

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDAC-
TIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN
J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

MET MEDEWERKING VAN

Dr. H. J. E. BETH
DEVENTER

Dr. E. J. DIJKSTERHUIS
OISTERWIJK

Dr. G. C. GERRITS
AMSTERDAM

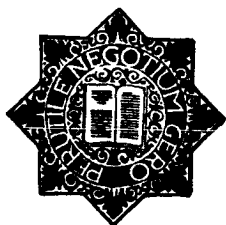
Dr. B. P. HAALMEIJER
AMSTERDAM

Dr. W. P. THIJSSEN
BANDOENG

Dr. P. DE VAERE
BRUSSEL

Dr. D. P. A. VERRIJP
ARNHEM

10e JAARGANG 1933/34, Nrs. 5 en 6



P. NOORDHOFF — GRONINGEN

⌞ Prijs per Jg. van 18 vel f 6.—. Voor intekenaars op het ⌞
Nieuw Tijdschrift Wiskunde en Christiaan Huygens f 5.—.

Wetfides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken
verschijnt in zes tweemaandelijksche afleveringen, samen 18 vel
druks. Prijs per jaargang f 5.—. Zij, die tevens op het Nieuw
Tijdschrift (f 6.—) of op „Christiaan Huygens” (f 10.—) zijn
ingeteekend, betalen f 5.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-
Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25
afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan
P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

INHOUD.

317.

Verslag van het tweede Nederlandsch congres van leeraren in de wiskunde en de natuurwetenschappen	225—281 ^{o)}
Ir. Dr. A. J. STARING, De kegelsneden in verband met het onderwijs in natuurkunde, mechanica en kosmografie	232—253
Dr. H. J. E. BERTH, Enkele beschouwingen inzake het meetkunde-onderwijs	257—275
Dr. A. VAN KREVELD, „De moderne ontwikkeling der foto- grafie” (met lichtbeelden)	275—280
Overzicht van de inhoud van de eerste tien jaargangen	281—288

^{o)} In het later uit te geven *complete* congresnummer zal de volgorde . .
vanzelfsprekend — worden gewijzigd.

VERSLAG VAN HET TWEEDE NEDERLANDSCH CONGRES VAN LEERAREN IN DE WISKUNDE EN DE NATUURWETENSCHAPPEN

op Donderdag 5 April 1934 te Utrecht.

De regelingscommissie bestond uit: Dr. D. P. A. Verrijp, Arnhem, voorzitter; W. de Lange, Amsterdam, secretaris; leden: Dr. P. G. Tiddens, Utrecht, W. L. Varossieau, 's-Gravenhage en Dr. A. D. Nathans, Utrecht.

Het congres werd bijgewoond door de volgende genoodigden en afgevaardigden:

de Heer J. van Andel, inspecteur van het Midd. en Gymn. Onderwijs, vertegenwoordiger van Z.E. den Minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen;

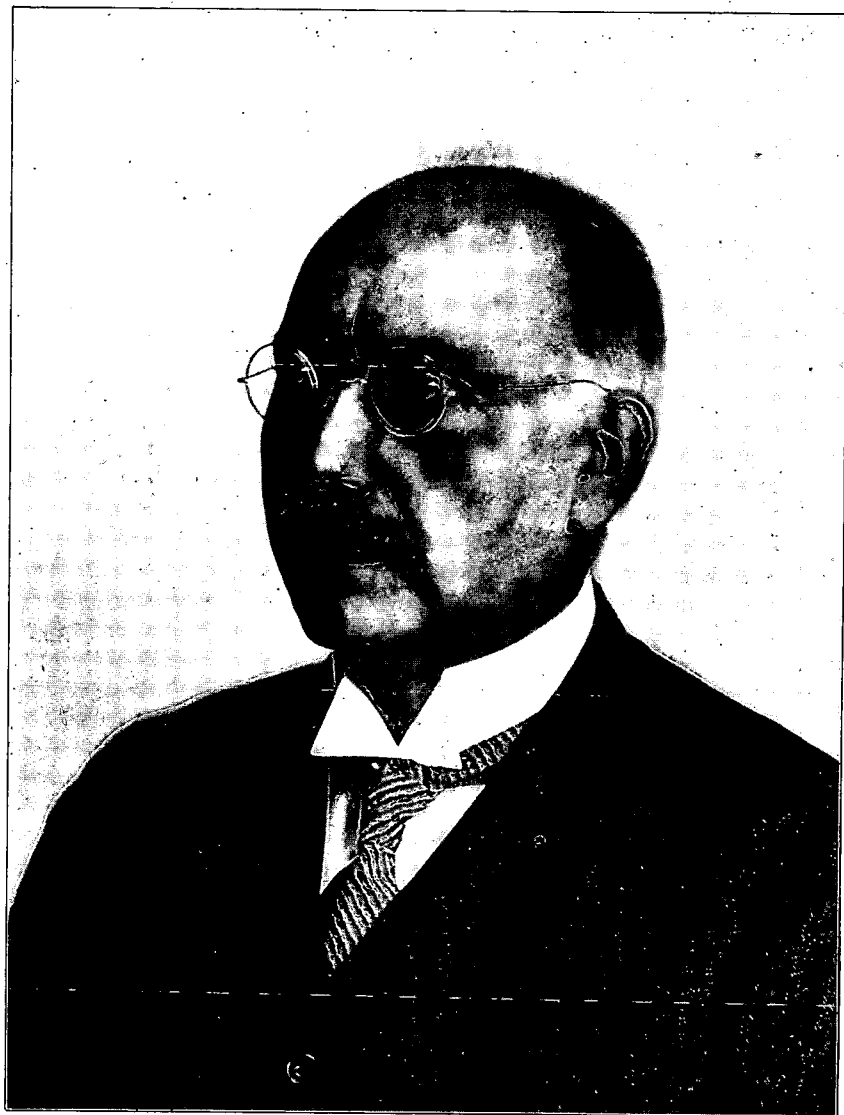
Dr. S. Elzinga, Dr. E. H. Renkema en de Heer M. van der Weyst, inspecteurs van het Midd. en Gymn. Onderwijs;

Dr. D. J. E. Schrek, namens het Bestuur van het Genootschap van Leeraren aan Nederlandsche Gymnasiën; Dr. A. Houdijk, namens het Hoofdbestuur van de Algemeene Vereeniging van Leeraren bij het M.O.; Ir. G. D. C. Eversmann, namens het Hoofdbestuur van de Kath. Leerarenvereeniging „St. Bonaventura”; Dr. P. Doornenbal, namens het Bestuur van de Vereeniging van Leeraren bij het Chr. M.O.; Dr. J. J. Prins, namens het Bestuur van de Vereeniging van Directeuren; Dr. K. J. Riemens, namens de Groep „Mo.G.A.” van het Genootschap; Dr. E. Slijper en Dr. A. H. Kan, namens de Groep Classici van het Genootschap; Prof. Dr. W. J. de Haas, namens de Commissie ter behartiging van de belangen van het onderwijs in de wiskunde en de natuurwetenschappen op H.B.S. en Gymnasium.

Voorts werd aan het Congres deelgenomen door:

Ir. J. P. C. van Asperen, 's-Gravenhage; Dr. N. Bakker, Wageningen; Mej. Ir. J. C. E. Bal, Rotterdam; Mej. Dr. Chr. Bastert, Amsterdam; G. W. M. Bazendijk, Baarn; Mej. T. A. Bekkering, Meppel; Dr. V. S. F. Berckmans, Maastricht; E. W. Beth, Leiden; Dr. H. J. E. Beth, Deventer; J. Beunk, Baarn; Mej. J. Bleeker,

Wageningen; Dr. H. J. Blikslager, Middelburg; Dr. S. R. van Asperen de Boer, Amsterdam; Dr. A. W. Boerman, Oud Beyerland; Dr. S. C. Bokhorst, Amsterdam; Dr. I. A. Bongers, Tiel; Dr. F. W. Bonnet, Utrecht; Ir. G. B. Boomer, Voorburg; Dr. T. Bouma, Harderwijk; Dr. N. Bouman, Amsterdam; Dr. H. P. Bouwman, Rotterdam; Dr. B. H. J. ter Braake, 's-Graveland; Dr. A. Brester, Amsterdam; Mej. Dr. A. ten Broeke, Haarlem; D. de Bruin, Leeuwarden; Dr. H. R. Bruins, Utrecht; N. A. Brunt, 's-Gravenhage; Dr. J. B. du Buy, Utrecht; Prof. R. P. van Calcar, Leiden; F. C. Cammel, Rotterdam; C. A. Campagne, Terneuzen; Zuster Canisa, Tilburg; Dr. P. H. van Cittert, Utrecht; Zuster Clementine, Tilburg; Dr. P. Coebergh, 's-Hertogenbosch; P. Coenraad, Zaandam; H. Corver, 's-Gravenhage; Ir. J. G. Roest Crollius, Leeuwarden; G. A. van Delft, Utrecht; Dr. A. J. van Ditmarsch, Zutphen; J. P. Donk, Zutphen; Dr. A. van Dop, Hilversum; C. W. Dornseiffen, Amsterdam; J. Drop, Vlaardingen; Mej. M. C. Duynstee, 's-Gravenhage; K. H. van Dijk, Haarlem; Dr. E. J. Dijksterhuis, Oisterwijk; C. P. A. van Eck, Roosendaal; H. J. van Eekeren, Zeist; Dr. J. Ellerbroek, Amsterdam; Ir. W. Estor, Hengelo (O.); Dr. C. Baart de la Faille, Arnhem; Mej. P. J. Fluyt, Arnhem; Dr. J. Fokkens, Dordrecht; R. Frantsen, Rotterdam; Dr. A. L. W. de Gee, Hilversum; S. J. Geursen, Tiel; M. van der Graaf, Schiedam; Dr. G. B. R. de Graaff, Sneek; Dr. G. F. C. Griss, Doetinchem; A. van der Groen, Amsterdam; Dr. J. T. Groosmuller, Velsen; Ir. J. Groot, Amsterdam; F. W. C. de Haas, Sneek; M. Hartzema, Amsterdam; Dr. A. van Haselen, Utrecht; Dr. H. B. van der Heyde, Amsterdam; Dr. A. Heyting, Enschede; H. Heitkamp, Oldenzaal; Dr. K. F. Heyt, Zutphen; L. Hobma, Zeist, H. Hoek, Haarlem; Pater P. van Hoek, Langeweg; A. J. Hoekstra, Amsterdam; Dr. J. Hoekstra, Maastricht; Dr. C. M. Hoogenboom, Deventer; Dr. R. Hooykaas, Utrecht; D. Hubbeling, 's-Gravenhage; Dr. M. J. Huizinga, Haarlem; J. M. Hummelen, Zutphen; Mej. Dr. H. Hylkema, Utrecht; H. Janett, Haarlem; Mej. A. F. J. Jansen, Nijmegen; R. S. Ketel, Almelo; J. Keulen, Heerenveen; G. E. Kiers, 's-Gravenhage; B. Kleefstra, Haarlem; F. de Kok; J. W. Koning, Zeist; Dr. W. Koster, Amsterdam; Mej. Dr. A. T. M. Kramer, 's-Gravenhage; Prof. Dr. H. A. Kramers, Utrecht; Dr. R. L. Krans, Arnhem; Dr. A. van Kreveld, Amsterdam; J. M. A. Kroes, Assen; M. Kruyswijk, Rotterdam; Ir. P. K. Krijger, Roermond; Ir. F. J.



Opname April 1932

Dr. D. P. A. VERRIJP

geb. 27 Jan. 1869; 1 Sept. 1892 leeraar aan de H.B.S. en B.A.S. te Deventer;
1896—1 Sept. 1934 leeraar aan het Gymnasium te Arnhem; 1902(—1 Sept. 1934)
tevens verbonden aan de Handelsschool (later H.B.S.A) aldaar.
1921—1934 voorzitter van de Groep Leeraren in Wiskunde en Natuurwetenschappen
aan Gymnasia en Lycea.
1932 en 1934 voorzitter van het Ned. Congres van Leeraren in de Wiskunde en
de Natuurwetenschappen.

Kubatz, Haarlem; D. Kuyper, Harderwijk; Mej. N. ter Laag, Groningen; Ir. A. J. van der Laan, Alkmaar; H. van Laarhoven, Roosendaal; Ir. A. A. Lagaay, Leiden; Mevr. Dr. M. de Lange—Zieren, Amsterdam; A. van Leeuwen, 's-Gravenhage; J. D. Rutgers van der Loeff, Hilversum; A. J. van der Loo, Delft; C. J. J. van der Maas, Schiedam; Mej. C. S. Maks, 's-Gravenhage; Mej. Ir. J. O. Matthijssen, Utrecht; N. J. Medemblik, 's-Gravenhage; de Mes; Dr. W. Middelberg, Hengelo (O.); Mej. Dr. J. G. Modderman, Hilversum; J. Mulder, 's-Gravenhage; Dr. P. Mulder, Gorcum; G. F. W. Mulders, Ede; H. J. Munzebrock, Baarn; N. Nieboer, Kampen; Pater H. W. G. Nieuwhof, Eindhoven; Dr. P. J. Nieuwkamp, Sneek; Mevr. G. van Oorde—de Lint, Heemstede; R. Oort, Bussum; H. T. Otten; Van Overbeek; Mej. Dr. D. J. W. Pool, Groningen; Dr. W. C. Post, Purmerend; Dr. G. Postma, 's-Gravenhage; Punt; Dr. J. G. van de Putte, Harderwijk; A. J. Pijpers, Venlo; Mej. Dr. J. Reudler, 's-Gravenhage; T. J. Risselada, Nijmegen; Dr. J. C. Röhner, Zierikzee; Dr. F. L. W. van Roosmalen, Tilburg; Dr. J. Rozenberg, Amsterdam; Dr. A. J. Rutgers, Gent; J. Th. Hart de Ruyter, Enschede; Mej. I. M. Saetrang, Baarn; A. Salverda, Groningen; Dr. H. C. Schamhardt, Zeist; Mej. H. B. Th. Schouten, Middelburg; Ir. P. Schut, Amersfoort, A. H. Sedee, 's-Gravenhage; Dr. J. Segaar, Amersfoort; W. Simons, Amsterdam; Dr. L. J. Smid, Warfum; Mej. Ir. J. R. Sonneveld, 's-Gravenhage; D. H. Stam, Kampen; Ir. Dr. A. J. Staring, Wageningen; G. G. Steemers, Arnhem; Dr. J. C. van der Steen, Gorcum; Dr. P. W. Steenbergen, 's-Gravenhage; Ir. O. H. Stuiver, Nijmegen; B. Swart, Zaandam; Mevr. C. H. H. Swart, Zaandam; Mej. Dr. E. G. C. Talma, Zwolle; Ir. J. J. Tekeleburg, Rotterdam; Dr. M. J. van Tussenbroek, Haarlem; Dr. S. Tijmstra, Zwolle; Dr. A. Vega, Utrecht; J. J. van de Ven, Roosendaal; Mevr. C. J. J. Verrijp—Van Asperen, Arnhem; H. B. J. Vlas, Alkmaar; Mej. Dr. Ir. N. H. J. M. Voogd, Haarlem; W. de Vries, Harderwijk; Dr. M. P. Vrij, Arnhem; Dr. J. H. Wansink, Arnhem; E. J. Wasscher, Utrecht; E. C. Wassink, Utrecht; Mej. Ir. O. B. van der Weide, 's-Gravenhage; A. van der Werf, Gorcum; J. Wichers, Arnhem; G. Wielenga, Amsterdam; Mej. E. Wieringa, Enkhuizen; L. H. Wilde, Groningen; Dr. A. A. M. Witte, Heerlen; Dr. S. van Woerden, Oosterbeek; Prof. L. K. Wolff, Utrecht; P. Wijdenes, Amsterdam; R. Wijmenga, 's-Gravenhage; Mej. G. M. van de Wijnpersse, Utrecht; Ir. D. C. J. IJlst, Utrecht; Dr. M. A.

Ijsseling, Almelo; D. van Zanten, Zeist; Prof. Dr. F. Zernike, Groningen; C. K. Zuur, Enschede.

De regelingscommissie werd bijgestaan door de volgende dames en heeren studenten:

Mej. M. Brand, Hilversum; H. van Olphen, Arnhem; Mej. B. Raven, Utrecht; D. Reiding, Arnhem; G. Röhrman, Utrecht; Mej. G. B. Scharp, Arnhem; M. Schregardus, Amersfoort; Mej. E. v. d. Slooten, Utrecht; J. A. Smit, Arnhem.

EERSTE ALGEMEENE VERGADERING.

Verzorging: het bestuur van L.i.W.e.N.a.G.e.L.

1. Opening.

De Voorzitter (dr. Verrijp) opent te 10.30 de vergadering met het uitspreken van de volgende woorden:

Dames en Heeren,

Bij de opening van het Tweede Congres van leeraren in de Wiskunde en in de Natuurwetenschappen heet ik U allen hartelijk welkom. In het bijzonder noem ik hierbij den Vertegenwoordiger van den Minister van Onderwijs, den heer Inspecteur van Andel, verder de heeren Inspecteurs dr. Elzinga, dr. Renkema en van der Weyst, de afgevaardigden van verschillende besturen, nl. van de Directeurenvereniging dr. Prins, van het Genootschap van leeraren aan Ned. gymnasia dr. Schrek, van de A. V. M. O. dr. Houdijk, van C. M. O. dr. Doornenbal, van St. Bonaventura ir. Eversmann, van de Groep Classici dr. Slijper en dr. Kan, van de Groep Mo.G.A. dr. Riemens. Ook heet ik welkom prof. W. J. de Haas als vertegenwoordiger van de Commissie ter behartiging van de belangen van het onderwijs in de natuurwetenschappen. Berichten van verhuidering zijn ingekomen van prof. van Poelje, dr. Coops, den heer Bolkestein, dr. van den Ent en van het bestuur der Groep Teekenleeraren.

Ik verzoek U, door een oogenblik op te staan, piëteit te betuigen voor wijlen H. M. de Koningin-Moeder.

Laat ik vervolgens in het kortè woord, dat ik heden tot U spreken wil, eerst een paar mededeelingen doen, die het programma betreffen.

De algemeene vergadering, die in 1932 twee voordrachten inhield, is thans in tweeën gesplitst; er is nu één begin- en één eind-

voordracht. Wij hebben deze regeling getroffen, omdat de vorige maal algemeen gevoeld werd, dat, na het groote succes van dat congres een waardig slot ontbrak. Echter hadden wij dit bezwaar wel voorzien. Maar wij vreesden, dat het einde van den dag wel eens minder belangstelling zou kunnen vertoonen dan het begin, wat in ons land — met de haast, die velen hebben om in den namiddag thuis te komen — een gewoon verschijnsel is. Ik hoop echter, dat die vrees thans beschaamd zal worden. Als U bedenkt, dat de Duitschers te Berlijn op heden nu al hun vierden congresdag doormaken, dat ze daaraan nog twee dagen vastknoopen voor excursies enz. en dat hun financieele verhoudingen — inderdaad de onze zijn veelal niet schitterend — ook niet zoo gunstig zijn, dan zijn wij met één vollen Nederlandschen congresdag zoo bescheiden, dat men dezen toch wel gehéél kan meemaken. Bovendien, wanneer het waar is, dat de Nederlander in tegenspoed niet versaat, dan heeft men hier de gelegenheid om het idealisme, dat den docent nu eenmaal eigen behoort te zijn, ook te toonen.

De tweede mededeeling betreft juist de eind-vergadering. Het bericht van de verhindering van prof. Sizoo — zijn driejarig zoonkje was ernstig ongesteld en is inmiddels overleden — bereikte ons, nadat de programma's al verzonden waren. En wij mogen ons gelukkig rekenen, dat prof. Kramers terstond bereid gevonden werd om ons uit de plotseling ontstane moeilijkheid te redden.

D. en H. Ik stond zoo straks even — misschien naar uw meening wel wat te lang — stil bij een mededeeling, die aan het einde het bij den docent behorende idealisme aanroerde. Inderdaad behoort ieder docent — in aanmerking genomen de groote zelfstandigheid, die hem in zijn ambt nu eenmaal moet gegeven worden — dat idealisme te bezitten. En zeker moet het ons, docenten in de exacte vakken, eigen zijn. Maar mijn veeljarig vereenigingsleven heeft mij er van overtuigd, dat de docent in de exacte vakken dit ook bezit. Onze methoden van onderwijs kunnen dikwijls verbetering behoeven, doch het genoemde idealisme heeft ten slotte op dat onderwijs veel meer invloed dan welke methode ook. De mislukkingen wijte men dan ook in 't algemeen niet aan den docent, zooals onlangs met zekere aanmatiging iemand van wetenschappelijke standing in haar te Groningen gehouden lezing beweerde. Die mislukkingen hebben heel andere oorzaken.

Is dit idealisme onmisbaar, waar het geldt speciale doeleinden te bereiken, gewichtiger is nog de algemeene beteekenis er van. In dit ópzicht sprak Bernhard Bavink het juiste woord, toen hij in 1931 te Dortmund in een indrukwekkende rede op het Duitsche Congres den invloed schetste, die de nieuwere physica op onze wereldbeschouwing uitoefent: „Ist es also nicht zutreffend,” zeide hij, „wenn ich behaupte, dasz in diesem Sinne, die naturwissenschaftlichen Fächer die wichtigste Grundlage für die gesamte geistige Erziehungsarbeit zu geben haben?”

Ik wil hieraan nog het volgende toevoegen. In de eerste plaats mag gezegd worden, dat natuurlijk in dit verband ook de wiskunde meegerekend moet worden en de bewering is hierbij niet misplaatst, dat het in den tegenwoordigen tijd een achterstand is, dat nog niet op elke school van wetenschappelijk voortgezet onderwijs de allereerste beginselen der infinitesimaalrekening onderwezen worden. Maar in de tweede plaats moet ik onmiddellijk bij de geciteerde uitspraak in herinnering brengen, dat men onmogelijk die nieuwere physica op zich zelf kan beschouwen. Men moet naar Galilei terug om te betoogen, dat, eerst betrekkelijk langzaam, doch in de negentiende en twintigste eeuw met steeds indrukwekkender snelheid, de invloed is toegenomen, die de natuurwetenschappen op de geheele maatschappij in doen en denken hebben uitgeoefend. Men heeft daartoe maar een oogenblik door zijn gedachten te laten gaan al hetgeen het energiebegrip in zijn doorwerking door de geheele natuurwetenschap verricht heeft, het inzicht, dat we hebben verkregen in mikro- en makrokosmos en verder in de biogenese in haar uitgebreidste beteekenis. Ten slotte moet ik in de derde plaats vermelden, dat door sommigen van U de opmerking gemaakt zou kunnen worden, dat men die nieuwere physica aan de leerlingen toch niet duidelijk kan maken. Maar dan antwoord ik: daar gaat het thans niet om, en zeker niet, zoolang als de vorm waarin ze op 't oogenblik voorkomt, een volledige explicatie uitsluit. Het gaat om wat anders: het is de geest, die den docent bij zijn onderwijs moet bezielen, die van den tegenwoordigen stand der wetenschap heeft kennis genomen. En ik zou het zoo willen uitdrukken, dat het is het breken met het starre materialisme, dat in de vorige eeuw — toen niet geheel ten onrechte — hoogtij vierde en dat men ons thans niet meer in de schoenen kan schuiven.

Geachte toehoorders, staat dit niet lijnrecht tegenover de op-

vatting, die van zekere gezagdragende zijde voortdurend is verkondigd, dat, ook met 't oog op de voorbereiding tot Universiteit of Hoogeschool, moet aangestuurd worden op een verdeeling van ons voortgezet onderwijs in een school voor geesteswetenschappen, één voor de exacte vakken en een z.g. maatschappijsschool? En houdt U het mij ten goede, indien ik, die maatschappij en wetenschap mijn gansche leven als ten nauwste verbonden heb gezien, daarom ook onmogelijk een opleiding van wetenschappelijk voorbereidend onderwijs als doeltreffend en zelfs ook uitvoerbaar kan beschouwen, die een zoodanige principieele differentiatie vertoont. Ik vraag mij af, of men hier niet — waarschijnlijk zonder dat men dit juist wenscht — den invloed ondergaat van de gewone kortzichtigheid van het publiek van allerlei ontwikkeling. Dat op een gymnasium en op een H.B.S. moderne talen behooren te worden onderwezen, vindt geen tegenspraak, maar zoodra als het gaat om wiskunde en natuurwetenschappen treden aversie tegen haar moeilijkheid, eenzijdigheid door eigen opleiding (waardoor zelfoverschatting), en struisvogelpolitiek ten opzichte van het toch reeds sedert jaren veranderde wereldbeeld, zoowel maatschappelijk als geestelijk, naar voren.

Wij moeten vertrouwen, dat de Regeering, bij haar tegenwoordigen moeilijken arbeid, wel zeer doordrongen zal zijn van haar plicht om alle meeningen naar haar hoogere geestelijke en maatschappelijke waarden af te meten. Zij zal dit moeten bedenken: men kan cultureel niet meer terug; men moet de film der werkelijkheid niet in tegengestelden zin willen afdraaien.

D. en H. Ik hoop, dat de doorlezing van het programma U geleerd heeft, dat wij zorg besteed hebben aan de samenstelling daarvan. Het filosofisch element, in zijn tweeledigheid — kennistheoretisch en wereldbeschouwend —, het maatschappelijk element in zijn tweeledigheid — direct aanwendbaar en algemeen bevorderlijk —, het eigenlijk vakelement eveneens in tweeledigheid en wel als speciaal vakbelang en als verband zoekend met andere vakken, hebben wij tot een geheel samengevat.

Laat ik besluiten met den wensch, dat deze dag ons bevrediging moge schenken.

SECTIEVERGADERING WISKUNDE

Verzorging: het bestuur van de Vereeniging van Leeraren in de Wiskunde enz. aan H.B.S.-en met 5-j. c. B. enz.

Te 1.30 opent de Voorzitter (dr. Tiddens) de vergadering. Allereerst wordt de volgende voordracht gehouden:

DE KEGELSNEDEN IN VERBAND MET HET ONDERWIJS IN NATUURKUNDE, MECHANICA EN KOSMOGRAFIE.

DOOR

Ir. Dr. A. J. STARING.

Het wiskunde-programma voor de H.B.S. heeft vele gebreken, die ik hier niet behoef op te sommen: meer bevoegden dan ik hebben daar reeds dikwijls de aandacht op gevestigd, helaas tot nu toe met weinig succes. De vergelijking van het H.B.S.-programma met dat van het gymnasium-B zal aan menig leeraar in de wiskunde aan een H.B.S. het onaangename gevoel geven, dat zijn school, wat het wiskunde-onderwijs betreft, achter staat bij het gymnasium, hoewel men toch de H.B.S. gaarne beschouwt als de school voor de typisch mathematisch natuurwetenschappelijke opleiding. En hij zal zijn gymnasiale collega's benijd hebben bij het lezen van de voordracht, die Dr. Verrijp in 1925 gehouden heeft voor de vergadering van L.i.w.e.n.a.g.e.l. over: De beteekenis van het onderwijs in de wiskunde voor de B-leerlingen van het gymnasium¹⁾, en zich hebben afgevraagd, waaraan de H.B.S. het te wijten heeft, dat men haar bij voortduring de gelegenheid onthoudt om de wiskunde op zóódanige manier te kunnen geven, dat haar groote waarde voor de ontwikkeling van het wetenschappelijk denken tot haar recht komt.

Een tijd lang heeft men de hoop kunnen koesteren, dat werkelijk belangrijke veranderingen op til waren: in 1926 verscheen het rapport der commissie-Beth.²⁾ Hoe verschillend men ook over onderdeelen daarvan moge denken, men zal moeten erkennen dat het werk der commissie een grootsche poging is geweest om het wiskunde-onderwijs grondig te verbeteren, door het functioneele denken op den voorgrond te plaatsen.

Ik breng dit in herinnering, omdat geheele of gedeeltelijke aanvaarding van het plan der commissie ook voor den docent in de

¹⁾ Bijv. N. T. v. Wisk. II, 1.

²⁾ Idem II 113; zie ook Jg. III.

mechanica van groot belang zou zijn. Hij zou op beter voorbereiden grond kunnen bouwen dan nu, en hij zou ontlast worden van de moreele verplichting om jaarlijks een inleidenden cursus te geven over zuiver wiskundige onderwerpen, waarvan de kennis vereischt wordt om een eenigszins behoorlijk begrip te krijgen van de leer der bewegingen: limieten, differentieeren, limieten in de meetkunde, raaklijnen, kromtestralen. Uit het feit, dat deze onderwerpen min of meer haastig behandeld moeten worden in uren, aan de eigenlijke mechanica onttrokken, blijkt duidelijk het ontoereikende van het bestaande wiskunde-programma, niet alleen wat de methode, maar ook wat de stof betreft. In mindere mate gelden de bezwaren voor de natuurkunde.

Ook dit is reeds vele malen naar voren gebracht, en het is niet mijn bedoeling daar verder op in te gaan. Maar wel lijkt het mij goed er eens op te wijzen van hoeveel belang voor het onderwijs in de genoemde vakken en de kosmografie zou kunnen zijn een klein onderdeel door de commissie-Beth in het ontwerp-leerplan genoemd: nl. de behandeling der kegelsneden. Ik hoop daardoor belangstelling te wekken voor dit deel van het wiskunde-programma, ook bij de collega's, die alleen wiskunde doceeren: immers het kan hun enthousiasme slechts verhoogen indien zij weten dat de kennis, die zij bijbrengen niet alleen meer wiskundig inzicht geeft, maar ook de mogelijkheid schept in andere takken van wetenschap dieper door te dringen.

Het wiskunde-programma voor de 5e klasse van het gymnasium-B bevat: „de analytische meetkunde tot en met de kegelsneden”; de bedoeling is blijkbaar deze krommen zuiver volgens de methoden der analytische meetkunde te behandelen. Het ontwerp leerplan der commissie-Beth geeft bij de meetkunde in de 3e klasse: „meetkundige behandeling van de eenvoudigste eigenschappen van parabool, ellips en hyperbool”; voor de 5e klasse wordt genoemd: „meetkundige behandeling der kegelsneden, met als uitgangspunt de stelling van Dandelin.” Ik wil beginnen met op te merken dat voor toepassing in de andere vakken het eerste gedeelte van dit programma voldoende is; slechts de allereenvoudigste eigenschappen behoeft men te kennen, nl. die, waarop de constructies van punten en raaklijnen berusten. Men kan deze afleiden uit de definities, waarbij de parabool gegeven wordt als de meetkun-

dige plaats der punten, die gelijke afstanden tot richtlijn en brandpunt hebben, en de ellips (hyperbool) als de meetkundige plaats der punten, waarvoor de som (het verschil) der afstanden tot de brandpunten constant is. Uit deze definities volgen:

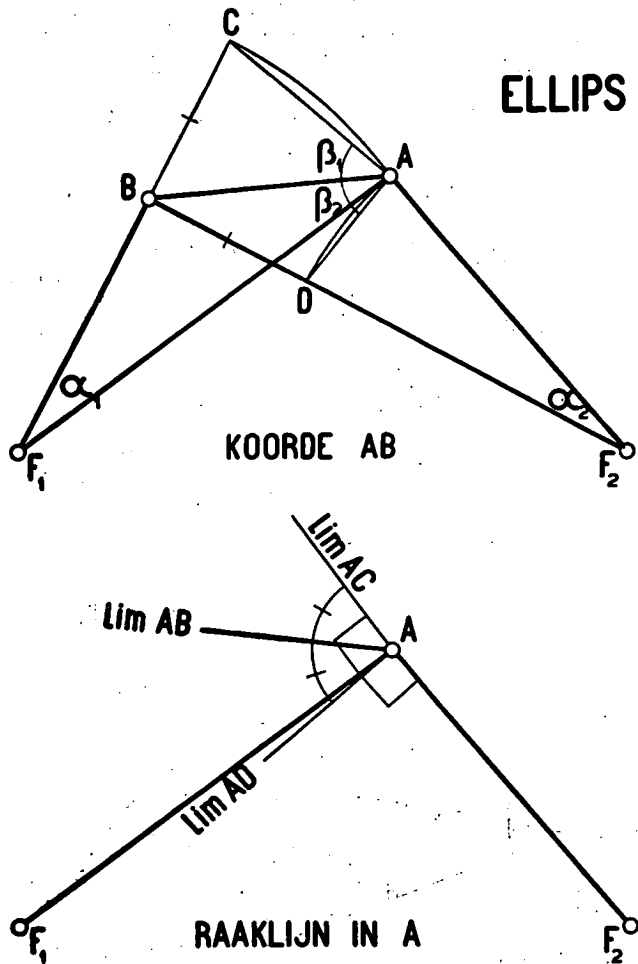


Fig. 1.

1. de eigenschap van de raaklijn, die men voor de ellips b.v. als volgt kan afleiden (zie fig. 1):

A en B zijn 2 punten van de ellips, waarvan F_1 en F_2 de brandpunten zijn. Maak

$$F_1C = F_1A \quad \text{en} \quad F_2D = F_2A,$$

dan volgt uit de definitie der ellips dat

$$BC = BD$$

De sinusregel, toegepast in de driehoeken ABC en ABD, geeft

$$\frac{BC}{AB} = \frac{BD}{AB} = \frac{\sin \beta_1}{\sin (90^\circ - \frac{1}{2}\alpha_1)} = \frac{\sin \beta_2}{\sin (90^\circ - \frac{1}{2}\alpha_2)}, \text{ dus}$$

$$\frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} = \frac{\sin (90^\circ - \frac{1}{2}\alpha_1)}{\sin (90^\circ - \frac{1}{2}\alpha_2)}$$

$$\lim_{B \rightarrow A} \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} = \lim_{\substack{\alpha_1 \rightarrow 0 \\ \alpha_2 \rightarrow 0}} \frac{\sin (90^\circ - \frac{1}{2}\alpha_1)}{\sin (90^\circ - \frac{1}{2}\alpha_2)} = 1,$$

dus $\lim \beta_1 = \lim \beta_2$, daar $\beta_1 + \beta_2 < 180^\circ$.

2. de constructie met behulp van richtlijn (richtcirkel) en brandpunt of brandpunten (zie fig. 2a en b). Deze constructies

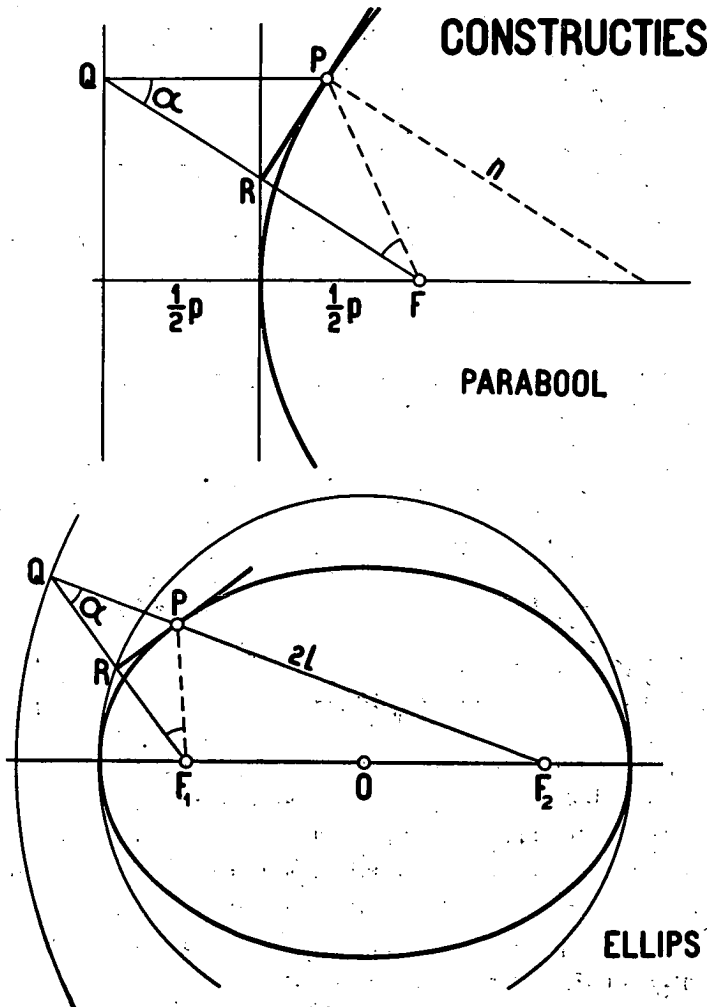


Fig. 2.

zijn van zooveel belang, omdat daarbij raaklijn en normaal in een punt vanzelf te voorschijn komen.

De raaklijneigenschap en de genoemde constructie kan men voor de ellips en de hyperbool niet zoo eenvoudig afleiden, wanneer men als uitgangspunt neemt de gemeenschappelijke definitie der kegelsneden, als meetkundige plaatsen der punten, waarvoor de verhouding der afstanden tot richtlijn en brandpunt constant is.

Niet direct tot de planimetrie behoorend, maar vereischt voor toepassing in de mechanica, is kennis van de vergelijkingen in rechthoekige coördinaten:

voor de parabool: $y = ax^2 + bx + c$

en voor de ellips: $\frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{k^2} = 1.$

Door de assenvergelijking van de ellips te vergelijken met die van den hoofdcirkel, kan men op eenvoudige wijze de formule voor de oppervlakte der ellips afleiden. Deze behoort ook tot de noodzakelijke kennis.

Wat de hyperbool betreft, zou men voor de natuurkunde en de mechanica desnoods kunnen volstaan met behandeling van de orthogonale hyperbool, en wel: puntenconstructie en raaklijneigenschap, in verband met de asymptoten, uitgaande van de vergelijking in den vorm

$$x \cdot y = C$$

We beschouwen deze kromme dus als een grafische voorstelling van het verband tusschen twee grootheden, die omgekeerd evenredig met elkaar zijn. De toepassingen berusten trouwens bijna altijd op deze eigenschap.

Begint men met het meest aanschouwelijke voorbeeld: het verband tusschen lengte en breedte van rechthoeken met gelijke oppervlakte, dan komt men tevens tot een eenvoudige constructie voor punten van een orthogonale hyperbool, waarvan de asymptoten en één punt gegeven zijn (zie fig. 3). Zij A een punt van de hyperbool. Construeer een rechthoek APBQ, met zijden evenwijdig aan de coördinaat-assen, en waarvan de diagonaal PQ, verlengd, door den oorsprong gaat. Dan is B ook een punt van de hyperbool. Het bewijs volgt onmiddellijk uit de gelijkheid der gelijkgenummerde driehoeken.

Men kan de punten A en B noemen: aan elkaar toegevoegd ten opzichte van de lijn OP.

Het is duidelijk, dat de koorde AB, die met de x-as eenzelfde hoek maakt als OP, tot limietstand heeft de raaklijn in het punt A der hyperbool, als B tot A nadert. De raaklijn in A maakt dus met de x-as denzelfden hoek als de lijn OA.

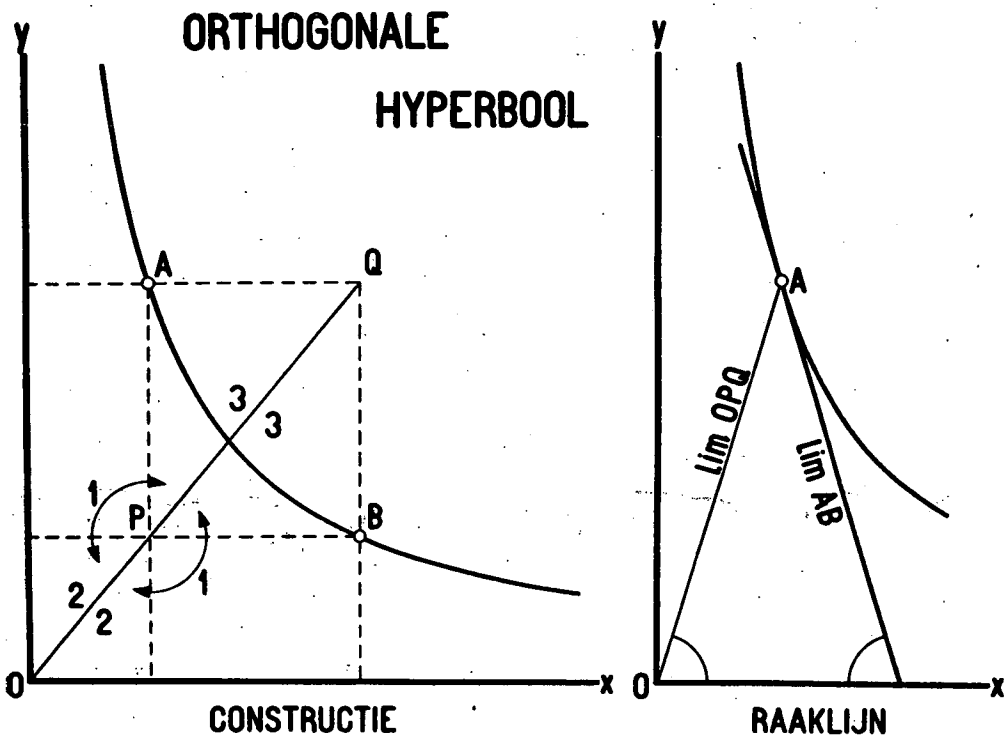


Fig. 3.

De genoemde constructie doet tevens een gemakkelijk herkenningsmiddel van de orthogonale hyperbool aan de hand; dit is van belang in de natuurkunde, als deze kromme het resultaat van een proef grafisch voorstelt (bij de proefondervindelijke afleiding van de wet van Boyle b.v.).

Men zal de hiervóór genoemde eischen betreffende kennis der kegelsneden bezwaarlijk overdreven kunnen noemen. De beteekenis van de raaklijn in een punt van een kromme is één der dingen die thans bij het wiskunde-onderwijs niet duidelijk uitkomen. Dikwijls krijgt men de eerste maal, dat een raaklijn aan een andere kromme

dan een cirkel ter sprake komt, op de vraag, wat daaronder verstaan moet worden, ten antwoord: een lijn loodrecht op den straal! Daar men in de mechanica steeds met raaklijnen te maken krijgt, is het noodzakelijk, dat deze niet alleen besproken worden bij den cirkel, maar ook bij andere krommen, en de kegelsneden leenen zich hiervoor uitstekend. Deze meetkundige toepassingen van het limietbegrip zijn niet te moeilijk voor leerlingen aan het einde der 3e of in het begin der 4e klasse.

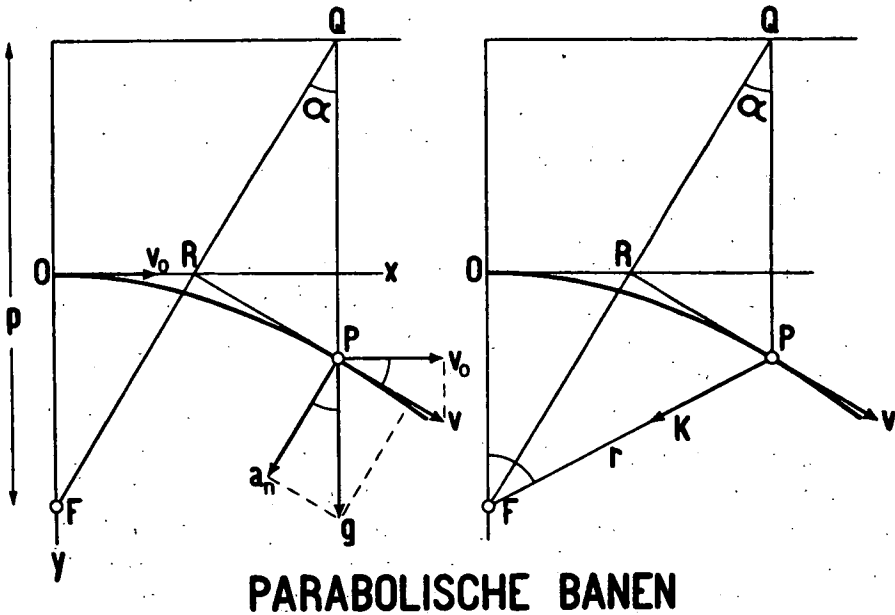
Bewegingen langs kegelsneden.

Wanneer ik nu het eerst enkele toepassingen in de mechanica en de kosmografie ga bespreken, dan is de reden, dat men bij het doceeren van deze vakken wel het meest de behoefte gevoelt aan eenige kennis der kegelsneden bij de leerlingen. In het bijzonder de kinematica en de dynamica van het stoffelijk punt, zooals die op de H.B.S. thans moeten worden behandeld, lijden onder gebrek aan die kennis. De fundamenteele begrippen tangentieele en normale versnelling kan men bijbrengen zonder een speciaal bewegingsgeval te behandelen. Men moet echter niet volstaan met aan te toonen dat bij een kromlijnige beweging de versnelling een normale component heeft; men moet de gelegenheid aangrijpen om een toepassing van het limietbegrip te maken, waarbij men zonder veel moeite bewijst, dat de normale versnelling evenredig is met het kwadraat van de snelheid, en dat de evenredigheidsfactor een meetkundige grootte is, geheel onafhankelijk van de beweging, en alleen afhankelijk van den vorm der baan, en in 't algemeen van punt tot punt veranderlijk.

Als deze basis dan gelegd is, kan men zich afvragen, op welke bewegingen men die begrippen kan toepassen, bewegingen die werkelijk vóórkomen, en niet gecomponeerd zijn ter wille van een vraagstuk. Dit aantal is eigenlijk zeer klein: de eenparige bewegingen langs rechte lijn en cirkel, val- en worpbeweging, de harmonische beweging langs een rechte lijn. Goed beschouwd dus twee kromlijnige bewegingen, waarvan de ééne uiterst eenvoudig is. Alleen de worpbeweging komt dan in aanmerking als voorbeeld van een beweging met tangentieele en normale versnelling. Maar zonder iets van de meetkunde van de parabool te weten kan men b.v. aan dit concrete voorbeeld niet de bovengenoemde eigenschap der normale versnelling laten zien. In de mij bekende schoolboeken

wordt dan ook over normale en tangentele versnelling bij de worpbeweging niet gesproken.

Met behulp van de constructiefiguur voor de parabool kan men de bedoelde eigenschap als volgt aantonen (fig. 4a).



WORPBEWEGING

KOMETEN-BEWEGING

Fig. 4.

Beschouwen wij een uit O horizontaal met snelheid v_0 wegge-
worpen punt. De bewegingsvergelijkingen zijn:

$$x = v_0 t \quad y = \frac{1}{2} g t^2,$$

zoodat de baanvergelijking is

$$x^2 = \frac{2v_0^2}{g} y.$$

De baan is dus een parabool met $p = \frac{v_0^2}{g}$.

In het punt P, bepaald door $\angle \alpha$, is

$$v = \frac{v_0}{\cos \alpha} \quad a_n = g \cos \alpha$$

dus

$$\frac{v^2}{a_n} = \frac{v_0^2}{g \cos^3 \alpha} = \frac{p}{\cos^3 \alpha} = e,$$

een grootheid (de kromtestraal in P), geheel onafhankelijk van de beweging.

Dit voorbeeld kan dus als toelichting dienen van de algemeene vergelijking

$$a_n = C v^2 = \frac{v^2}{\rho}$$

Kennis van de uitdrukking voor den kromtestraal in een punt van een parabool komt te pas, als men kinematisch de versnelling van een komeet langs een parabolische baan wil bepalen. Ik zal dit geval echter straks dynamisch behandelen.

Als uiterst belangrijke toepassingen der bewegingsleer kan men, toegerust met elementaire kennis der ellips, bespreken de twee centrale bewegingen langs een ellips, nl. de harmonische (Lissajous-)beweging, en de planetenbeweging.

Ik veronderstel, dat eerst de eigenschappen eener geprojecteerde beweging besproken zijn, en als toepassingen daarvan de worpbeweging en de harmonische beweging langs een rechte lijn. Dan volgt een beweging, waarvan de projecties op twee onderling loodrechte assen harmonische bewegingen uitvoeren met gelijken trillingstijd en een phaseverschil van 90° . Hiervoor geldt:

$$x = l \sin \left(2\pi \frac{t}{T} \right) \quad y = k \cos \left(2\pi \frac{t}{T} \right),$$

zoodat de baanvergelijking is

$$\frac{x^2}{l^2} + \frac{y^2}{k^2} = 1.$$

De baan is dus een ellips en men bewijst gemakkelijk, dat de versnelling naar het middelpunt gericht is, en evenredig is met den voorstraal:

$$\frac{a}{r} = \frac{4\pi^2}{T^2}.$$

We hebben hier dan een voorbeeld van een centrale beweging (waarvan de eenparige beweging langs een cirkel een bijzonder geval is), en dit is de aanleiding om centrale bewegingen te bespreken, in 't bijzonder de wet der perken. Voor een gesloten baan wordt deze gebracht in den vorm: het moment der snelheid ten opzichte van het centrum is gelijk aan de dubbele oppervlakte, door de baan omsloten, gedeeld door den omloopstijd.

Uit fig. 5 volgt dan, dat in het punt van de ellips, bepaald door $\angle \alpha$:

$$v \cdot h_1 = \frac{2\pi kl}{T}$$

met

$$h_1 = l \cos \alpha,$$

zoodat

$$v = \frac{2\pi k}{T \cos \alpha}.$$

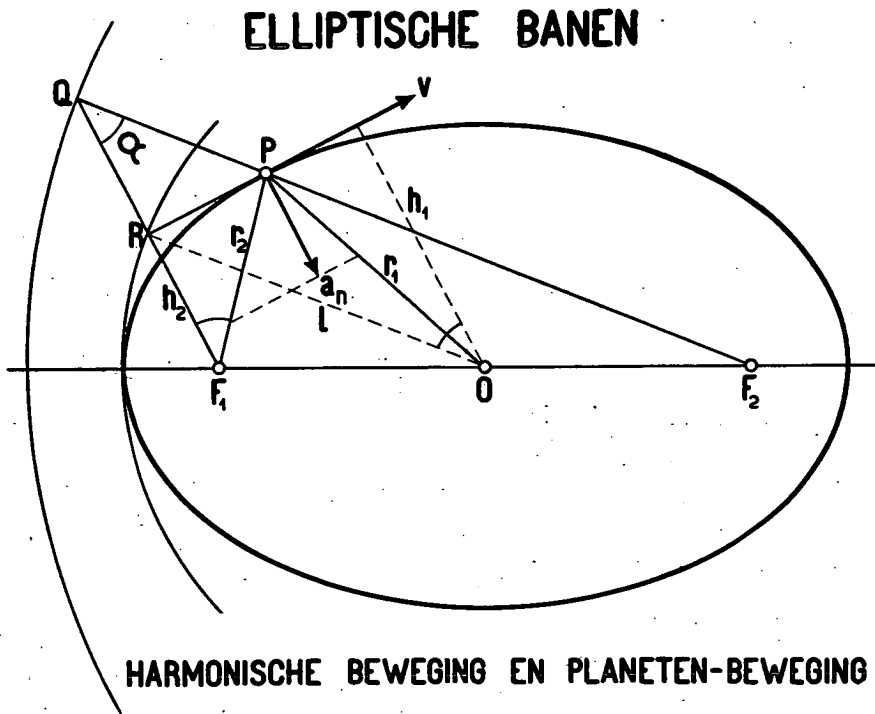


Fig. 5.

Daar verder:

$$a = \frac{4\pi^2}{T^2} r_1,$$

volgt uit gelijkvormigheid van driehoeken:

$$a_n = \frac{4\pi^2}{T^2} h_1 = \frac{4\pi^2}{T^2} l \cos \alpha.$$

Het verband tusschen a_n en v is:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho},$$

waarin ϱ de kromtestraal is in het beschouwde punt van de ellips. Dus is

$$\varrho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{k^2}{l \cos^3 \alpha}$$

Deze uitdrukking voor den kromtestraal kan gebruikt worden om te bepalen, welke versnelling een planeet moet hebben, die volgens de wetten van Kepler om de zon loopt. De wet der perken geeft in dit geval (fig. 5)

$$v \cdot h_2 = \frac{2\pi k l}{T}$$

met

$$h_2 = r_2 \cos \alpha,$$

zoodat

$$v = \frac{2\pi k l}{T r_2 \cos \alpha}.$$

De versnelling a is naar F_1 gericht, en de normale versnelling is:

$$a_n = \frac{v^2}{\varrho} = \frac{4\pi^2 l^3}{T^2 r_2^2} \cos \alpha.$$

De totale versnelling is

$$a = \frac{a_n}{\cos \alpha} = \frac{4\pi^2 l^3}{T^2 r_2^2} = \frac{C}{r_2^2},$$

dus omgekeerd evenredig met het kwadraat van den afstand tot het centrum. Volgens de 3e wet van Kepler heeft C voor alle planeten dezelfde waarde.¹⁾

Op soortgelijke wijze kan men, door vergelijking van een kogelbaan en een parabolische kometenbaan, bewijzen dat kometen een naar de zon gerichte versnelling hebben, omgekeerd evenredig met het kwadraat van den afstand tot de zon. Hyperbolische kometenbanen kunnen echter op deze wijze niet behandeld worden, omdat geen beweging langs een hyperbool mogelijk is, die opgebouwd is uit elementaire rechte lijnige bewegingen (eenparige, eenparig veranderlijke, of harmonische).

¹⁾ Directe vergelijking van een harmonische beweging en een planetenbeweging langs dezelfde ellips met denzelfden omloopstijd ligt ten grondslag aan het idee om de beweging van een planeet te beschrijven met behulp van een „middelbare planeet”; dit voert op zeer eenvoudige wijze tot de z.g. vergelijking van Kepler, die het verband geeft tusschen middelbare en excentrische anomalie.

Het is duidelijk, dat het bewijs, dat planeten en kometen ten opzichte van het sterrenstelsel naar de zon gerichte versnellingen hebben, die alle op dezelfde wijze van den voerstraal afhangen, een aanwijzing is, dat dit stelsel bijzonder belangrijk is om de bewegingen dezer hemellichamen op te betrekken, even belangrijk, als de aarde het is voor de beweging van aardsche lichamen. Zoodra dit ingezien wordt, is het bespreken van de vraag: ten opzichte van welk stelsel moeten de versnellingen bepaald worden, die men aan krachten moet toeschrijven?, mogelijk geworden. Deze voor de beginselen der dynamica zeer belangrijke kwestie behoeft niet verdoezeld te worden, indien men de leerlingen verder laat kijken dan de aarde.

Dit alléén reeds zou m.i. de behandeling der planetenbeweging rechtvaardigen, ook als dit onderwerp voor de verdere verduidelijking van kinematische en dynamische begrippen niet zoo bij uitstek geschikt was. Tot staving van deze bewering wijs ik er op, dat de besproken bewegingsgevallen zich uitstekend leenen voor toepassingen van de arbeidsvergelijking. Dit is een niet te onderschatten voordeel; immers ook voor deze vergelijking is het gebied der toepassingen en oefeningen anders zeer klein. Ter afwisseling zal ik thans de parabool nemen en de vraag stellen: welke kracht, naar het brandpunt gericht, veroorzaakt een beweging langs de parabool?

De gedachtengang is: men moet $\frac{1}{2} mv^2$ uitdrukken in r , met behulp van de voorwaardevergelijking (hier de wet der perken), en meetkundige betrekkingen. De eerste geeft (zie fig. 4b)

$$v \cdot r \cos \alpha = C$$

en de tweede:

$$r \cos^2 \alpha = \frac{p}{2}$$

zoodat

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2 \cos^2 \alpha} = \frac{mC^2}{pr}$$

Dus:

$$\begin{aligned} & (\text{gemiddelde kracht over } r_1 - r_2) \times (r_1 - r_2) = \\ & = \frac{mC^2}{p} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = \frac{mC^2}{p} \cdot \frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2} \end{aligned}$$

De gemiddelde kracht over $r_1 - r_2$ is dus

$$\frac{mC^2}{p} \cdot \frac{1}{r_1 r_2}$$

De kracht op afstand r_1 is dus:

$$\lim_{r_2 \rightarrow r_1} \frac{mC^2}{p} \cdot \frac{1}{r_1 r_2} = \frac{mC^2}{pr_1^2}.$$

De kracht is omgekeerd evenredig met het kwadraat van den afstand tot het brandpunt.

Hier komt tevens een voor de toepassing in de electrostatica belangrijke eigenschap voor den dag betreffende den arbeid, verricht door een kracht volgens Newton of Coulomb. Men kan deze nl. berekenen met behulp van een gemiddelde waarde voor de kracht, die de middenevenredige is tusschen begin- en eindwaarde.

De andere bewegingen langs de kegelsneden (ook langs een hyperbool) leenen zich tot soortgelijke berekeningen.¹⁾ Schrijft men de kinetische energie van den planeet op als functie van den voerstraal, dan blijkt deze nul te moeten zijn op den richtcirkel om de zon; aan deze uitkomst kan een beschouwing worden vastgeknoopt over de parabolische snelheid, zoodat duidelijk wordt in welke gevallen men een parabolische, en in welke een elliptische of hyperbolische baan moet verwachten.

Met het voorgaande meen ik te hebben aangetoond dat zeer geringe kennis van de meetkunde der kegelsneden ons in staat stelt het gebied van kinematica en dynamica voor de H.B.S. zoodanig te verruimen, dat een beter inzicht verkregen kan worden in bewegingskwesties. Het heeft noodzakelijk tot gevolg een dieper ingaan op enkele fundamenteele zaken, waarbij de hoeveelheid te behandelen stof niet zoo heel veel toeneemt. M.i. kan compensatie verkregen worden door vereenvoudiging der statica en der berekeningen over zwaartepunten, onderwerpen die dikwijls een te groote plaats innemen ten koste van de veel belangrijker kwesties van kinematischen en dynamischen aard.

Toepassingen in de statica.

Ook in de statica kan men kennis der kegelsneden gebruiken.

Een eenvoudig vraagstuk als: welke plaats zal, onder invloed van zijn gewicht, een stoffelijk punt innemen, dat zich zonder wrijving langs een volkomen buigzaam gewichtloos koord kan

¹⁾ Zie voor de planetenbeweging: Euclides VIII, 139.

bewegen, dat tusschen twee punten hangt?, kan met meer inzicht behandeld worden, als men de mogelijke baan van het punt, een ellips, beschouwt, dan wanneer men zonder meer de evenwichtsvoorwaarden opschrijft.

Als interessante toepassing van de parabool wil ik noemen de hangbrug. Men denke zich een aantal gelijke gewichten G opgehangen aan een volkomen buigzaam, gewichtloos koord, dat tusschen twee punten hangt, op zóódanige wijze, dat in den even-

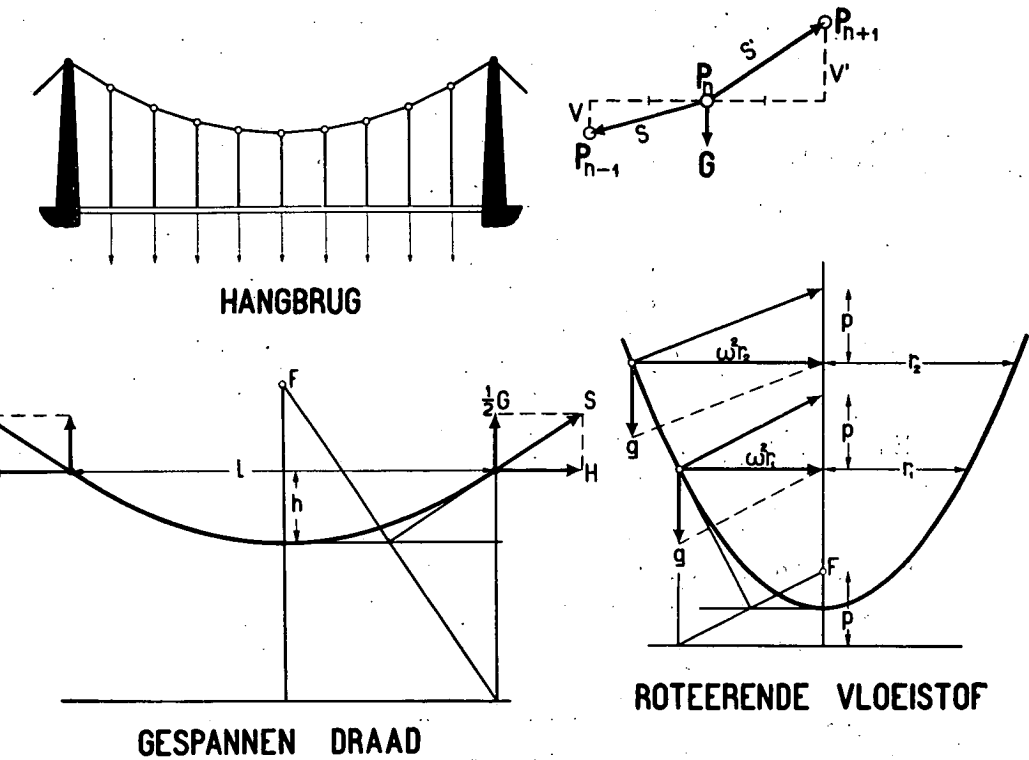


Fig. 6.

wichtstoestand de horizontale afstanden der gewichten gelijk zijn. Aan welke voorwaarde moeten de verticale afstanden der aangrijpingspunten $P_0, P_1, \dots, P_n, \dots$ der gewichten voldoen?

Op het punt P_n (fig. 6 boven rechts) werken drie krachten, die evenwicht moeten maken: de spanningen S en S' , en G . Blijkbaar moeten de horizontale ontbondenen der spanning elkaar opheffen; gemakshalve kiezen we daarom den krachteenheidsvector zóó, dat S door de lengte $P_{n-1} P_n$ wordt voorgesteld; $P_n P_{n+1}$ stelt dan S'

voor. Samenstelling der verticale componenten geeft dan:

$$V' - V - G = 0$$

of

$$V' - V = G = \text{constant},$$

zoodat, overgaande tot de werkelijke afstanden, en bij het aannemen van een vertikale y -as, men heeft:

$$(y_{n+1} - y_n) - (y_n - y_{n-1}) = \text{constant} = 2c$$

$$y_{n+1} = 2y_n - y_{n-1} + 2c.$$

Dat de aangrijpingspunten op een parabool liggen blijkt als volgt. Kiezen we gemakshalve den oorsprong in het punt, waarvoor $n = 0$ is, dan is, als h een constante voorstelt:

$x_0 = 0$	$y_0 = 0$
$x_1 = l$	$y_1 = h$
$x_2 = 2l$	$y_2 = 2h + 2c$
$x_3 = 3l$	$y_3 = 3h + 6c$
$x_4 = 4l$	$y_4 = 4h + 12c$
$\dots$	$\dots$
$x_n = nl$	$y_n = nh + n(n-1)c$
	$= n^2c + n(h-c).$

Eliminatie van n uit x_n en y_n geeft

$$y_n = \frac{c}{l^2} x_n^2 + \frac{h-c}{l} x_n.$$

De aangrijpingspunten liggen dus op de parabool

$$y = \frac{c}{l^2} x^2 + \frac{h-c}{l} x,$$

waarvan de as vertikaal is.

Dit evenwichtsgeval doet zich voor bij hangbruggen (zie fig. 6); de ophangpunten op een kabel zullen met groote benadering op een parabool liggen, indien men gelijke belasting der vertikale kabels aanneemt. Men kan dit resultaat gemakkelijk met een eenvoudig model aantoonen.

Een vrij strak gespannen draad (telegraafdraad b.v.; zie fig. 6) kan bij benadering als een bijzonder geval van het vorige beschouwd worden. De gelijke krachten op onderling gelijke horizontale afstanden zijn nu de gewichten van gelijke stukjes; deze zijn bij benadering op onderling gelijke horizontale afstanden, zoolang de helling niet te groot wordt. De draad kan dan als parabool

beschouwd worden. Zij de lengte l , de pijl h , en het gewicht G . De horizontale kracht H , waarmede de draad aan de palen trekt, is gemakkelijk te vinden uit de constructiefiguur van de parabool; hieruit blijkt:

$$\frac{1}{2}G : H = h : \frac{1}{4}l$$

of

$$H = \frac{1}{8}G \cdot \frac{l}{h}$$

Roteerende vloeistof. (fig. 6).

Wanneer een gedeeltelijk met vloeistof gevuld vat eenparig wordt rondgedraaid om een vertikale as, dan is de meridiaan doorsnede van het vloeistofoppervlak een parabool. Dit berust op de eigenschap van die kromme, dat de subnormaal op de as constant is, hetgeen uit de constructiefiguur (fig. 2, boven) blijkt. De noodzakelijkheid van deze eigenschap voor de meridiaandoorsnede volgt uit fig. 6 (zie rechts onder), waar op een bepaalde schaal de krachten geteekend zijn, werkend op de massa-eenheid van een vloeistofdeeltje aan het oppervlak. Op die schaal (waarbij de centripetale versnelling $\omega^2 r$ wordt voorgesteld door r lengte-eenheden), moet de subnormaal de versnelling g voorstellen. Hiermede is natuurlijk niet streng bewezen, dat de kromme een parabool is, maar het kan wel aannemelijk gemaakt worden.

Toepassingen in de Optica.

Ik stap hiermede voorloopig af van de toepassingen, die de mechanica betreffen, om in herinnering te brengen, dat ook op het gebied van de physica in engeren zin leerrijke toepassingen van de meetkunde der kegelsneden te maken zijn, nl. op het gebied der optica.

De terugkaatsing en de breking van licht door omwentelingsoppervlakken met een kegelsnede tot meridiaandoorsnede geeft eenerzijds gelegenheid om het verband te laten zien tusschen verschillende meetkundige eigenschappen van de betreffende kromme, en anderzijds om het verband aan te toonen tusschen stralen en golffronten. Dit is dus een uitstekende oefening in de toepassing van het beginsel van Huygens.

Met stralen werkend, zal men zeggen (fig. 7 links): een bundel stralen, invallend evenwijdig aan de as van een parabolischen hollen spiegel, gaat na terugkaatsing door het brandpunt. Dit is

dan een direct gevolg van het uit de constructiefiguur volgende feit, dat de normaal in P den hoek tusschen FP en het verlengde van QP halveert. Met golffronten werkend, zegt men (fig. 7 rechts): vlakke golffronten, loodrecht op de as van een parabolischen spiegel, worden door de terugkaatsing veranderd in bolvormige, met het brandpunt tot middelpunt. Dit is dan een direct gevolg van het feit, dat $PQ = PF$ is. Dit blijkt uit de beschouwing van de figuur, waarin verschillende golffronten geteekend zijn in de standen, die

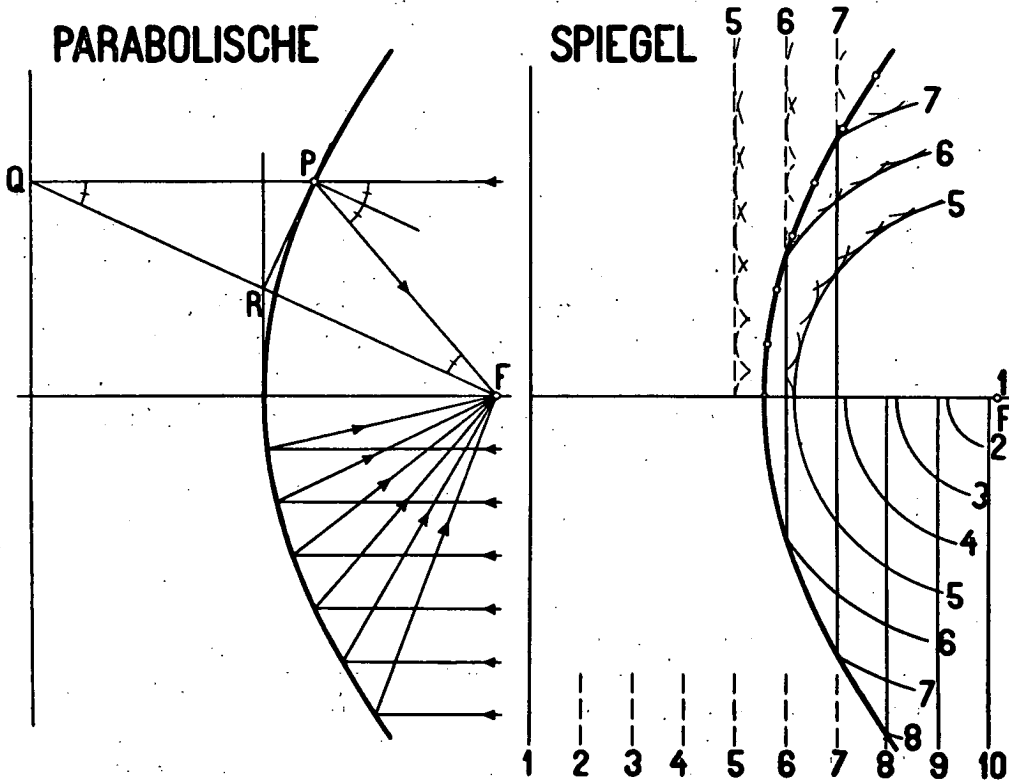


Fig. 7.

ze op zeker oogenblik zouden innemen zonder, en met terugkaatsing. Door toepassing van het beginsel van Huygens wordt gevonden, dat een vlak golffront, dat zonder de aanwezigheid van den parabolischen spiegel op zeker oogenblik den gestippelden stand 5 zou innemen, door de terugkaatsing vervormd is tot het bolvormige golffront 5, met F als middelpunt. Noemen we twee gelijkgenummerde golffronten aan elkaar corresponderend, dan heeft men de eigenschap: de toestandsverandering doorloopt den afstand tus-

ELLIPTISCHE LENS $e = \frac{1}{n}$

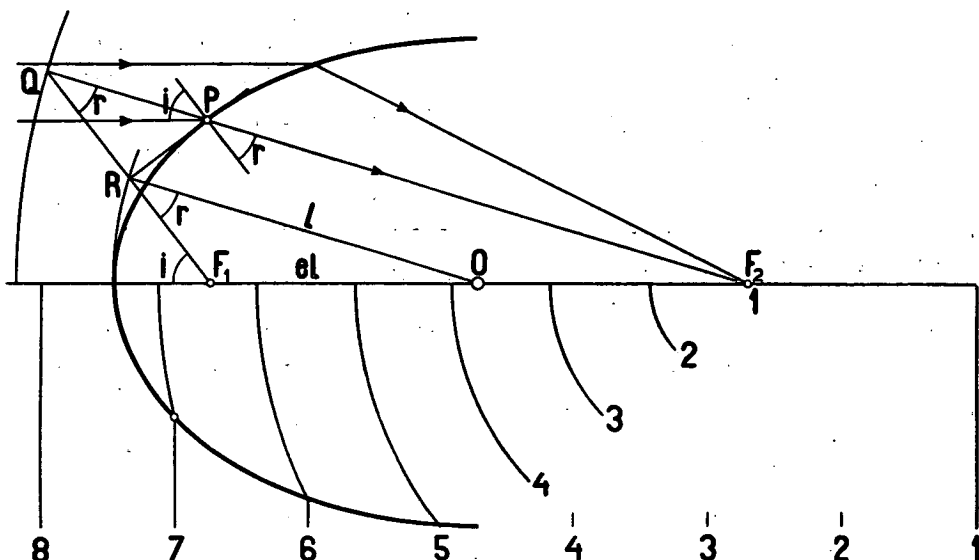


Fig. 8.

schen twee golffronten in denzelfden tijd als den afstand tusschen de corresponderende golffronten.

Aan het golffront 1 (waarin de richtlijnen van de parabolische meridiaandoorsneden van den spiegel liggen) correspondeert het puntvormige golffront 1, het brandpunt F , omdat elk punt van de parabool even ver van F als van de richtlijn ligt.

Beide uitdrukkingswijzen om deze terugkaatsing te verklaren, zijn gelijkwaardig; daaruit volgt de directe samenhang der beide meetkundige eigenschappen. Er volgt verder uit, dat de parabolische spiegel de eenige is, die dit geven kan, maar ook dat het alleen geldt voor een bundel evenwijdig aan de as. Werkt men met golffronten, dan zijn deze laatste uitspraken evident; met stralen werkend, zou het bewijs hiervan niet eenvoudig te geven zijn.

Gelijk bekend, kan men deze vervorming van golffronten laten zien met behulp van golven over een wateroppervlak.

Bij een elliptischen spiegel (omwentelingsellipsoïde, verkregen door wenteling van een ellips om de groote as), zijn de twee brandpunten koppelbrandpunten. Dit beteekent zoowel: de normaal in een punt van de ellips deelt den hoek tusschen de beide voerstralen middendoor, als: de som der voerstralen is constant; want

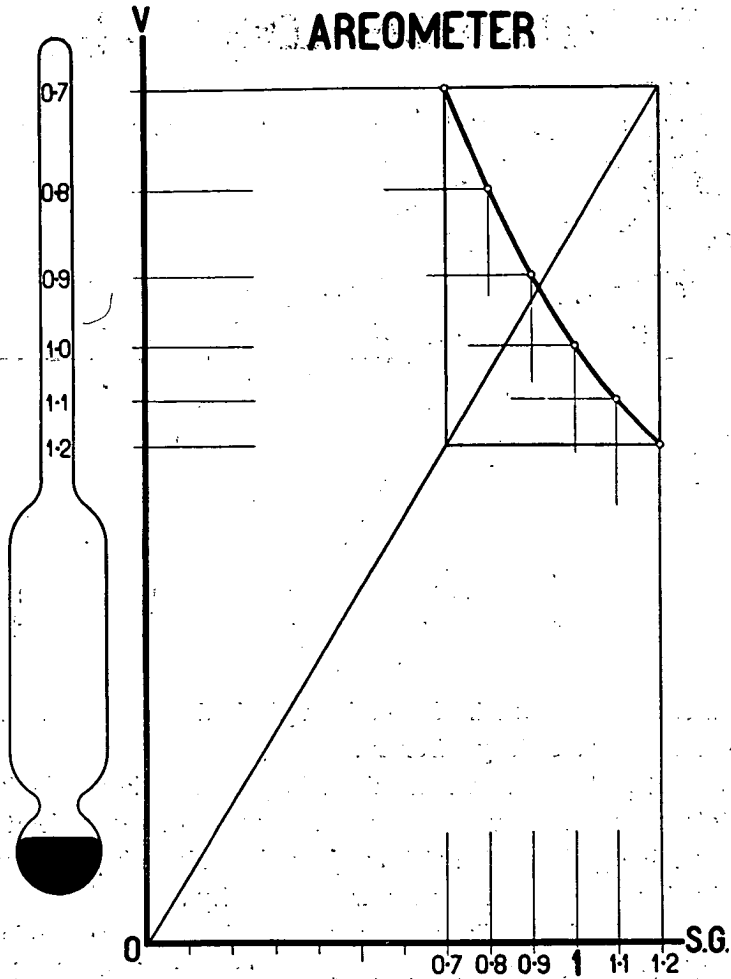


Fig. 9.

dit is de voorwaarde, dat bolvormige golffronten met F_1 als centrum door de terugkaatsing veranderd worden in bolvormige golffronten met F_2 als centrum. Dit geval is alleen van theoretisch belang, maar wel geschikt om den bedoelden samenhang van eigenschappen duidelijk te maken.

Soortgelijke beschouwingen kan men houden naar aanleiding van de breking van een bundel stralen, invallend evenwijdig aan de as van een omwentelingsellipsoïde, welks excentriciteit het omgekeerde is van den brekingsindex. Uit de constructiefiguur van de ellips volgt door toepassing van den sinusregel in $\triangle OF_1R$ (zie fig. 8):

De bedoelde bundel stralen wordt dus gebroken naar F_2 . In de golftheorie stelt n voor de verhouding der voortplantingssnelheden in de eerste en in de tweede middenstof. We kunnen nu weer golffronten teekenen en daarbij komt de eigenschap te voorschijn, dat voor elk punt van de ellips de verhouding van den afstand tot F_2 en den afstand tot de lijn, die de doorsnijding is van het ongebroken golffront 1 met het vlak van teekening, constant is, en gelijk aan $\frac{1}{n}$, of e . Deze snijlijn is de richtlijn van de ellips.

Toepassingen van de orthogonale hyperbool.

Als eerste toepassing noem ik de verdeling op den steel van een areometer: ondergedompeld volume van den areometer en soortelijk gewicht van de vloeistof zijn omgekeerd evenredig met elkaar (fig. 9). Het belang van deze toepassing voor het natuurkunde-onderwijs in de derde klasse is, dat men daarbij gelegenheid heeft de kromme te bespreken, zoodat later, wanneer het verband tusschen druk en volume van een bepaalde hoeveelheid gas bij constante temperatuur proefondervindelijk wordt nagegaan, uit de grafische voorstelling van dit verband de wet van Boyle kan worden gevonden. Ik stel mij daarbij het gebruik van een toestel voor, met behulp waarvan over een voldoende groot drukgebied (b.v. van 0.5 tot 1.5 à 2 atm.) een 20-tal metingen worden verricht. In de kromme meenen de leerlingen een hyperbool te herkennen; het grafische toetsingsmiddel met behulp van willekeurige lijnen door den oorsprong (fig. 3) bewijst de juistheid der veronderstelling. Deze verificatie is gemakkelijk en geeft een beteren indruk van de nauwkeurigheid, waarmede de wet geldt, dan de uitkomsten der vermenigvuldigingen, die voor onge oefenden in het vergelijken van getallen dikwijls allesbehalve constant lijken.

Verdere toepassingen van de orthogonale hyperbool en zijn constructie betreffen de functie

$$y = ax + \frac{b}{x}$$

met a en b , en ook x , positief.

Men komt deze functie tegen in de natuurkunde o.a. bij het

beantwoorden van de overigens niet zeer belangrijke vraag, hoe men een gegeven aantal gelijke elementen moet schakelen, om in een gegeven keten de maximum stroomsterkte te krijgen; in de mechanica ontmoet men haar in het vraagstuk van den physischen slinger. De eerste vraag betreft het minimum van de functie; het

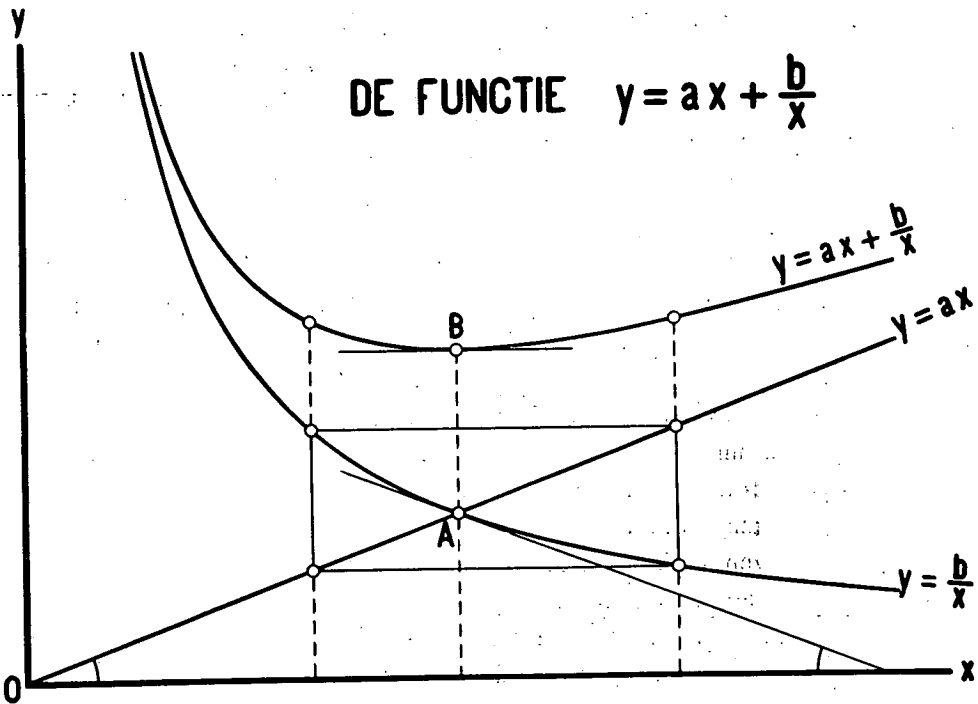


Fig. 10.

tweede probleem betreft het stel waarden van x , waarvoor y een zelfde gegeven waarde heeft.

We denken ons (zie fig. 10) de lijn

$$y = ax + \frac{b}{x}$$

als de somlijn van

$$y = ax \text{ (rechte OA door den oorsprong)}$$

en $y = \frac{b}{x}$ (orthogonale hyperbool met de coördinaatassen tot asymptoten).

Nu is de somlijn van OA en de raaklijn in A aan de hyperbool een horizontale rechte op afstand $2y_A$ van de x-as. Daar de hyper-

bool overal elders boven de raaklijn in A ligt, alleen in A er mede samenvalt, heeft de lijn

$$y = ax + \frac{b}{x}$$

in B een laagste punt. De functie is dus minimum voor de waarde van x , die hoort bij het snijpunt van rechte en hyperbool, m.a.w. voor die waarde van x , waarvoor

$$ax = \frac{b}{x}$$

Heeft men nu n elementen met electromotorische kracht E en inwendigen weerstand r , en schakelt men deze in x rijen parallel, elke rij bestaande uit $\frac{n}{x}$ elementen achter elkaar, dan is bij een uitwendigen weerstand R de stroomsterkte

$$i = \frac{\frac{n}{x}E}{\frac{n}{x^2}r + R} = \frac{nE}{\frac{nr}{x} + Rx}$$

i zal maximum zijn voor de waarde van x , waarvoor de noemer minimum is, dus als

$$\frac{nr}{x} = Rx \quad \text{of} \quad \frac{nr}{x^2} = R$$

is, m.a.w. als de inwendige weerstand gelijk is aan den uitwendigen.

Kan aan deze voorwaarde niet voldaan worden, dan blijkt uit het niet-symmetrisch zijn van de kromme ten opzichte van de lijn AB, dat men de dichtst bijliggende mogelijke waarden van x , grooter en kleiner dan x_A , moet beproeven; niet per sé geeft de dichtst bij x_A liggende waarde van x de schakeling met grootste stroomsterkte.

Gelijk bekend wordt de lenzenformule

$$\frac{1}{v} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

ook voorgesteld door een orthogonale hyperbool; de asymptoten loopen dan evenwijdig aan de v - en de b -as op afstand f . De vraag: bij welken stand van het voorwerp is de afstand tusschen voorwerp en beeld zoo klein mogelijk, geeft aanleiding tot een soortgelijke beschouwing, waarvan het resultaat is dat $b + v$ een minimum waarde heeft, als $b = v$ is.

Belangrijker is de toepassing in de theorie van den physischen slinger. De grafische voorstelling werkt daarbij zeer verhelderend.

De functie

$$y = ax + \frac{b}{x}$$

heeft dezelfde waarde voor twee waarden van x , x_1 en x_2 , behorende bij twee punten van de hyperbool $y = \frac{b}{x}$, die aan elkaar toegevoegd zijn ten opzichte van de rechte lijn $y = ax$. Men ziet dit direct uit fig. 10.

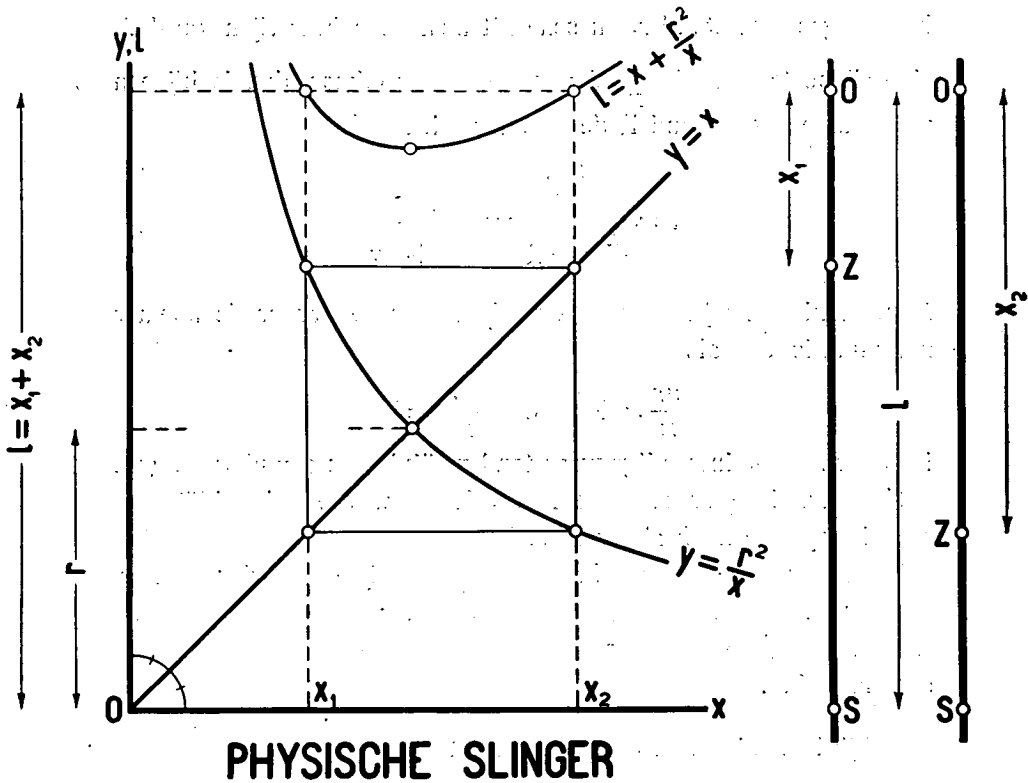


Fig. 11.

Tevens blijkt, dat dan

$$ax_1 = \frac{b}{x_2}$$

en

$$ax_2 = \frac{b}{x_1}$$

Beschouwen wij nu het geval van den physischen slinger:

(fig. 11). Het ophangpunt O is het snijpunt van de horizontale slingeras met een vlak door het zwaartepunt Z loodrecht op die as. S is het slingerpunt. De hoekversnelling bedraagt bij den uitwijkingshoek α

$$\frac{Mg x \sin \alpha}{T_o},$$

waarin T_o het traagheidsmoment ten opzichte van de as door O is, en M de massa van den slinger. Voor een mathematischen slinger met lengte l ($= OS$) zou bij denzelfden hoek α de hoekversnelling zijn

$$\frac{g \sin \alpha}{l}$$

Physische en mathematische slinger hebben denzelfden slinger-tijd als

$$\frac{Mg x \sin \alpha}{T_o} = \frac{g \sin \alpha}{l}$$

of als

$$l = \frac{T_o}{M \cdot x}$$

Nu is volgens een bekende eigenschap

$$T_o = Mx^2 + T_z$$

dus

$$l = x + \frac{T_z}{Mx} = x + \frac{r^2}{x},$$

waarin r de traagheidsstraal ten opzichte van het zwaartepunt is.

Uit fig. 11 blijkt, dat dezelfde waarde van l behoort bij 2 waarden van x , nl. x_1 en x_2 , zóó dat

$$x_1 = \frac{r^2}{x_2}$$

en

$$x_2 = \frac{r^2}{x_1}$$

en

$$l = x_1 + x_2.$$

Hieruit blijkt de verwisselbaarheid van ophangpunt en slingerpunt.

Op een rechte door het zwaartepunt in het vlak loodrecht op de slingeras zijn 4 punten aan te geven, aan weerskanten van Z op afstanden x_1 en x_2 gelegen, die als ophangpunten kunnen dienst doen voor een zelfden slingertijd. Van twee dier punten, op onderlingen afstand l , kan het eene dienst doen als ophangpunt, het

andere is dan slingerpunt. De minimumwaarde voor l , dus den minimum slingertijd, heeft men voor

$$x_1 = x_2 = r.$$

De twee paren punten herleiden zich dan tot één paar.

Met dit eenigszins ingewikkelde geval, dat m.i. door de grafische behandeling aan duidelijkheid wint, eindig ik de reeks voorbeelden, die bedoeld zijn om aan te toonen dat niet de wiskunde alléén, maar ook andere vakken gebaat zouden zijn met een verandering in het wiskunde programma, waarbij elementaire kennis der kegelsneden aan het einde der derde klasse den leerlingen bijgebracht zou kunnen worden.

Resumeerende: Kinematica, dynamica, statica en optica zouden profiteeren van die kennis, maar ik wil den nadruk leggen op hetgeen mij hierin het belangrijkste schijnt, nl. dat men, bouwend op die kennis, in staat is om van de kinematica en de dynamica van een stoffelijk punt een geheel te maken dat ook den beginnening boeit, omdat het hem, gesteund door hetgeen in de kosmografie-les onderwezen wordt, een beter inzicht kan geven in de beteekenis der mechanica van Newton, dan men zonder kennis der kegelsneden kan krijgen.

Na de voordracht van den Heer Staring geeft de Voorzitter gelegenheid tot het stellen van vragen aan den spreker.

De Heer van der Loo stelt een eenvoudiger methode voor om na te gaan of een gegeven kromme een orthogonale hyperbool is, nml. door gebruik te maken van de eigenschap, dat de twee segmenten, op een willekeurige rechte uitgesneden door een hyperbool en haar asymptoten, gelijk zijn.

De Heer Staring bevestigt de juistheid van deze methode.¹⁾

De Heer van der Loo vraagt verder, of men, hetgeen door spreker voor de ellips is afgeleid, kan overdragen op de parabool, door één van de brandpunten van de ellips zich naar het oneindige te laten verplaatsen.

De Heer Staring verklaart, dat dit mogelijk is.

Daar niemand meer het woord verlangt, bedankt de Voorzitter den spreker voor zijn duidelijke voordracht en voor de groote zorg en den velen tijd door hem aan de voorbereiding er van besteed. Hij spreekt den wensch uit, dat de Heer Staring succes zal mogen hebben van zijn pogingen.

De tweede voordracht wordt nu gehouden over:

¹⁾ Noot bij de correctie. De beschikbare ruimte laat toepassing hiervan echter niet altijd toe. Bij gebruik van millimeterpapier is het aangeven der punten P en Q (fig. 3), en het onderzoeken of O, P en Q op één rechte liggen, eenvoudiger dan de methode van den Heer van der Loo.

ENKELE BESCHOUWINGEN IN ZAKE HET MEETKUNDE-ONDERWIJS

DOOR

Dr. H. J. E. BETH.

Van de opmerkingen, die ik wil maken, staan enkele met elkaar in verband; zij vinden echter haar gemeenschappelijke oorsprong in het streven, het meetkunde-onderwijs beter dan thans wellicht het geval is, aan het doel van alle wiskunde-onderwijs, zooals ik dat zie, te doen beantwoorden. Ik wil derhalve vooropstellen, wat ik niet en wat ik wel als dat doel beschouw. Ik beschouw niet als het doel: het aanbrengen van de kennis van een zeker aantal stellingen, formules en constructies en van vaardigheid in het hanteeren van die hulpmiddelen met het oog op de eischen, die de eindexamens aan al onze leerlingen, en de eischen, die inrichtingen van hooger onderwijs aan een aantal hunner stellen. Wel beschouw ik als dat doel de stelselmätige oefening van het verstand door middel van daartoe aan de wiskunde ontleende en met zorg uitgezochte, in verband met leeftijd en ontwikkeling der leerlingen geschikt bevonden, leerstof. Ik zeg: ontleend aan de wiskunde, en niet: aan de lagere wiskunde. Ik weet namelijk nog altijd niet, waar de grenslijn tusschen de lagere en de hoogere wiskunde loopt, noch wie haar getrokken heeft.

Zij, die het doel van het wiskunde-onderwijs anders zien dan ik het zie, zullen in mijn beschouwingen weinig van hun gading vinden; voor hen heb ik ze dan ook niet bestemd.

Ik zal thans vooral spreken over het wiskunde-onderwijs in de hoogere klassen. Wat het aanvankelijk onderwijs in de eerste klasse betreft, hierover is heel wat gezegd en geschreven. Toch geloof ik, dat we het op dit punt wel eens zijn. We weten allen, dat hier met jonge leerlingen op voorzichtige wijze met een nieuwe

wetenschap moet worden begonnen, dat men een ruim gebruik moet maken van aan de aanschouwing ontleende begrippen en de leerlingen geleidelijk moet trachten te doordringen van het streven, een stelsel op te bouwen, dat oog en hand, vooral in het begin, een gewichtige rol te vervullen hebben. Slechts in schijn zijn wij op dit punt in twee partijen verdeeld. De ijverigste verdediger van de propaedeutische cursus zal wel na enkele maanden zoo ver zijn, dat hij orde gaat scheppen in de verworven kennis; de meest overtuigde propagandist der exactheid laat in de eerste tijd veel figuren teekenen en daarin eigenschappen met het oog ontdekken.

Gelukkig zijn omtrent dit alles geen strenge voorschriften gegeven. De docent mag een zekere mate van vrijheid voor zich opeischen. Ook zou een streven naar eenvormigheid onjuist zijn, omdat de organisatie van het lager onderwijs, dat onze leerlingen voorbereidt, niet overal dezelfde is, zoodat b.v. de gemiddelde leeftijd der leerlingen bij toelating tot de eene of de andere school een jaar of meer kan uiteenloopen. Wanneer voorts op de lagere school meetkundig rekenen beoefend is, en wanneer in de teekenles meetkundige figuren als voorbeelden gekozen zijn, dan is ons hierdoor reeds eenig werk uit handen genomen. Dit verschil in leeftijd en ontwikkeling van de leerlingen bij aankomst zal ook wel een van de oorzaken zijn, waardoor de eene docent reeds in het eerste jaar op het punt van strengheid verder durft gaan dan de andere; ongetwijfeld spreekt hierin ook de persoonlijke smaak van de docent een woordje mee.

Dat tot onze onderwijsstof dat gedeelte der meetkunde gerekend wordt, dat van oudsher tot de Elementen behoort en zijn afsluiting vindt in de leer van de regelmatigte veelvlakken, zal geen verklaring behoeven. De deugden van deze stof als onderwijsstof zijn zoo vaak en in zoo welsprekende en overtuigende bewoordingen geprezen, dat het onnoodig is daarover thans nog uit te weiden.

Daarmee is echter nog niets gezegd omtrent de gang, die men bij het onderwijs in deze stof zal volgen. Velen zullen kunnen gevoelen voor een rangschikking van de meetkundige waarheden volgens het moderne groepentheoretische beginsel, niet het minst met het oog op het aanvankelijke onderwijs. Uit hetgeen ik hier omtrent gevonden heb (in een geschrift van Salkowski „Der Gruppenbegriff als Ordnungsprinzip des geometrischen Unter-

richts" ¹⁾ vindt men heel wat literatuur over het onderwerp; het bekende elementaire leerboek van Emile Borel ²⁾ dagteekent reeds van 1905) zou ik willen besluiten, dat deze behandelingswijze voor het allereerste onderwijs nog niet geschikt gemaakt is, dat zij echter van groot belang is in een verder stadium; ik kom hierop straks nog terug. Daarom lijkt mij het veiligst, bij het eerste onderwijs aan het Euclidische voorbeeld in hoofdtrekken te blijven vasthouden.

Dat men zich in vele opzichten op goede gronden vrij ver van dat voorbeeld verwijderd, is wel bekend. Er is echter een punt, waarop men het m.i. met al te pijnlijke nauwgezetheid volgt. Een der bezwaren, die men tegen Euclides gemaakt heeft, bestaat, zooals men weet, hierin, dat hij in zijn bewijsvoering van het bewegingsbegrip gebruik maakt, zonder de bewegingsmogelijkheid van meetkundige figuren door een stelsel van axiomata te hebben vastgesteld. Daardoor maakt hij de fout, dat hij in zijn logisch stelsel, dat over onstoffelijke dingen handelt, overwegingen invoert, die de aanschouwing ons ingeeft omtrent lichamen, die wij vast noemen. Ik behoef niet te spreken over de kritiek, die in de laatste eeuwen hierop is uitgeoefend. Gij kunt er over lezen in het bekende werk van Dijksterhuis: ³⁾ Men vindt daar ook, dat Euclides zelf de methode van het op elkaar leggen niet zonder tegenzin gebruikt, want het valt op, dat hij haar zoo weinig mogelijk toepast. Hij gebruikt haar voor het bewijs van het congruentie-geval van driehoeken voor twee zijden en de ingesloten hoek en voor dat van de drie zijden, en later voor het bewijs van de congruentie van gelijkvormige cirkelsegmenten met gelijke koorden; maar vermijdt haar in vele gevallen, waarin men haar toepassing zou verwachten.

Dat men in de tijd van hernieuwde opbloei der axiomatica sinds 1880 het zoo even bedoelde bezwaar heeft weten te overwinnen en dat de congruentie thans door een stelsel axiomata vastgelegd wordt, is evenzeer bekend. Schögt volgt in zijn fraai Leerboek der

¹⁾ Beiheft zur Zeitschrift für math. u. naturwiss. Unterricht; 1924.

²⁾ Géométrie; een Duitse vertaling van de hand van Stäckel verscheen in 1909 bij Teubner.

³⁾ De Elementen van Euclides, dl. I, blz. 147. Ik verwijs tevens naar Killing, Einführung in die Grundlagen der Geometrie II, Paderborn 1898.

Meetkunde deze zelfde weg, en het is vooral om deze reden, dat ik van oordeel ben, dat deze voortreffelijke schrijver te ver gaat. Waar wij genoodzaakt zijn, eenige aan de aanschouwing ontleende begrippen ongedefinieerd als grondslag voor de opbouw te nemen, moet naar mijn overtuiging het bewegingsbegrip daartoe behooren. Ik acht het onnatuurlijk, dit begrip, waarmede wij van onze geboorte af vertrouwd zijn als met geen ander, uit het *aanvankelijk* meetkunde-onderricht te willen verbannen.

Zelfs wil ik een stap verder gaan, en mij in het gebruik van dit begrip geen enkele beperking opleggen. Wanneer men het over zich kan verkrijgen éénmaal een beweging van het vlak in zichzelf toe te laten, dan is het slechts schijnbaar in strijd met de logische strengheid, indien men die beweging zoo vaak uitvoert als men er voordeel in ziet. De schrijvers van leerboeken hebben in het algemeen blijkbaar niet de vrees kunnen overwinnen op dit punt te ver van Euclides af te wijken en men ziet hen stellingen omtrent congruentie toepassen in gevallen, waarin een eenvoudige beweging onmiddellijk tot het doel voert.

Ik noem enkele voorbeelden van stellingen, die dadelijk met behulp van het bewegingsbegrip te bewijzen zijn; ieder Uwer vermeedert ze gemakkelijk met een tiental. Twee overstaande hoeken zijn gelijk, omdat door een wenteling van het vlak om het hoekpunt over een gestrekte hoek de eene hoek met de andere tot bedekking te brengen is. Twee hoeken, waarvan de beenen evenwijdig zijn in dezelfde zin, zijn gelijk, omdat een verschuiving de eene hoek met de andere kan doen samenvallen. Twee gelijksoortige hoeken, waarvan de beenen loodrecht op elkaar zijn, zijn gelijk, omdat een verschuiving, gevolgd door een wenteling over een rechte hoek, de eene hoek met de andere doet samenvallen. Een vierhoek, waarvan de diagonalen elkaar middendoor deelen, is een parallelogram, omdat bij een wenteling over een gestrekte hoek de zijden met de overstaande tot bedekking komen, enz.

De cirkelomtrek kan bij definitie de lijn zijn, die een punt beschrijft, als het vlak een draaiing uitvoert.

Over het feit, dat we, zonder het behoorlijk gemotiveerd te hebben, van het bewegingsbegrip gebruik maken, zou ik in de lagere klassen in het geheel niet willen spreken. Ik wil dit onderwerp bewaren tot aan het begin der 4e klasse, waar ik opnieuw de eerste beginselen der meetkunde aan de orde wil stellen, tevens

als inleiding tot de stereometrie. Hierover schreef ik reeds vroeger¹⁾; ik liet toen o.a. zien, hoe men op dat oogenblik op m.i. bevredigende wijze deze zaken kan behandelen. We kunnen de bewegingsmogelijkheid van het platte vlak in zichzelf vergelijken met die van het bolvlak, het eivlak, het cylindervlak, het kegelvlak in zichzelf en aldus aantonen, dat de bewegingsmogelijkheid een der eigenschappen is, „waardoor het platte vlak zich van andere vlakken onderscheidt”, b.v. van het eivlak, doch niet van het bolvlak; ter onderscheiding van het platte vlak en het bolvlak is nog een ander hulpmiddel noodig. Geheel op de begane grond blijvend, dus zonder de begrippen kromming in het algemeen en standvastige kromming in het bijzonder noodig te hebben kan men aldus duidelijk maken, dat het gebruik van het bewegingsbegrip in de meetkunde een rechtvaardiging behoeft en dat men om de meetkunde van het platte vlak op te bouwen een aantal axiomata noodig heeft, waardoor de bewegingsmogelijkheid, die het platte vlak in zichzelf bezit, vastgesteld wordt. Die axiomata kunnen zijn: 1°. de mogelijkheid van rotatie om elk van zijn punten; 2°. de mogelijkheid van translatie volgens elk van zijn rechten. Door deze wordt het gerechtvaardigd, dat we een figuur op zoodanige wijze verplaatsen, dat een gegeven halfrechte de plaats van een andere gegeven halfrechte gaat innemen.

Het is mij bekend, dat men tegen dit alles bezwaren kan aanvoeren; voor de leerlingen acht ik echter deze wijze van handelen volkomen voldoende. Het lijkt mij niet geheel onnoodig op te merken, dat, al zou men ook op de geschetste wijze komen tot een onberispelijke behandeling van de congruentie in het platte vlak, daarmee de congruentie in de ruimte nog in het geheel niet vast staat. Ik neem als voorbeeld een der eerste stellingen uit de stereometrie, waarin gewoonlijk van de congruentie gebruik gemaakt wordt: „Twee hoeken zijn gelijk, als de beenen van de eene hoek in dezelfde zin evenwijdig zijn met de beenen van een andere hoek”. Vooreerst de opmerking, dat men niet vooraf de gelijkheid van hoeken in verschillende vlakken gedefinieerd heeft. Vervolgens het bewijs (zie figuur 1): neem $PA = P'A'$, $PB = P'B'$; dan volgt: $PP' \parallel BB'$, $PP' \parallel AA'$, dus $BB' \parallel AA'$. De laatste gevolgtrekking is gedeeltelijk juist. Inderdaad is $BB' \parallel AA'$, want het

¹⁾ Euclides, Jaargang VI, blz. 250.

algemeene bewijs van de transitiviteit der evenwijdigheid heeft men

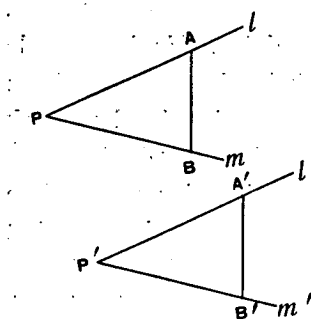


Fig. 1.

laten voorafgaan; maar dat $BB' = AA'$ is, mag men nog niet zeggen, omdat de transitiviteit van de gelijkheid van lijnstukken wel in één plat vlak vaststaat, maar niet, als die lijnstukken niet in één vlak liggen, omdat men nog slechts beweging in één vlak kent. Ten slotte mag men uit de gelijkheid van de overeenkomstige zijden van de driehoeken PAB en $P'A'B'$ nog volstrekt niet besluiten tot de congruentie van

die driehoeken, die immers niet in hetzelfde vlak gelegen zijn.

Dat dit bezwaar niet gezocht is, zien we in, als we denken aan twee boldriehoeken op bolvlakken van verschillende straal, welke driehoeken niet congruent zijn, al zijn ook de lengten der overeenkomstige zijden gelijk. Dit is hiervan het gevolg, dat de bolvlakken zelf niet congruent zijn. We zien hieruit, dat we in het bewijs van de congruentie van de platte vlakken gebruik gemaakt hebben zonder die congruentie bewezen of gepostuleerd te hebben, dat we dus weder de krommingseigenschappen der ruimte of de bewegingsmogelijkheid der ruimte in zichzelf stilzwijgend toegepast hebben.

De bewegingsmogelijkheden, die ik wil eischen, zijn die van de translatie met elke rechte, en die van de rotatie om elke rechte. Natuurlijk eischen we hier te veel, maar daarom bekommeren we ons niet. Het spreekt vanzelf, dat ik van die bewegingsmogelijkheid weder een onbeperkt gebruik wil maken in de definities, bij de constructies en bewijsvoeringen. Om een enkel voorbeeld te noemen wijs ik op de congruente figuren, die optreden in de bewijzen voor de eigenschappen omtrent inhoud van figuren; hierbij kunnen we in het algemeen met een rotatie of een translatie volstaan.

Om niet te uitvoerig te worden sprak ik alleen over congruentie en beweging, niet over symmetrie en spiegeling. Formeel heeft men dit begrip in de planimetrie slechts eenmaal noodig, nl. voor de gelijkbeenige driehoek. Een ruimer gebruik van het begrip kan echter aan de kortheid, tevens aan de duidelijkheid, ten goede komen.

De meetkundige verwantschap, die men na die der congruentie en die der symmetrie bespreekt, is die der gelijkvormigheid,

waarbij we weer directe en indirecte gelijkvormigheid onderscheiden. Tegenover de hardnekkigheid, waarmee men de beweging in de meetkunde vermijdt, staat het daarom des te meer verblijdende verschijnsel van de algemeenheid, waarmee de transformatie der vermenigvuldiging in gebruik gekomen is. Men heeft eenige tijd een gereserveerde houding aangenomen, maar ten slotte algemeen ingezien, dat het juist deze wijze van *ontstaan* van gelijkvormige figuren is, waardoor het begrip van gelijkvormigheid op de meest natuurlijke wijze het eigendom van de leerlingen wordt. Het hulpmiddel der vermenigvuldiging voor de uitvoering van constructies vindt bij hen gemakkelijk ingang.

Het is echter niet over de verwantschap der gelijkvormigheid, dat ik verder wilde spreken, doch over het feit, dat men met die verwantschap de vlakke meetkunde besluit, en niet een stap verder gaat en niet de affiniteit in de leerstof opneemt. Daarvoor zijn zoo veel argumenten aan te voeren, en de bezwaren zijn zoo gemakkelijk te weerleggen, dat ik het noodzakelijk acht voor dit punt Uw aandacht te vragen.

Men heeft steeds de invoering van het begrip affiniteit willen vastkoppelen aan het onderwijs in de beschrijvende meetkunde.¹⁾ Ik acht deze zienswijze onjuist en zal trachten aan te toonen, dat dit begrip een onmisbaar hulpmiddel is bij het onderwijs in de ruimte-meetkunde in het algemeen. Om de zoo juist genoemde reden zal ik echter vooraf enkele opmerkingen maken omtrent de beschrijvende meetkunde.

Terwijl er blijkbaar geen verschil van meening bestaat aangaande de vraag, of de leerstof, die men tot de planimetrie en tot de stereometrie rekent, op onze scholen thuis behoort, bestaat zulk een meeningverschil wel ten aanzien van de beschrijvende meetkunde. Het is ons allen bekend, dat men wel eens heeft overwogen, dit onderdeel der wiskunde van het programma der H. B. S. af te voeren. Dit mag ons van de zijde van leeken niet verwonderen, want inderdaad heeft de beschrijvende meetkunde wel heel erg de schijn tegen zich. Het is de teekenmethode, van welke de constructeurs van bouwwerken en van werktuigen zich bij voorkeur bedie-

¹⁾ Sommige schrijvers, o.a. Couturat geven de affine meetkunde met de benaming „beschrijvende meetkunde” aan, hetgeen zin heeft voor methoden van parallel-projectie (Die Philosophischen Prinzipien der Mathematik; Deutsch von Dr. Carl Siegel, Leipzig 1908).

nen en schijnt daarom van belang voornamelijk, zoo niet uitsluitend, voor de leerlingen, die voor de studie in de technische richting bestemd zijn. Indien dit juist was, dan zou deze leerstof op ons programma inderdaad misplaatst zijn.

Door de voorstanders van het onderwijs in beschrijvende meetkunde wordt hierop in de regel geantwoord, dat dat onderwijs vooral zijn beteekenis hieraan ontleent, dat het in zoo hooge mate bijdraagt tot de ontwikkeling van het ruimtelijk voorstellingsvermogen. Ik wil dadelijk opmerken, dat ik voor dat antwoord niets gevoelen kan, maar zal er even op ingaan, omdat de genoemde opvatting blijkbaar zeer verbreid is. Het spreken over deze dingen is zoo weinig aantrekkelijk, omdat men het over begrippen heeft, die men slechts op zeer onvoldoende wijze definieeren kan en omdat men allicht tot uitspraken komt, die meer op subjectieve overtuiging dan op redelijke gronden steunen.

Onder ruimtelijk voorstellingsvermogen verstaat men, geloof ik, zoo iets als het vermogen, ruimtelijke dingen te denken, alsof men ze met het lichamelijk oog ziet. Als een houten blok voor ons geplaatst wordt, dat een regelmatig twintigvlak moet voorstellen, dan kunnen wij in gedachten ook de zijvlakken en de ribben zien, die zich aan de van ons af gekeerde zijde bevinden en dus voor het lichamelijk oog verborgen blijven. Het schijnbaar optreden van een visuele gewaarwording is een gevolg van de gecombineerde werking van geheugen en begrip; het tweede gebruiken we minder naar gelang het eerste ons in meerdere mate tegemoet komt.

Blijkbaar is het bedoelde vermogen bij elk normaal mensch aanwezig; het ontstaat of wordt versterkt door gevoels- en gezichts-gewaarwordingen en door de beweging. Om in letterlijke zin onze weg te kunnen vinden, hebben we dat vermogen noodig. De eene mensch heeft er echter in verband met de aard van zijn werkzaamheid meer behoefte aan dan de andere. Het is van groot belang voor den constructeur, den bioloog, den chirurg, den aviateur, om enkelen te noemen.

Van belang is thans de vraag, of het bedoelde vermogen gedurende het verdere leven door stelselmatige oefening te versterken is, en of het onderwijs aan de bereiking van dat doel dienstbaar kan worden gemaakt. Op grond van mijn ervaring ben ik geneigd de vraag in ontkennende zin te beantwoorden; ik spreek het aarze-

lend uit, omdat ik weet, dat velen van een tegengestelde meening zijn. Indien het zou kunnen blijken, dat het ruimtelijk voorstellingsvermogen van onze leerlingen bij het verlaten der school grooter is dan bij hun toelating, dan nog zou ik er over in twijfel zijn; of wij die verbetering niet veel eerder aan het onderwijs in natuurteekenen of aan de sportbeoefening zouden moeten toeschrijven dan aan het onderwijs in de beschrijvende meetkunde. Ik zou wel willen weten, wat de leeraren denken van de verbetering van hun eigen ruimtelijk voorstellingsvermogen als gevolg van hun beoefening van en hun onderwijs in de beschrijvende meetkunde. Hoewel we met verklaringen als deze steeds een groote mate van voorzichtigheid in acht moeten nemen, durf ik, voor het geval, dat het U belang mocht inboezemen, wel uitspreken, dat mijn eigen gebrekkig voorstellingsvermogen ondanks jarenlange beoefening van en onderwijs in de beschrijvende meetkunde, naar mijn vaste overtuiging hoegenaamd niets verbeterd is. Ik schaam mij er niet voor, te bekennen, dat de voorstelling van het gehate vlak, waarvan de doorgangen in elkaars verlengde loopen, mij nog altijd moeite kost en de gedragingen van zulk een vlak mij nog regelmatig verrassingen bereiden.

De overweging, dat een hooge ontwikkeling van het ruimtelijk voorstellingsvermogen slechts voor enkelen van belang is, gevoegd bij de overtuiging, dat het onderwijs in de beschrijvende meetkunde niet tot versterking van dat vermogen behoeft bij te dragen, doen mij het bedoelde argument voor behoud van het onderwijs in dat onderdeel der wiskunde verwerpen.

Ik heb mij tot nu toe aangaande het nut van het onderwijs in de beschrijvende meetkunde nog slechts in negatieve zin uitgelaten. Wanneer ik thans verklaar, dat ik mij nauwelijks een wijziging in ons leerplan kan denken, die ik méér betreuren zou dan een afvoering van de beschrijvende meetkunde, dan zult Gij mij vragen naar de reden van mijn bijzondere waardeering van die leerstof. Die reden is zoo voor de hand liggend, dat ik niet begrijpen kan, dat vakgenooten aan een afzonderlijke motieëring behoefte hebben. Het doel van de beschrijvende meetkunde is namelijk geen ander dan de daadwerkelijke uitvoering van de constructies, die tot de ruimte-metkunde behooren. De beschrijvende meetkunde is dus geen afzonderlijk onderdeel der wiskunde; het is een bestanddeel, en wel een onmisbaar bestanddeel, van de meetkunde

der ruimte. Door de verwijdering van de beschrijvende meetkunde zou men even onlogisch handelen als wanneer men bij het onderwijs in de planimetrie van de constructies alleen de analyse gaf en niet bovendien de werkelijke uitvoering met passer en lineaal. Want inderdaad is deze daadwerkelijke uitvoering niets anders dan een herhaald ten uitvoer brengen van de beide grondconstructies in een volgorde, die door de analyse van het werkstuk aangegeven wordt. Maar we weten allen, dat voor het meerendeel der leerlingen toch eerst door die werkelijke uitvoering het volledige begrip van de constructie ontstaat. Wanneer wij in het eerste hoofdstuk der stereometrie naar aanleiding van een werkstuk als: „door een gegeven punt een rechte te trekken, die elk van twee gegeven kruisende lijnen snijdt” opmerken, dat wij in de ruimte alleen kunnen zeggen, hoe het zou moeten, maar het niet ook inderdaad kunnen *doen*, dan moet dat voor de leerlingen zeer onbevredigend zijn, indien we er niet aan konden toevoegen, dat we spoedig in de gelegenheid zullen zijn, in die leemte te voorzien.

Het misverstand, dat het onderwijs in de beschrijvende meetkunde een afzonderlijke motiveering zou behoeven (behalve dan voor de leerlingen, die „naar Delft” gaan), is naar alle waarschijnlijkheid een gevolg van de omstandigheid, dat dat onderwijs steeds als afzonderlijk gedeelte van de leerstof in het programma der H. B. School genoemd is. De verhouding van de beschrijvende meetkunde tot de stereometrie is geen andere dan die van de atlas tot het leerboek. Met dat onderwijs beoogen we niets meer en niets minder dan het geven van een methode voor de correcte weergave in het platte teekenvlak van wat de stereometrie oplevert. Dat die teekenmethode om ons bekende redenen die der orthogonale parallel-projectie is, doet hierbij niet ter zake.

Het afzonderlijk noemen van de beschrijvende meetkunde als leervak heeft nog meer nadeelige gevolgen gehad. De samenhang van dat onderwijs met het onderwijs in de stereometrie is niet steeds zooals het behoort; beide onderdeelen der wiskunde worden zelfs niet altijd door één leeraar onderwezen! De stof is op verschillende punten getreden buiten de grenzen, die haar van nature zijn aangewezen; dit gevaar bedreigt een leervak des te meer naar mate het meer zelfstandig is.

Ik kom door een en ander tot de conclusie, dat de beschrijvende meetkunde op ons programma niet kan worden gemist, maar dat

men door *samensmelting van die stof met de stereometrie* moet bereiken, dat de beschrijvende meetkunde de meer bescheiden plaats verkrijgt, die haar *niet naast, maar in* de stereometrie toekomt.

Wanneer we dat denkbeeld in de practijk willen brengen, dan ontmoeten we wel hier en daar moeilijkheden, maar de voordeelen wegen er tegen op. Men kan het bezwaar opwerpen, dat men met de orthogonale parallelprojectie eerst beginnen kan, nadat een vrij groot gedeelte der stereometrie, namelijk tot en met de loodrechte stand van vlakken, behandeld is. Daarna kunnen echter de verschillende hoofdstukken der stereometrie besloten worden, met het teekenen van de behandelde figuren en het uitvoeren van de aangeduide constructies in orthogonale parallel-projectie. De bespreking van het omwentelings-cylindervlak met de eigenschappen van zijn punten, beschrijvenden, raaklijnen en raakvlakken voert tot de constructies, die op hoeken betrekking hebben, in orthogonale projectie, enz.

Eigenlijk is het Gymnasium ons in deze richting reeds voorgegaan. Want de wel eens gehoorde bewering, dat men zich daar wel zonder beschrijvende meetkunde weet te redden, is onjuist. Immers behoeven we slechts de examen-vraagstukken (waarin men toch altijd in zekere mate een afspiegeling van het onderwijs vindt) in te zien om tot de erkenning te komen, dat het constructieve element in het stereometrie-onderwijs ook daar geenszins verwaarloosd wordt. Men handelt daar logischer dan wij op de H. B. S. doen door de projectiemethode te hulp te roepen, wanneer men haar gebruiken kan; men legt zich echter in het gebruik te groote beperking op. In het algemeen voert men alleen constructies in veelvlakken uit in scheeve parallel-projectie, en omdat hierbij het bepalen van lengten en hoeken te groote bezwaren oplevert, vult men het aan door het teekenen van netwerken, waarbij men gebruik maakt van orthogonale parallel-projectie.

Naar mijn meening gaat deze beperking te ver, omdat ik juist de constructies omtrent de onderlinge stand van lijnen en vlakken (ook, als zij niet toevallig aan een of ander veelvlak kunnen worden aangewezen) noodzakelijk acht. Dit eerste gedeelte der stereometrie, dat zoo buitengewoon leerzaam is, moet voor de leerlingen iets geheimzinnigs behouden, zoo lang zij niet op stoffelijke wijze, op grond van vastgestelde afspraken, de dingen hebben leeren verwezenlijken.

Toch acht ik eenige verlichting van de leerstof wel mogelijk, en ik geloof, dat deze van zelf komen zou, als men de beschrijvende meetkunde haar juiste plaats gaf. De wenteling van veelvlakken om bepaalde assen van een gegeven eenvoudige stand uit, om een voorbeeld te noemen, is heel nuttig voor den technicus, die zich op handige wijze projectie-teekeningen wil verschaffen; tot onze leerstof behoort zij niet.

Ik zou echter vereenvoudiging veel meer willen bereiken door het doen van een beroep op het voorstellingsvermogen aanzienlijk meer te beperken dan thans blijkbaar gebruikelijk is. Wanneer eenmaal de grondleggende afspraken gemaakt zijn, dan kan verder het voorstellingsvermogen feitelijk geheel buiten werking blijven; men begrijpt wel, dat ik zóóver niet gaan wil. Ik moet echter de aandacht op het volgende vestigen. Zooals ik reeds opmerkte, zie ik, wat als ruimtelijk voorstellingsvermogen aangeduid wordt, als het resultaat van gecombineerde werking van het geheugen en het begrip. Het is een bekend feit, dat de leerlingen liever een beroep doen op het eerste dan op het tweede; misschien hebben niet alléén de leerlingen deze eigenschap. Wanneer een leerling zich beklagt, dat hij zich de figuur niet meer kan „voorstellen”, dan beteekent dit, dat hij zulk een figuur niet meer in zijn geheugen kan terugroepen, en wil trachten aan een in werking stellen van het verstand te ontkomen. Het onderwijs kan hieraan schuld dragen, omdat het niet in voldoende mate tot uiting brengt, dat het begrip hier alles kan doen, en dat ruimteinzicht soms, echter onnoodig, hulp kan bieden.

Wanneer we een vlakke figuur, die door haar beide projecties gegeven is, in neergeslagen stand gaan teekenen, dan behoeven we slechts de plaats van één enkel, buiten de wentelingsas gelegen punt in neergeslagen stand te kennen om door de eigenschappen der affiniteit de geheele figuur in die stand te kunnen teekenen. Het is dus niet noodig „verschillende” manieren te onderwijzen voor omwentelen en terugwentelen, o.a. die van het neerslaan der punten afzonderlijk, die van het nieuwe projectievlak, die van de beschouwing der rechte lijnen, die van de beschouwing van een waaier. Is één der punten in neergeslagen stand geteekend, dan behoeft men zich niets meer „voor te stellen”; immers is de affiniteit in het hier optredend geval door de affiniteits-as en een puntenpaar bepaald.

Ik merkte reeds eerder op, dat men in de regel het opnemen van de affiniteit in de leerstof ten onrechte verdedigt met behulp van de beschrijvende meetkunde; het begrip der affiniteit doordringt een groot deel der ruimte-meetkunde. Ik knoop mijn bespreking der affiniteit aan bij wat ik zoo even omtrent de beschrijvende meetkunde heb gezegd, om duidelijk te laten uitkomen, dat het mij er niet om te doen is, weder een nieuw onderwerp bij de leerstof in te lijven en aldus het onderwijs zwaarder te maken. Zooals ik mij de behandeling en de toepassing voorstel, zal zij veeleer tot vereenvoudiging en verheldering dan tot verzwaring bijdragen. Ik stel mij die behandeling namelijk anders voor dan Wijdenes blijkens zijn betoog in Jaargang VII, bij welk betoog ik me overigens gaarne aansluit.

Ik zou willen beginnen met de affine verwantschap van vlakke figuren te brengen, waar zij thuis behoort, d.w.z. in de vlakke meetkunde. In de lagere klassen is dat begrip nog van weinig beteekenis; dat het daar te moeilijk is zou ik niet willen beweren. Ik geloof, dat de juiste plaats is in de inleiding, die ik aan de stereometrie wil laten vooraf gaan. De behandeling dient ter completeering van de kennis, die men van de vlakke meetkunde moet hebben om goed voorbereid tot de meetkunde der ruimte over te gaan.

De invoering der affiniteit bij de herziening van de beginselen der meetkunde kost weinig moeite. Wanneer men teruggekomen is op de beweging en de omlegging van het vlak, de congruentie en de symmetrie, op de vermenigvuldiging, de directe en indirecte gelijkvormigheid, beschouwt men het geheel van alle figuren in het vlak, die door herhaalde toepassing van de bewerkingen beweging, spiegeling, vermenigvuldiging op één figuur kunnen ontstaan, en men merkt op, dat, als men twee figuren van de verzameling neemt, zij in zoodanig verband met elkaar blijken te staan, dat

- a) een punt der eene figuur met een punt der andere figuur overeenkomt,
- b) een rechte der eene figuur met een rechte der andere figuur overeenkomt,
- c) dat evenwijdige rechten met evenwijdige rechten overeenkomen,

- d) dat corresponderende hoeken gelijk zijn,
- e) dat corresponderende lijnstukken een standvastige verhouding van lengten hebben.

Men gaat nu op deze voorwaarden afdingen en het geheel der figuren beschouwen, die met een figuur in zoodanig verband staan, dat slechts aan de onder a), b) en c) genoemde voorwaarden behoeft te worden voldaan.

Dat men op deze algemeene manier het begrip invoert en niet dadelijk het bijzonder geval beschouwt, waarin er een „affiniteits-as” is en een vaste richting van de verbindingsrechten der corresponderende punten, schijnt mij van veel belang met het oog op de toepassingen, die wij van de verwantschap zullen maken. Eerst wanneer dit algemeene begrip is aangebracht, zou ik het zoo even genoemde bijzondere geval willen bespreken; niet alleen, omdat het zich bij de toepassingen zoo vaak voordoet, maar ook, omdat het een zoo eenvoudig middel geeft om affine figuren te teekenen. Men mag dit laatste vooral niet achterwege laten; reeds in de eerste lessen in de stereometrie zal men er bij het teekenen van ruimte-figuren zijn voordeel mee kunnen doen. Aanbevelenswaardige eerste voorbeelden zijn om ons reeds bekende redenen: de gelijkzijdige driehoek met de hoogtelijnen, het vierkant met de diagonalen, de regelmatige 5-hoek of 6-hoek met omgeschreven cirkel enz.

Ik ben hiermede reeds gekomen tot het zoogenaamde stereometrische teekenen, m.i. een der belangrijkste toepassingen van de affine verwantschap in het platte vlak. Ik bepaal mij tot de figuren, die uit platte vlakken en rechte lijnen samengesteld zijn.

De methode van het stereometrisch teekenen is die van de scheeve parallelprojectie op een verticaal teekenvlak, waarbij echter niet, zooals bij de werkelijke practische toepassing dier projectiemethode gebeurt, de figuur door haar orthogonale projecties vooraf gegeven wordt. Een der eigenschappen van die projectiemethode is, dat het beeld van een vlakke figuur met die figuur zelf affien verwant is. Men kan dat eerst aantoonen, nadat de evenwijdigheid van lijnen en vlakken behandeld is, maar mag het dan ook niet nalaten. Want eerst daardoor blijkt de deugdelijkheid van de gegeven voorstelling en alleen daardoor voorkomt men de dwaasheden, tot welke de leerlingen in staat blijken te zijn, die niet zijn voorbereid.

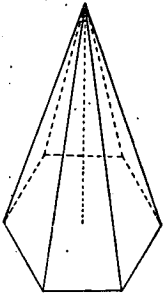


Fig. 2.

De bijgaande afbeelding van een regelmatige 6-zijdige pyramide ¹⁾ zal menigeen onder U niet geheel onbekend zijn; een gat in het papier, op de plaats, waar de hoogtelijn neerkomt, is een bewijs van de overtuiging, waarmede de leerling zijn regelmatige 6-hoek geconstrueerd heeft. Wanneer men vooraf het ontwerpen van affine beelden beoefend heeft en de projectie-methode gemotiveerd, dan worden dergelijke teleurstellingen vermeden.

Vervolgens ontmoeten we de affiniteit bij de beschouwing van doorsneden van een prisma. Iedere vlakke doorsnede is, ook in de stereometrische figuur, affien met het grondvlak; de snijlijn van beide vlakken is affiniteitsas; dit is ook de eenvoudigste manier om de gewone constructie van doorsneden te verklaren.

Ik merk hierbij nog op, dat bij de bepaling van de doorsnede van een pyramide met willekeurige platte vlakken de affiniteit ons in de steek laat. Echter kan men er bij deze gelegenheid op wijzen, dat de affine verwantschap van vlakke figuren slechts een eenvoudig geval is van een nog algemeenere verwantschap; deze laten we echter verder rusten. Het spreekt vanzelf, dat we, wanneer we op de school het groepentheoretische beginsel toepassen, we moeten opklimmen van het bijzondere tot de hoogte, die we bereiken willen; bij de wetenschappelijke behandeling gaan we uit van de volledige projectieve groep en we dalen dan af tot het bijzondere door specialisatie.

Bij de orthogonale projectie van een vlakke figuur hebben we weer met een affine afbeelding te doen; hierop wees ik echter reeds bij gelegenheid van de bespreking van het omwentelen en terugwentelen in de beschrijvende meetkunde.

Ik zou overal de affiniteit willen gebruiken, waar zij haar diensten kan bewijzen, b.v. bij de constructies van een der orthogonale projecties eener vlakke figuur, als de andere projectie en de door-gangen van het vlak der figuur gegeven zijn; voor eenigszins ingewikkelde vlakke figuren levert deze handelwijze voordeel op.

De werkwijze, waarbij de affiniteit in het begin der 4e klasse behandeld en beoefend wordt ter afronding van de planimetrie,

¹⁾ Niet als scheeve parallelprojectie van een pyramide, die op een horizontaal vlak staat, op dat vlak, doch op het verticale vlak.

heeft voor mij het groote voordeel, dat men er in de ruimte-meetkunde dadelijk over beschikken kan, terwijl men het bezwaar ontgaat van de verdeeling van aandacht, die op moet treden, als men later het onderwijs in de beschrijvende meetkunde door die behandeling onderbreekt.

Een verdeeling van aandacht is ook het gevolg van de gescheiden behandeling van stereometrie en beschrijvende meetkunde. De behandeling van het cylindervlak met zijn raaklijnen en raakvlakken behoort tot de stereometrie. Wanneer aan de hierop betrekking hebbende vraagstukken de stereometrische moeilijkheden eerst ontnomen zijn, dan kan bij de onmiddellijk volgende daadwerkelijke uitvoering der constructies de geheele aandacht op de toepassing der teekenmethode geconcentreerd blijven.

Men zou mij van ondankbaarheid jegens Professor Wolff kunnen beschuldigen, indien ik na de prachtige uiteenzetting over oppervlakten en inhouden, die hij in de vorige jaargang van „Euclides” gaf, thans in een beschouwing van het meetkunde-onderwijs niets over dit onderwerp zou zeggen. Professor Wolff drijft de bescheidenheid te ver door op de vraag, of het onderwijs op dit punt verbetering toelaat, het antwoord schuldig te blijven. Ik krijg uit zijn woorden de indruk, dat hij geen groote verbetering mogelijk acht; ik ben van deze zelfde meening. In de 2e klasse de leerlingen te doordringen van het besef, dat de oppervlakte van een rechthoek een begrip is, dat nog gedefinieerd moet worden, schijnt mij niet mogelijk. Wel acht ik het mogelijk en nuttig in de hoogere klassen deze zaken wat meer kritisch te beschouwen. Het best kan men dat wellicht doen aansluiten bij de definitie van de oppervlakte van een cylindermantel; tot dit onderwerp zal ik deze bespreking bepalen.

Men behoeft dit toch niet zoo oppervlakkig te behandelen als in sommige leerboeken gebeurt. Bij het technische onderwijs kan men er mede volstaan, dit oppervlak in een plat vlak uitgeslagen te denken. Ik vermoed echter, dat enkele schrijvers van leerboeken voor onze scholen de meening toegedaan zijn, dat men door dit „uitslaan” de, toch altijd wat onaangename, limietovergang onnoodig kan maken. Deze meening berust natuurlijk op een misverstand. De oppervlakte van een gebogen vlak is slechts te bepalen door uit te gaan van vlakke figuren, dus door op de oppervlakte

van ingeschreven veelvlakken limietovergang toe te passen. Men brengt daartoe op het oppervlak een triangulatie aan. Nu is echter het pijnlijke van het geval, dat de uitkomst afhankelijk is van de wijze, waarop men het aantal der hoekpunten vermeerderd. De methode van het uitslaan van de cylindermantel nu berust hierop, dat men de triangulatie zoo kan aanbrengen en het aantal hoekpunten zoo kan vermeerderen, dat men, na de door de driehoeken gevormde figuur doorgesneden te hebben, het geheel in een plat vlak uitkan leggen, zoo, dat de driehoeken blijven samenhangen zonder dat uitrekking of samendrukking op de driehoeken behoeft te worden toegepast; dat dit bij de vermeerdering van het aantal hoekpunten steeds zoo blijft, en dat de limiet van het bedekte vlak de oppervlakte is van een rechthoek, die de hoogte van de cylinder als hoogte en de omtrek van zijn grondvlak als lengte heeft. Om aan te toonen, dat dit mogelijk is, hebben we slechts op de cylindermantel een aantal beschrijvenden te trekken en elke twee opvolgende beschrijvenden door een zigzaglijn te verbinden. We zien dadelijk, dat die zigzaglijnen hier geen rol spelen; we kunnen ons dus bepalen tot het trekken van de beschrijvenden. Laten we nu het aantal beschrijvenden steeds

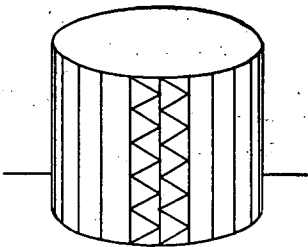


Fig. 3.

toenemen, zoodat de grootste afstand van twee opvolgende onbepaald tot nul nadert, dan gaat de uitslag van het prisma-oppervlak bij de limiet over in de oppervlakte van de genoemde rechthoek. Eerst door deze redeneering is de methode van het „uitslaan” gerechtvaardigd.

Dat we hier niet met spitsvondigheden te doen hebben, blijkt hieruit, dat volstrekt niet ieder gebroken vlak, dat door triangulatie in de cylindermantel kan ontstaan, bij de limiet in de bedoelde rechthoek kan worden uitgelegd. We zullen de mantel eerst verdeelen door parallelcirkels, op onderling gelijke afstanden aangebracht. Voorts verdeelen we hem nog door $2n$ beschrijvenden op onderling gelijke afstanden. Het is de bedoeling het getal n te vergrooten, terwijl de evenwijdige vlakken tot elkaar naderen. We teekenen nu regelmatige n -hoeken in de parallelcirkels en verbinden de hoekpunten van verschillende n -hoeken op de in fig. 3 aangegeven wijze. Op deze wijze ontstaat een triangulatie. We

kritisch te blijven beschouwen, en er toe bijgedragen heeft, dat ons onderwijs beter beantwoorden zal aan het boven door mij omschreven doel.

Na de voordracht van den Heer *Beth* verlangt niemand der aanwezigen het woord tot het stellen van vragen aan den spreker.

De Voorzitter bedankt den Heer *Beth* voor zijn interessante voordracht en voor de groote bereidwilligheid, waarmee deze, als een beroep op hem gedaan wordt, steeds klaar staat, om ons van dienst te zijn.

Daar er niets meer aan de orde is, sluit de Voorzitter de sectievergadering.

SECTIEVERGADERING NATUURKUNDE

Verzorging: het bestuur van de Natuurkundesectie van VeLiNeS.

De Voorzitter (dr. Groosmuller) opent te 3.15 de vergadering met een woord van welkom tot de aanwezigen en een woord van dank aan den spreker om zich op korten termijn beschikbaar te stellen. De volgende *voordracht* wordt nu gehouden:

„DE MODERNE ONTWIKKELING DER FOTOGRAFIE” (met lichtbeelden)

DOOR

Dr. A. VAN KREVELD.

De spr. begon met de opmerking, dat de in het programma opgenomen titel niet het onderwerp van zijn voordracht weergaf en dat hij over een meer speciaal onderwerp wilde spreken namelijk over de vooruitgang van het spectrale gevoeligheidsgebied der fotografische plaat, welke zijn tegenwoordig eindpunt in de infraroodplaat heeft bereikt.

De gewone broomzilvergelatineplaat is slechts gevoelig voor de golflengten beneden circa 5000 Å°. Voor rood, oranje en geel is zij zoo weinig gevoelig, dat men er in de praktijk niets van bemerkt. Deze beperkte gevoeligheid was reeds in 1840 door Herschel aan de pas uitgevonden Daguerreotypie-(joodzilver) platen ontdekt, toen hij daarmee het spectrum wilde fotografeeren. Dat de ongevoeligheid van rood en geel ook van groote invloed is op de natuurgetrouwe weergave der helderheden op foto's uit de praktijk, (de z.g.n. toonwaardenvervalsching der fotografische plaat) is pas veel later opgemerkt (omstreeks 1890).

Spr. behandelde nu eerst de verovering der korte golflengten. In 't algemeen wordt een fotochemisch proces door die stralen teweeg gebracht, welke door de reageerende stoffen worden ge-

absorbeerd. Nu absorbeert broomzilver vanaf circa $4700 \text{ \AA}$ tot aan de kortste golflengten met een absorptietop bij omstreeks $2000 \text{ \AA}$, zoodat de sterke gevoeligheidsafname naar het ultra-violet aan bijkomstige oorzaken moet worden toegeschreven. Als zoodanig werd in de eerste plaats genoemd de absorptie door het glas der lenzen en prisma's, waarmee wordt gefotografeerd. Dit absorbeert reeds het nabije ultra-violet vanaf circa $3500 \text{ \AA}$ vrijwel volkomen. Voor de praktische fotografie is dit een aangename omstandigheid, omdat ook het oog voor ultra-violette stralen ongevoelig is en dus althans in dit gebied de plaat- en ooggevoeligheid parallel gaan. Doch voor de spectrografie in het ultra-violet moet de glas-optiek door kwarts-optiek worden vervangen. Deze is bruikbaar tot omstreeks $2000 \text{ \AA}$, voor nog kortere golflengten wordt vloeispaat-optiek gebruikt tot circa $1200 \text{ \AA}$ en daar beneden reflectieoosters. Bij deze korte golflengten ontmoet men echter nog andere bezwaren. Reeds van $2200 \text{ \AA}$ af blijkt de gelatine van de fotografische emulsie zoo sterk te absorbeeren, dat de gevoeligheid voor kortere golflengten snel afneemt. Schumann is de ontdekker van dit verschijnsel (1893) en ter vermindering ervan vervaardigde hij speciale gelatine-arme platen, de z.g.n. Schumannplaten. Deze verkrijgt men door een gewone emulsie zeer sterk met water te verdunnen en uit deze oplossing de broomzilverkorrels op een glasplaat te laten bezinken. Dit bezinksel bevat slechts uiterst weinig gelatine, namelijk die welke aan de korrels geabsorbeerd is en noodzakelijk is voor de opbouw van gevoelige emulsie. Ook de lucht blijkt bij golflengten beneden $1800 \text{ \AA}$ sterk te absorbeeren. Daarom plaatste Schumann zijn spectrograaf in vacuum. Op deze wijze bereikte hij golflengten tot $1200 \text{ \AA}$, tegenwoordig is men reeds tot $100 \text{ \AA}$ gekomen en heeft aldus aansluiting verkregen bij de zachte Röntgenstralen.

Daarna behandelde spr. de verovering der lange golflengten. Hier doet zich de moeilijkheid voor, dat het broomzilver zelf niet gevoelig is voor deze stralen. Door een toeval ontdekte Vogel in 1873, dat de toevoeging van bepaalde kleurstoffen de fotografische plaat ook voor langere golflengten gevoelig maakt (= sensibiliseert) en wel ongeveer voor die golflengten, die door de betreffende kleurstof worden geabsorbeerd. Merkwaardig is het, dat het sensibilisatie-maximum en de grens van de sensibilisatie bij langere golflengten liggen dan het absorptie-maximum en de

absorptiegrens van de kleurstof. Dit verschijnsel en ook de werking der sensibilisatoren zijn nog niet quantitatief verklaard.

Van de zeer vele organische kleurstoffen kunnen slechts enkele als sensibilisatoren dienst doen (omstreeks 100) en alle in buitengewoon geringe concentratie bijv. 1 op 100.000. Te groote concentratie veroorzaakt gevoeligheids-afname en sluier.

Spr. gaf daarna een overzicht van de meest gebruikte sensibilisatoren. Voor orthochromatische platen wordt algemeen het erythrosine gebruikt, dat de sensibilisatietop bijv. circa 5600 Å heeft en tot 6000 Å sensibiliseert. Sensibilisatoren voor rood bestaan er zeer vele en hiermee behandelde platen worden panchromatisch genoemd. Al deze platen vertoonen een sterke gevoeligheidsdepressie bij circa 5200 Å welke alleen met pinaflavol is te overbruggen. Meestal laat men dit echter achterwege, omdat dan de fabricage der panchromatische emulsies bij blauwgroen licht kan plaats vinden.

In absolute maat gemeten is de gevoeligheid voor de sensibilisatie-kleuren (geel, respectievelijk rood) van alle tot nu toe bekende platen geringer dan de gevoeligheid voor blauw en violet. Dit is echter geen bezwaar, omdat het practische doel niet is een plaat, die voor alle kleuren even gevoelig is, doch een, welke dezelfde gevoeligheidsverdeeling als het menschelijk oog vertoont. Door combinatie van verschillende sensibilisatoren kan hieraan tamelijk goed worden voldaan, doch de blauwgevoeligheid blijft altijd overwegen. Voor een correcte weergave der visuele helderheden moet daarom altijd met een filter van geel glas worden gefotografeerd, dat de blauwe stralen ten deele absorbeert. Feitelijk is voor iedere emulsie een afzonderlijk geelfilter noodig, dat de sensibilisatiekromme reduceert tot de ooggevoeligheidskromme, doch zoo precies komt het er in de practijk niet op aan. Bij electrisch licht met zijn overmaat van gele en roode stralen is geen geelfilter noodig.

Nu zijn deze beschouwingen in zooverre incorrect, dat in de practijk spectrale kleuren niet voorkomen. Alle lichaamskleuren zijn gemengd. De kleursommatie door het oog geschiedt volgens het Ostwaldsche drie-kleurenprincipe, tenminste ongeveer. Het is gebleken, dat ook de fotografische plaat de werking der verschillende kleuren sommeert en wel exact volgens de door spr. gevonden somwet. Deze sommatie is weliswaar anders dan die van het

oog, doch in de practijk bemerkt men geen verschil en kan men met het beschouwen van spectrale kleuren volstaan.

Spr. komt daarna tot de infra-roodplaten. De eerste bruikbare sensibilisator voor dit gebied, het Dicyanine werd reeds in 1905 door König ontdekt; doch de groote uitbreiding der infra-roodfotografie stamt pas van de laatste 10 jaren. Thans is men reeds tot $12000 \text{ \AA}$ gekomen. Zulke platen zijn echter slechts eenige weken houdbaar en moeten op ijs worden bewaard. Verder dan omstreeks $20.000 \text{ \AA}$ zal men principieel niet kunnen komen, omdat van deze golflengten reeds zooveel diffuse quanten in de ons omgevende ruimte voorkomen, dat hiervoor gevoelige platen ook zonder belichting zouden sluieren.

Op 't oogenblik zijn de infra-rood-sensibilisatoren nog moeilijk verkrijgbaar, doch gereede infra-roodplaten zijn allerwegen in de handel. Spr. gaf een overzicht van de verkrijgbare soorten van „Kodak”, „Ilford”, „Agfa” en „Guilleminot” met hun respectievelijke eigenschappen. Wat de behandeling betreft, wees spr. op twee punten, ten eerste op de hypersensibilisatie, d.i. het baden in verdunde ammonia, waardoor de gevoeligheid voor de sensibilisatiekleuren (maar ook alleen voor deze) met een factor 3 kan toenemen en ten tweede op de noodzakelijkheid van het gebruik van een filter. Zou men zonder filter fotografeeren, dan zouden de blauwe stralen zoo sterk domineeren, dat van een specifieke infra-roodwerking niets zou worden bemerkt. Daarom is een zwart of rood of donker geel filter, dat alle stralen der eigengevoeligheid (dus beneden $5200 \text{ \AA}$) afsnijdt, noodzakelijk. Overigens wijkt de behandeling der infra-roodplaat niet af van die van gewone platen.

Daarna liet spr. vele lichtbeelden zien, welke de toepassingen der infra-roodfotografie demonstreerden. We stippen hieruit aan: 1. de verdwijning der luchtperspectief, 2. de microfotografie van ondoorzichtige voorwerpen, 3. de reflectie van infra-rood door planten en bloemen en door de menschelijke huid. Tenslotte werden met behulp van de episcoop circa 60 verfstoffen op het doek geprojecteerd en daarnaast hun foto's op „Ilford” infra-roodplaten. Het bleek, dat de gele, oranje en roode verfstoffen alle het infra-rood volledig terugkaatsten, doch dat de infra-rood-reflectie door groene, blauwe en violette verfstoffen niet samenhangt met de kleuren welke ze op het oog vertoonen en dat hier hoogst merkwaardige verrassingen mogelijk zijn.

Debat na de lezing van Dr. A. van Kreveld.

De Heer *Bouma* stelt de vraag of de gebruikte optiek bij de ultra-rood-fotografie een gewone glasoptiek is geweest.

Dr. *van Kreveld* antwoordt bevestigend, inderdaad zijn gewone glaslenzen gebruikt, echter met dien verstande, dat de gebruikte lenzen zeer sterk werden gediafragmeerd, in verband met het feit, dat ze in dat gebied niet chromatisch gecorrigeerd zijn; tevens werd van een roodfilter gebruik gemaakt.

Ook stelde eerstgenoemde de vraag, waarom er bij de fotografische plaat, b.v. Schumannplaat, gelatine nodig is, waarop Dr. van Kreveld opmerkte, dat dit het afgesplitste Broom absorbeert.

De Heer *Huizinga* vraagt, of de in den handel gebrachte Panchromatische platen geen bezwaar opleveren door het versterken der contrasten, waar toch hun gevoeligheid voor rood die van het oog overtreft.

Dr. *van Kreveld* spreekt dit laatste tegen. Het rood op de plaat staat in den regel achter bij de verhouding rood-geel in het oog; bij de allernieuwste platen, waarbij dit laatste niet het geval is, zijn aparte filters geconstrueerd, die dit effect corrigeren. Overigens is een versterking der contrasten toch niet merkbaar.

De Heer *Huizinga* stelt ook de vraag, of het juist is dat fijnkorrelige platen beter dan grofkorrelige gesensibiliseerd kunnen worden. Volgens Dr. van Kreveld is dit slechts een statistische waarheid, zoodat er dus uitzonderingen op bestaan.

Thans geeft de voorzitter het woord aan Prof. dr. *Zernike*, die ter aanvulling mededeelt, dat men bij de tegenwoordige microfotografie naast de doorlichting met infrarode stralen ook die met ultraviolette gebruikt, dit laatste voornamelijk bij zeer dunne lagen, welke bij bestraling met zichtbaar licht geheel doorzichtig zijn en waarvan men op deze wijze goede contrastrijke foto's verkrijgt.

Ten slotte dankt de voorzitter den spreker voor zijn belangwekkende uiteenzettingen en fraaie demonstraties.

PROSPECTUS.

OEFENMATERIAAL

WISKUNDE EN STATICA
VOOR TECHNISCHE EXAMENS

(EXAMENS B.N.A. — N-ACHTEN — MACHINISTENEXAMENS ENZ.)

750 VRAAGSTUKKEN

VERZAMELD DOOR

P. VAN LEERDAM



Prijs van het complete
boek f 1.50
Antwoorden . . f 0.40

P. NOORDHOFF N.V. 1934 - GRONINGEN - BATAVIA
In de boekhandel verkrijgbaar

VOORBERICHT

Bij de examens voor de N-acten, voor adspirant bouwkundig Opzichter (adsp. B. O.) en bouwkundig Opzichter (B. O.) van de Bond van Nederlandsche Architecten (B. N. A.), voor de diploma's van Machinist ter Koopvaardij en voor vele andere technische examens blijkt elk jaar opnieuw, dat een groot aantal kandidaten wordt afgewezen voor de vakken Wis- en Werktuigkunde (Statica).

Onvoldoende oefening in het oplossen van vraagstukken is oorzaak, dat op de examens de problemen niet juist worden aangepakt of er in het geheel niet aan wordt begonnen.

De technische vaardigheid in het oplossen van vraagstukken ontbreekt bij velen en de oorzaak is niet ver te zoeken: er werd door hen vóór het examen te weinig geoefend.

Om a.s. kandidaten de gelegenheid te scheppen zich de noodige vaardigheid eigen te maken is deze vraagstukkenverzameling uitgegeven.

Elke paragraaf bevat achtereenvolgens een vraagstuk over rekenen, algebra, planimetrie, stereometrie en statica.

Ten gerieve van opleiders en zelfstudeerenden zijn de antwoorden afzonderlijk verkrijgbaar gesteld (prijs 40 cts.).

Rotterdam W.

P. v. LEERDAM.

Beukelsweg 91.

§ 45.

$$1. \quad \left\{ 7\frac{3}{4} + 5\frac{\frac{1}{3}}{2\frac{2}{3}} - \left(4\frac{\frac{2}{3}}{2} - 2\frac{7}{12} + 8\frac{1}{2} \right) \right\} \times 1\frac{7}{17}$$

2. Ontbind in factoren:

$$35x^2 - 31x + 6; 80a^3 - 120a^2x + 45ax^2.$$

3. Bereken de oppervlakte van een regelmatige achthoek, als de straal van de omgeschreven cirkel 20 cm is.
4. Bereken de inhoud van een bolsector, als de straal van de bol 18 cm is en de tophoek 120° .
5. Een kegel heeft een hoogte van 8 dm, terwijl de straal van het grondvlak r is. Op 6 dm afstand van de top brengt men een vlak aan evenwijdig met het grondvlak. Bepaal het zwaartepunt van de afgeknotte kegel.

§ 46.

$$1. \quad \frac{\frac{7}{16} \times 1\frac{2}{3} + 3\frac{11}{16}}{5\frac{1}{3} - \frac{3}{8} \times \frac{7}{9}} \times \frac{3\frac{2}{3} : 26\frac{1}{2}}{\frac{7}{11} \times \frac{2}{21}} + \frac{15\frac{2}{5} : 6\frac{2}{3}}{1\frac{2}{5} : 11\frac{1}{3}} - 20,7.$$

2. Ontbind in factoren:

$$2a^2b - 6ac - ab + 3c; 9x^5 - 72a^3x^2 - a^2x^3 + 8a^5.$$

3. Van een driehoek zijn de zijden 36; 42 en 54 cm. Bereken de drie hoogtelijnen.
4. Een gelijkbeenig trapezium, waarvan de evenwijdige zijden 48 cm en 32 cm zijn en de hoogte 15 cm is, wentelt om de lange evenwijdige zijde als as. Bereken de totale oppervlakte van het omwentelingslichaam, dat ontstaat.
5. Een cylinder heeft een diameter van 3 dm, terwijl de lengte 12 dm bedraagt; s.g. = 0,8. Men zaagt er het vierde deel af en vervangt dit door een metalen schijf met hetzelfde grondvlak en s.g. = 8. Hoe zwaar weegt deze, als het zwaartepunt op dezelfde plaats ligt als bij de oorspronkelijke cylinder?

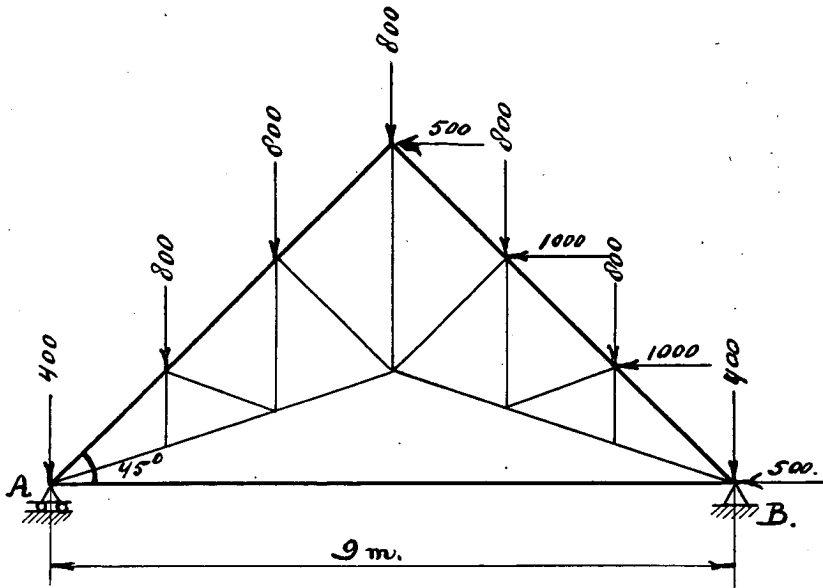
§ 47.

$$1. \quad \frac{\left\{ \frac{102}{85} + \frac{1\frac{2}{3}}{4} - 0,2 \times \left(5 - \frac{58}{87} \right) \right\} : \frac{1}{2\frac{1}{3}}}{3\frac{2}{15} - \frac{21,625}{7,5}}$$

- Deel $(a^3 + 1)x^3 - (3a^2 - 2a + 1)x^2y + (3a - 1)xy^2 - 2y^3$ door $(a + 1)x - 2y$.
- Gegeven twee lijnstukken in ligging en grootte. Beschrijf twee gelijkbeenige driehoeken, met dezelfde top, welke die lijnen tot basis hebben.
- Een regelmatige pyramide heeft tot grondvlak een regelmatige vijfhoek, waarvan de zijde 20 cm is. De hoogte is 12 cm. Bereken de inhoud.
- Een massieve cylinder met middellijn d en hoogte h wordt in de richting van de as uitgeboord ter wijdtte van de halve middellijn. Hoe ver kan men die uitboring voortzetten, vóór het zwaartepunt buiten het metaal komt te liggen?

§ 48.

- $\left\{ \left(3\frac{1}{6} + 2\frac{2}{3} \times 0,875 \right) \times \frac{0,86}{2,15} - 0,35 \right\} : \frac{0,74}{3}$.
- $\sqrt{\left\{ x + \frac{y^2}{2(x-y)} \right\}^2 - \left\{ y + \frac{y^2}{2(x-y)} \right\}^2}$.
- Bepaal de oppervlakte van een regelmatige vijfhoek, als de straal van de omgeschreven cirkel 60 cm is.
- Bereken de inhoud van een afgeknotte kegel, waarvan de straal van het grondvlak 30 cm is, de straal van het bovenvlak 20 cm en het apothema 12 cm.
- Bereken de oplegreacties van onderstaand spant (belastingen in kg; afstanden in meters).



OVERZICHT van de inhoud van de eerste tien jaargangen 1924/25 tot en met 1933/34 van het tijdschrift EUCLIDES (I, II en III onder de titel: Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde) gerangschikt volgens de namen van de schrijvers.

	Jaarg.	Blz.
Prof. Dr. L. G. M. BAAS BECKING. Wiskundige disederata ten opzichte van het voorbereidend hooger onderwijs	VIII	166
Het biologisch-practicum bij het V. H. Ond. in de Vereenigde Staten	VIII	258
Over de beteekenis van de natuurwetenschappen voor de a-richting	X	73
Dr. M. J. BELINFANTE. Convergentie en som van oneindige reeksen	I	142
Dr. H. J. E. BETH. Het „meer en meer wiskundig” karakter op der H. B. S. met 5-jar. cursus	I	90
Eenvoudige beschouwingen uit de meetkunde van GAUSS	IV	158
Het experimenteel georiënteerde onderwijs in de mechanica .	V	49
De behandeling der complexe getallen	V	110
De ontwikkeling van het getalbegrip bij het middelbaar en voorbereidend hooger onderwijs.	V	270
Mechanica opnieuw examenvak.	VI	44
Het eerste hoofdstuk der stereometrie.	VI	250
Over examenopgaven	VII	62
Het twijfelachtige geval	VII	161
De denkmoeilijkheden, gelegen in het functiebegrip en in de grafische voorstellingen	IX	11
Enkele beschouwingen in zake het meetkunde-onderwijs . . .	X	
E. W. BETH. Critiek van Vredenduin's „Logica der Wiskunde” .	X	214
Dr. O. BOTTEMA. De meetkunde als invariantentheorie.	VIII	75
Prof. Dr. L. E. J. BROUWER. Willen, weten, spreken	IX	177
Dr. H. H. BUZEMAN. Over de gelijkwaardigheid der beide leden van de formules der goniometrie	X	107
Dr. J. M. BIJVOET. Röntgenanalyse van kristallen	VIII	215
B. COSTER. De loodrechte stand van lijn en vlak	II	78
De ontwikkeling van het ruimte-inzicht	III	143
Dr. D. VAN DANTZIG. Over de maatschappelijke waarde van het onderwijs in Wiskunde.	III	186
Eigenschappen van de deelbaarheid	V	84
Woord en werktuig	V	86
Over de elementen van het wiskundig denken.	IX	102
Dr. J. W. DEKKER. Afleiding van de „pythagoreïesche getallen” uit eenvoudige goniometrische formules	VII	154
Dr. CH. M. VAN DEVENTER. Plato's bekendheid met irrationeele verhoudingen	IV	242
Een foutieve natuurwet	V	177
Een oude wiskundige natuurwet in de oudheid zelve verworpen .	VI	49
Paul Tannery over Euclides' Sectio Canonis	VI	170

	Jaarg.	Blz.
Prof. Dr. J. DROSTE. Wiskundige desiderata ten opzichte van het voorbereidend hooger onderwijs.	VIII	179
Dr. E. J. DIJKSTERHUIS. Moet het meetkunde-onderwijs gewijzigd worden.	I	1
Beschouwingen over de universitaire opleiding tot leeraar in wis- en natuurkunde	II	81
Ontwerp voor een eindexamenprogramma voor de H. B. S. met vijfjarigen cursus	III	37
Grieksche Wiskunde.	IV	134
De historische behandelingswijze van de axiomatie der mechanica van Newton	IV	245
De aanslag op de mechanica.	V	61
De ontdekking van het tautochronisme der cycloidale valbeweging	V	193
Een nieuw tijdschrift voor de geschiedenis der wiskunde	VI	69
De opleiding tot leeraar in wis- en natuurkunde volgens de plannen van de commissie Sijmons	VI	185
De tangensregel en het probleem van Snellius	VII	70
Opmerkingen over het onderwijs in Mechanica als onderdeel der Physica.	VII	76
Het getal in de Grieksche Wiskunde	VII	97
De mathematische Papyrus uit het staatsmuseum voor schoone kunsten te Moskou	VII	140
Historische revue VII 185, VIII 123, IX 28, 266.		
De opgaven over mechanica op het eindexamen der H. B. Scholen met vijfjarigen cursus in 1931	VIII	23
Drie problemen uit de Aegyptische wiskunde	VIII	49
De grondbeginsels der meetkunde van J. H. van Swinden	VIII	265
John Pell in zijn strijd over de rectificatie van den cirkel ..	VIII	286
In cauda venenum	IX	1
Descartes als wiskundige	IX	57
De zeef van Eratosthenes	X	100
Epistemisch wiskunde-onderwijs.	X	165
Dr. E. L. ELTE. Het grensnut in wiskundige behandeling.	VI	128
J. K. ERIKSEN. Over het middelbaar onderwijs in Denemarken, in het bijzonder het onderwijs in natuurwetenschappen en wiskunde	VII	197
T. EHRENFEST-ASANASSJEW. Moet het meetkunde-onderwijs gewijzigd worden.	I	60
Dr. H. FREUDENTHAL. Qualität und Quantität in der Mathematik	VIII	89
Dr. G. C. GERRITS. Het onderwijs in de natuurkunde aan de H.B.S. over de wenschelijkheid der invoering van de beginselen der differentiaal- en integraalrekening in de 4e klas der H. B. S.	VIII	143
Dr. J. C. H. GERRITSEN. Over een elementaire afleiding van de wet van Newton uit de wetten van Kepler.	IX	139
A. GOTTSCHALK. Die Beziehungen zwischen den Seiten und Diagonalen eines ebenen n -Ecks	X	44
Dr. W. F. DE GROOT. Het wiskunde-onderwijs volgens de Daltonmethode	VIII	189
R. H. VAN GULIK. De mathematische conceptie bij de oude Chinezen	V	104

	Jaarg.	Blz.
Dr. B. F. HAALMEIJER. Nog eenige opmerkingen over het onderwijs in de mechanica	II	96
Eenige opmerkingen betreffende het ontwerp van een leerplan der Commissie Beth	III	84
Bijdrage tot de kennis van het practische onderwijsresultaten in vroegere tijden	V	137
Iets over het gebruik van het woord „oneindig” bij het wiskundig onderwijs op onze middelbare scholen	VI	84
Eenige opmerkingen naar aanleiding van het artikel van den Heer Beth	IX	117
Prof. Dr. M. DE HAAS c.s. Het metrieke stelsel	VI	138
A. HALLEMA. Onze oudste 17e-eeuwsche rekenboeken	I	122
		162
E. DE HAIRS. Het cultuurhistorisch element in het wiskunde-onderwijs	IV	106
Geschiedschrijvers der wiskunde	V	229
De ontwikkeling der wiskunde in de Vde eeuw voor Chr.	VI	88
Dr. A. HEYTING JR. Technische vaardigheid	III	21
Prof. Dr. H. J. JORDAN. De beteekenis van de inductie voor het onderwijs	VIII	250
Dr. A. KETTNER. Nieuwe methode voor inhoudsberekening van pyramide, boldeelen, enz.	IV	210
Dr. H. D. KLOOSTERMAN. Geschiedenis der ideaaltheorie	X	110
Dr. A. C. DE KOCK. Over een belangrijk vraagstuk der Sterrenkunde	V	237
Dr. A. VAN KREVELD. De moderne ontwikkeling van de fotografie	X	
A. M. KROON. Het redelijk denken bij ons wiskunde-onderwijs	II	158
Ir. D. J. KRUYTBOSCH. Loodrechte stand van lijn en vlak	I	101
De formule van Heron	IV	127
De bewijsmethode der volledige inductie	IX	95
M. J. DE LANGE. Meetkundig bewijs van een stelling betreffende de zwaartelijns	IX	120
Dr. U. P. LELY. Een wijze van behandeling der logarithmen van rekenkundige getallen	V	5
Dr. W. LIETZMANN. Der Funktionsbegriff in de höheren Schulen Deutschlands	I	194
Prof. Dr. W. LOREY. Die Bedeutung der Mathematik für die Wirtschaftswissenschaften und den Wirtschaftswissenschaftlichen Unterricht	VI	99
Didaktische und historische Bemerkungen über eine vom Gauss zum numerischen Rechnen benutzte Identität	IV	198
Prof. G. MANNOURY. Een inleiding tot de signifika, inzonderheid met het oog op het onderwijs in de wiskunde	VII	1
Over de bestaanbaarheid van i	X	125
S. W. F. MARGADANT. De drievlakshoek	III	167
	IV	178
J. H. MEERBURG. Naar aanleiding der opmerkingen van den Heer Schogt over het onderwijs in de mechanica	III	1
Dr. M. MINNAERT. Natuurkundige waarnemingen in de open lucht	VIII	233
Dr. W. C. POST. Wat dient bij de invoering van de differentiaal- en integraalrekening op de H. B. S. er van in de 4e en 5e klasse behandeld te worden	VIII	297

	Jaarg.	Blz.
Dr. D. H. PRINS Jr. Hervorming van het Wiskunde-onderwijs . . .	III	27
Dr. J. G. VAN DE PUTTE. Axiomatische behandeling der meetbare en onmeetbare verhoudingen van grootheden	V	14
Ir. J. M. ROEST. Het scheikunde-practicum	VIII	244
Prof. D. J. VAN ROOY. Die funktiebegrip en die grafische voorstelling	IX	194
Dr. J. ROZENBERG. Over de behandeling van het vraagstuk van Snellius	VII	94
Dr. H. C. SCHAMHARDT. Over de wiskunde-eischen voor het Staats-examen	I, III, VIII	28
Een wiskundeboek uit het laatst der 17e eeuw	III	172
J. SCHELTENS. Natuurkunde en Wiskunde	V	268
J. H. SCHOGT. Over het formuleeren van stellingen en bewijzen der meetkunde	I	81
Verhoudingen en evenredigheden in de „Arithmetica” van Van der Schuere	II	48
Eenige opmerkingen over het onderwijs in de mechanica	II	54
De Mechanica als afzonderlijk leervak op de H. B. S.	V	70
De kosmographie als afzonderlijk leervak	V	80
Het limietbegrip in het middelbaar onderwijs	V	140
Meetkunde voor M. U. L. O.	IX	77
Een paar moeilijke algebra-vraagstukken	IX	123
Opmerkingen over wiskundige vaktaal	X	5
De enquête over	X	133
Dr. D. J. E. SCHREK. Het cultuurhistorisch element in het wiskunde-onderwijs	I	29
Bibliotheca mathematica	V	82
Prof. Dr. F. SCHUH. De waarde van het wiskundig redeneeren	IV	181
Naschriften hierop	IV	241
Het oneindige in de schoolwiskunde	IV	238
SREMMA (= Ammers). Een droom	VII	235
Dr. Ir. A. J. STARING. Een elementaire afleiding van de wet van Newton uit de drie wetten van Keppeler	IX	23
De kegelsneden in verband met het onderwijs in natuurkunde, mechanica en kosmographie	VIII	135
Prof. Dr. D. J. STRUIK. N. L. W. A. Gravelaar	X	204
Ir. O. H. STUIVER. Over den vorm $\frac{0}{0}$ in de algebra	VI	274
Dr. P. G. TIDDENS. De beginselen der nomographie	IV	1
Toepassing van het rekenen met imaginaire grootheden op de berekeningen van wisselstroomen	VIII	203
Dr. W. P. THIJSSEN. Het wiskunde-onderwijs in het Indische onderwijsstelsel	VIII	135
Dr. P. DE VAERE. Naar aanleiding van de verdeeling in de uiterste en middelste reden	X	13
Eenwaardig of meerwaardig	III	51
De wiskunde in het Belgisch middelbaar onderwijs	IV	216
F. VEEN. Bijdrage tot de regeling van het wiskunde-onderwijs aan de H. B. S.	V	145
H. G. A. VERKAART. Het vraagstuk van Snellius	VI	165
	IV	25
	VIII	104

	Jaarg.	Blz.
Dr. D. P. A. VERRIJP. De beteekenis van het onderwijs in de wiskunde voor de B-leerlingen van het Gymnasium	II	1
Over een vraagstuk uit de samengestelde interest-rekening . . .	II	105
Vierdecimalige tafels	II	140
Het z.g. twijfelachtige geval van gelijk- en gelijkvormigheid .	IV	118
Een- of meerwaardig	IV	179
Over de meetkundige oplossing van $a \sin x + b \cos x = c$. . .	V	1
„Oneindig” bij het wiskundig onderwijs	VI	152
Prof. Dr. Q. VETTER. Die Cechoslovakische Mittelschule, insbesondere ihr mathematischer Unterricht	VI	209
Prof. Dr. H. J. DE BEESCHAUWER. Uit de eerste dagen van de Niet-Euclidische meetkunde	X	82
Ir. W. J. VOLLEWENS. Eenige opmerkingen over het ontwerp leerplan van de commissie Beth	III	5
Dr. P. G. J. VREDENDUIN. De autonomie der wiskunde	X	144
Prof. Dr. Hk. DE VRIES. Over twee vraagstukken uit de beschrijvende meetkunde	VIII	113
Prof. Dr. B. L. VAN DER WAERDEN. De tangensregel in de trigonometrie .	VI	241
De onmeetbare verhoudingen in de elementaire wiskunde	VII	257
Dr. J. H. WANSINK. Een grafische voorstelling naar aanleiding van de beweging van een stoffelijk punt in een verticalen cirkel .	X	
Prof. Dr. J. WOLFF. Bewegingen met breuken en haar verband met verschillende gebieden der wiskunde	IV	226
Oppervlakten en inhouden	IX	154
P. WIJDENES. Het onderwijs in Wiskunde aan kweek- en normaal-scholen	II	99
Over het onderwijs in rekenen in de 1e en 2e klas van de H. B. S. .	III	121
Eenwaardig of tweewaardig? Met naschriften	IV	197
De oplossing van de vergelijking van den eersten graad met twee onbekenden	V	104
De tafel der goniometrische verhoudingen	VI	122
Voor het laatst twee vraagstukken	VI	244
De affiniteit bij het onderwijs in de beschrijvende meetkunde aan de H. B. S. met vijfjarige cursus	VII	263
Onderlinge ligging van twee cirkels	VII	113
De gelijkzijdige driehoek van Morley	IX	155
De cyclometrische vormen	IX	40
De vergelijking $a \cos \varphi + b \sin \varphi = c$	IX	80
i. X, I; zie ook	IX	129
Dr. U. H. VAN WIJK. De stelling van Stewart	X	133
De tangensregel	VI	65
Concave figuren	VII	74
Vraagstukken op de verkeerde plaats	VII	179
Oppervlaktematen	VII	283
De meetkundige verwantschappen op de middelbare school . . .	VIII	99
De behandeling van problemen van infinitesimalen aard . . .	VIII	140
Een maximum- en minimumvraagstuk	IX	145
Het wiskunde-onderwijs in het Indische onderwijsstelsel . . .	IX	278
W. B. WYATT. Mathematics and Science in secondary schools of England and Wales	X	13
	VI	1

	Jaarg.	Blz.
Rapporten, Ontwerpen, Verslagen, Enquêtes enz.		
Het Staatsexamen tot toelating aan de Universiteit, I 109, 111, VIII, 28, IX 91, 168, 217.	X	219
Ontwerp voor een leerplan voor het onderwijs in wiskunde, mechanica en kosmographie op de H. B. scholen met vijfjarigen cursus (van de commissie Beth, Van Andel, Cramer en Dijksterhuis)	II	113
Zie verder vooral jg. III, blz. 69—120.		
Nadere beschouwingen over de opleiding tot leeraar in de wis- en natuurkundige vakken (van de commissie van vier, hierboven genoemd.	II	146
Verslag van de Vereeniging van Directeuren in zake het rapport der Commissie Beth.	III	69
Opmerkingen hierop door de Commissie Beth	III	73
Rapport van de Vereeniging van leeraren in Wiskunde, enz. over het ontwerp van de Commissie Beth.	III	80
De universitaire opleiding tot leeraar in Wiskunde en aanverwante vakken.	IV	41
Ontwerp van een leerplan voor het onderwijs in Wiskunde en Werktuigkunde op de H. B. S. met vijfjarigen cursus	IV	88
Nomenclatuurcommissie	V	4
Het metrieke stelsel.	VI	138
LiWeNaGeL 1921—1931	VII	167
Uitslag van de enquête over een eindexamenvraagstuk.	IX	165
1e Congres (1932).		
Eerste Nederlandsche algemeene bijeenkomst van leeraren in de wiskunde en de natuurwetenschappen, gehouden te Utrecht op 1 April 1932.	VIII	161
2e Congres (1934) id. 5 April	X	

OVERZICHT VAN DE ONDERWERPEN, in de jaargangen I—X.
van Euclides. behandeld; onder de namen, hierbij vermeld, vindt men
de volledige titel van de artikelen.

I. *Wis- en natuurkunde in het algemeen* (didaktiek): BAAS-BECKING,
BETH, VAN DANTZIG, DROSTE, DIJKSTERHUIS, DE GROOT, HAAL-
MEIJER, HEYTING, KRUYTBOSCH, MANNOURY, POST, PRINS,
SCHELTENS, SCHOGT, SCHREK, SCHUH, VEEN, VERRIJP, VOLLE-
MENS, WIJDENES.

II. *Organisatie van het onderwijs in het buitenland*: ERIKSEN, THIJSSEN,
DE VAERE, VETTER, VAN WIJK, WYATT.

III. *Philosophie*: E. W. BETH, BROUWER, FREUDENTHAL, KROON,
MANNOURY, SCHELTENS, DE VLEESCHAUWER, VREDENDUIN.

IV. *Geschiedenis der wis- en natuurkunde*. VAN DEVENTER, DIJKSTER-
HUIS, VAN GULIK, HAALMEIJER, HALLEMA, DE HAIRS, LOREY, SCHOGT,
SCHREK, STRUIK.

V. **Algebra.**

Didactiek: GERRITS, SCHOGT, STUIVER, DE VAERE, VERRIJP, WIJDE-
NES, VAN WIJK.

Ontw. getalbegrip: BETH, KLOOSTERMAN, VAN DE PUTTE, WOLFF.

Funcatiebegrip: BETH, HAALMEIJER, LIETZMANN, VAN ROOY.

Differentiaal- en Integraalrekening: GERRITS, POST, VAN WIJK.

Logarithmen: LELY.

Nomographie, Tafels: TIDDENS, VERRIJP.

Reeksen: BELINFANTE.

Interestrekening: VERRIJP.

Complexen: BETH, WIJDENES, MANNOURY, SCHOGT, TIDDENS.

VI. **Meetkunde.**

Algemeen: BOTTEMA.

Didactiek: BETH, DIJKSTERHUIS, EHRENFEST, AFANASSJEW, SCHOGT,
STARING.

Planimetrie: BETH, DEKKER, GOTTSCHALT, KRUYTBOSCH, DE LANGE
DE VAERE, VERRIJP, VAN DER WAERDEN, WOLFF, WIJDENES,
VAN WIJK.

Stereometrie: BETH, COSTER, KETTNER, KRUYTBOSCH, MARGADANT,
WOLFF.

Beschr. Meetkunde: DE VRIES, WIJDENES.

Niet-Euclidische Meetkunde: BETH.

VII. *Gonio- en Trigonometrie*: BUZEMAN, DIJKSTERHUIS, ROZENBERG,
VERKAART, VAN DER WAERDEN, WIJDENES, VAN WIJK.

VIII. *Mechanica*: BETH, VAN DANTZIG, DIJKSTERHUIS, GERRITSSEN,
HAALMEIJER, MEERBURG, SCHOGT, STARING, WANSINK.

IX. *Sterrenkunde en Kosmographie*: DE KOCK, SCHOGT.

- X. *Natuurkunde*: BAAS BECKING, BIJVOET, GERRITS, VAN KREVELD,
MINNAERT, STARING.
- XI. *Chemie*: BIJVOET, ROEST.
- XII. *Biologie*: BAAS BECKING, JORDAN.
- XIII. *Economie*: ELTE, LOREY.
- XIV. *Examens en examenopgaven*: BETH, DIJKSTERHUIS, SCHAM-
HARDT, WIJDENES.
-



Dr. P. G. TIDDENS

Maart 1934

Directeur der R. H. B. S. te Utrecht; voorzitter van de vereniging van leeraren in de Wiskunde, de Mechanica en de Kosmografie aan H. B. S. B.

Prof. Dr. A. D. FOKKER

DE RELATIVITEITSTHEORIE

f 8.25, geb. f 9.00

Prof. Dr. M. DE HAAS

THERMODYNAMIKA

2e druk f 11.75, geb. f 12.50

Prof. W. H. JULIUS

LEERBOEK DER ZONNEPHYSICA

verzorgd door Dr. M. MINNAERT

f 9.75, geb. f 10.50

Prof. Dr. C. ZWIKKER

LEERBOEK DER OPTIEK

f 14.75, geb. f 16.—

Prof. Dr. J. E. VERSCHAFFELT

THERMOSTATICA

f 13.25, geb. f 14.—

HISTORISCHE BIBLIOTHEEK

VOOR DE EXACTE VAKKEN

- deel I. Dr. E. J. DIJKSTERHUIS. *De elementen van Euclides*. Eerste deel: de ontwikkeling der Grieksche wiskunde vóór Euclides. Boek I der Elementen, geb. . . . f 4.50
Tweede deel: de boeken II—XIII der Elementen. Met naamregister en 107 figuren geb. f 5.75
- deel II. Dr. H. J. E. BETH, *Inleiding tot de Niet-Euclidische meetkunde op historischen grondslag*, geb. f 4.50
- deel IV en V. Dr. H. J. E. BETH. *Newton's „Principia”*, twee deelen, geb. . à f 4.25
-

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN — BATAVIA

COMPOSITIO MATHEMATICA

QUOD PERIODICUM INTERNATIONALE
EDUNT

R. BAER, S. BERNSTEIN, L. BIEBERBACH, E. BOREL, L. E. J. BROUWER, E. CARTAN, E. CECH, J. G. VAN DER CORPUT, G. DOETSCH, TH. DE DONDER, L. P. EISENHART, G. FEIGL, G. FUBINI, M. FUJWARA, R. GARNIER, G. H. HARDY, A. HEYTING, EINAR HILLE, H. HOPF, G. JULIA, A. KHINTCHINE, S. LEFSCHETZ, T. LEVI-CIVITA, P. LEVY, A. LOEWY, R. v. MISES, P. MONTEL, J. v. NEUMANN, N. E. NORLUND, A. OSTROWSKI, F. RIESZ, M. RIESZ, W. SAXER, F. SEVERI, W. SIERPINSKI, W. SUSS, G. SZEGÖ, T. TAKAGI, L. TONELLI, G. VALIRON, CH.-J. DE LA VALLEE-POUSSIN, C. VEBLEN, R. WAVRE, R. WEITZENBÖCK, E. T. WHITTAKER, B. M. WILSON, J. WOLFF.
ADMINISTRANT

L. BIEBERBACH, *Berlin*; L. E. J. BROUWER, *Amsterdam*;
TH. DE DONDER, *Bruxelles*; G. JULIA, *Paris*; B. M. WILSON, *Dundee*.

Reder deel zal in drie afleveringen verschijnen en 30 vel. (480 bla.) bevatten;
de prijs per deel bedraagt 20 Guldén.

De inschrijving kan geschieden door bemiddeling van elke boekhandel
of direct door den uitgever P. NOORDHOFF, Groningen.

ZOO JUIST VERSCHIEEN AFL. II.

Uit de inhoud:

G. Valiron, Sur une classe de fonctions entières admettant deux directions de Borel d'ordre divergent.

Walter Saxer, Über eine Verallgemeinerung des Satzes von Schottky.

Julius Wolff, Sur la représentation conforme des bandes.

Henri Carion, Sur l'itération des transformations conformes ou pseudo-conformes.

R. Weitzenböck, Über die Endlichkeit der A-Invarianten.

G. F. G. Griss, Die Differentialinvarianten eines kovarianten symmetrischen Tensors vierter Stufe im binären Gebiet.

L. J. Mordeï, On Some Arithmetical Results in the Geometry of Numbers.

Reinhold Baer, Der Kern, eine charakteristische Untergruppe.

A. Hermann, Über Matzingleichungen und die Zerlegung von Polynomen in Linearfaktoren. ..

Friedrich Levi, Zur Irreduzibilität der Kreisteilungspolynome.

P. NOORDHOFF N.V. . . GRONINGEN . SURABAYA