**
De algebraïsche grootheden en hun bewerkingen.
Lagere Algebra II.
Vergelijkingen, functies, grafieken en reeksen.
 WIJDENES, P., **Middel-Algebra.** 2e druk.
 SCHUH, Prof. Dr. F., **Lessen over de Hoogere Algebra I, II, III.**
 Voor acte-studie volgt op de Middel-Algebra:
 SCHUH, Prof. Dr. F., **Beknopte Hoogere Algebra.**

Vlakke Meetkunde.

- Dr. P. MOLENBROEK, **Leerboek der Vlakke Meetkunde**, 7e druk, bewerkt door P. WIJDENES, met overzicht, geb. . . . f 6.50
 * — en P. WIJDENES, **Planimetrie voor Middelbaar en Voorbereidend Hooger Onderwijs**, Deel I gec. 2e druk . . . - 1.90
 Deel II, gec. 2e druk - 1.90
 * J. VERSLUYS, **Beknopt leerboek der vlakke meetkunde**, 8e dr., herz. door P. WIJDENES - 1.25
 —, **Over methoden bij het oplossen van meetkundige vraagstukken**, 4e druk, herzien door P. WIJDENES, f 2.50, geb. - 3.—
 * W. H. WISSELINK, **Vraagstukken ter oefening in de Meetkunde**, herzien door P. WIJDENES, I. 22e dr. f 0.50, II. 16e dr. - 0.75
 * —, **Kern der Meetkunde**, herzien door P. WIJDENES, 15e druk - 0.90
 * P. WIJDENES en Dr. D. DE LANGE, **Vlakke Meetkunde**, I. met gradenboog en overzicht. 10e druk - 2.25
 II, met overzicht. 8e druk - 2.25
 P. WIJDENES, **Beknopte Meetkunde**, I. 8e dr. - 1.70
Beknopte Meetkunde, II, 6e druk . . - 1.70
 —, **Meetkunde voor M.U.L.O.** met gradenboog en driehoek, I. 13e druk . . . - 1.40
Meetkunde voor M.U.L.O., II, 6e druk - 1.50
Werkschrift bij I. 7e druk f 0.70, gec. - 0.90
 bij II, 3e druk f 0.60, gec. . . . - 0.85
 Van de 12e druk van I en de 6e van II af zijn de boekjes zó ingericht, dat men ze ook zonder werkschriften kan gebruiken.
 — en H. J. VAN DER PLOEG, **Meetkunde voor het Nijverheidsonderwijs**, 2e druk geb. - 1.95
 — en A. C. P. E. VERMEULEN, zie onder Algebra.
 — en L. P. RITCHI, **Vlakke Meetkunde voor Indische Scholen**, I f 1.40, II - 1.60 met overzicht, gradenboog en driehoeken.

- P. WIJDENES, **Planimetrie**. Een eenvoudig schoolboek voor het eerste onderwijs in de Vlakke Meetkunde.
 Uitgave in één deel, met twee celluloid driehoeken, gradenboog en overzicht, 2e dr., geb. - 3.20
 Uitgave in twee stukjes, 2e druk, gec. I - 1.60
 II - 1.60

- J. VERSLUYS, **Meetkunde der kegelsneden**, herzien door P. WIJDENES. 2e druk . . - 1.90

- P. WIJDENES, **Meetkundige vraagstukken** voor het M. en V.H.O. I, gec. met 2 driehoekjes en gradenboog. . . f 1.40, II, - 2.40

Stereometrie.

- Dr. P. MOLENBROEK, **Leerboek der Stereometrie**, 8e dr., bewerkt door P. WIJDENES, met overzicht, geb. - 6.—
 — en P. WIJDENES, **Stereometrie voor Middelbaar en Voorbereidend Hooger Onderwijs**, gec. met overzicht, 3e druk - 2.75
 P. WIJDENES, **Beknopte Stereometrie**, voor kweek- en normaalscholen, voor de hoofdacte en voor nijverheidsacten, 3e druk, geb. - 1.50
 —, **Kleine Stereometrie**, 3e druk, geb. - 1.40

Analytische Meetkunde.

- J. VERSLUYS, **Beknopt leerboek der Analytische Meetkunde**, 5e druk, herzien door P. WIJDENES f 3.—

Driehoeksmeting.

- Dr. P. MOLENBROEK en P. WIJDENES, **Vlakke driehoeksmeting voor Middelbaar en Voorbereidend Hooger Onderwijs**, 2e druk, gec. f 2.25
 J. VERSLUYS, **Boldriehoeksmeting met vraagstukken en antwoorden**, 9e druk, herzien door P. WIJDENES, geb. - 2.40
 P. WIJDENES, **Leerboek der Goniometrie en Trigonometrie**, 4e druk, geb. . . - 5.25
 —, **Beknopte Driehoeksmeting**, 6e druk gec. - 2.25
 —, **Kleine Driehoeksmeting voor de Practijk** - 2.—
 — en A. C. P. E. VERMEULEN, **Wiskunde voor Zeevaartscholen**. Deel II, Vlakke Driehoeksmeting en Boldriehoeksmeting, gec. - 2.25
 Uitwerkingen f 5.— alleen bij A. C. P. E. Vermeulen te Vlaardingen.

Beschrijvende Meetkunde.

- J. VERSLUYS, **Beschrijvende Meetkunde I**. 10e druk, herzien door P. WIJDENES. . f 2.25
 Prof. Dr. Hk. DE VRIES en P. WIJDENES, **Beschrijvende meetkunde voor K I en teekenacten**. Deel I, 5e druk, geb. . . - 3.60
 Deel II, geb. - 5.90
 P. WIJDENES, **Oefenbladen bij de Beschrijvende Meetkunde**, 4e druk - 2.50
 —, **Beknopte Beschrijvende Meetkunde**, 3e druk - 2.—

Tafels.

- NOORDHOFF'S **Schooltafel**, bewerkt door P. WIJDENES, in slap linnen bandje, in twee kleuren. 5e—10e duizendtal f 1.50
- P. WIJDENES, **Logarithmen- en Rentetafels**.
Uitgave A. 6e druk, gec. - 0.60
—, **Logarithmen- en Rentetafels**. Uitgave B. 9e druk, gec. - 0.85
—, **Logarithmentafels in vijf decimalen**.
Uitgave C. 2e druk - 0.40
—, **Rentetafels D. 2e druk** f 0.50, gec. - 0.75
— en Dr. P. G. VAN DE VLIET, **Uitgave E. Logarithmen-, Rente- en Discontotafels**, gec. met hulpboekje, 2e druk 3.25
Hulpboekje afzonderlijk - 0.50
- J. VERSLUYS, **Groote tafel H** bewerkt door P. WIJDENES, 2e druk, geb. - 2.90
De tafel met de meeste gegevens ook voor verdere studie.
- NOORDHOFF'S **Passerdoos**. Nederlands fabrikaat. De passer is vervaardigd van prima gewalst nieuw zilver. de trekpennen van extra gehard speciaal trekpennenstaal; roestvrij. Prijs per doos - 1.85
Bij afname van 10 st. à f 1.75; van 20 st. à - 1.65

De Wiskundige Catalogus van P. NOORDHOFF TE GRONINGEN.

vermeldt: (eind 1934)

- 16 titels Differentiaal- en Integraalrekening.
 - 18 „ Analytische meetkunde.
 - 37 „ Algebra.
 - 31 „ Rekenkunde.
 - 14 „ Handelsrekenen.
 - 27 „ Meetkunde.
 - 16 „ Stereometrie.
 - 12 „ Driehoeksmeting.
 - 17 „ Beschrijvende meetkunde.
 - 12 „ Diversen.
 - 23 „ Proefschriften.
 - 20 „ Redevoeringen.
 - 6 „ Philosophie der Wiskunde.
 - 22 „ Examenuitgaven.
 - 11 „ Logarithmentafels (21 tafels).
 - 9 „ Historische Bibl. en Geschiedenis.
 - 30 „ Natuurkunde en Mechanica.
 - 5 „ Natuurkundige Bibl.
 - 5 „ Tijdschriften (N. T. v. Wisk., Chr. Huygens, Euclides, Nieuw Archief en Compositio Mathematica).
- Vele dezer titels omvatten 2, 3 of 4 werken.

WIE

tegenwoordig MATHESIS studeert, vindt bij de Firma NOORDHOFF werken over elk vak te kust en te keur.

HIJ RAADPLEGE

vooral NOORDHOFF's Cat. B en C, die op aanvraag franco worden gezonden; beide geven de volledige inhoudsopgave van alle boeken en zeggen tevens, voor wie ze geschikt zijn.

INLICHTINGEN

worden verder gratis en franco verstrekt door P. WIJDENES Jac. Obrechtstr. 88 A'dam Z., Tel. 27119.

Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde, onder redactie van H. G. A. VERKAART, Roermond, en P. WIJDENES, Amsterdam, met medewerking van de professoren: Dr. F. Schuh, Delft; Dr. Hk. de Vries, Amsterdam, Dr. J. de Vries, Utrecht, en van Dr. L. Crijns, H. Herreilers, P. Jansen, Dr. P. de Vaere, J. N. Visschers, Dr. J. F. de Vries en Dr. U. H. van Wijk.

De 22e jaargang begon 1 September 1934.

De vijfde jaargang bevat een **klapper** met een volledige systematische inhoudsopgave van de Jg. I—V, de tiende over de Jg. VI—X, de vijftiende over de Jg. XI—XV, de twintigste over de Jg. XVI—XX.

Het **Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde** verschijnt in 6 tweemaandelijks afleveringen van minstens 4 vel druks gr. oct.; de artikelen, waarbij figuren behoren, worden flink geïllustreerd.

Het verschijnt 1 Sept., 1 Nov., 1 Jan., 1 Maart; 1 Mei en 1 Juli. Prijs franco per post en bij de boekhandel f 6.—.

De veilige gids voor de examens Wiskunde L. O. en K I.

Het **Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde** moet ijverig worden bestudeerd door hen, die het examen Wisk. L.O. en K¹ willen afleggen en worden bijgehouden door hen, die dagelijks les in wiskunde geven.

„**Euclides**”, **Tijdschrift voor de didactiek der exacte vakken**, onder redactie van J. H. SCHOGT en P. WIJDENES, met medewerking van Dr. H. J. E. Beth, Deventer, Dr. E. J. Dijksterhuis, Oisterwijk, Dr. G. C. Gerrits, Amsterdam, Dr. B. P. Haalmeyer, Amsterdam, Dr. C. de Jong, Leiden, Dr. W. P. Thysen, Bandoeng, Dr. P. de Vaere, Brussel en Dr. D. P. A. Verrijp, Arnhem. 11e Jaargang 1934/35.

In verband met paedagogische en didactische scholing van a.s. leraren, is intekening op **Euclides** voor studerende beslist noodzakelijk.

„**Euclides**” verschijnt in zes tweemaandelijks afleveringen, samen 18 vel druks. Prijs f 6.— per jaargang. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift of op Christiaan Huygens zijn ingetekend, betalen f 5.—.

„**Euclides**” is voor leraren en hen, die het hopen te worden, voor docenten aan Gymnasia, H. B. S., Kweekscholen, bij het Mulo, enz. Men volgt daarin de evolutie van het wis- en natuurkundig onderwijs en hoort, wat de besten onder de leraren te zeggen hebben.

Examenuitgaven.

H. G. A. VERKAART, P. WIJDENES en Prof. Dr. F. SCHUH, **Mondelinge examens Wiskunde L.O., K I en K V** f 8.50
Voor ab. op het N. T. v. W. - 5.—

A. J. VAN BREEN, **Wiskundige vraagstukken van het examen K I**, 4e druk, bewerkt door P. WIJDENES - 2.60
Supplementen 1922 tot heden elk à - 0.12⁵
Afzonderlijk besteld à - 0.15

P. WIJDENES, **Opgaven K I 1904—1917**, gec. - 1.10
Supplementen van 1918/heden à f 0.12⁵; afz. besteld à - 0.15

—, **Uitgewerkte mondelinge examens Hoogere Algebra**, 2e druk, f 6.—, voor ab. op het N. T. v. W. - 3.—

—, **Tien jaargangen van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde**. Dl II, stof voor K I - 4.50

GRATIS EN FRANCO

ONTVANGT IEDER VAN:

P. NOORDHOFF

TE GRONINGEN.

Catalogus A van alle uitgaven in de wis- en natuurkundige vakken.

Cat. B van schoolboeken } voor Wiskunde, Natuur-
„ C „ studieboeken } kunde en Mechanica,
met volledige inhoudsopgave, terwijl van elk boek is aangegeven voor welke scholen en examens het geschikt wordt geacht, b.v. U. L. O., Midd. Techn., H.B.S. 5-j.c., acte KI, acte NXVI, Prop. Delft, Hogeschool, Bibliotheek, enz.

EN VAN **P. WIJDENES**

TE AMSTERDAM Z.

JAC. OBRECHTSTRAAT 88 - TEL. 27119.

Wenken en Boekenlijst Wiskunde L.O. Het Examen KI en KV met boekenlijst; ook alle gewenste inlichtingen omtrent wiskundige studie en keuze van leerboeken.

Onveranderde 13de druk van

Meetkunde voor M. U. L. O.

DEEL I

door P. WIJDENES

in het bekende stevige, keurige bandje — met gratis overzicht, gradenboog en driehoek f 1.40

Vraagt een present-exemplaar ter kennismaking, alsmede van het

NIEUW REKENBOEK

door P. WIJDENES

M. G. H. BIRKENHÄGER

en H. J. D. MACHIELSEN

dat evenals alle andere werken van Wijdenes behalve aan een behoorlijke techniek ook eisen stelt aan het denkvermogen van de leerlingen.

Compleet in drie gebonden deeltjes 85 ct., f 1.— en f 1.20

Grotere oplagen volgen elkaar steeds sneller op van

Algebra voor M. U. L. O.

door P. WIJDENES

Van deeltje I verscheen de 27ste druk, van IIA de 10de druk, van IIB — de examenuitgave — eveneens de 10de druk.

Stevig geb. deeltjes — prijzen opv. f 1.40 f 1.50 en f 2.25.

De laatste drukken kunnen naast elkaar gebruikt worden, van I zelfs de 6e—27e druk.

Hierdoor is deze uitgave voor gemeenten en schoolbesturen het goedkoopste boek voor algebra.

WIJDENES' WISKUNDIGE WERKEN IN BELGIË

In België worden de schoolboeken, voor deze op een boekenlijst mogen worden geplaatst, eerst door de inspecteurs van het Middelbaar onderwijs gekeurd, Goedkeuring van buitenlandse werken betekent

EEN GROTE ONDERSCHIEDING

Het Min. van Kunsten en Wetenschappen in België heeft aan de leraren machtiging verleend de volgende Wiskundeboeken te gebruiken:

WIJDENES-BETH, Nieuwe schoolalgebra I, II, III met Grafiekschrift.

WIJDENES, Wandplaten met grafische voorstellingen.

MOLENBROEK-WIJDENES, Planimetrie I, II.

MOLENBROEK-WIJDENES, Stereometrie.

DE VRIES, Beknopte Mechanica.

DE VRIES-WIJDENES, Beschrijvende meetkunde I.

WIJDENES, Oefenbladen voor Beschrijvende Meetkunde.

VERSLUYS-WIJDENES, Tafel H.

WIJDENES-VAN DE VLIET, Tafel E, Logarithmen, rente en discontotafels.

WIJDENES, Beknopte Driehoeksmeting.

WIJDENES, Planimetrie.

WIJDENES, Rentetafels D.

WIJDENES, Leerboek der Goniometrie en Trigonometrie.

WIJDENES, Noordhoffs' Schooltafel; deze verscheen in Nov. 1932; de Fransche bewerking in Mei '33.

MIDDEL-ALGEBRA.

Sierlijk en stevig gebonden, 200 figuren,

611 bladzijden f 12.50

Antwoorden en uitwerkingen - 2.—

INHOUD: I. Volledige inductie 1—7. II. Ongelijkheden 8—19. III. Perm. en comb. 20—49. IV. Rek. reeksen van hoogere orde 50—73. V. Determinanten 74—105. VI. Lineaire vergelijkingen 106—134. VII. Onmeetbare getallen 135—160. VIII. Complexe getallen 161—192. IX. Het begrip functie 193—220. X. Alg. eig. van $V(x)$; nulpunten; wortels van $V(x) = 0$ 221—278. XI. Bin. verg. 279—295. XII. Opl. van 3e en 4e m. verg. 286—310. XIII. Scheiding der reële wortels 311—343. XIV. Benadering 344—378. XV. Symmetrische functies 379—397. XVI. Eliminatie 398—432. XVII. Varianten en limieten van varianten 433—471. XVIII. Limieten van functies 472—509. XIX. Reeksen 509—551. XX. Exponentieele en log. functies 551—573.

Examenopgaven Delft 573.

Geschiedkundige aantekeningen 577.

Register en formules van 591 af.

Verschenen:

Ir. J. M. HAVER

De Rekenliniaal

Prijs f 1.00

Verschenen:

P. H. v. CITTERT

Descriptive Catalogue of the Collection of Microscopes in charge of the Utrecht University Museum

with an introductory

Historical Survey of the Resolving Power of the Microscope.

Prijs f 2.90

Zo juist verscheen:

de derde druk van

P. WIJDENES

Beknpte Beschrijvende Meetkunde

Behalve de grondconstructies, die de theorie vormen, worden in dit boek ook 21 werkstukken van het Eind-examen H.B.S. volledig uitgevoerd. Prijs gec. f 2.00

Verschenen:

Dr. H. J. E. BETH

Beknopt Leerboek der Cosmographie

voor het middelbaar- en voorbereidend hoger onderwijs, kweek- en normaalscholen en studerenden voor de hoofd-akte, met 32 tekeningen in de tekst. 2de druk f 0.90

UITGAVEN P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN - BATAVIA

Dezer dagen verschijnt:

DRIEHOEKSMETING

voor M.O. en V.H.O.

door C. J. ALDERS, Leraar R.K. Lyceum te Haarlem.

Zo juist verschenen:

MEETKUNDIGE VRAAGSTUKKEN

Met de bewijzen van de stellingen en een aantal uitgewerkte voorbeelden voor het Middelbaar en Voorbereidend Hoger onderwijs

door **P. WIJDENES**

Deel I Prijs met gradenboog en 2 driehoeken
gec. f 1.40

Deel II gec. f 2.40

Verschenen:

NIEUWE SCHOOLALGEBRA

door **P. WIJDENES** en **Dr. H. J. E. BETH**

deel III, 5de druk

Prijs geb. f 2.25

Zo juist verscheen:

MEETKUNDE VOOR HET NIJVERHEIDSONDERWIJS

voor het Nijverheidsonderwijs

door **P. WIJDENES**

Met medewerking van **H. J. VAN DER PLOEG**,
Directeur van de Ambachtsschool C. I. N. te Amsterdam

Tweede druk

Prijs gecartonneerd met gradenboog f 1.95.

UITGAVEN **P. NOORDHOFF N.V.** - GRONINGEN - BATAVIA