

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDAC-
TIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN
J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

MET MEDEWERKING VAN

Dr. H. J. E. BETH
DEVENTER

Dr. E. J. DIJKSTERHUIS
OISTERWIJK

Dr. G. C. GERRITS
AMSTERDAM

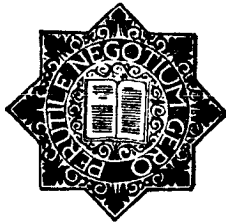
Dr. B. P. HAALMEIJER
AMSTERDAM

Dr. W. P. THIJSSEN
BANDOENG

Dr. P. DE VAERE
BRUSSEL

Dr. D. P. A. VERRIJP
ARNHEM

10e JAARGANG 1933/34, Nr. 3



P. NOORDHOFF — GRONINGEN

☞ Prijs per Jg. van 18 vel f 6.—. Voor intekenaars op het ☞
voor Nieuw Tijdschrift Wiskunde en Christiaan Huygens f 5.—.

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijksche afleveringen, samen 18 vel druks. Prijs per jaargang *f* 6.—. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6.—) of op „Christiaan Huygens” (*f* 10.—) zijn ingeteekend, betalen *f* 5.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrucken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

I N H O U D.

	Blz.
Boekbespreking	97— 99
Dr. E. J. DIJKSTERHUIS, De zeef van Eratosthenes	100—106
Dr. H. H. BUZEMAN, Over de gelijkwaardigheid der beide leden van de formules der goniometrie	107—109
Ingekomen boeken	109
Dr. H. D. KLOOSTERMAN, Geschiedenis der ideaaltheorie .	110—124
Prof. G. MANNOURY, Over de bestaanbaarheid van <i>i</i> . .	125—132
J. H. SCHOGT, De enquete over <i>i</i>	133—143
Dr. P. G. J. VREDENDUIN, De autonomie der wiskunde .	144—160

 Voor het Staatsexamen:

Dr. H. C. SCHUMHARDT, Mondelinge Staatsexamen A. Prijs *f* 1.—.
Uitgave P. NOORDHOFF, Groningen.

kaars (blz. 34) zonder meer af te leiden, dat $\frac{1}{5}$ deel van de lucht uit zuurstof bestaat. Dit treft des te meer in een boek, dat ook op 't hoofdacte-examen wil aansturen, waar „verbrandingsverschijnselen” gekend moeten worden. De behandeling van de mechanica lijkt mij 't minst geslaagd. Ik zal hier niet het veelbesproken „strengheidsstandpunt” aanroeren en dat van de schrijvers zelfs direct eerbiedigen, al geloof ik, dat zij wat sommige hunner definities betreft (van kracht b.v.) nog wel eens last met scherpzinnige leerlingen zullen krijgen. Het komt me echter voor, dat kwesties als „rust” en „beweging” van een stoffelijk punt een vollediger behandeling hadden verdiend; dat het c-g-s-stelsel meer had moeten krijgen, wat het toekomt (blz. 119 b.v.), dat het massabegrip niet vermeden had moeten worden (zie nu eens blz. 54, § 4, 2e alinea, waar de leerling vermoedelijk het tegengestelde zou verwachten). Ook geloof ik, dat de opmerking over centrifugaal- en centripetaalkracht (beide als traagheidskrachten beschouwd n.b.) op blz. 55 niet verhelderend zal werken. En zoo is er wel meer. Ik laat het er echter bij, om niet den indruk te wekken, dat het minder juist geoordeelde het goede zou overtreffen. „Het werkje is niet bedoeld voor zelfstudie”, zeggen de schrijvers in hun voorbericht, maar het kan, onder deskundige leiding gebruikt, zeker veel nut stichten.

Dr. J. F. de Vries.

J. Poirée. La géométrie à la portée de tous. Auch, Imprimerie Cochuraux, 1931.

— L'arithmétique à la portée de tous. Paris, Gauthier-Villars, 1932.

— L'algèbre et la trigonométrie à la portée de tous. I, II. Paris, Gauthier-Villars, 1933.

Deze werkjes geven eene beknopte theorie, zonder vraagstukken. De uiteenzetting is beknopt en bevattelijk, maar de schrijver gaat niet diep op zijne onderwerpen in. Onmeetbare verhoudingen komen b.v. niet ter sprake.

J. H. S.

Dr. R. Stiegler, Die Kegelschnitte in organischer Darstellung für die Prima der höheren Schulen. Stuttgart, W. Kohlhammer, 1933.

Dit boekje bevat eene m.i. zeer goed geslaagde synthetische behandeling der kegelsneden met behulp van centrale projectie en affiniteit. Door den aard van het onderwerp is het voor onze scholen niet bruikbaar, maar het is geschikt voor de schoolbibliotheek.

J. H. S.

Leerboek der Werktuigkunde voor het Nijverheidsonderwijs, door Dr. P. G. Molenaar. (W. J. Tieme en Cie, Zutphen). f 3.25.

Bij de samenstelling van dit leerboek is rekening gehouden met de leerstof voor de tweejarige cursussen ter opleiding van stuurlieden en machinisten aan de zeevaartscholen. De in het boek voorkomende vraagstukkenverzameling sluit zich geheel aan bij deze opleiding.

Werktuigkunde moet zich voor deze cursussen geheel richten op het juiste hanteeren van de grondbegrippen, waarbij scherpe afleidingen niet altijd noodzakelijk zijn. De schrijver heeft zich daarom

zooveel mogelijk gehouden aan een eenvoudigen betoogtrant. Op eenvoudige wijze wordt van de begrippen vector en hodograaf gebruik gemaakt.

Over het algemeen genomen voldoet de opzet van het boek aan de eischen, die men zich mag stellen voor de scholen, waarvoor het boek bestemd is. In sommige opzichten kon, zonder den eenvoud te schaden, uitvoeriger op verschillende punten worden ingegaan.

J. van Roon.

De uitdrukkingswijzen der Wetenschap. Kennistheoretische openbare voordrachten gehouden aan de universiteit van Amsterdam 1932—1933. Groningen P. Noordhoff N.V. 1933, 80. 127 blz. gen. f 2.90, geb. f 3.50.

Deze bundel voordrachten geeft als inhoud aan:

G. Mannoury: De signifiëse methode van taal- en begrippenonderzoek.

H. J. Pos: De taal als symbolische functie.

J. D. van der Waals: Toeval en oorzaak in verband met de moderne natuurkunde.

L. E. J. Brouwer: Willen, weten, spreken.

P. Scholten: Taal en recht.

T. Tinbergen: Het waarnemen van maatschappelijke verschijnselen.

J. Clay: Begrip en begripsvorming.

R. R. Welschen: Het wezen der kennis.

G. Révész: Het scheppend persoonlijke en het collectieve in hun cultuurhistorische afhankelijkheid.

A. H. de Hartog: De beteekenis van de beweging voor het kenprobleem.

Over een collectief werk van den aard, als ons hier geboden wordt, te spreken, is voor een recensent een onaangename taak, omdat hij voor een niet onaanzienlijk deel van het werk ter wille van zijn persoonlijke onbevoegdheid als een blinde tegenover kleuren staat, en, ofschoon wijsgeer van beroep, bezondig ik mij niet graag aan het bij uitstek beroepsgebrek der wijsgeeren, over alles en nog wat te schrijven, te spreken, en, wat vrij bedenkelijker is, alles en nog wat op eigen gezag — dat is op eigen onkunde — te beoordeelen. Over het deel, dat de grens mijner bevoegdheid overschrijdt, wil ik den lezer alleen meedeelen, dat ik de voordrachthouders dankbaar gezind ben om het vele dat ik in de afdruk van hun rede op zoo een keurige, direct tot de geest sprekende wijze heb mogen leeren. Dichtst bij het belangencentrum van „Euclides” staat de voordracht van prof. dr. Brouwer. Daarover hebben de lezers zich echter reeds een zeer gunstig denkbeeld kunnen vormen, daar ze reeds vroeger in extenso was opgenomen geworden.

Voor zoover de samenstelling van de bundel inzicht geeft in de bedoelingen van de inrichters dezer voordrachten, blijken zij te zijn uitgedaan van de vaststelling, dat niet alleen binnen de grenzen van de wijsbegeerte, maar tevens in al de bijzondere wetenschappen de bekommernis zich hoofdzakelijk naar den kant van de methode uit

beweegt. Dat moest zich voordoen, nadat door de onttroning van de positivistische methodeleer, die zich tot algemeene gedragswet van alle kennis had opgeworpen, iedere wetenschap opnieuw op zich zelf was aangewezen, en niets anders overbleef dan autonome methodes in het leven te roepen voor duidelijk afgelijnde kengebieden. Uit de daaruit op natuurlijke wijze ontstane verwarring groeide de verzuchting naar meer eenheid en het besef, dat methodische confrontatie en solidariteit gebiedende plicht zijn voor de vooruitgang van denken en wetenschap.

De bundel voordrachten, dien ik moet inleiden, streeft een dergelijke confrontatie na. Vermag hij niet de weerspiegeling te wezen van een innige solidariteit, dit mag niet afhankelijk geacht worden van de geestelijke houding der voordrachtgevers, doch moet aan den stand der wetenschappelijke disciplines zelf worden aangewreven. Het zou nochtans van zeer beperkt doorzicht getuigen, indien we niet terzelfdertijd aanstipten, hoe toch in zekere mate door al het verscheidene heen, een paar gemeenzame wezenskenmerken als het ware de onderstroom vormen, dien we als element van verstandhouding zoo graag ontmoeten in een opzet, waar een zoo groote geestesverscheidenheid aan de uitvoering meewerkt. Daarom ook en mede ter wille van de nieuwe blik, dien hij hier over menig kennisgebied kan werpen, moet de bundel al de lezers van dit wiskundige tijdschrift interesseeren, beseffende dat de ivoren-toren-periode in alle wetenschap heeft uitgediend.

Trouwens, gehouden als deze voordrachten zijn voor een kring van minder gespecialiseerde toehoorders, richt het boek zich tot een gelijkwaardige lezerskring en weet het voor alle ontwikkelden, met vermijding van oppervlakkigheid, verstaanbaar te wezen. De groep Nederlandsche hoogleeraren hebben mijns inziens een zeer gelukkige en lofwaardige geste gedaan met in woord en geschrift tegemoet te komen aan de ten alle kante opdringende behoefte aan dieperen levenszin en aan het zich rekenschap geven van de engheid van alle wetenschappelijke omtrek, wanneer deze niet tevens een uitzicht toelaat over de algeheelheid van onzen geestelijken horizon. Ik wensch deze voordrachten in vele handen om het vele goede dat zij ongetwijfeld elken lezer zullen brengen.

H. J. de V l e e s c h o u w e r.

DE ZEEF VAN ERATOSTHENES

DOOR

E. J. DIJKSTERHUIS.

1. De beschrijving, die de leerboeken der rekenkunde van dit klassieke middel tot opsporing van de priemgetallen geven, laat den lezer gewoonlijk in het onzekere over de wijze, waarop de Grieksche arithmetici het zelf hebben gebruikt: er wordt b.v. vermeld, dat de zeefmethode kan worden bekort, door van den aanvang af de even getallen weg te laten ¹⁾ en opgemerkt, dat zij een tafel kan opleveren, die voor ieder deelbaar oneven getal beneden een bepaald bedrag den kleinsten priemfactor aangeeft ²⁾, maar men komt niet te weten, of dergelijke mededeelingen nu eigenlijk opmerkingen van den schrijver bevatten of dat ze historische feiten uitdrukken.

2. Om deze onzekerheid weg te nemen, berichten we in het volgende over de hoofdstukken, waarin Nikomachos van Gerasa ³⁾ in zijn werk „*Inleiding in de arithmetica*” ⁴⁾ de zeef van Eratos-

¹⁾ Zie b.v. Fred. Schuh, *Leerboek der elementaire theoretische rekenkunde*. Groningen 1919. I, 405.

²⁾ ibidem, I, 407.

³⁾ Nikomachos van Gerasa (in Palestina, ca. 30 mijlen ten Z.O. van het meer Tiberias) leefde tusschen 50 en 150 na Chr. Hij genoot tijdens zijn leven en nog vele eeuwen daarna een groote reputatie als mathematicus en neo-Pythagoraeisch filosoof. Door zijn in noot 4 te vermelden werk, dat het oudst bewaarde geschrift is, waarin de arithmetica als zelfstandige wetenschap wordt behandeld, heeft hij tot in de 16e eeuw grooten invloed op het wiskunde-onderwijs uitgeoefend.

⁴⁾ *Nicomachi Geraseni Pythagorei Introductionis Arithmeticae Libri II*; rec. R. Hoche. Leipzig 1896.

Nicomachus of Gerasa. Introduction to Arithmetic. Translated into English by Martin Luther d'Ooge. With Studies in Greek Arithmetic by F. E. Robbins and L. Ch. Karpinsky. New York 1926.

thenes⁵⁾ behandelt en gebruikt. Het blijkt dan, dat zij dienen moet om de oneven getallen in te deelen in drie soorten, waarvan we eerst de definities zullen nagaan.

Vooraf ga de algemeene opmerking, dat in de terminologie der Grieksche arithmetica *getal* (*ἀριθμός*) steeds uitsluitend *positief geheel getal groter dan één* beduidt, dat één (althans in strenge opvatting) geen getal is⁶⁾, dat de term *deel van een getal* (*μέρος, μέρος*) een deeler van dat getal aanduidt (waarbij, eenigszins inconsequent, de eenheid wel, het getal zelf niet als deeler geldt) en dat de uitdrukking *een getal wordt door een getal gemeten* beteekent, dat het door dat getal deelbaar is. In de te behandelen definities wordt verder gebruik gemaakt van de termen *paronym deel* (*μέρος παρόνυμον*) en *heteronym deel* (*μέρος ἑτερόνυμον*) van een getal: een deel van een getal heet paronym, wanneer het met den naam van het getal genoemd wordt, heteronym, wanneer het met een anderen naam dan die van het getal genoemd wordt. Dat wil zeggen: p is paronym deel van n , wanneer p het n^e deel van n is, heteronym deel van n , wanneer p het m^e deel van n is ($m \neq n$). Een paronym deel van een getal is dus steeds, een heteronym deel nooit de eenheid. We kunnen nu de definities van de drie soorten geven:

3. De eerste soort⁷⁾ is die van de *eerste-en-enkelvoudige* getallen (*ἀριθμοὶ πρῶτοι καὶ ἀσύνθετοι*). d.z. de oneven getallen, die uitsluitend een paronym deel hebben. De eerste soort bevat dus de

⁵⁾ Eratosthenes van Kurene (geb. ca. 284 v. Chr.) is een jongere tijdgenoot en vriend van Archimedes, die aan hem zijn werk *De Methode* opdroeg. Hij bracht een geruimen tijd in Athene door en werd op 40-jarigen leeftijd door Ptolemaeus Euergetes naar Alexandria geroepen om de opvoeding van zijn zoon Philopator te leiden; hij bekleedde tevens de functie van bibliothecaris van de groote bibliotheek. Zijn wetenschappelijke werkzaamheden zijn zeer veelzijdig; hij beoefende de wiskunde (oplossing van het Delisch probleem met behulp van het mesolabum; elementen van wiskunde en muziek; meetkundige plaatsen), geodasie (meting van den omtrek van een aardmeridiaan), geographie, astronomie, chronologie en philosophie (mathematische elementen van de philosophie van Plato). † ca. 192 te Alexandria.

⁶⁾ Deze opvatting wordt niet steeds consequent volgehouden. Zoo zegt Nikomachos I; 11, 3 (ed. Hoche pag. 26, 21; ed. d'Ooge pag. 202) dat alle priemgetallen gemeten worden door het aan alle getallen gemeenschappelijke en allereerste getal, de eenheid.

⁷⁾ Nikomachos I; 11, 2. ed. Hoche pag. 26, 9; ed. d'Ooge pag. 202.

oneven priemgetallen⁸⁾; het woord *priem* (van Lat. *primus* = Gr. *πρῶτος*) vindt hier zijn oorsprong. Nikomachos verklaart den term *eerste-en-enkelvoudig* (die een-en-ondeelbaar is, zoodat men niet mag vragen, of er ook eerste getallen bestaan, die niet enkelvoudig of enkelvoudige, die niet eerste zijn) als volgt: de bedoelde getallen kunnen niet worden verkregen, door een ander getal (meermalen) samen te voegen (d.w.z. met een zeker getal te vermenigvuldigen); ze zijn dus niet-samengesteld of enkelvoudig (*ἀσύνθετος*); een enkelvoudig getal kan echter zelf wel door samenvoeging (vermenigvuldiging) andere getallen voortbrengen, die daarin als in een bron of wortel hun oorsprong hebben; een enkelvoudig getal is dus eerste getal (*πρῶτος*) van een nieuwe rij van veelvouden. De term *eerste* wordt bovendien nog (minder overtuigend) verklaard, door de opmerking, dat de eerste getallen uitsluitend door de eenheid gemeten worden.

4. De tweede soort⁹⁾ is die der tweede-en-samengestelde getallen (*ἀριθμοὶ δεύτεροι καὶ σύνθετοι*). d.z. de oneven getallen, die, naast het paronym deel, dat de eenheid is, nog minstens één heteronym deel bezitten. Ze heeten tweede getallen, omdat ze minstens nog door één andere maat dan de eenheid gemeten worden; samengesteld, omdat ze door samenvoeging van een ander getal zijn ontstaan en ook weer in een zeker aantal van die getallen kunnen worden gesplitst¹⁰⁾.

5. *Terwijl nu, gaat Nikomachos voort, deze beide soorten oneven getallen tegenover elkaar staan, wordt tusschen beide in nog een derde soort beschouwd, die haar wezen a.h.w. uit beide vormt, nl. op zich zelf beschouwd tweede en samengesteld, ten opzichte van iets anders eerste en enkelvoudig.* En ter verduidelijking zegt hij, dat tot de derde soort getallen behooren, die een of meer

⁸⁾ Volgens de opvatting van Nikomachos vormen de priemgetallen een deelverzameling van de verzameling der oneven getallen. Aristoteles (*Topica*, VIII, 2; ed. Bekker 157 a 39) en Euclides (*Elementen* VIII, Def. 11) beschouwen twee ook als priemgetal. Over dit punt, zooals over het geheele onderwerp van de classificatie der getallen, bestaat onder de Grieksche arithmetici veel meningsverschil.

⁹⁾ Nikomachos, I; 12. ed. Hoche pag. 27, 12. ed. d'Ooge pag. 202.

¹⁰⁾ Nikomachos beschouwt dus alleen oneven samengestelde getallen.

heteronyme deelen hebben, dus samengesteld zijn, maar die bij vergelijking met een ander zoodanig getal daarmee geen gemeene maat blijken te bezitten, noch een gelijknamig paronym deel.

6. Er is in deze verklaring slechts één ding duidelijk, nl. dat de indeeling der oneven getallen in drie soorten niet voert tot drie elkaar aanvullende deelverzamelingen, waarvan geen twee een element gemeen hebben; integendeel blijkt de derde soort een deelverzameling van de tweede te zijn. Verder is de omschrijving duister: vat men haar zoo op, dat tot de derde soort ieder getal hoort, waarbij een ander oneven getal kan worden aangewezen, dat er *relatief priem* (letterlijke vertaling van *πρωτος προς ἄλλο*) mee is, dan is de derde soort met de tweede identiek; leest men er echter in, dat de derde soort een verzameling van oneven samengestelde getallen is, waarvan elk tweetal elementen relatief priem is, dan is ze onbepaald. Wat de ware bedoeling van Nikomachos is, zal eerst blijken, wanneer we hem het werktuig hebben zien hanteren, dat de drie soorten van elkaar afzondert en dit werktuig is nu juist de zeef. We geven de beschrijving hiervan in woordelijke vertaling ¹¹⁾:

7. *De voortbrenging van deze < soorten > wordt door Eratosthenes de zeef genoemd, omdat, als wij de oneven getallen vermengd en ononderscheiden nemen, wij daaruit door de methode van deze voortbrenging als door een werktuig of zeef de soorten afzonderen en apart de eerste en enkelvoudige, apart de tweede en samengestelde en apart de gemengde vinden. De methode van de zeef is als volgt: na alle oneven getallen van drie af naast elkaar in een zoolang mogelijke rij te hebben uitgezet, kijk ik, te beginnen met het eerste, welke het kan meten en ik vind, dat het die getallen kan meten, die telkens twee in het midden overlaten, zoover als we voort willen gaan. En wel meet het ze niet zooals het uitvalt en zonder systeem, maar het zal het eerste, d.w.z. dat getal, dat er twee in het midden overslaat, volgens de waarde van het eerste getal der rij meten, d.i. naar zijn eigen waarde, nl. driemaal; en het getal, dat van daar af twee overslaat, volgens de waarde van het tweede in de rij, nl. vijfmaal . . . en zoo voort tot in het oneindige. Daarna*

¹¹⁾ Nikomachos, I; 13, 2. ed. Hoche pag. 29, 17; ed. d'Ooge pag. 204.

opnieuw beginnend met het tweede getal kijk ik, welke het kan meten en ik vind alle, die er vier overslaan, maar het eerste volgens de waarde van het eerste getal in de rij, nl. driemaal, het tweede volgens de waarde van het tweede . . . en zoo steeds voort. En zóó zal het analoog steeds ongehinderd doorgaan, dat de getallen het meten overnemen volgens hun orde in de rij, dat zij daarbij telkens aantallen in het midden laten, die voortgaan als de geordende rij der even getallen van twee naar het oneindige of als het dubbele van het rangnummer der plaats, waarop het metende getal staat, en dat het hoevaak van het meten voortgaat volgens de geordende rij der oneven getallen van drie af.

Indien gij nu de getallen met zekere teekens merkt, zult gij vinden, dat de getallen, die het meten van elkaar overnemen, nooit alle samen een zelfde getal meten — soms zelfs niet twee hetzelfde — en dat ook niet alle opgeschreven getallen volkomen onder dezelfde maat vallen, maar dat sommige er heelemaal aan ontkomen door eenig getal gemeten te worden, andere slechts door één, andere door twee of meer gemeten worden. Die nu nooit gemeten worden, maar daaraan ontkomen, zijn de eerste en enkelvoudige getallen, die als door een zeef uitgezocht zijn; die slechts door één getal gemeten worden volgens zijn eigen waarde, hebben slechts één heteronym deel naast het paronyme; die door een getal gemeten worden, maar volgens een andere waarde en niet volgens de eigene, of door twee tegelijk, hebben meerdere heteronyme deelen naast het paronyme; deze < soorten > nu zullen tweede en samengesteld zijn. De derde soort echter, die aan beide gemeen is, die op zich zelf tweede en samengesteld is en in betrekking tot iets anders eerste en enkelvoudig, bestaat uit de getallen, die door een eerste en enkelvoudig getal volgens zijn eigen waarde gemeten worden, wanneer zulk een getal wordt vergeleken met een ander, dat op dezelfde manier ontstaan is.

8. Tot zoover Nikomachos, die hier dus duidelijk zegt, wat de derde soort nu eigenlijk is: het is de verzameling van die oneven getallen, die slechts één heteronym deel hebben, m.a.w. de verzameling van de vierkanten der oneven priemgetallen. De omschrijving, die aanvankelijk van de derde soort gegeven was, blijkt dus achteraf wel noodige kenmerken te hebben opgesomd, maar geen voldoende.

9. De hieronder afgedrukte figuur, die door Hoche¹²⁾ ontleend is aan den codex Cicenxis (ca. 1500), kan het boven beschreven gebruik van de zeef nog verduidelijken. We geven haar met opzet in den klassieken vorm, dus in het alphabetische cijfersysteem; hierdoor vallen nl. vrijwel alle hulpmiddelen weg, die het positie-systeem voor de beoordeeling van de deelbaarheidseigenschappen der getallen oplevert en men beseft er des te beter door, dat de zeef voor de Grieksche arithmetici voor verschillende doeleinden een practisch hulpmiddel kan zijn geweest.

τὸ Ἐρατοσθένειον κόσκινον.

γ	ε	ζ	γ θ	ια	ιγ	γ ιε	ιζ
ιθ	γ κα ζ	κγ	ε κε ε	γ κζ θ	κθ	λα	γ λγ ια
ε λε ζ	λζ	γ λθ ιγ	μα	μγ	γ ε με ιε θ	μζ	ζ μθ ζ
γ να ιζ	νγ	ε νε ια	γ νζ ιθ	νθ	ξα	γ ζ εγ κα θ	ε ξε ιγ
ξζ	γ ξθ κγ	οα	ογ	γ [ε] οε κε [ιε]	[ζ] οζ [ια]	οθ	θ γ πα θ κζ
πγ	[ε] πε [ιζ]	[γ] πζ [κθ]	πθ	[ζ] ϙα [ιγ]	[γ] ϙγ [λα]	[ε] ϙε [ιθ]	ϙζ

De zeef van Eratosthenes.

10. De figuur zal zonder veel toelichting duidelijk zijn: wanneer een getal een ander meet, is het in het vakje, waarin dat getal staat, bovenaan geschreven en er onder het aantal malen, dat het erop begrepen is. Men verkrijgt zoo vanzelf een tabel, die de verschillende factoren van alle neergeschreven getallen aangeeft. Getallen, in welker vakje tenslotte niets is bijgeschreven, zijn de

¹²⁾ Nikomachos ed. Hoche pag. 31. De getallen tusschen [] zijn aangevuld.

priemgetallen. Bij het van elkaar overnemen van de meetfunctie, zouden de getallen, die al deelbaar zijn gebleken, als ze aan de beurt komen (men merke op, dat er van schrappen van getallen nergens gesproken wordt) gevoegelijk kunnen worden overgeslagen, wanneer het er alleen om te doen was, de priemgetallen af te zonderen en eveneens, wanneer men alleen de priemfactoren der samengestelde getallen wilde aangeven. De beschrijving van de zeef, die Nikomachos geeft, vermeldt echter van dit overslaan van samengestelde deulers niets en in de figuur ziet men bij πa (81) den factor ϑ (9) vermeld. De voltooide tabel heeft dus blijkbaar alle splitsingen der neergeschreven getallen in twee factoren bevat.

11. We kunnen tenslotte de volgende conclusies vaststellen aangaande de wijze, waarop de Grieksche arithmetici de zeef van Eratosthenes hebben gebruikt:

1) De zeef gebruikt van het begin af uitsluitend oneven getallen.

2) Zij zondert de priemgetallen van de samengestelde af.

3) Zij levert voor ieder samengesteld oneven getal alle ontbindingen in twee factoren; hierbij komen de volgende eigenschappen aan het licht:

α) de getallen, die door het i^e getal der rij deelbaar zijn, hebben de rangnummers $i + k (2i + 1)$, waarin $k = 1, 2, 3 \dots$. Men slaat dus telkens $2i$ getallen over.

β) de complementaire factor bij deeling van een getal van de sub α) vermelde rij door het i^e getal bedraagt $2k + 1$.

4) Zij doet uitkomen, welke getallen vierkanten van priemgetallen zijn.

12. De conclusie sub 3) is in overeenstemming met een algemeen karaktertrek der Grieksche arithmetica, nl. het gemis aan belangstelling voor en als gevolg daarvan het ontbreken van een theorie over de volledige ontbinding van een getal in priemfactoren. Voor de verschillende bij de beschouwing der getallen nagestreefde doeleinden was een ontbinding in hoogstens drie factoren voldoende. We zullen op dit punt hier echter niet verder ingaan.

OVER DE GELIJKWAARDIGHEID DER BEIDE LEDEN VAN DE FORMULES DER GONIOMETRIE

DOOR

Dr. H. H. BUZEMAN.

Zij gegeven een functie $f(x)$, die voor $x = a$ niet bestaat, terwijl $f(x) = 0$ is; zal men dan a aanvaarden als wortel van de $\rightarrow a$ vergelijking $f(x) = 0$?

Deze vraag, die niet nieuw is, en waarover geen eenheid van opvatting heerscht¹⁾, breng ik hier nog eens ter sprake naar aanleiding van de volgende goniometrische vergelijking, die voorkomt in een leerboek der Goniometrie, en welke ik ging voorleggen aan VI β :

$$\operatorname{tg}(45^\circ + x) \cdot \operatorname{cotg}(45^\circ - x) - \frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x} = 2.$$

Voor den dag kwamen de volgende oplossingen:

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & \frac{1 + \sin 2x}{1 - \sin 2x} - \frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x} - 2 = 0 \\ & \frac{3 \sin x \cos x - \cos^2 x}{1 - \sin 2x} = 0 \end{aligned}$$

$$\cos x = 0$$

$$x = 90^\circ + n \cdot 180^\circ$$

$$\operatorname{tg} x = 1/3$$

enz.

$$\begin{aligned} \text{II.} \quad & \left(\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} \right)^2 - \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} - 2 = 0 \\ & \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} = -1 \qquad \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} = 2 \\ & \frac{2}{1 - \operatorname{tg} x} = 0 \qquad \operatorname{tg} x = 1/3 \\ & \qquad \qquad \qquad \text{enz.} \\ & x = 90^\circ + n \cdot 180^\circ. \end{aligned}$$

¹⁾ Zie b.v. D. P. A. V. „Oneindig bij het Wiskundig Onderwijs”, Eucl. VI No. 4.

Ook F. Schuh „Het oneindige in de Schoolwiskunde”, Eucl. VII No. 5.

Uit de tweede oplossing blijkt, dat ik zelf de in den aanvang gestelde vraag bevestigend beantwoord en mijn leerlingen die kwestie ook aldus tracht bij te brengen met nog deze aanvulling (om dubbelzinnigheden te vermijden), dat bovendien afgesproken wordt, elke vergelijking te herleiden tot een, waarvan het tweede lid nul is. Bij deze methode van oplossen wordt ook $x = 90^\circ$ als wortel gevonden. Wel is waar wordt $\frac{2}{1 - \operatorname{tg} x}$ bij directe substitutie van $x = 90^\circ$ zinloos, maar $\lim_{x \rightarrow 90^\circ} \frac{2}{1 - \operatorname{tg} x} = 0$.

Het lijkt mij toe, dat de voorstanders van het andere standpunt het hier voor hunne leerlingen lastiger maken, dan noodig is. Immers, reeds dadelijk bij de eerste herleiding in II moet een afzonderlijke beschouwing van het geval $x = 90^\circ$ worden aangekondigd. De uitdrukking $\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}$ toch heeft volgens hen voor $x = 90^\circ$ geen zin.

En nu doet men dan misschien verstandig, dergelijke kwesties te vermijden, maar dat gelukt niet altijd. B.v. bovenstaande vergelijking ziet er zeer onschuldig uit en levert bij de eerste oplossingsmethode ook niets bijzonders. Bij directe substitutie blijkt $x = 90^\circ$ te voldoen.

Bij het z.g. enge standpunt (hier „eng” geenszins in ongunstigen zin bedoeld) moet men steeds zeer voorzichtig zijn in de toepassing van de goniometrische formules, die geen algemeene geldigheid bezitten, wat bij het ruimere standpunt wel het geval is. De formules, waar het hier om gaat, en die men, naar ik meen te weten, ook meestal laat leeren, zijn:

$$\frac{\sin a}{\cos a} = \operatorname{tg} a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1) \qquad \operatorname{tg}^2 a + 1 = \sec^2 a \quad . \quad (2)$$

$$\operatorname{tg} (a \pm b) = \frac{\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b}{1 \mp \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} \quad (3) \qquad \text{en } \operatorname{tg} 2a = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a} \quad (4)$$

Bij het ruimere standpunt zijn in al deze formules beide leden volkomen gelijkwaardig; bij het engere geldt dit ook voor (1) en (2), maar niet voor (3) en (4). (3) heeft nl. geen zin, niet alleen, wanneer $a \pm b = 90^\circ + n \cdot 180^\circ$, maar ook, wanneer òf a òf b òf allebei $90^\circ + n \cdot 180^\circ$ zijn, zoodat $\operatorname{tg} (a \pm b)$ heel goed kan bestaan, zonder dat de formule mag worden toegepast (dit was

juist het geval bij boven behandelde vergelijking). Ies dergelijks geldt voor (4).

Hoewel het ruimere standpunt niet zonder bezwaren is (ik denk hier aan de willekeur in de afspraak, eigenlijk alleen vergelijkingen te erkennen, waarvan het tweede lid nul is, terwijl het bovendien voor de leerlingen lang niet altijd eenvoudig is, uit te maken, of een functie een limiet heeft) moge men toch in het bovenstaande een pleidooi hiervoor zien. Dat men door genoemde afspraken bereikt, dat in de formules, die het fundament voor alle herleidingen vormen, beide leden volkomen gelijkwaardig zijn, lijkt mij een voordeel, dat ruimschoots tegen de bezwaren opweegt.

INGEKOMEN BOEKEN.

Van P. Noordhoff, Groningen.

P. WIJDENES,	Rentetafel D, 2e druk	f	0.50
"	Beknopte Stereometrie, 3e druk . . . geb.	f	1.50
"	Grafiekenschrift, 5e druk	f	0.50
"	Log. en rentetafel B, 9e druk gec.	f	0.85
"	Algebra voor M.U.L.O. I, 26e druk . . . geb.	f	1.40
P. WIJDENES en Dr. D. DE LANGE,	Leerboek der Algebra		
	I, 10e druk	f	1.90
"	"		
	Rekenboek voor de		
	H.B.S., II, 10e dr. gec.	f	1.70
	Vlakke Meetkunde, I,		
	10e druk	f	2.25
W. H. WISSELINK,	Kern der Meetkunde, 16e druk	f	1.—
Dr. H. C. SCHAMHARDT,	Mondelinge Staatsexamens A,		
	overdruk uit Euclides, Jg. IX, afl. V.	f	1.—

Van den schrijver:

W. K. BAART, Eenwaardige reguliere functies. Academisch
proefschrift.

Van H. J. Paris, Amsterdam.

Dr. B. M. REESTMAN, Inleiding tot de theorie der klassen-
 lichamen f 3.50

Van Van Gorcum & Co., Assen.

Annalen der critische philosophie III, 1933. Prijs bij in-
teekening f 2.50, geb. f 3.90

Van den schrijver:

C. POT, Slikkerveer, Het kruizen- en mollendogma . . . f 0.50

GESCHIEDENIS DER IDEEALTHEORIE ¹⁾

DOOR

H. D. KLOOSTERMAN.

Indien ik voor het onderwerp dezer openbare les de geschiedenis der ideaaltheorie gekozen heb, dan is dit geschied om verschillende redenen. De eerste is het feit, dat ik deze theorie tot één der schoonste der moderne wiskunde houd, en hiermede zullen ook ongetwijfeld velen instemmen, die met haar hebben kennis gemaakt. Duidelijk zijn in den loop der jaren hare vorderingen en hare ontwikkeling te zien tot de volmaakte theorie van tegenwoordig. Buitengewoon interessant is het, de moderne theorie kennend, terug te zien op hare ontwikkeling. Eerst dan leert men de gedachten kennen der geleerden, die met deze theorie zijn begonnen en krijgt men eerbied voor den verzienden blik, die zij getoond hebben te bezitten bij het leggen van de grondslagen der theorie.

Een tweede reden bij de keuze van mijn onderwerp is, dat dit mij in staat stelt enkele opmerkingen te maken over de recente ontwikkeling der wiskunde in het algemeen. In de ideaaltheorie toch heeft men een typisch voorbeeld eener moderne mathematische theorie.

Aan de hand der geschiedenis zal ik probeeren U duidelijk te maken, wat men in de wiskunde onder een „*ideaal*” verstaat. Daarvoor zijn echter eerst eenige voorbereidingen noodig.

Beschouwen we eerst de rij der getallen 1, 2, 3, 4, enz., of, zooals men zegt, de rij der *natuurlijke getallen*. Nemen wij eens een getal uit deze rij, b.v. 84. Voor dit getal kunnen wij ook schrijven 6×14 of 3×28 of $2 \times 2 \times 3 \times 7$. Wij kunnen dus

¹⁾ Openbare les, uitgesproken bij de aanvaarding van het ambt van lector in de wiskunde aan de Rijksuniversiteit te Leiden, op 26 November 1930 (wordt door een misverstand eerst thans geplaatst).

zeggen, dat 84 niet alleen een natuurlijk getal is, maar dat het ook als een product van natuurlijke getallen is te schrijven. Probeerden wij echter hetzelfde te doen met b.v. 13, dan gelukt dit niet. Het is onmogelijk om 13 weer als een product van natuurlijke getallen te schrijven, tenminste als men afziet van de triviale mogelijkheid 1×13 . Men kan ook zeggen, dat 13 geen andere deulers heeft, als zichzelf en 1. Zulke getallen als 13, die niet als een product van natuurlijke getallen zijn te beschouwen, noemt men *priemgetallen* of ook wel *ondeelbare getallen*. De kleinsten dezer getallen zijn 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, enz. Beschouwen wij nu weer eens een willekeurig natuurlijk getal, b.v. weer het getal 84. Dit getal is geen priemgetal, want we hebben daarstraks al opgemerkt, dat het gelijk is aan $2 \times 2 \times 3 \times 7$. We kunnen het echter wel schrijven als een product van priemgetallen, want 2, 3 en 7 zijn priemgetallen. We komen hier in aanraking met een stelling, die U allen wel bekend zal zijn: het is altijd mogelijk om een natuurlijk getal te ontbinden, zooals men zegt, in zijn priemfactoren, en deze ontbinding is maar op één manier mogelijk. Die laatste toevoeging beteekent bij b.v. ons voorbeeld 84 het volgende. Wij hebben zooeven gevonden, dat 84 een product is van twee factoren 2, één factor 3 en één factor 7. Het is nu niet mogelijk, dat wij bij een andere gelegenheid vinden, dat 84 te ontbinden is in b.v. één factor 2, twee factoren 3 en één factor 7.

Deze stelling, dat ieder natuurlijk getal op één en slechts één wijze te ontbinden is in een product van priemfactoren, is zoo belangrijk, dat men ze de *hoofdstelling der rekenkunde* heeft genoemd.

Indien ik U zou vragen, hoe U dat nu weet, dat deze stelling juist is, dan zou U waarschijnlijk het antwoord schuldig blijven, of U zou antwoorden, dat de stelling vanzelfsprekend is. In de wiskunde verlangt men echter een bewijs, dat uitsluitend gebaseerd is op de grondeigenschappen der natuurlijke getallen. Ik zal U dit bewijs hier niet in alle details uitvoeren, maar wel zal ik U met het oog op het volgende, twee hulpstellingen aangeven, waartoe het bewijs ervan wordt teruggebracht. De eerste dezer hulpstellingen luidt, dat ieder natuurlijk getal slechts een eindig aantal deulers heeft. De tweede hulpstelling luidt, dat indien een priemgetal opgaat in een product van twee natuurlijke getallen a en b ,

dat dan dit priemgetal óf in a óf in b moet opgaan. Indien men dus onze hoofdstelling der rekenkunde wil bewijzen, gaat men zoo te werk, dat men eerst deze beide hulpstellingen bewijst uit de grondeigenschappen der natuurlijke getallen, en dit is inderdaad ook niet erg moeilijk. Vervolgens kan men uit de eerste hulpstelling afleiden, dat de ontbinding in priemgetallen altijd mogelijk is (dus op *minstens* één manier mogelijk is) en tenslotte bewijst men dan met behulp der tweede hulpstelling, dat deze ontbinding op *hoogstens* één manier mogelijk is, waarmede het volledige bewijs geleverd is.

Na deze eerste voorbereiding komen we tot een tweede en wel willen we nu eerst ons getallengebied uitbreiden. Tot nu toe hebben we alleen de „natuurlijke getallen” beschouwd. Het is U echter welbekend, dat in de wiskunde nog andere soorten van getallen optreden, en we zullen nu ertoe overgaan, deze andere getallen in te voeren. Tot het invoeren dezer nieuwe getallen komt men, omdat men de zg. hoofdbewerkingen met natuurlijke getallen, dus de optelling, de aftrekking, de vermenigvuldiging en de deeling, niet altijd kan uitvoeren. Wel zijn de optelling en de vermenigvuldiging, indien men ze met de natuurlijke getallen uitvoert, steeds mogelijk. De som en het product van twee natuurlijke getallen is steeds weer een natuurlijk getal. Anders is het met de omgekeerden dezer bewerkingen, dus met de aftrekking en de deeling. Beschouwen we eerst de aftrekking. Wil men deze onbeperkt mogelijk maken, zoo voert men daartoe de *negatieve geheele getallen* en het *getal nul* in. Daarmee hebben we ons getallengebied uitgebreid tot het gebied der *geheele getallen*. We hebben aan de natuurlijke getallen 1, 2, 3, . . . de getallen 0, -1 , -2 , -3 , . . . toegevoegd. Deze geheele getallen hebben nu de eigenschap, dat de som, het verschil en het product van twee willekeurige dezer getallen, steeds weer geheele getallen zijn, m.a.w., dat de optelling, de aftrekking en de vermenigvuldiging onbeperkt in dit getallengebied uitvoerbaar zijn. Een verzameling van getallen met deze eigenschappen noemt men een *ring*. In dezen ring geldt nu natuurlijk ook de volgende kleine uitbreiding van onze hoofdstelling der rekenkunde: ieder getal van dezen ring, (behalve -1 , 0, 1) kan men schrijven als een product van positieve priemgetallen en wel op slechts één manier, waarbij eventueel (nl. voor de negatieve getallen) nog een factor -1 moet worden toegevoegd.

In de tweede plaats beschouwen we de deeling. Hebben we twee willekeurige geheele getallen (positief en negatief), zoo is het quotient dezer twee getallen niet altijd weer een geheel getal. Uitgaande van den ring der geheele getallen, worden we zoo tot nieuwe getallen gevoerd, de *breuken*, ook *meetbare* of *rationale* getallen genoemd. Beschouwt men alle nu verkregen getallen, dus alle geheele getallen en breuken tesamen, zoo zijn we tot een getallengebied gekomen, dat de eigenschap heeft, dat som, product, verschil en quotient van twee dezer getallen steeds weer tot het getallengebied behoort, d.w.z. ook steeds weer een geheel getal of een breuk is. We kunnen ook zeggen: de optelling, aftrekking, vermenigvuldiging en deeling zijn in het nieuwe getallengebied onbeperkt uitvoerbaar. Eén uitzondering moeten we hier echter bij maken: de deeling door nul is niet geoorloofd. Een dergelijk systeem van getallen, dat de eigenschap heeft, dat som, verschil, product en quotient van twee getallen van het systeem (behalve, wanneer de deeler nul is) steeds weer een getal van het systeem is, noemt men een *getallenlichaam*. In het bijzonder kunnen we zeggen, dat ieder getallenlichaam ook een ring is. Doch omgekeerd behoeft niet iedere ring van getallen een lichaam te zijn.

Een eenigszins aanschouwelijk beeld van de door ons nu verkregen getallen kunnen we ons maken door een vaste rechte lijn te gaan beschouwen, welke we b.v. voor ons van links naar rechts denken uitgestrekt. We kiezen op deze rechte lijn een willekeurig punt. Het eerste punt noemen we het *nulpunt* en schrijven er het getal 0 bij. Bij het tweede punt schrijven we het getal 1. De afstand dezer beide punten is daarmede onze lengteeenheid geworden en

we kunnen nu aan ieder meetbaar getal $\frac{p}{q}$ een punt der rechte toe-

voegen, door de afstand $\frac{p}{q}$ naar rechts af te zetten. Bij de posi-

tieve getallen behooren punten, die rechts van het nulpunt liggen, bij de negatieve getallen behooren punten, die links van het nulpunt liggen. We krijgen zodoende op de rechte een puntverzameling en de punten dezer verzameling zullen we de *meetbare punten* der rechte lijn noemen. We hebben nu verkregen, wat men een *één-éénduidige afbeelding* noemt en wel een afbeelding tusschen de meetbare getallen eenerzijds en de meetbare punten der rechte lijn anderzijds. In het algemeen verstaat men onder een één-éénduidige

afbeelding van twee verzamelingen U en V van dingen of elementen, zooals men zegt, een zekere wet, die aan ieder element van U één bepaald element van V toevoegt en ook omgekeerd aan ieder element van V één bepaald element van U . In ons geval is dan de eene verzameling de verzameling aller meetbare getallen en de andere verzameling is de verzameling aller meetbare punten der rechte lijn.

Men zou nu kunnen denken, dat, indien we ons nu alle meetbare punten denken op onze rechte lijn, dat we daarmee alle punten op de rechte lijn hebben verkregen. Dit is echter geenszins het geval. Want denken we ons b.v. het getal $\sqrt{2}$. Dan is er zeker op de rechte lijn een punt, dat op een afstand $\sqrt{2}$ rechts van het nulpunt ligt. Dit is echter geen meetbaar punt, want een eenvoudige beschouwing, die ik hier echter niet zal uitvoeren, leert ons, dat $\sqrt{2}$ geen meetbaar getal is, of beter gezegd, dat er geen meetbaar getal is, waarvan het kwadraat gelijk is aan 2. Behalve de meetbare punten zijn er dus nog andere punten op de rechte lijn en inderdaad vormen de meetbare punten slechts een zeer klein gedeelte van alle punten. De verzameling der getallen, die correspondeert met de verzameling van alle punten op de rechte lijn, noemt men de verzameling der *reële getallen*. Deze zijn dus hier gedefinieerd met behulp van een soort meetkundige intuïtie, nl. dat ieder punt op onze rechte lijn een zekere afstand tot het nulpunt moet hebben. Hiermee zijn we gekomen tot een nieuwe uitbreiding van ons getallengebied. Ik wil hier echter dadelijk opmerken, dat deze laatste uitbreiding, dus de uitbreiding van de meetbare tot de reële getallen, niet in onmiddellijk verband staat met het onderwerp dezer les. We zullen dan ook straks tot de meetbare getallen terugkeeren en dan van daar uit het getallengebied op een andere manier uitbreiden. De reële getallen heb ik hier slechts ingevoerd, om U met behulp daarvan dadelijk een ander voorbeeld voor de invoering van een zeker soort „ideale elementen” te geven, nl. voor de invoering der *complexe getallen*. We zullen dus dadelijk het gebied der reële getallen opnieuw een uitbreiding doen ondergaan. Terwijl we ons tot nu toe bij de uitbreiding van ons getallengebied — van de natuurlijke tot de reële getallen — hebben laten leiden door een begrip, dat wij intuïtief meenen te kennen, nl. het begrip afstand op een rechte lijn, zullen wij nu echter verder anders te

werk gaan. Aannemende, dat wij de reële getallen kennen, zullen wij de complexe getallen *logisch* definieeren.

Tot de invoering der complexe getallen is men gekomen door de theorie der algebraische vergelijkingen. Beschouwen we een willekeurige algebraische vergelijking, b.v. om de gedachten te bepalen een kwadratische vergelijking of vergelijking van den tweeden graad $ax^2 + bx + c = 0$, waar de coëfficiënten a , b , c willekeurige reële getallen kunnen zijn en x de gezochte onbekende is. Het is U allen zeker nog wel bekend, dat een dergelijke vergelijking óf twee, óf één, óf geen enkele wortel heeft, d.w.z. er zijn óf twee óf één, óf er is geen enkele reële waarde voor de onbekende x te vinden, die aan deze vergelijking voldoet. Een dergelijk resultaat geldt ook voor vergelijkingen van hooger grad, d.w.z. vergelijkingen, waarin ook nog hoogere machten van x optreden. Heeft men in het algemeen een vergelijking van den graad n , d.w.z. een vergelijking, waarin x^n de hoogste voorkomende macht van x is, en zijn de coëfficiënten dezer vergelijking reële getallen, zoo geldt, dat deze vergelijking *hoogstens* n wortels heeft, terwijl het bovendien kan voorkomen, dat het aantal wortels gelijk is aan ieder geheel getal tusschen 0 en n . Dit resultaat nu was echter niet naar den zin der mathematici. Zij wenschten een stelling, die luidde: iedere algebraische vergelijking van den n -den graad heeft precies n wortels. Jammer genoeg is deze stelling echter niet juist. Het kan, zooals we gezien hebben, heel wel voorkomen, dat een vergelijking van den n -den graad minder dan n wortels heeft. Men heeft toen gezegd: als het aantal wortels eener vergelijking van den n -den graad nu eens kleiner is dan n , kunnen we dan niet op één of andere manier nieuwe wortels maken, zoodanig, dat dan het aantal toch nog altijd gelijk aan n wordt? Om U de beteekenis dezer vraag duidelijk te maken, kan ik U het beste dadelijk de gedachte vertellen, die daarbij tot de beantwoording ervan heeft geleid. Men zoekt een systeem van dingen (deze dingen zullen we later weer getallen gaan noemen) met de volgende eigenschappen. In de eerste plaats moeten er bepaalde regels vastgesteld kunnen worden, waardoor het mogelijk wordt, om twee dingen van dit systeem te kunnen gaan optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en deelen. Deze regels moeten verder zoo vastgesteld kunnen worden, dat de som, het verschil, het product en het quotient van twee dingen van het systeem steeds weer een ding van hetzelfde systeem

oplevert. Verder moeten deze regels zoo zijn vastgesteld, dat alle rekenregels, die voor het rekenen met de gewone reële getallen gelden, ook geldig zijn voor dit optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en deelen in ons systeem. Zoo moet b.v. $a + b = b + a$ en $ab = ba$ zijn. Indien dit alles het geval is, noemt men het systeem een *lichaam*. In het bijzonder kan men nu algebraïsche vergelijkingen gaan opschrijven, waarbij dan nu echter de coëfficiënten der vergelijking dingen van ons systeem zijn, en waarbij de vraag naar het oplossen onzer vergelijking ook zoo gesteld moet worden, dat gevraagd wordt, of er in het systeem dingen te vinden zijn, zoodanig, dat indien men dit ding voor x in de vergelijking substitueert, de linkerzijde der vergelijking op grond van de vastgestelde rekenregels gelijk wordt aan het zoogenaamde *nulelement* van het systeem.

De tweede voorwaarde, die we aan ons systeem van dingen stellen is nu die, dat iedere vergelijking van den n -den graad in dit systeem n wortels heeft.

In de derde plaats moet er in ons systeem van dingen een ondersysteem bestaan, zoodanig, dat er een één-éénduidige afbeelding bestaat tusschen de dingen van dit ondersysteem eenerzijds en de reële getallen anderzijds. Daarbij moet deze afbeelding dan nog de eigenschap hebben, dat indien daarbij het ding A aan het reële getal a is toegevoegd en het ding B aan het reële getal b , dat dan ook het ding $A + B$ toegevoegd is aan het reële getal $a + b$ en het ding AB toegevoegd is aan het reële getal ab .

Hebben we een dergelijk systeem van dingen gevonden, dan kunnen we zeggen, dat we het gebied der reële getallen hebben uitgebreid tot ons systeem van dingen, en dat nu iedere algebraïsche vergelijking van den n -den graad in dit systeem, dus speciaal ook iedere algebraïsche vergelijking van den n -den graad met reële coëfficiënten precies n wortels heeft. Het is nu een buitengewoon belangrijk resultaat, dat er werkelijk een systeem van dingen te vinden is, dat aan de genoemde drie voorwaarden voldoet. Bovendien is dit systeem van dingen in een, hier niet nader aan te duiden zin, eenduidig bepaald, d.w.z. er is ook maar één dergelijk systeem te vinden. Dit systeem bestaat uit alle paren van reële getallen. Ieder dezer paren bestaat uit een eerste reël getal a_1 en een tweede reël getal a_2 , en we kunnen dit paar reële getallen eenvoudig aanduiden door het te schrijven als (a_1, a_2) , waarbij nog op te

merken valt, dat ook de volgorde der twee getallen een rol speelt. Opdat aan de eerste der drie bovengenoemde voorwaarden is voldaan, moeten hiervoor dan zekere rekenregels aangegeven worden om met deze paren van reële getallen te kunnen rekenen. Deze rekenregels wil ik hier echter eenvoudigheidshalve niet noemen. Het in de derde voorwaarde genoemde ondersysteem bestaat hierbij verder uit al die getallenparen, waarin het tweede getal gelijk is aan nul. Het blijkt dan, dat in het zoo verkregen systeem iedere algebraïsche vergelijking van den n -den graad n wortels heeft.

Het zal verder duidelijk zijn, dat we alle getallenparen één-één-duidig kunnen afbeelden op de punten in een plat vlak. Men behoeft slechts in een plat vlak een rechthoekig coördinatensysteem aan te nemen, dus een X-as en een Y-as, die loodrecht op elkaar staan en men voege aan het getallenpaar (a_1, a_2) het punt met de coördinaten $x = a_1, y = a_2$ toe. Aan de reële getallen zijn dan toegevoegd de getallenparen, waarvan het tweede getal gelijk is aan 0. Door de afbeelding, die tusschen de getallenparen en de punten van het platte vlak bestaat, worden dus de reële getallen toegevoegd aan die punten in het XY-vlak, waarvan de Y-coördinaat 0 is, dus de punten, die op de X-as zijn gelegen. Daardoor is de uitbreiding van ons getallengebied nu ook eenigszins aanschouwelijk geworden. Terwijl we vroeger de reële getallen hadden afgebeeld op de punten eener rechte lijn, hebben we onze nieuwe getallen, de paren van reële getallen afgebeeld op de punten van een plat vlak. Deze nieuwe getallen — een soort *ideale* getallen, zouden we kunnen zeggen — noemt men gewoonlijk de *complexe getallen* en men is gewend, ze niet door (a_1, a_2) aan te geven, doch om ze te schrijven als $a_1 + ia_2$, waar $i^2 = -1$.

Deze ideale of complexe getallen zijn echter niet die, waarop in de titel dezer les wordt gedomd. Ik heb ze hier slechts genoemd, omdat de invoering der ideale getallen, waarmee wij hier te doen zullen hebben, op bijna precies dezelfde wijze plaats vindt, als die der imaginaire getallen, en dan ook nog, omdat ik ze verder nog zal noodig hebben.

We komen nu weldra op ons uitgangspunt, de ontbinding van getallen in priemfactoren, terug. Deze ontbinding in priemfactoren is nl. het eerste punt, dat in een geschiedenis der ideaaltheorie dient te worden genoemd, daar zij het uitgangspunt vormt, dat tot de ideaaltheorie heeft gevoerd. Gaan wij nu daarom eerst de ge-

schiedenis bestudeeren, om te zien, hoe de ideaaltheorie is ontstaan.

In de eerste plaats moet ik dan hier noemen de *geheele getallen van Gauss*, waardoor ook de theorie der zooeven behandelde complexe getallen van grooten invloed is geweest op onze theorie. Onder geheele getallen van *Gauss* verstaan we hier de verzameling van alle geheele getallenparen, d.w.z. alle complexe getallen van den vorm $a + ib$, waar a en b geheele getallen zijn (positief, negatief of nul). Indien we weer de meetkundige interpretatie der complexe getallen in het XY -vlak te hulp roepen, dan kunnen we ook zeggen, dat we te doen hebben met die complexe getallen, waarvan het beeldpunt een roosterpunt is. De verzameling al dezer getallen vormt weer, wat we daarstraks een ring genoemd hebben. In dezen ring kunnen we nu ook getallen gaan ontbinden in factoren, net zooals we dat in het begin dezer les met den ring der gewone geheele getallen hebben gedaan. Evenzoo als bij de gewone geheele getallen kan men ook hier spreken van deelbaarheid. Een getal $a + ib$ heet deelbaar door het getal $c + id$, wanneer hun quotient weer een geheel getal is. Ieder geheel getal $a + ib$ is dan in het bijzonder deelbaar door $+1$, -1 , $+i$, en $-i$. Deze laatste getallen zullen we eenheden van onzen ring noemen. Is een getal alleen maar door zichzelf en door de eenheden deelbaar, zoo noemen we dat getal een *priemgetal*. Zoo kunnen we dan ook hier de vraag stellen of misschien een stelling geldt, zooals de hoofdstelling der rekenkunde voor de gewone geheele getallen. Inderdaad blijkt dit het geval te zijn. Ieder geheel getal van *Gauss* blijkt geschreven te kunnen worden als een product van priemgetallen en eenheden en deze ontbinding is ook hier weer op slechts één manier mogelijk. Het bewijs verloopt op volkomen dezelfde wijze als voor de gewone geheele getallen. Ook hier berust het bewijs weer voornamelijk op twee hulpstellingen. De mogelijkheid der ontbinding berust weer op het feit, dat ieder getal slechts een eindig aantal deulers bezit en de eenduidigheid der ontbinding volgt uit de hulpstelling, dat indien een priemgetal opgaat in het product van twee getallen $a + ib$ en $c + id$, dat het dan óf moet opgaan in $a + ib$ óf in $c + id$. De verkregen stelling zouden we kunnen noemen de hoofdstelling voor de theorie der getallen van den vorm $a + ib$ (a en b geheel). De juistheid ervan werd het eerst ingezien door *Gauss*. Ik mag hier verder niet onvermeld laten, dat *Gauss* op een volkomen natuurlijke wijze ertoe gevoerd (ik zou haast zeggen: ertoe

gedwongen) werd zijn complexe geheele getallen in te voeren. Bij onderzoekingen over de theorie der z.g. bikwadratische resten bleek hem nl., dat een belangrijke stelling in deze theorie op buitengewoon veel eenvoudiger wijze kan worden uitgesproken, indien met de complexe geheele getallen gebruikt. Het zou zeer interessant zijn, hierop nader in te gaan, en in een meer uitvoerige geschiedenis van ons onderwerp zou dit ook niet nagelaten mogen worden. Thans echter ontbreekt de tijd daartoe. Ik stip dan ook verder alleen de allerbelangrijkste punten aan.

Na *Gausz* dienen we nu allereerst *Jacobi* en *Eisenstein* te noemen. Deze hielden zich bezig met de theorie der kubische resten en aangemoedigd door het succes van *Gausz* voor het geval der bikwadratische resten, probeerden zij dezelfde methoden ook op hun eigen probleem toe te passen, wat hen ook volkomen gelukte. Zij moesten hiervoor het systeem van alle getallen van den vorm $a + b\varrho$ beschouwen, waar ϱ een derdemachtswortel uit de eenheid is en a en b willekeurige geheele getallen zijn. Dit is ook het systeem van alle getallen, die door optelling, aftrekking en vermenigvuldiging kunnen worden verkregen uit de gewone geheele getallen en het getal ϱ . Dit systeem van getallen vormt weer een ring en in dezen ring geldt nu weer een eenduidig bepaalde ontbinding van een willekeurig getal van den ring in een product van priemgetallen, waarbij eventueel ook nog eenheden als factoren kunnen optreden. Eenheden zijn in het algemeen alle getallen, die deeler van het getal 1 zijn. Voor de gewone geheele getallen zijn dit alleen $+1$ en -1 , voor de geheele getallen van *Gausz* zijn het $+1$, -1 , $+i$ en $-i$ en bij andere systemen van getallen kunnen weer andere eenheden optreden, waarop we hier echter weer niet verder willen ingaan. Het bewijs voor de mogelijkheid en de eenduidige bepaaldheid der ontbinding geschiedt ook weer op precies dezelfde wijze als voor de gewone geheele getallen en de geheele getallen van *Gausz* en berust weer op de geldigheid der boven reeds genoemde twee hulpstellingen.

Vervolgens komen we aan de onderzoekingen van *Kummer*. Nadat *Gausz* de getallen had onderzocht, die door optelling en vermenigvuldiging ontstaan uit de gewone geheele getallen en een vierdemachtswortel uit de eenheid (nl. $i = \sqrt{-1}$) en nadat *Jacobi* en *Eisenstein* hetzelfde hadden gedaan voor de gewone geheele getallen en een derdemachtswortel uit de eenheid, beschouwde nu

Kummer het getallensysteem, dat men verkrijgen kan uit de gewone geheele getallen en een willekeurige n -de machtswortel uit de eenheid. Het resultaat van deze onderzoekingen is de aanleiding geworden tot het ontstaan der ideaaltheorie. Uit deze onderzoekingen bleek nl., dat van de reeds meermalen genoemde twee hulpstellingen wel de eerste, dus de eindigheid van het aantal deeler van een getal (alhoewel met een kleine wijziging) bleef doorgaan, niet echter de tweede hulpstelling. *Kummer* kon dus wel de mogelijkheid eener ontbinding zijner getallen in priemgetallen bewijzen, niet echter de eenduidige mogelijkheid der ontbinding. Het is inderdaad ook niet moeilijk, zooals *Kummer* aantoonde, om getallen te vinden, die op verschillende wijze als een product van priemfactoren zijn te schrijven. Hiermede scheen het voortgaan op den door *Gausz*, *Jacobi* en *Eisenstein* begonnen weg totaal afgesneden. Toen echter kwam *Kummer* op de geniale gedachte, zijn *ideale priemgetallen* in te voeren. Ik wijs hier op de gelijkenis met de reeds besproken invoering der imaginaire getallen. De stelling, dat iedere algebraïsche vergelijking van den n -den graad n wortels heeft, werd eerst juist na de invoering der imaginaire getallen. Hier verkeerden we in een dergelijk geval. Ook hier hebben we een stelling, de eenduidige ontbinding van de getallen van een bepaald systeem in priemgetallen, die niet altijd blijkt door te gaan. Toen kwam *Kummer* en toonde aan, dat ook hier de situatie door het invoeren van ideale elementen kan worden gered. Evenals we daarstraks de complexe getallen hebben „gerealiseerd” door paren van reële getallen, zoo kunnen ook hier de ideale getallen worden „gerealiseerd”. Dit is hier echter minder eenvoudig. Het geschiedde door *Kummer* met wat men in de getallentheorie *congruenties* noemt. Ik wil er echter hier niet verder op ingaan. Er zij volstaan met de opmerking, dat na het invoeren dezer ideale priemgetallen ook de tweede der hulpstellingen, die voor de eenduidige ontbinding in priemgetallen noodig is, weer geldig wordt. Hebben we nu een niet-ideaal priemgetal p , dat opgaat in een product van twee getallen a en b , doch gaat p niet op in a en ook niet in b , zoo blijkt het nu, dat men dan het priemgetal p wel niet meer in een product van gewone getallen kan ontbinden, maar wel in een product van ideale getallen, waarvan één een deeler van a en één een deeler van b is.

De theorie van *Kummer* was alleen maar uitgevoerd voor getal-

lensystemen, die opgebouwd waren uit de gewone geheele getallen en n -de machtswortels uit de eenheid. Daarna probeerden verschillende mathematici de theorie op algemeenere getallensystemen uit te breiden. Dit geschiedde echter niet met algemeen succes. In de eerste plaats had men hier de geheele getallen in z.g. algebraische getallenlichamen op het oog. Deze getallen vormen weer, wat we daarstraks een ring genoemd hebben. Voor een dergelijken ring probeerde men nu de resultaten van *Kummer* uit te breiden, doch zooals al opgemerkt is, geschiedde dit niet dadelijk met volledig succes. Eerst aan *Dedekind* gelukte de algemeene oplossing van het probleem in vollen omvang en men noemt dan ook *Dedekind* als den grondlegger der ideaaltheorie. Met welk een verzienden blik *Dedekind* de grondslagen der ideaaltheorie had vastgelegd, bleek eigenlijk eerst veel later. De oplossing van het genoemde probleem is te vinden, zooals *Dedekind* aantoonde, door een andere realiseering der ideale getallen en sedert *Dedekind* spreekt men ook niet meer van ideale getallen, doch kortweg van „idealen”. Onder ideaal verstaat *Dedekind* een systeem van getallen in een ring, dat de eigenschappen heeft, dat indien a en b tot het ideaal behooren, ook $a + b$ en $a - b$ ertoe behooren en verder ook ieder veelvoud van een getal uit het systeem weer tot het systeem behoort. Het product van twee idealen wordt gedefinieerd en daarna kan men ook over deelbaarheid van idealen spreken. In het bijzonder kan men *priemidealen* gaan invoeren, d.w.z. idealen, die alleen door het „eenheidsideaal” en zichzelf deelbaar zijn. Voor deze idealen geldt, dan de stelling, dat ieder ideaal op één en slechts één manier te ontbinden is in een product van priemidealen.

Na dit resultaat van *Dedekind* heeft zich de ideaaltheorie sterk ontwikkeld. Ik wil hier echter nog slechts één punt uit de geschiedenis dezer theorie nader beschouwen. Nadat men op het eind der vorige eeuw begonnen was, de meest verschillende gebieden der wiskunde te axiomatiseeren, gebeurde dit ook met de algebra. De grondslag hiertoe werd gelegd door *Steinitz* in zijn beroemde verhandeling: „Algebraische Theorie der Körper”. Uitgaande van een verzameling van elementen, die de eigenschap hebben, dat men ze kan optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en deelen, waarbij deze operaties voldoen aan dezelfde grondeigenschappen als de „gewone” optelling, aftrekking, vermenigvuldiging en deeling, wordt de „abstracte

algebra" opgebouwd. Het is daarbij onverschillig, wat de elementen eigenlijk voor dingen zijn. Van belang is alleen, dat deze elementen voldoen aan de vooropgestelde axioma's.

Het duurde niet lang of ook de ideaaltheorie werd geaxiomatiseerd en deze werd daardoor tot een hoofdstuk der abstracte algebra. Men gaat hierbij als volgt te werk. Men beschouwt een systeem van elementen, die opgeteld en vermenigvuldigd kunnen worden, waarbij steeds som en product van twee elementen van het systeem weer elementen van het systeem opleveren. Bovendien moeten deze optelling en vermenigvuldiging aan de eigenschappen der gewone optelling en vermenigvuldiging (zooals b.v. $a + b = b + a$ en $ab = ba$) voldoen. Een systeem met deze eigenschappen noemt men een (abstracten) ring. Reeds eenige malen hebben we te doen gehad met ringen, waarvan de elementen getallen zijn. Thans kan men ook idealen in een abstracten ring gaan definieeren en het probleem, dat men zich stelt, wordt nu het volgende: Welke axioma's moet men in onzen ring nu verder nog aannemen, opdat in dezen ring de hoofdstelling der ideaaltheorie, d.w.z. de eenduidige ontbinding in een product van priemidealen, geldig zal zijn? Vooral van belang is hierbij natuurlijk, om het aantal axioma's tot een zoo gering mogelijk aantal terug te brengen. Een bevredigende oplossing van dit probleem, en van andere hiermede samenhangende problemen, heeft men te danken aan *Emmy Noether*.

Daarmede zijn we bij de moderne ideaaltheorie aangeland. De geheele theorie berust op een klein aantal axioma's, waaruit alles kan worden afgeleid. Het is duidelijk, dat men daardoor een diep inzicht heeft gekregen in de ideaaltheorie. Alleen het bestaan van enkele axioma's leidt reeds tot de geldigheid van de hoofdstelling der ideaaltheorie. Bovendien ligt de weg open, om verdere toepassingen der ideaaltheorie te vinden. Nu toch zijn we in het bezit eener abstracte ideaaltheorie en het is heelemaal niet noodzakelijk, dat de elementen van den ring, waarin de ideaaltheorie opgebouwd is, uit getallen bestaan. Het zou natuurlijk heel goed mogelijk kunnen zijn, dat de ideaaltheorie van belang is voor ringen, die uit andere mathematische objecten bestaan. Inderdaad is dit ook het geval. Zoo is b.v. ook in de algebraische theorie der algebraische functies het ideaalbegrip fundamenteel geworden.

Thans wil ik hiermee de geschiedenis der ideaaltheorie besluiten. Alleen wil ik nog enkele opmerkingen maken. In het begin dezer

les heb ik de ideaaltheorie een typisch voorbeeld eener moderne mathematische theorie genoemd. Een lange ontwikkeling heeft zij doorgemaakt, voordat zij de volmaakte theorie van tegenwoordig is geworden. Thans kan men in weinig bladzijden druks uit de axioma's de hoofdstelling der ideaaltheorie afleiden, en ik heb zooeven al opgemerkt, dat men daardoor een diep inzicht in deze theorie heeft gekregen. Hieruit zou men de gevolgtrekking kunnen maken, dat men, indien men de bedoelde paar bladzijden druks kent en men kent dus de afleiding der hoofdstelling uit de axioma's, dat men dan volledig met de ideaaltheorie op de hoogte is. Niets is echter minder waar en hierop juist hebben de opmerkingen betrekking, waarmede ik mijn betoog wilde besluiten. Gaat men van de axioma's uit en leest men na, hoe op grond hiervan een ideaal wordt gedefinieerd, zoo zal dit ideaalbegrip een willekeurig begrip lijken, waarvan men de beteekenis niet zal kunnen inzien. Leest men verder, hoe daarna de hoofdstelling der ideaaltheorie uit de axioma's volgt, zoo zal men meermalen getroffen worden door de vernuftige wijze, waarop het resultaat bereikt wordt. Is men tenslotte aan het eind gekomen, zoo zal men moeten toegeven, dat alles juist is en dat in het gelezene geen fouten zitten, m.a.w., dat iedere volgende stelling een logisch gevolg is van alle voorafgaande stellingen en axioma's. Heeft men nu daarmede de ideaaltheorie volledig begrepen? Deze vraag moet ontkennend worden beantwoord. In de axiomatische theorie moet een ideaal iets heel willekeurigs lijken, een formeel begrip en men begrijpt niet, waarom men nu juist deze idealen als onderwerp der beschouwing heeft gekozen. Men begrijpe wel, dat ik daarmede allermint de waarde dezer axiomatische theorie wil ontkennen, of zelfs maar verminderen. Wel wilde ik het volgende beweren: het belang, de waarde en de schoonheid der axiomatische theorie zal men pas kunnen inzien en waardeeren, indien men de geheele ontwikkeling der theorie min of meer kent. Eerst daardoor krijgt het formeele ideaalbegrip een inhoud. Eerst dan leert men de gedachten kennen, die er toe geleid hebben een ideaal zoo te definiëren en niet anders, en juist deze gedachten zijn het meest essentieele der theorie.

Voor een volledig inzicht in de ideaaltheorie is het dus noodig de geschiedenis of liever de ontwikkeling er van te bestudeeren en wordt de moderne theorie pas een laatste stadium der studie. De inhoud dezer les is dus ook eigenlijk niets anders als een leid-

draad bij de studie der ideaaltheorie, waarbij echter slechts de belangrijkste punten zijn aangestipt. Ik zou echter het resultaat, waartoe we gekomen zijn, veel algemeener willen uitspreken. Ik heb slechts de ideaaltheorie gekozen als een voorbeeld. Algemeen zou ik hier de stelling willen uitspreken dat bij de studie van ieder mathematisch onderwerp de ontwikkeling er van het uitgangspunt moet vormen. De wiskunde is tegenwoordig een groot gebouw van stellingen, rustend op de fundamenteën, de axioma's. Indien men bestudeert, hoe de stellingen uit de axioma's worden afgeleid, zal men getroffen worden door de schoonheid van dit gebouw. Doch zullen de definities, die van de voorkomende begrippen gegeven zijn, willekeurig lijken. Uit de axiomatische theorie blijkt niet, welke problemen aanleiding tot deze definities zijn geweest. En toch schuilen hierachter de gedachten, die aan het gebouw zijn vorm hebben gegeven. De axiomatische theorieën zijn het resultaat van dikwijls honderden jaren van studie, waaraan de grootste wiskundigen hebben medegewerkt. Zonder hun ontwikkelingsgeschiedenis zijn ze echter slechts formeele theorieën, waarvan de inhoud ontbreekt. Kent men de ontwikkelingsgeschiedenis niet, zoo kan men de waarde der axiomatische theorieën niet waardeeren.

Van groot belang zijn de gemaakte opmerkingen natuurlijk ook voor het onderwijs in de wiskunde. Er volgt uit deze opmerkingen, dat men bij het onderricht in wiskunde of bij het houden eener voordracht over een wiskundig onderwerp niet kan volstaan met het opnoemen der axioma's en definities en het verder daaruit afleiden der stellingen. Dit is slechts weer een laatste hoofdstuk. Zooals ik zöoeven opmerkte, is de tegenwoordige wiskunde een resultaat van jarenlange studie. Hoe zou men van zijn leerlingen kunnen verlangen, direct het moderne axiomatische gebouw te kunnen begrijpen, zonder hem eerst de ontwikkeling er van te hebben laten zien? Deze ontwikkelingsgeschiedenis is noodzakelijk voor een goed begrip. Dit aan een voorbeeld te illustreeren, is het hoofddoel van mijn betoog geweest.

OVER DE BESTAANBAARHEID VAN *i*

DOOR

G. MANNOURY.

In één opzicht ben ik het met de moedige en radikale inleider van de tere „i-kwestie” roerend eens: het spooksel der „imaginaire” of „onbestaanbare” getallen dient zo spoedig en afdoend mogelijk uit de scholen en de hoofden verdreven te worden. Wat (logies) „onbestaanbaar” is, is kontradiktoor, d.w.z. onbegrijpelijk, d.w.z. onbegrijpelijk, en kan dus niet aan enigerlei voorstelling geassocieerd worden. En wat het „imaginaire” betreft, wel, die term is op alle wis- en natuurkundige begrippen van toepassing voorzover zij niet op een bepaald ervaringsfeit betrekking hebben: de appels van de groenboer zijn reëel en die uit mijn rekenboekje imaginair, dat is klaar.

Intussen gelden deze opmerkingen enkel voor de veroordeelde termen als brokstukken *levende taal* beschouwd, en heeft de „zuivere”, of, als men wil, de formalistische wiskunst, die immers enkel met morsdode woorden of symbolen opereert, zich van mijn boutade niets aan te trekken: what's in a name? Een slakkenlijn heeft niets met een slak en een tovervierkant niets met toveren te maken, en wie dat niet begrijpt, heeft van de hele formalistiek geen flauwe notie. Ook dat is klaar. Altans voor wie er wel notie van heeft!

Wat me echter 'n beetje al te radikaal voorkomt, is dat de Heer Wijdenes die arme, onschuldige dubbelgetallen wil doen boeten voor de middeleeuwse wanbegrippen, die daar sedert de dagen van Cardanus nog altijd aan kleven, en onze rijpere schooljeugd van dat alleraardigste (en, naar hun *later* blijken zal, ook allernuttigste) gezelschapspelletje met georiënteerde dominostenen wil spenen. Dáar is toch niet de minste reden toe, wil het mij toeschijnen. Van tweeën één: of dat gezelschapspelletje is inderdaad niet helemaal pluis en op de keper beschouwd van de demon der kontradiksie bezeten, en dan dient het niet alleen

uit de middelbare school, maar uit het hele wiskundige heiligdom gebannen te worden, of dat is niet het geval, en dan kan ik onmogelijk inzien, waarom de „algorithmus der Gaussiese dubbelgetallen”, om het eens deftig te zeggen, voor onze veertien- of vijftienjarige schooljeugd te moeilijk zou zijn! Een beetje dammen en schaken kunnen ze op die leeftijd toch zeker wel allemaal, en die hoofdstukken der *geometria situs* zijn toch op een vrij wat ingewikkelder axiomatic gebouwd dan die der dubbelgetallen en derzelver „dubbeloptelling”, „dubbelafrekking” en „dubbelvermenigvuldiging”. Indien men zich voorlopig tot deze drie „dubbelbewerkingen” bepaalt, *en er zorgvuldig voor waakt, door premature weglating van de waarschuwing „dubbel-” of diergelijke, de deur open te zetten voor mogelijke begripsverwarring met de algorithmus der enkelgetallen*, dan zijn één of twee korte lessen ruimschoots voldoende (ik spreek bij ondervinding), om kinderen van genoemde leeftijd met de regels van het spel bekend te maken.

Immers, de regels voor de „dubbelvermenigvuldiging”, waar het dan toch in hoofdzaak op aan komt, kunnen feitelijk gereduceerd worden tot de bekende kommutatieve, associatieve en distributieve wetten (gemakkelijk samen te vatten in een aanwijzing als: „alles gaat net zo, als je 't bij de enkelgetallen gewoon bent”), gekombineerd met de „tafel van dubbelvermenigvuldiging” voor

de beide „dubbeleenheden” $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ en $\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$, te weten:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dit „tafeltje” moet natuurlijk eventjes goed bekeken worden,

dan komt de rest ook vanzelf, want $n \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} na & nb \end{bmatrix}$

volgt uit de hoofdwetten, en we kunnen dus een willekeurig

„dubbelprodukt” (oppassen, jongens, en niet verwarren met een *dubbel produkt!*) als volgt uitcijferen:

$$\begin{aligned}
 \begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|} \hline c & d \\ \hline \end{array} &= \left\{ a \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array} + b \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} \right\} \times \\
 &\times \left\{ c \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array} + d \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} \right\} = ac \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array} + \\
 &+ ad \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} + bc \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array} - bd \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array} = \\
 &(ac - bd) \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline \end{array} + (ad + bc) \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array},
 \end{aligned}$$

wat de jongens en meisjes gewoonlijk vrij gauw zelf ontdekken en na een korte oefentijd gemakkelijk in 't geheugen prenten. Die oefentijd is nu natuurlijk wel nodig, en ik kan de docent, die deze leervorm wil invoeren, niet genoeg op het hart drukken die tijd niet te besnoeien, en zijn leerlingen volop gelegenheid te geven, zich door *eigen werkzaamheid* en *onderling overleg* (die twee machtige, en helaas nog maar al te zeer verwaarloosde factoren der geestelijke ontwikkeling van de jeugd!) met de toepassing der regels vertrouwd te maken, en nieuwe „ontdekkingen” te doen. En juist met die „ontdekkingen”, die (ik spreek alweer bij onder-vinding) elkander gewoonlijk verrassend snel opvolgen, dient de docent omzichtig te zijn: de verleiding is zo groot, de „ontdek-kers” in de gewenste richting voort te stuw en daardoor de hele aardigheid voor hen te bederven. Laat de jongens toch alsjeblieft *zelf* op 't lumineuse idee ener „dubbeldeling” komen, en help ze enkel 'n handje door 'n paar voorbeelden, die „mooi” uitkomen. En vooral: laat ze *zelf* de in dit opzicht zo allergewichtigste stap doen

in plaats van $\begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline \end{array}$ te schrijven $\begin{array}{|c|c|} \hline a & b \\ \hline \end{array}^2$.

eën stap, waardoor in principe een „dubbelmachtsverheffing” in-gevoerd en een „dubbelworteltrekking” voorbereid wordt.

Tot zover, vlei ik mij, zal menig schoolman wel met mijn schat-ting van het bevattingsvermogen der leerlingen van de derde of vierde klasse van H.B.S. of gymnasium kunnen meegaan, maar

tevens hoor ik mij in gedachte reeds verwijten, de eigenlike moeilijkheid hiermee onaangetast te hebben gelaten: die ligt immers niet in het „gezelschapspelletje”, maar doet zich eerst voor, als we de dubbelgetallen bij het getalbegrip zelf gaan inlijven, ze op dezelfde wijze als de enkelgetallen door één letterteken gaan

voorstellen, en last not least, als we het „dubbelgetal”

a	0
-----	---

met het „enkelgetal” a gaan vereenzelvigen! ¹⁾ En dat zullen we toch moeten doen, om er mee te kunnen „werken”, zoals dat nu eenmaal in de algebra gebruikelijk is. En dan dreigt immers toch weer het spooksel van die „onmogelijke” vierkantswortel uit —1 onze leerlingen te verbijsteren, totdat ze (helaas meestal veel te spoedig) iedere poging tot begrip van wat hun in de wiskundeles wordt voorgezet definitief opgeven. „Zó moet je 't doen, en anders krijg je onvoldoende op je rapport en zak je voor 't eindexamen” wordt dan voor hen het enige mathematische axioma, dat hun volkomen helder is!

Welnu, ik geef volkomen toe, dat wij hiermede eerst de quintessence van de zaak raken, maar ik ontken ten sterkste (en dit is misschien de hoofdstelling van mijn gehele betoog), dat in dat alles enige bijzondere *moeilijkheid* gelegen zou zijn. Er schuilt enkel een *gevaar* in: voor misverstand en verwarring namelijk, en als dat gevaar niet vermeden wordt, ja, dan is holland in last. Een streng wol tot een kluwen te winden, is heus zo moeilijk niet: zelfs 'n man kan 't wel leren met 'n beetje goede wil. Maar o wee, als hij de draad laat glippen en er een warboel van maakt, dan moet er per slot van rekening misschien wel de schaar aan te pas komen! Of, zonder beeldspraak gezegd: wacht met de invoering der *symboliese schrijfwijze* der dubbelgetallen, tot uw leerlingen de *algorithmus* goed onder de knie hebben, en minstens genomen de „merkwaardige dubbelprodukten” (die eigenlijk ook wel dubbel merkwaardig mochten heten!) even vlot kunnen bewijzen en toe-passen als de „echte” merkwaardige produkten, en ik verzeker u, dat ze dan wel uit zichzelf het kenwoord „dubbel-” gaan weg-

¹⁾ M. a. w. als we overgaan van de „expliciete dubbelgetallen” naar de „impliciete dubbelgetallen”, gelijk ik het in mijn signifies artikel in de 7de jaargang van dit tijdschrift (afzonderlijk verschenen onder de titel „Woord en gedachte”) genoemd heb.

laten zonder daardoor in enige begripsverwarring te vervallen. En dān, maar ook eerst dān, is de tijd gekomen, hun voor-te stellen, dit nu maar voorgoed te doen, en af te spreken, de dubbelgetallen. mēt de enkelgetallen samen voortaan eenvoudig als „getallen” (in ruimere zin) aan te duiden, en ze eveneens met één letterteken (voorlopig nog van afwijkende vorm, waarvoor ik voor mij liefst het griekse alfabet bezigde) te schrijven.

Dat zulks het grote voordeel oplevert, dat nu *ieder* dubbel-

in de beide „dubbeleenheden”

1	0
---	---

 en

0	1
---	---

 kan

worden uitgedrukt (die dan *beide* door symbolen dienen te worden voorgesteld.¹⁾ en b.v. als ι_1 en ι_2 kunnen worden geschreven) is dan een gevolgtrekking, die zō voor de hand ligt, dat een kleine vingerwijzing van de docent meestal wel voldoende is, om de klasse „zelf” te laten „ontdekken”, dat we voor *iedere* a kunnen schrijven $m\iota_1 + n\iota_2$.

En wat ten slotte het vereenzelvigen van de „dubbeleenhed” ι_1 met de gewone eenheid betreft, ik geef toe, dat een nauwkeurig en werkelijk algemeen bewijs, dat deze (opzettelijke) slordigheid nimmer tot foutieve gevolgtrekkingen kan leiden, voor de schooljeugd veel en veel te moeilijk zou zijn (ik zie in ieder geval geen kans, het zonder e-reeks klaar te spelen), maar dat is ook volstrekt niet nodig. Voldoende is het, die stelling te bewijzen voor het enige biezondere geval, dat voor de middelbare school prakties in aanmerking komt, nl. voor de **vierkantsvergelijkingen met enkeltallige koëfficiënten**.

Aannemende dat de leerlingen (die intussen 'n jaartje ouder geworden zijn), reeds *eerst* met de vierkantsvergelijkingen in enkelgetallen (te onderscheiden in „valse” en „niet-valse” vergelijkingen) hebben kennis gemaakt en x uit $x^2 + px + q = 0$ kunnen oplossen *indien de diskriminant D niet negatief is*, dan zal het hun zeker niet moeilijk vallen, nu ook de „dubbelvergelijking” $\xi^2 + p\xi + q = \omega$ (waarin p en q enkelgetallen zijn, en ω de „dubbelnul” voorstelt) op te lossen en tot het resultaat te komen, dat de (beide) uitkomsten bij niet-negatieve D volkomen dezelfde vorm hebben als bij de overeenkomstige enkelvergelijking, en dus

¹⁾ Zoals b.v. ook in het uitnemende hoofdstuk over *Complexe getallen* in Wijdenes' Middelalgebra geschiedt.

het onderscheid tussen de „dubbelalgebra” en de „enkelalgebra” enkel hierin bestaat, dat in de eerste de lastige slag-om-den-arm $D \geq 0$ onnodig is geworden. Daarbij spreekt het, hoop ik, wel vanzelf, dat het niet mijn bedoeling is, dit alles in abstrakte bewoordingen aan de leerlingen te *doceren*, maar wel, het hen aan de hand van geschikt gekozen voorbeelden van opklimmende moeilijkheid te doen *ervaren*. En ik herhaal, bijzondere moeilijkheden levert dit alles voor niet al te jeugdige leerlingen geenszins op, en als 't een beetje meeloopt, kan men in een goede hoogste klas zelfs zonder bezwaar nog één stapje verder gaan dan gemeenlijk geschiedt, en de leerlingen er toe brengen in te zien, dat uit *ieder* dubbelgetal de (dubbel-)vierkantswortel kan worden getrokken. Daartoe toch is niet anders vereist dan het omzetten van de dubbelvergelijking $\xi^2 = a$, of anders geschreven:

$$(x\iota_1 + y\iota_2)^2 = a\iota_1 + b\iota_2$$

in de beide enkelvergelijkingen $x^2 - y^2 = a$ en $2xy = b$, die door één korte becijfering *binnen het gebied der enkelalgebra* zijn op te lossen. En zijn wij eenmaal zo ver, dan behoeft ook de geheel algemene vierkantsvergelijking der dubbelalgebra $\xi^2 + \beta\xi + \gamma = \omega$ geen geheimen meer voor hen te hebben.

Maar laat ik mijn doel niet voorbijstreven: ik ben al ruimschoots tevreden, als ik er in geslaagd ben, de lezer er van te overtuigen, dat de leerwijze der komplexe getallen, om tot de gebruikelijke benaming terug te keren, zeer wel onderwezen kan worden, zonder tot dwaasheden als „de vierkantswortel uit minus één” te vervallen. Minus één heeft geen vierkantswortel, noch in de enkel-, noch in de dubbelalgebra. Wat Gauss door i voorstelde en ik zoëven door ι_2 heb aangeduid, is geen „getal” in de *oorspronkelijke, d.i. in de fysiese betekenis van het woord*, en i^2 is niet

gelijk aan -1 , maar aan het *komplexe* getal

-1	0
----	---

, wat

principieel heel iets anders is. Dat dit principieële onderscheid geen rol meer speelt en daarom verwaarloosd mag worden, zodra in de eindvergelijking de „rechteleenheid” ι_2 niet meer optreedt, is een stelling die voor eerste- en tweedegraadsvergelijkingen niet moeilijk te bewijzen is, maar die dan dat bewijs ook *behoeft*, en niet, gelijk maar al te veel geschiedt, *onvermeld* mag blijven. Wat wel onvermeld kan blijven, en m.i. ook maar liever in 't geheel

aan de leerlingen „verklapt” dient te worden (of het zou in de laatste les vóór het eindexamen moeten zijn!) is de nog steeds gebruikelijke normenklatuur: „reëel” en „imaginair”. Wil men, gelijk wel eens wenselijk is, de dubbelgetallen m_1 en n_2 afzonderlijke namen geven, dan vind ik van mij de termen „zuiver linkszijdig” en „zuiver rechtszijdig” wel prakties, maar *deze* mening geef ik natuurlijk gaarne voor beter, als maar de „zuiver linkszijdige dubbelgetallen” (of hoe men ze anders gelieve te noemen) van de „gewone” of enkelgetallen onderscheiden worden: domino-stenen zijn toch geen huisnummers!

Rest nog de vraag: zijn er ook *positieve* argumenten voor het behoud van de komplexe getallen als leerstof van de hogere klassen der middelbare school aan te voeren? Want, ik geef het grif toe, in het bovenstaande heb ik enkel het *negatieve* argument, dat een rationale behandeling van dat hoofdstuk het gemiddelde bevattingvermogen der betreffende scholieren niet te boven gaat, ter sprake gebracht. Omtrent *deze* vraag meen ik om twee redenen kort te mogen zijn: de eerste en voornaamste is wel deze, dat een vruchtbare discussie over dit punt mij onmogelijk toeschijnt, zolang het negatieve argument niet algemeen is aanvaard, wat mij voorschijnt tot mijn spijt weinig waarschijnlijk voorkomt, en de tweede, meer subjektieve, dat de vraag mij, ronduit gesproken, niet zo bijzonder sterk interesseert.

Zeker, ik zou het jammer vinden, als dit onderwerp van het leerprogramma verdween, omdat het zo bij uitstek geschikt is, de geleidelijke ontwikkeling van de „alledagstaal” der leerlingen in de richting van de wiskundige symboliek, en daardoor die van hun „alledagsdenken” in de richting van de wiskundige denkvorm te bevorderen, maar die tweeërlei ontwikkeling is anderzijds toch ook weer niet aan een bepaald hoofdstuk gebonden, maar hangt vrij wel uitsluitend af van de taal- en denkvorm van de docent, zodat ik de „i” uit dat oogpunt niet als volstrekt onmisbaar kan beschouwen. En uit het meer opportunistiese gezichtspunt van de voor het universitair onderwijs vereiste vóórkennis, kan ik die onmisbaarheid al evenmin onomstotelijk bewijzen. Zeker, ’t zou wat lastig zijn, als de „eerstejaars” nog nooit van $a + bi$ gehoord hadden, maar dat euvel ware toch in enkele weken te verhelpen, en weegt in ieder geval in de verste verte niet op tegen het zeer „reëele”

euvel, waaraan de meeste hunner nu nog mank gaan: ten deze wèl de klok te hebben horen luiden, maar niet te weten, waar de klepel hangt.

En of die eerstejaars al of niet de afbeelding der Gaussiese dubbelgetallen op het komplexe vlak of op de bol kennen, en of zij al eens gehoord hebben van meerdimensionale komplexe getallen of van kongruenties moduli $(1 + i^2)$, dat alles schijnt mij, voor de belangen van het universitair wiskundeonderwijs, eerst recht onverschillig. Vraagt men mij dan ook een bepaalde konklusie in het dilemma, dan kan ik met een gerust mathematies geweten geen andere bepleiten dan deze:

liever géén i dan een „onbestaanbare”!

Amsterdam, 26-12-'33.

G. M.

DE ENQUETE OVER i

DOOR

J. H. SCHOGT.

Naar aanleiding van het artikel over i , waarin werd voorgesteld, de behandeling der complexe getallen uit de schoolwiskunde te verwijderen, eventueel te verschuiven naar de hoogste klasse, heeft de redactie eenige bewijzen van instemming en ook eenige bestrijding ontvangen.

Voor het voorstel verklaarden zich de heeren Prof. Baas Becking, Beeger, Beth, Brandsen, Prof. Bremekamp, Buzeman, Ir. C. A. W. van der Corput, Prof. J. G. van der Corput, Dijksterhuis, Gerrits, Giesen, De Groot en De Jong, Haak, Hoekstra, Kettner, Prof. Koksmma, Loevendie, Prof. Mannoury, Prof. Muller, Nieuwkamp, Prof. Van Os, Prins, Sakkers, Schogt, Prof. Schuh, Thijssen, De Vaere, Verrijp,¹⁾ Prof. Hk. de Vries, Prof. Van der Woude.

Tegen het voorstel verklaarden zich mej. Ruiters en de heeren Van Arkel, Prof. Barrau, Belinfante en Euwe, Burgers c.s., Van Dantzig, Van Geuns, Haalmeijer, Kroon, Lahaye, Rozenberg, Prof. Schaake, Spijkerboer, Van Velthoven en Koster, Prof. Weitzenböck.

De voorstanders waren niet allen even geestdriftig, enkelen uitten eenige bedenkingen, anderen echter dikten de bezwaren nog wat aan! Daartegenover staat, dat lang niet allen, wier namen onder de tegenstemmers afgedrukt zijn, afwijzend tegenover het

¹⁾ Dr. Verrijp zond mij nog het „Verslag der discussies gehouden in de vergaderingen der Wiskunde-Commissie van de groep Li.W.e.N.a.G.e.L. over het minimum-programma voor het onderwijs in de Wiskunde aan de Gymnasia”, overgedrukt uit het „Weekblad” van 16 April 1924 (de zaak is blijkbaar lang aan de orde. *Red.*); daarin staat te lezen onder het programma *Algebra A*: „De Commissie meende de *imaginaire* en *complexe getallen* niet te moeten opnemen. Men zal dus van een vierkantsvergelijking in bepaalde gevallen zeggen, dat ze geen wortels heeft.”

voorstel stonden: eenigen bepaalden zich tot de mededeeling, dat zij zich met *algeheele* afschaffing van de behandeling der complexe getallen niet konden vereenigen.

Onder de antwoorden komen mondelinge mededeelingen en zeer korte schriftelijke voor, maar ook betrekkelijk lange beschouwingen. Gemiddeld zijn de antwoorden der tegenstanders uitvoeriger dan die der voorstanders, hetgeen begrijpelijk is, daar de eersten zich kunnen bepalen tot het betuigen van instemming met strekking en argumenten, terwijl de laatsten hun afwijkende meening wenschen toe te lichten.

Een der voorstanders wil aan de argumenten voor het voorstel nog toevoegen „de contradicties, die de meest intelligente leerlingen, op hun standpunt volkomen terecht, met i te voorschijn tooveren”, en geeft als voorbeeld:

$$\frac{1}{i} = \frac{1}{\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = \sqrt{-1} = i, \text{ dus } i^2 = 1.$$

Hij acht het haast ondoenlijk, een leerling te vertellen, waar de fout zit, althans in de lagere klassen.

De argumenten der tegenstanders vindt men in hoofdzaak vereenigd in onderstaande opstellen.

AFSCHAFFING VAN COMPLEXE GETALLEN OP DE MIDDELBARE SCHOOL?

Die imaginären Zahlen sind eine feine und
wunderbare Zuflucht des göttlichen
Geistes¹⁾ Leibniz.

I. In zijn artikel met den veelzeggenden titel „ i ” bepleit de heer P. Wijdenes bevestigende beantwoording van de bovengestelde vraag en wel in hoofdzaak om twee redenen. De eerste is dat de complexe getallen in geen ander schoolvak optreden; het tweede en voornaamste argument ligt in het „zinlooze” van de

¹⁾ Misschien een onnoozele vraag van de redactie over dit citaat: „Ook voor kinderen van 13 à 14 jaar, op de *feine und wunderbare* manier behandeld als op blz. 2—7 geschetst; om over het „*göttliche*” maar te zwijgen; voor kinderen, die amper aan de stelling van Pythagoras hebben begrepen en veel werk hebben met 2 vergelijkingen van de 1e graad met 2 onbekenden. Ieder van ons is het voor de volle 100 % met Leibniz eens, maar Leibniz zal het wel niet bedoeld hebben voor jongens in de korte broek.

theorie, zooals die in verschillende leerboeken wordt gegeven. In verband met dit laatste wordt als alternatief van de algeheele afschaffing voorgesteld een behoorlijke behandeling in de vijfde (zesde) klas.

1. Aan het eerste argument op zichzelf kan men natuurlijk slechts geringe waarde toekennen. Immers van tallooze onderwerpen is vast te stellen, dat ze bij andere onderdeelen niet of nauwelijks te pas komen, zonder dat hierin aanleiding gevonden wordt ze als „vooze plekken” uit de schoolwiskunde te verwijderen. Om eenige voor de hand liggende voorbeelden te noemen, zij gewezen op het aantal diagonalen van een veelhoek, op wortelgrootheden met exponenten grooter dan 3, op de constructie van de gemeenschappelijke raaklijnen van twee cirkels, op logarithmen met een ander grondtal dan tien of op de berekening van zulke logarithmen met behulp van de gewone, op de asymptoten bij grafische voorstellingen, enz. De complexe getallen daarentegen vinden een elegante toepassing bij het theorema van De Moivre, dat in verschillende leerboeken voorkomt. Bovendien is het argument onjuist, voor zoover het de B-afdeeling van het gymnasium betreft. In de „Beginselen der analytische meetkunde” van Dr. D. J. E. Schrek wordt wel degelijk de toepassing op de snijpunten van rechte lijn en cirkel en van twee cirkels gemaakt. (l.c. bldz. 49, 57).

Dat de complexe getallen, afgezien van de goniometrische toepassing onnoodig zijn, is alleen waar voor bepaalde inrichtingen van onderwijs en ook daar slechts, als men zich vergenoegt met een moderne theorie der vierkantsvergelijkingen, die reeds ten tijde van Descartes verouderd geweest zou zijn.

2. Van meer gewicht is de tweede reden, welke de schrijver aanvoert. In het artikel „i” haalt hij acht plaatsen uit verschillende algebraleerboeken aan ter staving van de bewering, dat de theorie zinloos is, niet slechts voor kinderen, maar ook voor anderen, zoodat „de heel enkele, die doorgaat in wiskunde, goed doet met vooral niet zijn schoolboek op te slaan.”

Deze bewering nu moet nadrukkelijk als *onjuist* afgewezen worden. De geciteerde theorie is *niet* zinloos, de opvattingen der verschillende leerboeken zijn niet ondeugdelijk, maar zoodanig als verwacht mag worden, wanneer een wetenschappelijk standpunt voor leerlingen benaderd wordt. En wie zich tot de leer der com-

plexe grootheden wil. begeben, zonder van het door zoodanige elementaire theorie behandelde kennis te nemen, doet eenigszins denken aan het van een abstract standpunt niet onmogelijke geval van iemand, die de verzamelingsleer gaat beoefenen, zonder het gewone rekenen geleerd te hebben. In de aangehaalde voorbeelden is geen reden te vinden, waarom nu juist de invoering der complexe getallen eerder zinloos zou moeten heeten, dan de wijze, waarop bijvoorbeeld de negatieve getallen of de grondbegrippen van de vlakke meetkunde geïntroduceerd worden. Hetgeen niet volmaakt kan zijn, moet daarom alleen toch niet zinloos verklaard worden. Klachten van leerlingen over het moeilijke of onbegrijpelijke van deze kwestie zijn nimmer tot de ondergeteekenden doorgedrongen, hoewel zulks voor andere onderdeelen wel het geval was. Aan de afschaffing van de complexe getallen is maar weinig tijdswinst verbonden, daar de kwestie gewoonlijk in drie, vier lessen afgedaan wordt. Tegenover deze geringe tijdbesparing biedt het handhaven van de complexe getallen een welkome herhaling van de wortelherleidingen. Voor den aanstaanden student, die later vectorrekening zal beoefenen — men denke hierbij behalve aan dengene die „in wiskunde doorgaat” ook aan de toekomstige ingenieurs en physici — is het nuttig om met de complexe getallen vertrouwd te zijn vóór de studie begint, zoodat de beheersching der techniek niet uitgesteld wordt tot het tijdstip, waarop hij met de voorstelling van Gauss kennis maakt.

Om al deze redenen is het ongewenscht dat de complexe getallen geschrapt worden van het programma van die inrichtingen van onderwijs, welke het jus promovendi hebben.

M. J. Belinfante.

M. Euwe.

II. Nadat bovenstaand artikel geschreven was, gaf een voorloopig onderzoek naar de practische gevolgen van de afschaffing van „i” het volgende resultaat:

- a. Sommige eenvoudige vraagstukken worden gecompliceerder.
- b. Van de bestaande vraagstukken- en eindexamenopgavenverzamelingen zullen de meeste, zoo niet alle onbruikbaar

worden, daar zij vraagstukken bevatten,¹⁾ die òf geen zin meer hebben, òf tot groote complicatie aanleiding geven òf in een ontkenning zonder meer hunne beantwoording vinden.

Enkele voorbeelden ter illustratie.

a. Vraagstuk I. Voor welke waarden van m is het product van de wortels van de vergelijking $x^2 + mx + m^2 + m - 2 = 0$ positief? De vroegere oplossing $m > 1$ of $m < -2$, die uit de voorwaarde $m^2 + m - 2 > 0$ volgt, moet vervangen worden

door
$$\left. \begin{array}{l} 1 < m \leq \frac{2\sqrt{7}-2}{3} \\ \text{en } \frac{-2-2\sqrt{7}}{3} \leq m < -2 \end{array} \right\} \text{, hetgeen men afleidt uit de reeds}$$

genoemde voorwaarde met de bijconditie $m^2 - 4(m^2 + m - 2) \geq 0$.

Vraagstuk II. Bepaal de waarde(n) van a , waarvoor de som van de vierkanten van de wortels van de vergelijking $x^2 + ax + a + 1 = 0$ zoo klein mogelijk is.

Hier wordt aan de vraag naar de minimumwaarde van $a^2 - 2a - 2$ (die tot het antwoord $a = 1$ zou leiden) de bijconditie $a^2 - 4a - 4 \geq 0$ toegevoegd, zoodat het antwoord $a = -2\sqrt{2} + 2$ luiden moet.

b. Vraagstuk III. Eindexamen H.B.S. 1926. Van de vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ vormen de positieve getallen a , b en c in de genoemde volgorde een meetkundig reeks. O.a. wordt gevraagd te bewijzen, dat de derde machten van de wortels gelijk zijn. Daar de vergelijking echter geen wortels heeft, is de vraag zinloos.

Vraagstuk IV. Eindexamen Gymnasium 1932. Voor welke reële waarde van a heeft het product van de wortels van de vergelijking $(6a^2 + a - 1)x^2 - (3a + 7)x + (a^2 - a - 2) = 0$ een uiterste waarde? De voorwaarde, dat de vergelijking wortels heeft, leidt tot een in de lagere wiskunde onoplosbaar probleem. Ook in de hoogere wiskunde is de oplossing, die tot het ontbinden van een vierdegraadsvorm aanleiding geeft verre van eenvoudig.

Vraagstuk V. Staatsexamen 1917. De vergelijking $2x^2 - 6x + 5 = 0$

¹⁾ Zoowel de directe vraagst. over vierkantsverg., als die welke tot een vierkantsverg. aanleiding geven (in het bijzonder vraagst. over grafische voorstelling).

heeft tot wortels x_1 en x_2 . Vorm zonder de oorspronkelijke vergelijking op te lossen een vergelijking, die tot wortels heeft:

$$3x_1 - \frac{2x_1}{x_2} \text{ en } 3x_2 - \frac{2x_2}{x_1}.$$

Daar de gegeven vergelijking geen wortels heeft, is de opgave zinloos.

Dat het aantal dergelijke voorbeelden desverlangd vermeerderd kan worden, is aan geen twijfel onderhevig.¹⁾

M. J. Belinfante.

M. E u w e.

III. Met groote verwondering lazen wij het naschrift van bovengenoemd artikel in Euclides (10e jaargang Nr. 1).

We protesteerden tegen de wijze, waarop hier een quaestie reeds voor 90 % als afgehandeld wordt beschouwd, geheel buiten het docentencorps om.

Wat het artikel zelf betreft, hierover het volgende:

De argumenten van den heer Wijdenes zijn, afgezien van het complex gevoelsargumenten, recensies over eigen werk en andere aanvechtbare uitlatingen, terug te brengen tot:

1. De vlakke meetkunde, stereometrie, driehoeksmeting en beschrijvende meetkunde kennen geen imaginair (blz. 1).
2. In de andere schoolvakken zijn de bewerkingen met i volslagen noodeloos (blz. 1 en 10).
3. De theorie is niet streng genoeg te behandelen (blz. 8).
4. De techniek op zich heeft geen waarde (blz. 9).

Hier meenen we te moeten opmerken:

ad 1 en 2. Aan deze argumenten moet alle waarde ontzegd worden.

ad 3. Aanvaardt men dit argument, dan ook de consequentie en dan geldt zeker: voer het hoofdstuk der irrationale getallen af van het program. De theorie der complexe getallen is zeker beter te behandelen dan die der irrationale. Maar dan vervallen er nog meer hoofdstukken.

¹⁾ Het aantal der door de inzenders gegeven voorbeelden, 8, is door de redactie verminderd tot 5.

ad 4. Ook aan de techniek kan niet alle vormende waarde ontzegt worden.

Ondergeteekenden meenen dan ook te moeten verklaren, dat zij in de bovengenoemde argumenten geen grond vinden om met het voorstel van den Heer Wijdenes accoord te gaan.

Zeker is, dat in de laatste tijd getracht wordt met „schijngeleerdheid en dikdoenerij” hoofdstukken uit de Hoogere Wiskunde in de schoolwiskunde in te voeren, waarvoor men alleen kan hopen „dat de heel enkele, die doorgaat in wiskunde, goed doet vooral niet die schoolboeken op te slaan.”

W. Burgers.

Patrice Cramer.

Guill. Knops.

C. F. Bijlsma.

H. J. Schutgens.

G. Roos.

L. Crijns.

Een ander tegenstander acht het een bezwaar, dat de z.g. eigenschappen der wortels in het reële gebied niet algemeen gelden (in dien zin, dat men niet meer kan zeggen, dat $b : a$ steeds de som der wortels van de vierkantsvergelijking

$$ax^2 + bx + c = 0$$

voorstelt), en eindigt met de vraag: en wanneer in de 4e of 5e klasse de complexe getallen toch behandeld worden, waarom ze dan niet ingevoerd daar, waar daartoe het eerst aanleiding aanwezig is?

Bij de beantwoording van de ingebrachte bezwaren kan gevoeglijk met de laatste vraag worden begonnen; wij willen ons daarbij voorloopig op het standpunt stellen, dat voor een behandeling in de hogere klassen de tijd niet ontbreekt. Wij moeten dan opmerken, dat de school-algebra van de 3e en de 4e klasse onderwerpen bevat, die verreweg het best in het complexe gebied kunnen worden behandeld, b.v. de binomiale vergelijkingen, daarnaast onderwerpen, die typisch zijn voor het reële gebied, zooals extremen van quadratische functies, logaritmen, enz., en ten slotte quaesties, die zoowel in het reële als in het complexe gebied kunnen worden behandeld, zooals de vierkantsvergelijking en de ontbinding van

quadratische vormen. Nu ligt het toch zeer voor de hand, eerst die onderwerpen te behandelen, die in het reële gebied moeten of kunnen worden gehouden, en daarna tot de invoering van de complexe getallen over te gaan, precies op dezelfde manier, als men eerst de onderwerpen heeft afgehandeld, die in het rationale gebied thuis behooren. Dat men dit vroeger niet gedaan heeft, moet waarschijnlijk hieraan worden toegeschreven, dat men de logaritmen als een afzonderlijke tak der algebra behandelde, en de typisch reële onderwerpen uit de leer der quadratische functie (extremen, graphische voorstelling) niet behandelde. Thans is de toestand zoo, dat de hoofdstukken der leerboeken en vraagstukkenverzamelingen afwisselend den leerling in het complexe gebied voeren en hem in het reële terugleiden, waardoor een verwarring ontstaat, die erger is dan de nadeelen, verbonden aan een beperking van de leer der quadratische functies tot het reële gebied.

De verruiming van het getalbegrip tot de complexe getallen is eenerzijds bijzonder eenvoudig, maar aan den anderen kant veel te moeilijk voor het middelbaar onderwijs. Hiermede bedoel ik het volgende. Vergelijkt men de theorie der complexe getallen, de definitie der bewerkingen in het complexe gebied, en de bewijzen van de voornaamste eigenschappen dier bewerkingen, zooals dat behandeld is in deel IV van de Nieuwe School-Algebra, met overeenkomstige onderwerpen bij de invoering van breuken en van irrationale getallen, dan ziet men, dat de theorie van het complexe getal zeer eenvoudig is, zoo eenvoudig, dat zij zonder bezwaar in de vierde of vijfde klasse kan worden behandeld en begrepen. Daar staat echter tegenover, dat men van complexe exponenten en logaritmen zelfs niet de globaalste en oppervlakkigste behandeling kan geven, terwijl men met irrationale exponenten en logaritmen nog wel kan werken, hoe geweldig moeilijk de theorie van het reële getal ook is. In tegenstelling met de heeren Belinfante en Euwe acht ik de voorloopige, elementaire theorie, volstrekt onnoodig. Maar tevens schadelijk; het is mij ten minste volmaakt onbegrijpelijk, hoe een dergelijke behandeling, die ruimte laat voor onzinnige resultaten als het voorbeeld op bldz. 134, anders dan verwarrend en vertroebelend kan werken. Een aanschouwelijke voorstelling van de complexe getallen ontbreekt; onder die omstandigheden een behandeling, waarbij er maar op los gerekend wordt, als „benadering van een wetenschappelijk standpunt” te betitelen,

lijkt mij op zijn zachtst uitgedrukt geflatteerd. Dat er geen klachten van leerlingen worden vernomen over het moeilijke of onbegrijpelijke van deze quastie, is alleen te verklaren, doordat de leerlingen geen pogingen tot begrijpen doen, maar de verstrekte rekenvoorschriften zonder critiek aanvaarden en toepassen (hetgeen men hun natuurlijk niet verwijten mag).

- Dat de theorie van de vierkantsvergelijking in het reële getallen-gebied reeds ten tijde van Descartes verouderd was, is mogelijk juist, maar is geen argument. Niet wat ten tijde van Descartes, maar wat *thans* verouderd is, dient te worden afgekeurd, en thans behoort als ouderwetsch in den slechten zin te worden aangemerkt iedere behandeling, waarbij verzuimd wordt, den nadruk te leggen op het getallengebied, waarin wordt gerekend. Een afdoend bewijs voor de mogelijkheid eener behandeling van quadratische functies en vergelijkingen in het reële gebied wordt geleverd door het op zoo hoog peil staande algebra-onderwijs in Frankrijk, waar, zooals bekend is, eerst in de classe de mathématiques spéciales, een vervolg op het eigenlijke middelbaar onderwijs, de complexe getallen worden besproken.¹⁾

¹⁾ Dr. Paul de Vaere, leeraar aan het Koninklijk Atheneum te Schaarbeek schreef ons:

Zonder de verdenking op mij te willen laden mij met Hollandsche onderwijstoestanden in te laten, zou ik mij toch graag volkomen accoord willen verklaren met den heer *Wijdenes* waar hij opkomt voor volledige uitschakeling van imaginairen bij een eerste behandeling van wortelvormen. Niemand denkt er ook aan bij een eerste kennismaking met aftrekking en deeling dadelijk negatieve en gebroken getallen in te voeren.

Misschien mag ik ook op den stand van het vraagstuk in België wijzen. Ons leerplan zegt uitdrukkelijk: *in de derde klas* (dus de vierde van beneden af) *van de wetenschappelijke afdeling* (H.B.S., B afdeling) *zal de leeraar niet over imaginairen spreken; is de discriminant van een drieterm negatief, dan zal hij zeggen, dat de drieterm geen nulpunten heeft.* — In het volgend jaar echter, waarvan het leerplan vrij ver gaat, worden de complexe getallen met de noodige zorg behandeld. (Dus in de klas, die bij ons met de 5e klas H.B.S. of Gymnasium overeenkomt; *red.*). In Frankrijk, „classe de première” (dus de laatste voor leerlingen, die niet de wetenschappelijke kant uitgaan): *on ne parlera pas des imaginaires*. En hetzelfde in de daaropvolgende „classe de mathématiques”, waarvan het programma nochtans de beginselen van de differentiaal- en integraalrekening behelst.

Ten slotte mag men wel even wijzen op het gevaar, dat aan een slordige behandeling van imaginaire wortels verbonden is. Maakt men er zich af met zinsneden zooals „Men komt overeen op de imaginaire

Dat verschillende vraagstukken bij behandeling in het reële gebied gecompliceerder worden, dan bij behandeling in het complexe, en dat er vraagstukken zijn, die uitsluitend in het complexe gebied eenige beteekenis hebben, is ongetwijfeld juist. Het ligt dan voor de hand, zulke vraagstukken voor de hogere klassen te bewaren; hun bestaan vormt geen bezwaar tegen het voorstel. Men kan toch niet in ernst meenen, dat het maken van vraagstukken uit een of ander eindexamenboek het doel van het wiskunde-onderwijs is, waarnaar dat onderwijs zich moet richten. Wat de eigenschappen der wortels eener vierkantsvergelijking betreft, het is niet moeilijk, die zoodanig te formuleeren, dat zij ook in het reële gebied gelden.

Ten slotte de quaestie van de algeheele afschaffing. Het is ongetwijfeld juist, dat een grondige behandeling van de complexe getallen, gesteund door de meetkundige voorstelling, verhelderend werken kan, vooral als men gelegenheid heeft, de punten van verschillen en van overeenkomst met de vectoralgebra der mechanica in het licht te stellen. Ook kan men wel eenige leerzame en interessante toepassingen op het gebied der zuivere wiskunde maken. Of echter de „elementaire” behandeling eenig voordeel biedt als inleiding tot vectorrekening, waag ik te betwijfelen. Is er tijd voor grondige behandeling, des te beter. Daartegenover dient men echter niet te vergeten, dat de stekunde in het reële gebied een afgesloten geheel vormt, dat wel voor aanvulling vatbaar is, maar geen hinderlijke leemten vertoont. Moet er iets opgeofferd worden, dan is het beter, dit afgesloten geheel intact te laten, dan het te verminken ten bate van de algebra der complexe getallen, die wegens de onmogelijkheid eene behandeling van exponenten en logaritmen toch altijd onvolledig blijven moet.

wortels dezelfde regels toe te passen als op de reële wortels” dan komt men tot wanstaltigheden als

$$\begin{aligned}\sqrt{-8} \cdot \sqrt{-2} &= \sqrt{(-8) \cdot (-2)} = \sqrt{16} = 4 \\ \sqrt{-4} &= \sqrt[4]{(-4)^2} = \sqrt[4]{16} = 2\end{aligned}$$

en dergelijke meer.

Hier ook geldt de leus: liever *geen* behandeling dan een slordige!

NASCHRIFT VAN P. WIJDENES.

De Heer Schogt verdient m. i. de dank van allen, zoowel van voorstanders als tegenstanders, om de manier, waarop hij eenige antwoorden heeft weergegeven en besproken; het was niet doenlijk alle te behandelen en ook waren ze niet voor publicatie bestemd; de eenige, die het uitdrukkelijk verzocht, was de heer Crijns, een der onderteekenaars van de brief van blz. 138. Zoowel voorstanders als het overgrootste deel van de tegenstanders zullen mee kunnen gaan, als niet langer de complexen worden vastgehecht aan de wortelvormen (waardoor het verkeerde idee zich vastzet, dat het bijzondere wortelvormen zijn), maar later als zelfstandige uitbreiding van het getalbegrip een beurt krijgen. Een eenigszins dragelijke, maar vooral toch eenvoudige behandeling, twee jaar later, als de klassen al weer tweemaal gezeefd zijn, zal een verbetering blijken te zijn.

DE AUTONOMIE DER WISKUNDE

DOOR

Dr. P. G. J. VREDENDUIN.¹⁾

Wanneer we ons de vraag stellen, wat wiskunde is, dan moet voor het antwoord een keus worden gedaan tusschen de verschillende gezichtspunten, van waaruit we deze vraag willen beantwoorden. We kunnen het probleem wiskunde in verschillende richtingen objectiveren. Zoo kunnen we b.v. vragen:

1e. naar de *psychologische* beteekenis der wiskunde, dus naar de psychologische processen, welke meewerken tot het tot stand komen van een door een individu gedacht mathematisch oordeel en de psychologische gevolgen, die het denken en eventueel neerschrijven of uitspreken van dit oordeel heeft; we betreden dan het terrein der signifika,

2e. naar de *noölogische* beteekenis der wiskunde, dus naar het nut, dat wiskunde heeft voor de mensch; een vraag, waarmee o.a. Brouwer zich bezig houdt,

3e. naar de *natuurwetenschappelijke* beteekenis der wiskunde, dus naar de rol, welke wiskunde speelt in de natuurwetenschappen, in het bijzonder in de fysika.

Het antwoord op deze vragen geeft resp. de psychologie der wiskunde, de noölogie der wiskunde en de natuurwetenschap.

Er is echter nog een geheel andere vraagstelling, die wezenlijk van de voorgaande verschilt, nl.: wat is mathematische geldigheid, wanneer geldt een mathematisch oordeel?

We beantwoorden deze vraag door te onderzoeken, wat de structuur is der mathematische wetenschap, dus wat uitgangspunt en methode der mathesis zijn, en kunnen dan bepalen, wanneer een oordeel zoodanig in de mathematische structuur past, zoodanig

¹⁾ Openbare les, gehouden 27 nov. 1933 te Utrecht.

in de mathesis funktioneert, dat we hem het predikaat mathematisch geldig toekennen.

Deze beantwoordingswijze wordt *kritische methode* genoemd, ook wel epistemologische methode of methode der wetenschapsleer. De term kritisch is gekozen, omdat een historische voortzetting van Cohen, Natorp, Görland aanwijsbaar is; hij duidt geenszins echter op een meningsidentifikatie met deze auteurs.

Genoemde 4 problemen zijn allen wezensverschillend en moeten bij de beantwoording dan ook scherp gescheiden gehouden worden. We beperken ons tot het laatste probleem.

Het eenvoudigst zou dan zijn ons direkt aan de wiskunde te oriënteeren, dus vanuit de wiskunde, zooals die zich gekonstitueerd heeft, een criterium te vinden voor mathematische geldigheid. Deze weg wordt al spoedig afgesneden, daar de inwendige methodenstrijd tusschen formalisme en intuitionisme een eenduidige oplossing onmogelijk maakt. Om deze te verkrijgen moeten we het mathematisch terrein verlaten en vragen, wat geldigheid in het algemeen is, om daarna het gevonden resultaat toe te passen op de wiskunde. De wetenschap, welke dit onderzoek verricht, heet sinds Görland *prologika*. Deze prologika ontleent zijn materiaal aan de wetenschappen, leidt daaruit af, wat geldigheid is, en stelt dan het verkregen resultaat als een systeem van wetten, waaraan wetenschap moet gehoorzamen, teneinde met recht op geldigheid aanspraak te maken. Er is dus een wisselwerking, een wederzijds elkaar bepalen, een *korrelativiteit* tusschen prologika en wetenschap. Prologika en wetenschap moeten steeds overeenstemmen in die zin, dat verschilpunten opgelost worden door wijziging hetzij van de prologika, hetzij van de wetenschap. De historie wijst uit, welke partij in het gelijk gesteld wordt. De prologika is dus geen absolute wetgever, doch een zuiveraar der wetenschap. Hij tracht de wetenschappelijke eenheid te verzekeren door deze eenheid in de wetenschap op te sporen en dan aan de wetenschap als richtsnoer ten voorbeeld te stellen.

We kunnen prologika ook als volgt karakteriseeren. De prologika onderzoekt, wat wetenschap is. De vragen wat is wetenschap en wat is wetenschappelijk geldig zijn immers ekwivalent. De prologika onderzoekt dus, welke entiteiten in wetenschap funktioneerden en hoe deze entiteiten funktioneerden. Hij vraagt b.v. wat is een begrip, een relatie, een oordeel, een systeem, hoe verhouden deze

zich onderling, welke functies oefenen ze uit. Verder: hoe kunnen we systemen onderscheiden, in welke relaties staan systemen t.o.v. elkaar. Dit alles wordt aan de wetenschap gedurig geverifieerd en op de wetenschap toegepast. Het resultaat is dan o.a., dat uit de in wetten geformuleerde structuur van wetenschap objectieve geldigheidskriteria af te leiden zijn.

Teneinde te onderzoeken, wat geldigheid is, moeten we uitgaan van een voorloopige, globale formulering van geldigheid. Deze zal zijn: een oordeel is geldig, als het het wetenschapsproces niet doet afbreken, anders ongeldig. Deze oriënterende, dus niet geheel adequate formulering maakt het mogelijk in wetenschap globaal aan te wijzen, waar geldige en ongeldige oordeelen optreden en dan doormiddel van een zich verfijnende begripskonstruktie het begrip geldigheid precies te bepalen. Het blijkt dan, dat het begrip geldigheid uiteenvalt, tengevolge van het in wetenschap optreden van *theorie* en *feiten*. Een oordeel der theorie kan op twee wijzen geldig zijn:

1e. doordat het in overeenstemming is met de feiten; het heeft dan *systematische geldigheid*,

2e. doordat het uitgangspunt is der theorie of daaruit door deductie verkregen is; het heeft dan *theoretische geldigheid*.

We zullen nu deze summiere aanduiding der prologische resultaten trachten toe te passen op de wiskunde. Het blijkt dan, dat in wiskunde de feiten ontbreken. Dit is voor ons de aanleiding om: als criterium voor wiskunde, waardoor we hem van alle andere wetenschappen kunnen onderscheiden, vast te stellen: *definitie: wiskunde = wetenschap zonder feiten. Mathematische geldigheid is dan uitsluitend theoretische geldigheid*. Hij wordt meest verkregen door deductie.

Teruggaand in een mathematisch systeem in een richting tegengesteld aan die der deductie vinden we oordeelen, die op hun beurt niet weer deductief afgeleid zijn: de *axioma's*. Deze vormen het uitgangspunt, het a priori der theorie. *Mathematische geldigheid hebben dus de axioma's en de eruit gededuceerde oordeelen*.

Het is wenschelijk dit resultaat eerst aan een kritiek te onderwerpen. De juistheid ervan, dat mathematische geldigheid, wanneer we van de axioma's afzien, uitsluitend verkregen wordt door deductie, ontleenen we aan de wiskunde zelf. Nergens worden in wiskunde oordeelen, die door deductie verkregen zijn, experimen-

teel getoetst. Blijft over de vraag naar de geldigheidsgrond der axioma's. Nemen we als voorbeeld de euclidische geometrie. Zijn de euclidisch-geometrische axioma's als zoodanig eigenschappen der aanschouwingsruimte, dan hebben ze niet slechts theoretische, doch ook systematische geldigheid. De konsekwentie daarvan is, dat de gededuceerde stellingen eveneens op de aanschouwingsruimte zijn betrokken en daardoor aanspraak maken op systematische geldigheid, m.a.w. principieel aan een experimenteele toetsing te onderwerpen zijn. Levert deze toetsing systematische ongeldigheid op, dan moet axiomastelsel of deductiewijze gewijzigd worden. Deze meening zou hier, waar het de euclidische geometrie betreft, nog te verdedigen zijn; voor een axiomastelsel der niet-archimedische geometrie echter zeer zeker niet. Toch zijn beide meetkunden uit mathematisch oogpunt beschouwd niet methodisch verschillend. We zullen het ontleenen der axioma's der euclidische geometrie aan de aanschouwingsruimte dus beschouwen als een historische aanleiding, niet als een methodische grond. *De aanschouwingsruimte is geen geldigheidsgrond voor de euclidische axioma's*, echter slechts *ontstaansgrond* in historische zin. Geldigheid hebben ze slechts, doordat ze uitgangspunt, a priori zijn eener theorie, welke voorzoover ontwikkeld kontradikteloos is. De niet-archimedische axioma's hebben een mathematische ontstaansgrond, echter dezelfde geldigheidsgrond. Hoewel dus de aanschouwingsruimte als feitelijke zijde der euclidische meetkunde zich een oogenblik aan ons opdringt, moeten we dit verwerpen teneinde de eenheid in de geometrie te handhaven.

Een afrastering van een terrein heeft tengevolge, dat veel wordt buitengesloten. Zoo heeft de definitie wiskunde = wetenschap zonder feiten tengevolge, dat grensgebieden, wier mathematisch karakter nog diskutabel was, worden uitgesloten. Tot deze uitgesloten behoord de *natuurlijke geometrie*, zooals die o.a. door Hjelmslev is opgebouwd. Deze stelt zich ten doel eigenschappen op te sporen van de figuren, zooals die in de aanschouwingsruimte worden aangetroffen. Hierdoor treffen we oordeelen aan als: twee rechten hebben een punt of een segment gemeen, op een rechte kunnen tusschen twee punten niet ad inf. nieuwe punten worden ingelascht enz. Deze oordeelen ontleenen dan hun systematische geldigheid aan de konkrete ruimtelijke figuren, b.v. aan op papier gestelde teekeningen. De natuurlijke geometrie valt blijkbaar

buiten onze definitie van wiskunde en moet dus elders ingedeeld worden.

Analoog verwerpen we de meening, dat de arithmetika uit moet gaan van de „welbekende” natuurlijke getallen, welke meening o.a. door Klein gedeeld wordt. Ook hier is weer het rekenen, zooals we dat uit onze dagelijksche ervaring kennen, geen geldigheidsgrond, doch ontstaansgrond der arithmetika.

Wat is nu het verschil tusschen de verhouding ontstaansgrond-mathematisch systeem en de verhouding feit-theorie? Zooals bekend is de verhouding feit-theorie deze, dat de theorie met de feiten moet overeenstemmen. Bij niet overeenstemming verliest uiteindelijk de theorie zijn systematische geldigheid. Anderzijds moeten ook mathematisch systeem en ontstaansgrond overeenstemmen. Dit wil b.v. in ons arithmetisch geval zeggen, dat de mathematische relaties $+$, $\times$, $>$ en de mathematische natuurlijke getallen $(1,1)$ afbeeldbaar zijn op hun analogon in de ontstaansgrond, zoodanig dat de uitkomst der operaties $+$, $\times$ en de oordeelen betreffende orderelatie meegetransformeerd worden. Hiermee wordt bedoeld, dat als mathematisch $2 + 3 = 5$ en aan $2, 3, 5, +$ zijn toegevoegd $2', 3', 5', +'$ uit de ontstaansgrond, het z.g. dagelijksche leven, dan ook $2' +' 3' = 5'$. Onderstel nu, hieraan is niet voldaan. Dan is daardoor het mathematisch systeem als zoodanig niet onjuist. Het voldoet alleen niet aan de gestelde eischen. Daarvoor hebben we een ander systeem nodig. Een mathematisch systeem, dat niet korrespondeert met zijn ontstaansgrond, is dus voor het gestelde wetenschappelijke doel onbruikbaar. Het blijft echter een deductief systeem uitgaande van axioma's en dus theoretisch, d.i. mathematisch geldig. De ontstaansgrond beslist dus niet over de geldigheid van een mathematisch systeem, zooals de feiten over de geldigheid van een wet. Dit schijnt paradoxaal. Het wordt echter duidelijk, als we bedenken, dat hoewel de ontstaansgrond historisch eerder is, de toepassing van wiskunde op de ontstaansgrond methodisch later is dan die wiskunde. Bij deze toepassing worden de mathematische wetten gebruikt om de wetmatigheden in de ontstaansgrond vast te stellen, waarbij dan de geldigheid dier mathematische wetten voorondersteld wordt. Dat wil echter zeggen, dat deze geldigheid niet meer aan een kritiek wordt onderworpen en dat dus eventueel slechts niettoepasbaarheid kan worden gekonstateerd.

Wanneer de ontstaansgrond van een axiomastelsel van mathematische aard is, zooals b.v. bij Hilbert's pseudo-geometrieën, dan is het gevaar voor verwarring van ontstaans- en geldigheidsgrond gering. Dit gevaar wordt echter grooter, wanneer de ontstaansgrond van niet-mathematische aard is, zooals bij de oudste deelen der wiskunde: de arithmetika en de euklidische geometrie. Vandaar, dat juist hier de beschouwingen over wiskunde, welke de mathematische geldigheid buiten de wiskunde fundeeren, hun aangrijpingspunt vinden.

Van welke aard is nu deze niet-mathematische ontstaansgrond? Van welke aard zijn de aanschouwingsruimte en het dagelijksche rekenproces? De aanschouwingsruimte is de ruimte, waarin de mensch zichzelf en de buitenwereld t.o.v. elkaar in relatie zet en is daardoor een integreerende faktor voor het menschelijk bestaan. En daar dit menschelijk bestaan geobjektiveerd wordt in de *noölogie*, is aanschouwingsruimte een noölogisch groundbegrip. Het rekenproces uit het dagelijksch leven is een menschelijke daad, waarmee de mensch zich bepaalde levensmogelijkheden schept, m.a.w. het valt eveneens onder de noölogie. We hebben nu een plaats gevonden voor onze natuurlijke geometrie: het is een onderdeel der noölogie. Ook onze lagere-schoolrekenkunde hoort hier thuis.

Degene, die mathematische geldigheid wil fundeeren in genoemde noölogische feiten, ontkent daarmee het bestaan der wiskunde als zelfstandige, zijn eigen geldigheid bepalende, d.i. *autonome* wetenschap. Hij maakt wiskunde tot een gebied, welker geldigheden door de noölogie worden bepaald, dus tot een onderdeel der noölogie. Een dergelijke samensmelting eener wetenschap met de noölogie, i.c. van wiskunde met noölogie, noemen we een *noölogisme*.

Ook Kant's ruimteleer kunnen we nu zijn plaats aanwijzen. Ruimte is bij hem Form der äusseren Anschauung. „Vermittelst des äusseren Sinnes stellen wir uns Gegenstände als ausser uns und diese insgesamt im Raume vor." (K. d. r. V., B 37). Kant's ruimte is dus de noölogische ruimte. Hij verklaart zelfs, dat „mathematische Begriffe für sich keine Erkenntnisse (sind); ausser sofern man voraussetzt, dasz es Dinge gibt, die sich nur der Form jener reinen sinnlichen Anschauung gemäsz uns darstellen lassen" (B 147). Daarbij verklaart hij noölogische toepasbaarheid voor

mathematische geldigheidsgrond. De geometrie wordt beperkt tot die deelen, die noölogistisch te regeeren zijn, waarmee het noölogisme in uiterste konsekwentie is doorgevoerd.

We komen dus tot de volgende onderscheiding:

1. de toepassing van wiskunde in noölogie,
 2. de objektivisering der beteekenis van wiskunde voor de mensch: de noölogie der wiskunde,
 3. het noölogisme,
- waarvan alleen 3 te verwerpen is, omdat het wiskunde als zoodanig vernietigt.

Een tweede grensgebied, van waaruit gevaar dreigt, is de *psychologie*. Verward wordt soms de ontstaanswijze van wetenschappelijke oordeelen, dus het psychologische denkproces met de geldigheidsgrond dier oordeelen. Een oordeel wordt dan geldig verklaard op grond van een overtuiging of op grond van algemeen zoo gedacht worden, wat eveneens op overtuiging berust. Is $2 + 3 = 5$, omdat algemeen zoo gedacht wordt? Zijn de elementaire oordeelen over natuurlijke getallen evident, direkt in te zien en dus geldig? Op deze basis zou een oordeel geldig zijn, als het associatief verbonden was met het inzicht in zijn juistheid. Dat dit subjektief geldigheidskriterium ondoelmatig is, blijkt, als men onderwerpen gaat onderzoeken als telepathie, okkult magnetisme, relativiteitstheorie, psycho-analyse. Hoewel de subjektieve waardeering dezer gebieden sterk uiteenloopt, valt een objektieve waardeering gebaseerd op prologika, dus uitsluitend op algemeene eigenschappen van wetenschap, steeds met succes door te voeren.

De begrippen geldigheid en algemeen gedacht worden liggen in geheel verschillende sfeer. Wel is juist, dat ze in statistische zin door een positieve korrelatie zijn verbonden en dat daardoor geldigheid praktisch bruikbaar is. Dit is echter slechts een psychologisch-noölogische beschouwing over geldigheid, welke zijn prologische eigenschappen niet raakt.

Daar we het mathematische uit het algemeen wetenschappelijke geldigheidskriterium wilden afleiden, is overtuiging ook geen mathematische geldigheidskriterium. Wie de mathematische overtuiging onderzoekt, stelt daarmee een psychologisch onderzoek in. Wanneer hij beweert daarmee de grondslag te leggen voor mathematische geldigheid, vernietigt hij de autonomie der wis-

kunde en maakt zich schuldig aan *psychologisme*. Van dit psychologisme moet weer onderscheiden worden de zeer zeker niet te verwerpen psychologie der wiskunde.

Een derde vijand van weer geheel andere aard is de *fysika*. De fysika wil soms de pretentie hebben om, waar de wiskunde steeds in hem toegepast wordt, daaruit te konkludeeren, dat wiskunde uitsluitend zin heeft voor fysische toepassing. De niet-toepasbare deelen der wiskunde zijn dan zinloos. Wiskunde wordt gedegradeerd tot een fysische techniek. De autonome mathematische geldigheid wordt vervangen door een *fysicisme*, immers de fysika beslist over de toelaatbaarheid van mathematische axiomastelsels, d.i. over hun geldigheid.

Dit fysicisme houdt in, dat een axiomastelsel alleen dan geldt, wanneer zijn begrippen en relaties zoodanig in (1,1) korrespondentie zijn te brengen met fysische begrippen en relaties, dat de axioma's na transformatie in de fysische sfeer geldige oordeelen worden. De niet-archimedische meetkunde zou dan geldig zijn op grond van een onbruikbare beschrijvingswijze van de fysische ruimte. Nog erger is het gesteld b.v. met het getsysteem, waarin de kommutatieve eigenschap der vermenigvuldiging niet geldt. Dit getsysteem vindt zijn ontstaansgrond in bepaalde onafhankelijkheidsbewijzen. Hoewel het daardoor een mathematische rol speelt, is het fysicistisch alleen te rechtvaardigen, als het bovendien fysische toepasbaarheid heeft. Zonder deze toepasbaarheid heeft het geen geldigheid en kan dus ook geen mathematische rol spelen. Duidelijk wordt hieruit, dat de fysische toepasbaarheid geen geldigheidsgrond is van een mathematisch axiomastelsel, doch dit stelsel alleen in zijn funktie in de wetenschap versterkt. Fysische toepasbaarheid verhoogt de funktionaliteit van een mathematisch systeem en geeft het daardoor een hoogere graad van hier niet nader te analyseeren belangrijkheid, echter meer ook niet.

Een vierde gebied, waar een zeer aktueel gevaar dreigt, is de *taalwetenschap*. Het is voornamelijk het *formalisme*, dat tracht wiskunde en wiskundige taal te vereenzelvigen. Volgens het formalisme is wiskunde een „Kalkül”, een rekenmethode, welke aangeeft, op welke wijze bepaalde symbolen gekombineerd mogen worden. Deze symbolen zijn geen taalkundige uitdrukking van wiskundige

begrippen, maar teekens zonder meer. Het uitgangspunt der wiskunde is dan het symbool. Het symbool is identiek met het mathematisch begrip. De mathematische relaties zijn geen relaties tusschen deze symbolen, doch zijn eveneens symbolen. Het symbool is dus identiek met het mathematisch begrip of met de mathematische relatie. Echter ook tusschen de symbolen bestaan relaties, nl. relaties van identiteit en onderscheid en relaties, die betrekking hebben op de rangschikking der symbolen. De oordeelen, welke met behulp dezer relaties gevormd worden, dus identiteit en rangschikking van teekens betreffen, zijn voor de formalist moeilijk in een wetenschappelijk systeem onder te brengen. Ze worden daarom ontleend aan een voorwetenschappelijke sfeer, ze worden geput uit een Anschauung, die volgens Hilbert „Vorbedingung” is „für die Anwendung logischer Schlüsse und die Betätigung logischer Operationen” (Grundlagen der Geometrie 7, 289). Het formalisme maakt dus wiskunde tot een normwetenschap betreffende rangschikking van teekens, terwijl wat rangschikking is noch axiomatisch noch definitoirisch wordt gefundeerd, doch eenvoudig „unserer Einstellung zufolge unmittelbar deutlich” is (Hilbert, loc. cit. 288).

Als eerste bezwaar tegen het formalisme wilde ik aanvoeren, dat dit m.i. een ongerechtvaardigde wijze is een relatie in wetenschap in te voeren. Begrippen en relaties, die in wetenschap funktioneeren, moeten als zoodanig ook in wetenschap zijn gefundeerd, geobjektiveerd, willen ze niet uit wetenschappelijk oogpunt niets zijn en dus niet in wetenschap betrokken kunnen worden. Dit kan hier niet nader worden toegelicht, doch is een resultaat eener prologische analyse van begrip en relatie. Het eerste bezwaar is dus het principieel uitsluiten van de fundeering van bepaalde relaties.

Behalve dit prologisch bezwaar is er nog een ander. De wetenschap, welke tot onderwerp heeft de rangschikking van symbolen, is de taalwetenschap. De taalwetenschap is, voorzoover hij betrokken is op geschreven taal, een systeem van regels, welke voorschrijven, hoe symbolen gerangschikt mogen worden. Dit is echter ook de pretentie van het formalisme. Het formalisme is dus niets anders dan het scheppen van een nieuwe afdeeling der taalwetenschap. Deze afdeeling heeft nieuwe symbolen en nieuwe rangschikkingsregels, doch blijft taalwetenschap. Het bezwaar, dat tegen deze

opvatting rijst, dat taal steeds gebonden is aan een beteekenis, terwijl deze formalistiek geheel los van eenige vooraf gegeven beteekenis achteraf op willekeurige wijze geïnterpreteerd kan worden, is niet steekhoudend. Immers de opvatting, dat taal als zoodanig beteekenis heeft, tast de autonomie der taalwetenschap aan door hem vanuit de noölogie te regeeren. Deze autonomiseering der taalwetenschap is doorgevoerd door Goedewaagen in zijn artikel „Het verkeer van het woord in de taalloor” (Annalen der Critische Philosophie 3), waarnaar ik hier verder verwijs.

We komen dus tot de konklusie, dat het formalisme de autonome wiskunde vernietigt en wiskunde maakt tot taalwetenschap: formalisme is dus *filologisme*.

Het essentieele onderscheid tusschen formalistische en autonome wiskunde is, dat de formalistische wiskunde uitgaat van teekens zonder eenige beteekenis, de autonome daarentegen van begrippen, welker beteekenis in en door de axioma's wordt vastgelegd, zonder dat daarbij op eenige wijze het systeem wordt verlaten. De teekens zijn dan een onwiskundig, noölogisch hulpmiddel ter mededeeling.

De vijfde wetenschap, welke de wiskunde tracht aan te tasten, is de *logistiek*. Wanneer we ons op formalistische basis stellen, is een samenvloeiing van logistiek en wiskunde een noodzakelijke konsekwentie. Het formalisme ziet nl. in de logistiek eveneens niets anders dan een stel voorschriften, volgens welke teekens gerangschikt mogen worden. Dat in het formalisme logistiek en wiskunde verschillend terrein van toepassing vinden is geen principe voor een scheiding, daar de toepassingen slechts een achteraf optredende bijkomstigheid zijn en dus niet kunnen dienen om het gebied te bepalen. Immers het formalisme objektiveert in de wiskunde teekens zonder eenige beteekenis en stelt daardoor een Kalkül op, dat door projekteering op een gebied van wetenschap, door transformatie in een andere wetenschapsfeer dus, beteekenis *kan* krijgen. Een formalistisch systeem trekt zich op blijkens de toevoeging „kan” onafhankelijk van deze eventueel te verkrijgen beteekenis. Deze is dus niet bepalend voor dat systeem. Maar dan is er geen verschil tusschen logistiek en wiskunde als zoodanig. Tot zoover de direkte invloed van het filologisme.

Wanneer we ons oriënteeren aan de formalistische wiskunde,

dan blijkt de vervaging der grenzen tusschen logistiek en wiskunde een nog gevaarlijker karakter te dragen. De formalist bouwt nl. eerst een axiomatische teeken-logistiek op en begint dan geen nieuw systeem, dat hij wiskunde noemt, maar voegt eenige axioma's toe aan dit logistische systeem. Hij ontdekt dan, dat zijn teeken-systeem van structuurisomorf met wat men logistiek noemt structuurisomorf wordt met wat men wiskunde noemt, en wel langzamerhand zonder dat een principieel overgangspunt is vast te stellen. Dit beteekent, dat logistiek en wiskunde niet alleen niet verschillen, doch zelfs één systeem vormen. Waar de basis van dit systeem de logistiek is, wordt aan de mathematische geldigheid ten grondslag gelegd de logistische, wordt wiskunde tot een onderdeel van logistiek. Het formalisme is dus behalve filologisme ook *logisticisme*.¹⁾

Leidt echter het kriticisme niet eveneens tot *logisticisme*? Een belangrijke invloed van logistiek in wiskunde zal het toch ook moeten vaststellen! Om dit nader te onderzoeken vragen we ons eerst af, wat precies logistiek is. Wat is het probleem, dat de logistiek zich stelt? De logistiek onderzoekt, wat de regels der deductie zijn. Dit antwoord impliceert een nieuwe vraag: wat is deductie? Ons oriënteerende aan de wetenschap vinden we, dat in de theorie uit oordeelen zonder inachtneming der feiten andere oordeelen afgeleid, gesynthetiseerd worden. Deze synthese noemen we deductie. *De logistiek vraagt dus naar de wetmatigheden, volgens welke de deductieve synthese zich voltrekt.* Maar dan is de geldigheid van een logistisch oordeel steeds onderworpen aan een erkenning der feiten, m.a.w. systematisch. In logistiek is geen oordeel geldig, als niet in wetenschap gededuceerd wordt met inachtneming van dat oordeel. Anders gezegd: de aard der logistiek maakt het noodzakelijk, dat zijn theorie aan de feiten, d.z. de deducties zooals die in concreto in wetenschap voorkomen, geverificeerd wordt. Het verschil tusschen logistiek en wiskunde is nu duidelijk: *logistiek bezit feitenmateriaal, wiskunde niet; logistiek kent systematische geldigheid, wiskunde niet.*

Een direkt gevolg van de aard der logistiek is echter toch, dat logistiek in wiskunde een belangrijke rol speelt. We stelden immers

¹⁾ Ook het zg. *logicisme* valt ten duidelijkste onder het *logisticisme*.

vast, dat in wiskunde gededuceerd wordt en dus per definitie volgens logistische regels. Is dan toch niet de mathematische geldigheid gefundeerd op de logistische? Valt dan toch niet de autonomie der wiskunde? Neen. Immers een autonome wetenschap is een wetenschap en kan dus slechts autonoom zijn, voorzooover hij wetenschap is, binnen de perken, waarin hij door wetenschap te zijn, is opgesloten. Een autonome wetenschap brengt dus geldigheden voort q.q. op wetenschappelijke wijze, d.i. op een wijze zooals in prologika en logistiek (welke in deze voordracht als een onderdeel der prologika verschijnt) geobjektiveerd wordt. Geldigheden voortbrengen onderstelt het begrip geldigheid, onderstelt prologika en logistiek, zonder welke geldigheid geen wetenschappelijk gefundeerd begrip zou zijn. Autonome geldigheid wil dus slechts zeggen, geldigheid, die als zoodanig autonoom is. Autonome geldigheid vooronderstelt echter, omdat het geldigheid is, de prologisch-logistische karakteristiek daarvan. *De wiskunde is dus autonoom t.o.v. het uitgangspunt, waaruit hij geldige oordeelen voortbrengt*, zonder zich daarbij te laten beperken door resultaten uit andere systemen. Door deze autonome keuze van uitgangspunt, bepaalt de wiskunde geheel zelf, wat mathematisch geldig zal zijn. Het uitgangspunt is dus in tegenstelling met het logisticisme hier niet van logistische aard.

Een ander karakteristiek onderscheid met het logisticisme is het volgende. Bij het logisticisme vallen logistische en mathematische geldigheid samen. Onder kritisch oogpunt onderstelt de geldigheid van het mathematisch a posteriori de logistiek, vindt echter omgekeerd het logistisch oordeel zich bevestigd in de zich in concreto voltrekkende mathematische deductie en komt zoo o.a. door de mathesis tot systematische geldigheid. Niet meer regeert de logistiek de wiskunde, doch beiden zijn korrelatief geworden.

Een misverstand moet hier nog uit de weg geruimd worden. Deductie werd gedefinieerd als synthese van theoretische oordeelen uit theoretische oordeelen onafhankelijk van de feiten. Maar als we ons oriënteeren aan de fysika, dan blijkt de mathesis hiertoe eveneens mede te werken. De scheiding mathesis-logistiek is dus toch nog niet scherp getrokken. Om deze taak te voltooien, houden we vast aan de totnogtoe gevonden onderscheiding, dat logistiek een feitenmateriaal bezit en wiskunde niet. We kunnen dan onderscheiden, wat wiskunde is, en weten dan, waar bij de fysische

theoretische syntheses wiskunde toegepast wordt. We zullen deductie inperken tot die syntheses, welke geen toepassingen zijn van wetten van een speciaal-wetenschappelijk systeem, d.i. een systeem, dat niet wetenschap zelf als terrein van onderzoek heeft. Met deze scherpere definitie van deductie is de vorige, voorloopige vervallen. Daarmee zijn wiskunde en logistiek streng gescheiden.

Als zesde punt zullen we moeten onderzoeken, in hoeverre het *intuitionisme* de wiskunde een autonoom bestaan waarborgt. Bij een eerste bestudeering schijnt Brouwer noölogist te zijn, zooals hem o.a. door Dubislav in „Die Philosophie der Mathematik in der Gegenwart” wordt verweten. Dit is echter onjuist. Hoewel Brouwer zich herhaaldelijk bezig houdt met de noölogie der wiskunde, weet hij een noölogische geldigheidsgrond der mathesis te vermijden. Wiskunde blijft hier autonoom, heeft echter verstrekkende noölogische konsekwenties. Dat intuitionisme geen noölogisme inhoudt, ziet men verder ten duidelijkste bij Heijting.

Een verwijt, dat men Brouwer ook licht maakt, is, dat hij psycholoog is. Hoewel de redactie zijner formuleeringen vaak een psychologistische uitleg zeer gemakkelijk maakt, is dit m.i. onjuist en zijn zijn psychologisme suggereerende termen gebruikt in prologische zin. Ze betreffen dus geen eigenschappen van denkende wezens, maar eigenschappen van wetenschap. We zullen zien, dat desondanks bovenstaand verwijt niet geheel ongegrond is.

Wat is het intuitionisme dan wel? Willen we dit onderzoeken, dan moeten we eerst vaststellen, wat Brouwer verstaat onder wiskunde. Wiskunde is voor hem theorie los van eenig feitenmateriaal, welke theorie „slechts wacht op een gelegenheid, om in de werkelijkheid te worden geprojecteerd” (Over de grondslagen der wiskunde, 83). Vandaar dat Brouwer elke wetenschappelijke theorie over feiten noemt een wiskundige beschouwing van de werkelijkheid. *Deze grondinstelling van het intuitionisme verschilt met de kritische slechts in terminologie.* Het is een poging de wiskunde tot autonome wetenschap te maken.

Om Brouwer's positie nader te analyseeren moeten we onderzoeken, hoe hij zich instelt t.o.v. logistiek en prologika. Wanneer we het contact van logistiek met de feiten verbreken en hem dus zien alleen als uit axioma's gededuceerde theorie, dan is hij wiskunde geworden. Logistiek in deze zin is ook bij Brouwer wiskunde.

Zoodra we echter het kontakt met de feiten herstellen, is logistiek geen wiskunde meer. Hij beschrijft dan de dedukties, zooals die in wetenschap worden aangetroffen. Logistiek in deze zin wordt door Brouwer geignoreerd. Wat Brouwer logistiek noemt daarentegen is een wetenschap van geheel andere aard. Hij noemt logistiek een wiskundige beschouwing over wiskundige taal, d.i. in kritische terminologie een theorie bevattende de taalwetten, welke de taalverschijnselen der deduktieve syntheses onderzoekt. De brouwersche logistiek is dus een onderdeel der taalwetenschap. Er is echter een wezenlijk verschil tusschen de taalkundige begrippen woord en zin en de prologische begrippen begrip en oordeel. De eersten treden op, zoodra wetenschap meegedeeld wordt; ze zijn een onmisbaar onderdeel van het wiskundig verkeer tusschen menschen. Woord en zin zijn dus van filologisch-noölogische aard. Begrip en oordeel zijn echter prologische principes, welke ten grondslag liggen aan de structuurbeschrijving van wetenschap, los van eenige taalkundige vorm, waarin hij is uitgedrukt. De kritische logistiek, waarin begrippen en relaties funktioneerden, is dus wezensverschillend van de brouwersche taallogistiek. De kritische logistiek vond ook geen plaats bij de brouwersche wiskunde, is dus door Brouwer niet ingedeeld.

Toch is tegelijkertijd de brouwersche opvatting over taal-logistiek een kontaktpunt met de kritische opvatting. Zijn hoofdbedoeling daarmee is om de taal te stempelen tot „een onwiskundig hulpmiddel, om het wiskundig geheugen te ondersteunen of om door meerdere individuen dezelfde wiskundige verzameling te doen bouwen” (Intuitionisme en formalisme, 13). Hij verwerpt hiermee op dezelfde gronden als het kriticisme het filologisme en daarmee het formalisme.

Na de logistiek komt de prologika aan de orde. De vele algemeene beschouwingen van Brouwer over wiskunde zijn, zooals reeds gezegd, noölogische beschouwingen en hebben dus met prologika niets te maken. Ze fundeeren niet de structuur van wiskunde, maar fundeeren de beteekenis van wiskunde voor de mensch. De prologische vraagstelling komt het meest kernachtig daar tot uiting, waar hij vraagt naar het a priori der wetenschap, dat bij hem ekwivalent is met „de noodzakelijke voorwaarde voor de mogelijkheid van wetenschap” (Over de grondslagen der wiskunde, 98). Als antwoord geeft hij:

- 1e. „de mogelijkheid van het denken van veeleenigheid, en de herhaling daarvan in een nieuwe veeleenigheid”,
- 2e. „de mogelijkheid van tusschenvoeging”,
- 3e. „de oneindige voortzetbaarheid”.

Hier treedt plots scherp het verschil tusschen intuitionisme en criticisme naar voren. Bepaalde oordeelen worden geponeerd als noodzakelijke voorwaarde voor de mogelijkheid van wetenschap en als zoodanig aan elke kritiek onttrokken. Het intuitionisme heeft daardoor een absolute uitgangsbasis in tegenstelling met de kritische prologika, welke elke verabsoluteering verwerpt en zich principieel steeds openstelt voor een verifikatie aan de wetenschap. Het intuitionisme berust dus op een *dogma*, d.i. een oordeel, dat op feiten betrokken is, echter onttrokken is aan een verifikatie aan die feiten.

Dit dogma zou hier niet van belang zijn, als het niet met de prologika tevens de wiskunde aantastte. Immers bij Brouwer zijn bovengenoemde noodzakelijke voorwaarden voor wetenschap niet alleen ook noodzakelijke voorwaarden voor wiskunde, maar zelfs het fundament der wiskunde. Uit dit fundament ontspringen de natuurlijke getallen en het continuüm, waarop zich vervolgens de geheele wiskunde opbouwt. De prologika wordt zoo vervangen door een naar zijn inhoud inderdaad prologische oerintuïtie. Deze oerintuïtie is door zijn dogmatische ongefundeerdheid ontoelaatbaar en tast tevens de autonomie der wiskunde aan door zich als direkte geldigheidsgrond ervan te verklaren. Hoewel Brouwer dus tracht de wiskunde te fundeeren door uit te gaan van wetenschap in het algemeen, vinden we de autonomiseering, welke we verwachtten, desondanks niet. De wiskunde is:

- 1e. niet van de prologika gescheiden,
- 2e. op dogmatische basis opgebouwd.

Het voorgaande vindt zijn direkte grond in het brouwersche geldigheidsbegrip, dat geheel van het kritische verschilt. Een citaat uit het artikel „Willen, weten, spreken” (Euclides 9, 189) moge dit verduidelijken. Brouwer vraagt daar naar de verzekering der mathematische exaktheid en geeft dan als antwoord, „dat de door de zelfontvouwing der oerintuïtie bestaande talloze constructies, uit kracht van hun in de herinnering aanwezig zijn alleen, exact en juist zijn, dat echter het menschelijk herinneringsvermogen, dat deze constructies heeft te overzien uit den aard der zaak

beperkt en feilbaar is. Voor een met onbeperkt herinneringsvermogen uitgeruste menselijke geest zou dus de in eenzaamheid beoefende en geen linguïstische teekens gebruikende zuivere wiskunde exact zijn, een exactheid, die echter bij gedachtewisseling tusschen menschen weer verloren zou moeten gaan." Brouwer zoekt dus naar een criterium voor overeenstemming der mathematische beleving als scheppingsdaad bij verschillende individuen en verkrijgt een negatief resultaat, waardoor hij noodzakelijk moet vervallen tot *subjektivisme*. Door dit centraal stellen der subjectieve mathematische beleving vindt hij geldigheden langs introspektieve weg. Langs deze weg komt hij m.i. tot zijn dogmatisch uitgangspunt. Zijn dogma berust op een door introspectie verkregen overtuiging, ontleent dus zijn geldigheid aan een psychologisch geldigheidskriterium.

De prologika ziet van een dergelijk criterium de onbruikbaarheid in en tracht daarom langs geheel andere weg te komen tot *objektieve* geldigheid, die los van elke menselijke beleving gebaseerd is op wetenschapsstructuur. De prologika tracht aan de wetenschap en niet aan de menschen te ontdekken, wat geldigheid is:

Ik heb bij het intuitionisme zoo lang stilgestaan, omdat het m.i. de belangrijkste en meest doordachte fundeering is van wiskunde. Ik wil dan ook kort nog pro en contra vanuit kritisch oogpunt samenvatten:

pro:

- 1e. wiskunde is niet aan feiten gebonden,
- 2e. de taal is een onwiskundig hulpmiddel; verwerping van het formalisme,
- 3e. poging tot prologische fundeering;

contra:

- 1e. ignorantie van kritische prologika en logistiek,
- 2e. dogmatisch uitgangspunt van prologische aard, dat geldigheidsgrond voor wiskunde is; wiskunde wordt daardoor geabsorbeerd in prologika,
- 3e. psychologisch geldigheidskriterium.

Daar een dogmatische basis principieel onaantastbaar is, immers hij onttrekt zich aan elke kritiek, is het voorgaande geen weerlegging, doch een waardeering van het intuitionisme, en wel gemeten naar kritische normen.

Het is mij niet mogelijk geweest mijn standpunt in een kort bestek langs konstruktieve weg duidelijk te maken. Ik hoop, dat toch de kritische probleemstelling en de daaraan verbonden onderzoekingsmethode in abstracto voldoende zijn belicht. Resumeerende kunnen we hiervan zeggen: het probleem wat is wiskunde? wordt opgelost door ons niet te stellen op een speciaal-wetenschappelijk standpunt, maar door aan de wetenschap in het algemeen te ontdekken aan welke wetmatigheden hij voldoet. Anders gezegd: door aan de wetenschap te ontdekken wat wetenschap is. Dit is de taak der prologika. Wanneer we bepaald hebben, wat wetenschap is, wanneer we zijn inwendige structuur kennen, kunnen we principes vinden, volgens welke we verschillende wetenschappen onderscheiden. Eerst dan is mogelijk te bepalen, wat wiskunde is en in welke opzichten hij van de andere wetenschappen onderscheiden is. Deze onderscheiding van wetenschappen berust op het principe der autonomie. Dit principe houdt in, dat een gebied eerst dan tot een wetenschap wordt, wanneer het zijn specifieke geldigheidsnormen niet laat voorschrijven vanuit een ander gebied. Anders gezegd: wanneer het gebied zijn geldigheden relateert op een eigen uitgangsbasis, een eigen a priori, dat zijn geldigheid niet ontleent aan een ander systeem, maar dat uitsluitend geldig is, doordat het a priori is van het systeem, dat dus zijn rechtvaardiging vindt uitsluitend in datgene, wat eruit is opgebouwd. En in deze zin wordt dan wiskunde gezien als autonome wetenschap en gereinigd van alle niet-mathematische verontreinigingen.

Aflevering III van de 12e Jaargang van

CHRISTIAAN HUYGENS

ONDER REDACTIE VAN PROF. Dr. F. SCHUH

verscheen deze week en bevat weer een flink stuk van het artikel van PROF. Dr. Hk. DE VRIES, **DE MEETKUNDE VAN HET AANTAL**, benevens kleinere stukken en de gewone oplossingen en vraagstukken, waarvan de achterstand door den ass. red. K. Harlaar in Jaargang XI geheel is ingehaald. De redactie ontving verder een groot stuk van PROF. Dr. B. L. VAN DER WAERDEN over **DE LOGISCHE GRONDSLAGEN DER EUCLIDISCHE MEETKUNDE**.

Afl. I, II bevatte:

Dr. J. Bouman, Een elementaire behandeling van de cyclide van Dupin.

W. Morée, Het teekenen van de ontwondene der ellips door middel van raaklijnen.

Prof. Dr. Hk. de Vries, De meetkunde van het aantal van blz. 25—96.

Afl. III zet dit voort tot blz. 142 en geeft verder:

A. J. van der Loo, Een methode voor het grafisch oplossen van hoogere machtsvergelijkingen.

E. M. Bruins, Over de omhulde der lijnen van Simson.

Benevens de gewone rubrieken, waaronder ook besprekingen van belangrijke nieuwe uitgaven.

Prijs per jaargang f 10.—; voor abonnee's op Euclides f 9.—;

inteekenaars genieten korting op nieuwe uitgaven;

voor deze jaargang reeds op de Middel-Algebra, 2de druk,
op Molenbroek Leerboek der Stereometrie, 8ste druk;

in de loop van deze jaargang verder op onderstaand werk,
dat thans ter perse is:

Dr. H. J. E. BETH,

INLEIDING TOT DE DIFFERENTIAAL EN INTEGRAALREKENING

met vele toepassingen uit andere vakken, Mechanica, Physica, Chemie

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN—BATAVIA.

Postgiro No. 6593.

Handboek verschaft als N. van:

COMPOSITIO MATHEMATICA

QUOD PERIODICUM INTERNATIONALE
EDUNT

R. BAER, S. BERNSTEIN, L. BIEBERBACH, E. BOREL, L. E. J. BROUWER, E. CARTAN, E. ČECH, J. G. VAN DER CORPUT, G. DOETSCH, TH. DE DONDER, L. P. EISENHART, G. FEIGL, G. FUBINI, M. FUJIMURA, R. GARNIER, G. H. HARDY, A. HEYTING, EINAR HILLE, H. HOPF, G. JULIA, A. KHINTCHINE, S. LEFSCHETZ, T. LEVI-CIVITA, P. LEVY, A. LOEWY, R. V. MISES, P. MONTEL, J. V. NEUMANN, N. E. NÖRLUND, A. OSTROWSKI, F. RIESZ, M. RIESZ, W. SAXER, F. SEVERI, W. SIERPINSKI, W. SÜSS, G. SZEGÖ, T. TAKAGI, L. TONELLI, C. VALIRON, CH.-J. DE LA VALLEE-POUSSIN, C. VEBLEN, R. WAVRE, R. WEITZENBÖCK, E. T. WHITTAKER, B. M. WILSON, J. WOLFF.

ADMINISTRANT

L. BIEBERBACH, *Berlin*; L. E. J. BROUWER, *Amsterdam*;
TH. DE DONDER, *Bruxelles*; G. JULIA, *Paris*; B. M. WILSON, *Dundee*.

Heder deel nal in drie afleveringen, verschaft en 80 vel. (480 blz.) bevatten;
de prijs per deel bedraagt 70 Gulden.

De inschrijving kan geschieden door bemiddeling van elke boekhandel
of direct door den uitgever R. NOORDHOFF, Groningen.

Uit de inhoud van de eerste afleveringen:

- L. S. Bosanquet, A. C. Offord. A Note on Fourier Series.
G. Bourin. Sur les zéros des polynomes-sections d'une série de Taylor.
E. Čech. Sur la connexité locale d'ordre supérieur.
J. G. van der Corput. Zur Methode der stationären Phase.
G. Doetsch. Summatorische Eigenschaften der Besselschen Funktionen und andere Funktionalrelationen, die mit der linearen Transformation der Thetafunktion äquivalent sind.
Th. de Donder. Généralisation de la méthode d'intégration de Kirchhoff.
H. Freudenenthal. Liesche Gruppen im Großen.
G. Fubini. Les invariants projectifs d'un réseau.
Einar Hille, J. D. Tamarkin. A Remark on Fourier Transforms and Functions Analytic in a Half-Plane.
H. Hopf. Über stetige Lösungen linearer Gleichungen.
H. Hurwicz. Ein neuer Beweis des Theorems über die Dimension Euklidischer Räume.
A. Khintchine. Eine Verschärfung des Poincaréschen „Wiederkehrrsatzes“.
R. König, E. Peschl. Axiomatischer Aufbau der Operationen im Tensorraum.
T. Levi-Civita. Terne di congruenze sopra una superficie ed estensione della trigonometria.
Paul Lévy. Sur la convergence absolue des séries de Fourier.
Alfred Loewy. Anschauliche Interpretation eines linearen homogenen Differentialsystems.
J. v. Neumann. Zum Haarschen Maß in topologischen Gruppen.
A. Ostrowski. Eine topologische Verengung des Rottischen Satzes.
W. Saxer. Über eine Verallgemeinerung des Satzes von Schoofsky.
G. Valiron. Sur une classe de fonctions entières admettant deux directions de Borel d'ordre divergent.
G. N. Watson. Generating Functions of Class-Numbers.
G. N. Watson, B. M. Wilson. Some Early Pages in Ramanujan's Note-books.
R. Wavre. Sur les polydromies que présentent les potentiels newtoniens, lorsqu'ils sont prolongés au travers des corps générateurs.
T. Wazewski. Sur les matrices dont les éléments sont des fonctions continues.

R. NOORDHOFF N.V. GRONINGEN-BALLAVIDA