

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDAC-
TIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN
J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

MET MEDEWERKING VAN

Dr. H. J. E. BETH
DEVENTER

Dr. E. J. DIJKSTERHUIS
OISTERWIJK

Dr. G. C. GERRITS
AMSTERDAM

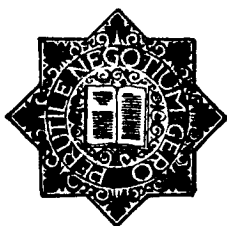
Dr. B. P. HAALMEIJER
AMSTERDAM

Dr. W. P. THIJSSEN
BANDOENG

Dr. P. DE VAERE
BRUSSEL

Dr. D. P. A. VERRIJP
ARNHEM

9e JAARGANG 1932/33, Nr. 4



P. NOORDHOFF — GRONINGEN

Prijs per Jg. van 18 vel f 6.—. Voor intekenaars op het
Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde en Christiaan Huygens f 5.—.

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijksche afleveringen, samen 18 vel druks. Prijs per jaargang f 6.—. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (f 6.—) of op „Christiaan Huygens” (f 10.—) zijn ingeteekend, betalen f 5.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrucken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

INHOUD.

	Biz.
Dr. U. H. VAN WIJK, De behandeling van problemen van infinitesimalen aard	145—153
Prof. Dr. J. WOLFF, Oppervlakten en inhouden	154—164
Uitslag van de enquête, betreffende het derde vraagstuk, dat in 1931 op het schriftelijk eindexamen voor algebra is opgegeven	165—167
Uit het verslag der staatsexamen-commissie 1932	168—173
Boekbesprekingen	174—176
Ingekomen boeken	176



De redactie heeft het genoegen in deze aflevering het portret te geven van Prof. Dr. J. F. KOKSMA.

Met dezen zijn we aan het einde van de rij hoogleraren; voortaan hopen we, telkens als er een nieuwe de toga wordt omgehangen, ook diens beeltenis te kunnen geven.

DE BEHANDELING VAN PROBLEMEN VAN INFINITESIMALEN AARD

DOOR

Dr U. H. VAN WIJK.

Nu de vraag, of een systematische behandeling van dergelijke problemen met gebruikmaking van de symbolen uit de infinitesimaalrekening op de middelbare school gewenscht moet worden geacht, velen bezig houdt, lijkt het me niet van belang ontbloot de uitspraken van voor- en tegenstanders eens tegenover elkaar te stellen.

Lindemann ¹⁾ behoort tot de voorstanders, die een kennismaking met de beginselen der infinitesimaalrekening bepleiten juist voor die leerlingen, wier wiskundige opleiding aan 't eind van de middelbare school afgesloten wordt. De schrijver merkt daaromtrent op (blz. 14/15):

„Wer heute unsere Gymnasien als Absolvent verlässt, hat nicht die geringste Ahnung davon, was Mathematik eigentlich ist, was sie leisten kann und was wir ihr verdanken; ihm fehlt ein groszes Stück aus der Erkenntnis des Naturzusammenhanges”.

... „Die Mathematik gilt heute an den Schulen nur als formales Bildungsmittel, als Turngerät für die Übungen des Geistes ²⁾; dasz sie den höchsten idealen Gehalt für unsere Erkenntnis des Weltganzen umschlieszt, daran wagt man beim heutigen Unterrichte kaum zu denken”.

Klein en Schimmack ³⁾ stellen de voordeelen eener kennismaking met de niet-verkaptte infinitesimaalrekening op de middelbare school in 't licht voor a.s. biologen, artsen (lezen van physiologische werken), filosofen en juristen (statistische beschouwingen). Op blz. 113 zegt Klein:

„Nach meiner Auffassung gehört heute die Infinitesimalrechnung

¹⁾ „Lehren und lernen in der Mathematik”.

²⁾ Men leze op dit punt ook: A. Voss: „Ueber das Wesen der Mathematik” blz. 4.

³⁾ „Der Mathematische Unterricht an den höheren Schulen.”

als Ausgestaltung des Funktionsbegriff zur allgemeinen Mathematischen Bildung, die man von jedem verlangen sollte".

Klein is ook voorstander van het onderricht in de beginselen der infinitesimaalrekening aan a.s. technici en merkt daaromtrent op blz. 113/114 op:

„Bisweilen ist ein besonderer Einwand in Hinsicht auf diejenigen Abiturienten der höheren Schulen gemacht worden, die weiterhin an der Hochschule die mathematischen Anfangsvorlesungen besuchen sollen, also die Naturwissenschaftler, die Ingenieure, die Mathematiker usw. Man hat gesagt: es schade diesen, wenn sie bereits auf der Schule von der Infinitesimalrechnung einiges lernten, weil es doch nicht exakt genug sei, um als Grundlage des späteren Studiums zu dienen; ja es verderbe ihnen die Freude, diese reizvollen Dinge erst beim Beginn des akademischen Lebens kennen zu lernen".

Deze opvatting bleken eenige jaren geleden ook de hoogleraren der Technische-Hoogeschool te Bandoeng te huldigen, toen zij hun oordeel gaven over de voorstellen der commissie-Beth.

Klein vervolgt:

„Man weisz eigentlich nicht, ob man die letztere Bemerkung völlig ernst nehmen darf; denn nach demselben Prinzip könnte man gar vieles aus dem Lehrplan der Schulen streichen. Aber auch das Bedenken der Nichtexaktheit verliert, wenn man recht erwegt, seine Bedeutung. Das Lernen hat nun einmal sein Wesen darin, dasz man nicht immer mit der exaktesten Begründung anfängt, sondern vielfach von praktischen Fähigkeiten ausgeht, um erst hernach bei hinreichender Reife des Denkens zur logischen Durchbildung aufzusteigen".

Op blz. 134 lezen we nog:

„Plötzlich soll der junge Student (in de techniek, v.W.) all das, was auf der Schule „viel zu schwer" war, jetzt nebenbei lernen".

Tot de voorstanders behoort ook Lietzmann, die b.v. opmerkt:⁴⁾

„Ich habe den Eindruck, dasz die Versinnlichung eines Weges durch ein Flächenstück (v-t-diagram, v.W.) den Schülern zunächst einige Schwierigkeiten macht; begegnet sie ihnen im Rahmen der Integralrechnung, dann fällt die Hemmung weg".

⁴⁾ Bd. III blz. 126 zijner „Methodik des mathematischen Unterrichts".

Erg optimistisch is Breursch in een werkje uit de Sammlung „Wissen und Wirken“ (Bd 35): ⁵⁾

„Die Infinitesimalrechnung endlich, das noch vor zwei Jahrzehnten meistbestrittene Gebiet der Schulmathematik, braucht sich heute um ihre Daseinsberechtigung als solche nicht mehr zu wehren; sie hat restlos gesiegt. (? v. W.) Aber sie hat gesiegt mit den Gründen der Nützlichkeit und des praktischen Bedürfnisses gegen die Einwände der Erkenntnistheorie und der mathematischen Pädagogik“. (blz. 21/22).

Met Höfler ⁶⁾ besluiten we de rij der voorstanders. In verband met de vorige alinea moge hier de volgende uitspraak van dezen wiskunde-paedagoog aangehaald worden:

... „dasz auf einer höheren Stufe des Unterrichts der wissenschaftliche Zusammenhang als solcher in der Regel nun doch schon auch die didaktisch natürlichste Weise des Vorgehens an die Hand zu geben pflegt“. (blz. 351)

Een geheel ander geluid laat Feigl ⁷⁾ hooren. Deze schrijver merkt op:

„Denn aus didaktischen Gründen musz der Schulunterricht auf eine exakte Behandlung des Limes und der Stetigkeit, die, meiner Ansicht nach durchaus zu Unrecht, selbst im Anfangsunterricht der Universität nur unter Konzessionen an die Exaktheit erfolgt, verzichten. Was der Schulunterricht aus der Differentialrechnung bringen kann, ist in erster Linie und fast ausschliesslich der Kalkül. Der Formelapparat des Schülers wird um einige Formeln bereichert, deren Herleitung übrigens zum Teil nicht einwandfrei sein kann und daher das kritische Gefühl noch weiter einschläfert; eine Fülle von neuen, erfreulicherweise einen weiten Ausblick eröffnenden Aufgaben bietet sich — aber prinzipiell und logisch ist nichts gewonnen“

... „Die Meinung vieler Universitäts- und Hochschullehrer geht dahin, dasz die Differential- und Integralrechnung aus der Schule besser wieder verschwände. Ich persönlich halte es freilich im Augenblick nicht für opportun diese Forderung zu stellen, da die

⁵⁾ „Ziele und Wege des Unterrichts in Mathematik“.

⁶⁾ „Didaktik des mathematischen Unterrichts“.

⁷⁾ „Erfahrungen über die mathematische Vorbildung der Mathematikstudierenden des ersten Semesters.“ (Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung 1928).

Mathematik in den letzten Jahren um ihre Position an den höheren Schulen schwer zu kämpfen hatte, und da eine derartige Forderung sehr leicht von mathematikfeindlichen Kreisen falsch ausgelagt werden könnte".

Ook Suppantischitsch ⁸⁾ schreef reeds in 1914 niet onverdeeld gunstig over de invoering van de eenvoudigste begrippen der infinitesimaalrekening op de Oostenrijksche middelbare scholen. Schr. vermeldt in zijn studie o.m. den uitslag eener enquête over de resultaten van het onderwijs in het nieuwe vak. Twee derde der scholen achtte de invoering een voordeel, een zesde sprak zich er tegen uit, terwijl de rest geen beslist standpunt innam.

Onder de voordeelen werden genoemd: eenheid in de behandeling van alle „Grenzbetrachtungen", meerdere belangstelling bij de leerlingen, die de nieuwe stof niet als een „Mehrbelastung" ondervonden, doch ze ook slechts oppervlakkig verwerkten.

Over de meening der Oostenrijksche hoogleeraren lezen we:

„Unter ihnen verhalten sich aber die meisten sehr ablehnend. Nach der Ansicht vieler von ihnen wünschen die Hochschullehrer bei den jungen Semestern vorzüglich eine beachtenswerte Rechenfertigkeit, die Fähigkeit, Formeln zu lesen und bei variierten Gröszen zu deuten, und ganz besonders die Willensdisposition, eine Rechnung auch bis zu Ende durchzuführen. Auf unsicheren Kenntnissen der Infinitesimalrechnung — mehr könne die Mittelschule ja gewisz nicht leisten — könne man überhaupt nicht weiter bauen, man müsse nach wie vor von vorne beginnen. Könnten die neuen Verhältnisse vielleicht auch ein rascheres Vorgehen in den Anfangsvorlesungen nahelegen, so stehe doch dagegen die jetzt geringere Rechenfertigkeit der Studierenden und die gröszere Ungleichartigkeit ihrer Vorbildung. Es sei auch gar schwer, einmal erworbene unrichtige Auffassungen zu korrigieren. Die Mathematik in der Mittelschule habe sich eben vorzüglich um jene Schüler zu kümmern, die später nichts mehr von dieser Wissenschaft zu hören bekämen, den andern werde sie ja später in ganz anderem Ausmasze vorgesetzt". (We zagen reeds, dat in tegenstelling hiermee Lindemann juist degenen, die later geen wiskunde-onderricht meer ontvingen, een portie infinitesimaalrekening als cultureele bagage op den verderen levensweg wil meegeven).

⁸⁾ „Zur Frage der Infinitesimalrechnung an den Mittelschulen". (Zeitschrift für das Realschulwesen. 39e jaargang).

„Das Problem, den künftigen Ingenieuren und Naturforschern die passende Vorbildung und das nötige Ausmasz an Rechenfertigkeit und gleichzeitig den Nichtmathematikern die Fähigkeit zum richtigen Verständnis der mathematischen Elemente unserer Kultur zu geben, dieses Problem ist eben sehr schwer und noch nicht gelöst“.

Van de zijde der tegenstanders wordt verder over overlading van de leerstof geklaagd en gezegd „daz auch dieser Teil der Mathematik in der Schule zu einem verständnislosen Mechanismus heruntersinke“.

Suppanttschitsch eindigt zijn studie met de van weinig optimisme getuigende opmerking:

„Bedenke ich aber, daz gerade jene Anstalten, die sich nicht mit einer ganz groben Approximation begnügen, am meisten über den Mangel an Verständnis bei den Schülern klagen, so steigen mir Zweifel auf, ob unsere Schüler überhaupt für die Infinitesimalrechnung reif sind. Ich halte daher schon jetzt die Frage für sehr diskutierbar, ob die Infinitesimalrechnung aus der Schule nicht wieder verschwinden soll“.

De schrijver roept op blz. 13 van zijn studie nog een belangrijk en eenigszins teer punt aan, nl. de mogelijkheid om voorschriften te geven betreffende de wijze, waarop de beginselen der infinitesimaalrekening op de middelbare school onderwezen moeten worden. Hij zegt:

„Ist es billig, daz es Lehrer für gut finden dürfen, Begriffsbildungen zu geben, die auf der Hochschule mühsam umgelernt werden müssen, die ziemlich wertlos sind, wenn sie nicht korrigiert werden, die aber z.B. auch dem Nichtmathematiker, der sich etwa als Jurist im späteren Leben an ganz anders strenge Begriffe gewöhnt, dann naiv erscheinen? Darf man zulassen, daz dadurch in dem einen Falle die Schule, in dem anderen gar die Mathematik selbst der Miszachtung verfällt? Oder ist es nicht besser, wenn einsichtsvolle Männer und Gelehrte etwas enger umschreiben sollten, wie weit man in den Abweichungen geht, wie weit sich die Terminologie der Schule von der Terminologie der Wissenschaft entfernen darf, wenn solche Männer „last not least“ auch andeuten sollten, wie weit die Strenge zulässig sei. Auch ein Fanatiker der Strenge hat ja in der Schule nichts zu suchen. Ich entscheide diese Fragen nicht, ich erkläre aber, daz ich sie sehr wohl für diskutierbar halte“.

Ik veroorloof me een paar aantekeningen bij deze laatste aan-

haling van Suppantisch. Waar deze het heeft over het corrigeren van slecht gefundeerde grondbegrippen der infinitesimaalrekening, geldt dit in versterkte mate voor die bewijsmethoden, waarbij met kunstgrepen beschouwingen van infinitesimalen aard gecamoufleerd opgediend worden.

Met zijn opmerking over „Fanatiker der Strenge” kan ik mij daarentegen heel goed vereenigen. Tegenover de uitspraken van Legendre en Schuh om geen geringe eischen aan de mate van strengheid te stellen, welke Schögt in zijn „Beginnelsen der Vlakke Meetkunde” aanhaalt, citeer ik uitspraken van andere tot oordeelen bevoegde mathematici.

„J’ai suffisamment insisté, pour n’y plus revenir, sur l’ennui et le dégoût que ne peuvent manquer de ressentir les enfants devant la recherche d’une rigueur absolue”⁹⁾.

„L’admiration, a-t-on dit, est le principe du savoir, . . . ; je m’autoriserai de cette pensée pour exprimer le désir qu’on fasse la part la plus large, pour les étudiants aux choses simples et belles, qu’à l’extrême rigueur aujourd’hui si en honneur mais bien peu attrayante, souvent même fatigante et sans grand profit pour le commençant qui n’en peut comprendre l’intérêt”.¹⁰⁾

„Die Anfänger sind nicht für die wirkliche mathematische Strenge vorbereitet; sie würden darin nur unnütze und langweilige Spitzfindigkeiten sehen; man würde seine Zeit verlieren, wenn man sie zu früh anspruchsvoller machen wollte”¹¹⁾.

Höfler acht de „verfrühte Wissenschaftlichkeit” niets anders dan „leerer Formalismus”.

Uit het vorenstaande blijkt wel voldoende, dat de invoering der infinitesimaalrekening op de middelbare scholen slechts na zorgvuldige voorbereiding mag geschieden en dat scherp geformuleerd moet worden, wat wel en wat niet behandeld mag worden en hoe het opgediend moet worden. Toeplitz laat dit duidelijk uitkomen in een studie, die tot titel heeft: „Die Spannungen zwischen den Aufgaben und Zielen der Mathematik an der Hochschule und an der höheren Schule”.¹²⁾ We lezen daarin:

⁹⁾ Tannerg in „Science et Philosophie”, blz. 231.

¹⁰⁾ Uitspraak van Hermite, aangehaald in „Vohlens: „Konstruktionen und Approximationen” (Vorwort).

¹¹⁾ Poincaré in „Wissenschaft und Hypothese” blz. 5.

¹²⁾ Voordracht, gehouden op de „90. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte zu Hamburg” 1928.

„Die ganze Schwierigkeit mit der Infinitesimalrechnung auf der Schule ist dadurch entstanden, *dasz man sie eingeführt hat, ehe man das didaktische Problem gelöst oder auch nur ernstlich angegriffen hatte*, das hier eben aufgeworfen worden ist. Es darf nicht verheimlicht werden, das es zur Zeit in der Hauptsache noch ungelöst ist. Davon, ob es gelingt, es zu lösen, davon, ob man es überhaupt mit voller Kraft vornimmt, wird es abhängen, ob die Infinitesimalrechnung auf der Schule die Stelle sich für immer erobert, die sie soeben zu besetzen begonnen hat. Gelingt die Lösung nicht, so wird die Infinitesimalrechnung in zwei Dezennien ebenso unrühmlich von der Schule verschwinden, wie heute die Dreiecksaufgaben verschwunden sind. Gelingt die Lösung, so werden alle beteiligten Instanzen befriedigt sein.“

In een andere studie¹³⁾ schetst Toeplitz ons de uiteenloopende wijzen, waarop het onderricht in de infinitesimaalrekening aan eerste-jaarsstudenten gegeven wordt, in de volgende bewoordingen:

... „auf der einen Seite die strenge Observanz, die mit einer sechswöchentlichen Dedekindkur anhebt und dann aus den Eigenschaften des allgemeinen Zahl- und Funktionsbegriffs die konkreten Regeln des Differenzierens und Integrierens herleitet, als wären sie notwendige, natürliche Konsequenzen, auf der anderen Seite die anschauliche Richtung, die den Zauber der Differentiale walten lässt und auch in der letzten Stunde der zwei Semester umspannenden Vorlesung den Nebel, der aus den Indivisibilen aufsteigt, nicht durch den Sonnenschein eines klaren Grenzbegriffs zerreiszt; und dazwischen die hundert Schattierungen von Diagonalen, die man zwischen zwei zueinander senkrechten Ideenrichtungen einzuschalten vermag“.

Welke richting de schrijver toegedaan is, blijkt uit de volgende uitlating:

„Zunächst musz sie (die Anfängervorlesung, v. W.) dazu sozusagen das mathematische Handwerkszeug, die Technik des Differenzierens und Integrierens herbeibringen, dann die Anwendung davon auf geometrische oder mechanische Aufgaben (der Ansatz davon will gelernt sein), endlich die Technik des sauberen Grenzbegriffs, die sogenannte Epsilontik. Aber neben dieses unmittelbare

¹³⁾ „Das Problem der Universitätsvorlesungen über Infinitesimalrechnung und ihrer Abgrenzung gegenüber der Infinitesimalrechnung an den höheren Schulen“ (Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung 1927).

Ziel stellt sich ganz von selbst noch ein anderes: der junge Student, der sich für die Mathematik entschlossen hat und erst endgültig entschlieszen möchte, will wissen, inwiefern die Mathematik *spannend*, inwiefern sie *schön* ist, ob sie es lohnt ihr sein Leben zu widmen".

Na het vorenstaande, zal het geen verwondering baren, dat Toeplitz het een „Verbrechen" noemt, dat enkele leeraren van opinie zijn, „daz die Schule die Infinitesimalrechnung in derselben Strenge zu lehren vermag, wie die Universität sie lehren will".

Hiertegen waarschuwt ook Rothe in een studie „Über das Differential. Zur Einführung in die Infinitesimalrechnung auf den höheren Schulen" ¹⁴⁾. De schr. zegt:

„Was den Umfang des Stoffes anlangt, so scheint es wirklich vorzukommen, daz der Unterricht in der Infinitesimalrechnung als eine Gelegenheit benutzt wird, möglichst viel von Universitäts-erinnerungen an den Mann zu bringen und möglichst weit in die Infinitesimalrechnung vorzudringen." . . . „Wenn irgendwo im mathematischen Unterricht, so zeigt sich bei der Stoffauswahl in der Infinitesimalrechnung erst in der Beschränkung der Meister".

Toeplitz wil echter van het andere uiterste ook niets weten:

„Wenn die Schule nicht imstande ist, aus der Infinitesimalrechnung mehr als den blossen Kalkül heranzuholen, dann musz sie die Infinitesimalrechnung besser heute als morgen wieder beiseite stellen".

. . . „Aber welcher Weg bleibt nun eigentlich der Infinitesimalrechnung auf der Schule, wenn es auf allen Seiten „zurück" heiszt? Ich will versuchen, diesen Weg in kurzen Strichen anzudeuten. Neben dem Kalkül, neben der Exhaustion gibt es noch eine Art, die Infinitesimalrechnung anzufassen, die, in der die ersten Erfinder, von Kepler angefangen, an sie herangekommen sind, die des Technikers, der aus der Praxis unendlicher Prozesse, aus der Praxis der Konvergenz, nicht aus der Theorie der Konvergenz heraus, aus dem Umgehen mit kleinen Grözen und ihrem Vernachlässigen eine numerische, eine graphische, unmittelbar lebensvolle Vorstellung hat, die ihn ohne den Rahmen einer strengen Theorie innerlich überzeugt".

Rothe vermeldt in zijn studie met instemming, dat in de nieuwe

¹⁴⁾ „Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften". 1926.

Ondergeteekende, abonné op $\left\{ \begin{array}{l} \text{„Christiaan Huygens”} \\ \text{„N. T. voor Wiskunde”} \\ \text{„Euclides” (het vroegere Bijvoegsel)} \end{array} \right.$
verzoekt toezending van 1 exemplaar: *)

BARRAU, ANALYTISCHE MEETKUNDE, Deel I, 2e druk,

Geb. à f 8.20, gewone prijs is f 10.20

door bemiddeling van den boekhandel

direct per post,

.....
Naam:

Woonplaats:

.....
*) Ieder abonné heeft slechts recht op 1 ex. en mits besteld voor 1 Juni 1933

BESTELKAART VOOR BOEKWERKEN

1½ cts.
postzegel

N.V. Erven P. NOORDHOFF'S

Uitgeverszaak

POSTBUS 39

Giro Ned. Bk. No. 1858
Post Giro No. 6593

GRONINGEN

leerplannen in Duitschland is aangegeven, „daz der Unterricht in der Infinitesimalrechnung das Hilfsmittel geometrischer Veranschaulichung ausgiebig wird benutzen müssen”, terwijl Lietzmann t.a.v. dit punt opmerkt:¹⁵⁾

„Tout en admettant, comme point de départ, l'intuition géométrique et physique des fonctions, on exige pourtant, en général, quelque rigueur dans l'introduction analytique et, lorsque cette dernière dépasse le cadre de l'enseignement secondaire (p.e. pour la différentiation des séries de puissance, les discussions du terme complémentaire), l'indication expresse que la démonstration est incomplète”.

Prof. Mannoury, die zoo welwillend was mij zijn oordeel over deze aangelegenheid schriftelijk mee te deelen, is van opinie, dat de meeste schrijvers uitgaan van de „onjuiste praemisse, dat „wiskundige strengheid” een vastomlijnd begrip is, dat weinig nadere omschrijving behoeft”. Prof. Mannoury is van meening, dat „die z.g. strengheid niet anders is dan een uitdrukking voor een verder of minder ver doorgevoerd formalisme in de fysies-mathematische taal en dat dat formalisme in de taal der leerlingen *zeer* geleidelijk moet ontwikkeld worden. Wat nu de „analyse” betreft, brengt mijn standpunt mede die aanvankelijk op *zeer aanschouwelijke* wijze met de leerlingen te behandelen (wat heel geschikt reeds in de derde klasse kan gebeuren) en aan die behandeling enkele eenvoudige formules vast te knopen.

In de vierde en vijfde klasse kan dan zonder enig bezwaar het differentieeren van x^n , $\sin x$ en $\cos x$ behandeld worden en het integraalteken worden ingevoerd. Daar is veel voor en m.i. maar één ding tegen, nl. dat er dan ongetwijfeld „strengheidsfanatici” zullen zijn, die hun arme slachtoffers allerlei onverteerbare kost (als b.v. een definitie van limiet of een filosofiese uiteenzetting over „het oneindig kleine” e.d.) zullen voorzetten, maar die moeten dan maar zoveel mogelijk gemuilband worden!”

Ik besluit deze bloemlezing uit de vakliteratuur met de hoop uit te spreken, dat ze van eenig nut mag zijn voor hen, die in de moderniseering van het wiskunde-onderwijs belang stellen.

¹⁵⁾ „L'enseignement mathématique depuis 1910” in den jaargang 1929 van „L'enseignement Mathématique” (blz. 265).

OPPERVLAKTEN EN INHOUDEN.

(Voordracht gehouden door Prof. Dr. J. Wolff voor de
Vereeniging van leeraren in de wiskunde op 28 Dec. 1932).

De manier waarop de meesten van ons in hun jeugd kennis maakten met oppervlakten en inhouden vormt een eigenaardige tegenstelling met de strengheid die men overigens bij Wiskunde-onderwijs in acht neemt.

Begonnen werd met de mededeeling dat twee vlakke figuren gelijke oppervlakte hebben, als ze uit twee aan twee congruente deelen bestaan, of door toevoeging van twee aan twee congruente deelen tot zulke figuren kunnen worden aangevuld; en dat de oppervlakte van een figuur de som van de oppervlakten van haar deelen is.

Daarna kwam de stelling dat de oppervlakten van twee rechthoeken met gelijke bases zich verhouden als hun hoogten. Men schijnt daarbij aan te nemen dat iedere rechthoek een oppervlakte heeft, al heeft hij er nog geen recht op krachtens eenige definitie. U gelieve echter bij mij nòch ondankbaarheid jegens mijn leermeesters te veronderstellen, nòch de bedoeling U met didactische wijsheden of eigenwijsheden te hinderen, daar ik niet weet of dat onderwijs beter kan worden ingericht.

Hilbert heeft die zaak rechtgezet (zie Grundlagen der Geometrie). Ziehier zijn methode:

§ 1. In het vlak stellen we een positieven omloopzin vast en kiezen een punt A. Zij $V (P_0, P_1, \dots P_{n-1}, P_n = P_0)$ een in positieven zin omloopen veelhoek V.

Definitie:

$$\text{Opp. } V = \sum_{k=1}^n \Delta (AP_{k-1}P_k), \dots \dots \dots (1)$$

waarin $\Delta (AP_{k-1}P_k) = \text{plus of min } \frac{1}{2} \text{ basis} \times \text{hoogte van driehoek } AP_{k-1}P_k$, naargelang de omloopzin $AP_{k-1}P_k$ positief of negatief is.

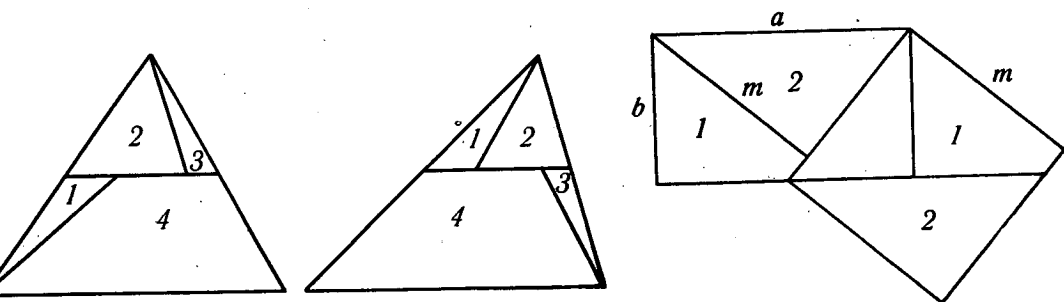
Nu bewijst men gemakkelijk:

1. Als V een driehoek is, dan is de aldus verklaarde oppervlakte gelijk aan $\frac{1}{2}$ basis $\times$ hoogte.

2. Als een veelhoek V op willekeurige manier verdeeld wordt in driehoeken, dan is opp. $V =$ de som van de oppervlakten der driehoeken.

Niet alleen volgt hieruit dat de keuze van A er niet toe doet, maar bovendien, dat, hoe men ook een veelhoek verdeelt in driehoeken, de som van de oppervlakten van die driehoeken altijd eender is.

Voor de grondvesting van de oppervlaktetheorie van veelhoeken is hiermee voldoende geschied. Dat het ook mogelijk is, te bewijzen dat twee veelhoeken van gelijke oppervlakte uit twee aan twee congruente deelen bestaan, is een curiositeit, en geen vereischte. Het bewijs laten we achterwege, maar willen ter illustratie door figuren aantonen dat twee driehoeken met gelijke bases en hoogten uit twee aan twee congruente deelen bestaan, en dat hetzelfde geldt voor een rechthoek a bij b en een vierkant met zijde $m = \sqrt{ab}$.



Nog korter wordt de inkleeding, als we Opp. V definieeren als het halve moment van het koppel dat aequivalent is met het stelsel van de n krachten langs de zijden $P_{k-1}P_k$ en daaraan gelijk in grootte en richting.

En wiskundigen die alles geëarithmetiseerd willen hebben kan men tevreden stellen met de definitie: als (x_k, y_k) het punt P_k is voor $k = 1, 2, \dots, n$ en $A(\alpha, \beta)$ een willekeurig punt, dan is

$$\text{Opp. } V = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \{(x_k - x_{k-1})(y_k - \beta) - (y_k - y_{k-1})(x_k - \alpha)\}.$$

Daar men wegens $\sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n (y_k - y_{k-1}) = 0$ hiervoor kan schrijven:

$$\text{Opp. } V = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (x_k y_{k-1} - x_{k-1} y_k),$$

zien we nogmaals dat de keuze van A er niet toe doet.

Alles wordt dus streng als de aanhef vervangen wordt door definitie (1).

Voor de inhouden van veelvlakken kan men de theorie analoog opzetten.¹⁾ Dat twee veelvlakken van gelijke inhouden niet steeds uit twee aan twee congruente deelen bestaan, hindert niet.²⁾

Erger lijkt mij dat een cirkel en vele andere figuren nog altijd op een oppervlakte wachten. Zonder limieten zal het niet mogelijk zijn bijv. aan een cirkel een oppervlakte toe te kennen.

§ 2. Nu, als er limieten bij te pas moeten komen, is het misschien verstandig, van meet af voor iedere figuur de oppervlakte te definiëren als een limiet. Zonder iets te beweren over uitvoerbaarheid van deze methode bij het onderwijs verdeelen we het vlak in vierkanten V_0 met zijde 1, ieder van deze vierkanten verdeelen we in 100 vierkanten V_1 met zijde $\frac{1}{10}$, ieder van deze in 100 vierkanten V_2 met zijde $\frac{1}{100}$, enz.

Zij F een figuur (puntverzameling), $n_k(F)$ het aantal V_k die met rand en al in F liggen, dan is steeds

$$\frac{n_{k+1}(F)}{10^{2k+2}} \geq \frac{n_k(F)}{10^{2k}}.$$

Definitie. Opp. $F = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n_k(F)}{10^{2k}}.$

Dus steeds is $0 \leq \text{opp. } F \leq \infty.$

Is $N_k(F)$ het aantal afgesloten V_k die met F een punt gemeen hebben, dan is steeds $\frac{N_{k+1}(F)}{10^{2k+2}} \leq \frac{N_k(F)}{10^{2k}}.$

Definitie. F heet *dun*, als $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{N_k(F)}{10^{2k}} = 0.$

Ieder deel van F is dan eveneens dun.

Wegens $n_k(F) \leq N_k(F)$ heeft iedere dunne puntverz. een oppervlakte nul. Het omgekeerde is niet juist. Want als F de verzameling is van de punten binnen een V_0 , die rationale afstanden

¹⁾ S. O. Schatunovsky. Ueber den Rauminhalt der Polyeder, Mathem. Ann. 57.

²⁾ Zie M. Dehn. Göttinger Nachrichten 1900 en mathem. Ann. 55. B. Kagan, Mathem. Ann. 57.

hebben tot de zijden van V_0 , dan is $n_k(F) = 0$ en $N_k(F) = 10^{2k}$ voor iedere k , zoodat opp. $= 0$ en $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{N_k(F)}{10^{2k}} = 1$.

Men bewijst gemakkelijk, dat lijnsegmenten en cirkelbogen dun zijn.

We zeggen dat twee puntverzamelingen F_1 en F_2 , die geen punt gemeen hebben, aan elkaar grenzen langs de puntverzameling f , als f bestaat uit de punten van F_1 , waar F_2 zich verdicht en de punten van F_2 , waar F_1 zich verdicht.

Stelling 1. Als F_1 en F_2 aan elkaar grenzen langs een dunne puntverz. f , en geen punt gemeen hebben, dan is

$$\text{opp. } (F_1 + F_2) = \text{opp. } F_1 + \text{opp. } F_2,$$

waarin $F_1 + F_2$ bestaat uit de punten van F_1 en die van F_2 .

Bewijs:

$$n_k(F_1) + n_k(F_2) \leq n_k(F_1 + F_2) \leq n_k(F_1) + n_k(F_2) + N_k(f)$$

want de afgesloten V_k , die in $F_1 + F_2$ liggen, bestaan of uitsluitend uit punten van F_1 , of uitsluitend uit punten van F_2 , of zijn samengesteld uit punten van F_1 en van F_2 ; iedere V_k van de laatste soort bevat een punt van f , dus hun aantal is hoogstens $N_k(f)$.

Daar f dun is, is $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{N_k(f)}{10^{2k}} = 0$, bijgevolg

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n_k(F_1 + F_2)}{10^{2k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n_k(F_1)}{10^{2k}} + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n_k(F_2)}{10^{2k}},$$

$$\text{opp. } (F_1 + F_2) = \text{opp. } F_1 + \text{opp. } F_2.$$

Daar een lijnsegment dun is, volgt uit deze stelling:

1° de oppervlakte van een veelhoek zonder rand is gelijk aan die van den veelhoek met geheele of gedeeltelijke rand.

2° de oppervlakte van een veelhoek P is de som van de oppervl. van veelhoeken waarin men P op willekeurige manier verdeelt.

Stelling 2. De oppervlakte van een rechthoek R met zijden a en b is ab .

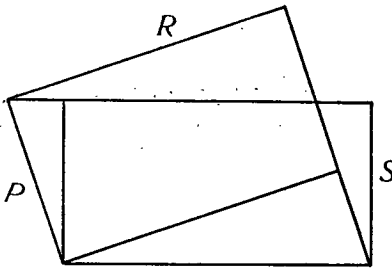
Bewijs. Loopen de zijden evenwijdig met die van V_0 , dan is

$$(10^k a - 2)(10^k b - 2) \leq n_k \leq 10^k a \cdot 10^k b,$$

$$\text{dus opp. } R = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n_k}{10^{2k}} = ab.$$

Hieruit volgt, dat de oppervlakten van twee homothetische puntverzamelingen gelijk zijn: immers als F_1 en F_2 homothetisch zijn, dan correspondeert met iedere afgesloten V_k die in F_1 ligt een afgesloten vierkant W_k in F_2 . Daar deze W_k hoogstens randpunten gemeen hebben, en opp. $W_k = \text{opp. } V_k$, volgt uit Stelling 1, dat opp. $F_2 \geq \text{opp. } F_1$. Evenzoo blijkt dat opp. $F_1 \geq \text{opp. } F_2$, dus opp. $F_1 = \text{opp. } F_2$.

Heeft de rechthoek R een willekeurigen stand, dan volgt uit het voorafgaande dat opp. $R = \text{opp. van een parallelogram } P$ met een zijde $//$ aan een zijde van de $V_0 = \text{opp. van een rechthoek } S$ met zijden $//$ aan die van V_0 , terwijl basis maal hoogte bij R , P en S eender is. (zie fig.).



Uit deze stelling volgt dat de oppervlakten van congruente puntverzamelingen gelijk zijn, en hieruit, dat de oppervl. van iederen driehoek $\frac{1}{2}$ basis maal hoogte is. Niet alleen is hiermee de theorie van de oppervlakten van veelhoeken gegrondvest, maar iedere puntverzameling heeft een oppervlakte, zoodat men bijvoorbeeld

bij den cirkel geen nieuwe definitie heeft te geven. Om de draagwijdte van dezen opzet aan te toonen, bewijzen we nog de volgende

Stelling 3. Als de begrensde puntverzameling F bestaat uit oneindig veel puntverzamelingen (P_m), waarvan alle grenzen dun zijn, en die twee aan twee hoogstens grenspunten gemeen hebben, dan is

$$\text{opp. } F = \sum_1^{\infty} \text{opp. } P_m,$$

onverschillig of geheele of gedeeltelijke grenzen van de P_m al of niet bij F gerekend worden.

Bewijs. Voor iedere m is opp. $F \geq \text{opp. } P_1 + \dots + \text{opp. } P_m$, waaruit

$$\text{opp. } F \geq \sum_1^{\infty} \text{opp. } P_m.$$

Zij k een natuurlijk getal, F_k de puntverzameling bestaande uit de $n_k(F)$ afgesloten V_k die in F liggen. De in F_k liggende grenzen

γ_m van de P_m , $m = 1, 2, \dots$ vormen samen een gesloten verzameling S . Want als A een verdichtingspunt van S is, dan is A geen inwendig punt van een P_m , dus moet volgens het onderstelde tot een γ_m behooren. Wij overdekken γ_m door een eindig aantal rechthoeken (S_m) met totale oppervlakte $< \frac{1}{2^m k}$, $m = 1, 2, \dots$

Daar S gesloten is, wordt S reeds overdekt door een eindig aantal μ der gebruikte rechthoeken. De punten van F_k , die tot minstens één van deze μ rechthoeken behooren, vormen een eindig aantal veelhoeken q , met $\Sigma \text{ opp. } q < \frac{1}{k}$. De andere punten van F_k vormen een eindig aantal veelhoeken Q , waarvan iedere een deel is van een P_m , zoodat $\Sigma \text{ opp. } Q \leq \sum_{m=1}^{\infty} \text{ opp. } P_m$.

Uit stelling 1 volgt nu

$$\frac{n_k(F)}{10^{2k}} = \text{opp. } F_k = \Sigma \text{ opp. } q + \Sigma \text{ opp. } Q < \frac{1}{k} + \sum_{m=1}^{\infty} \text{ opp. } P_m.$$

Voor $k \rightarrow \infty$ levert dit

$$\text{opp. } F \equiv \sum_{m=1}^{\infty} \text{ opp. } P_m.$$

Daar ook $\text{opp. } F \equiv \sum_{m=1}^{\infty} \text{ opp. } P_m$, is de stelling bewezen.

Uit deze stelling volgt, dat de opp. van een cirkel de limiet is van de opp. van ingeschreven (niet noodzakelijk regelmatige) veelhoeken, als de grootste zijde tot nul nadert. Daar de afstanden van het middelpunt tot alle zijden naderen tot den straal R , hebben de omtrekken der ingeschreven veelhoeken tot limiet $\frac{\text{opp. cirkel.}}{1/2 R}$.

Wij hebben dus den omtrek gedefinieerd met behulp van de oppervlakte.

Om de zaak niet gunstiger voor te stellen dan ze is, construeeren wij binnen een vierkant Q met zijde 1 oneindig veel vierkanten q_n , die aan de volgende voorwaarden voldoen:

- 1° geen twee q_n hebben een inwendig punt of randpunt gemeen.
- 2° ieder vierkant, dat binnen Q ligt bevat een q_n („de q_n dringen overal binnen Q door”).
- 3° $\Sigma \text{ opp. } q_n = 1/2$.

De punten van Q , die binnen geen q_n liggen, vormen een verzameling R met opp. $R = 0$, daar $n_k(F) = 0$ voor iedere k . De q_n vormen een verzameling S met opp. $S = 1/2$, volgens stelling 3. Het

vierkant Q met oppervlakte bestaat dus uit twee deelen met opp. $\frac{1}{2}$ en 0.

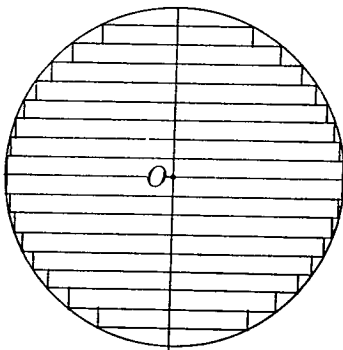
Is F de verzameling der punten binnen Q met rationale afstanden tot de zijden van Q , en F^1 de rest van Q , dan zien we dat Q bestaat uit de beide deelen F en F^1 , die ieder de oppervlakte nul hebben.

In een vierkant $ABCD$ met zijde 1 trekken we de rechte EF die de middens E en F van AB en CD verbindt. Zij R_1 de rechthoek met basis $\frac{1}{5}$ en hoogte $\frac{1}{2}$, waarvan de basis ligt op AD , even ver van A als van D . In iedere van de beide overige rechthoeken ϱ_1 en ϱ_2 van $AEFD$ plaatsen wij een rechthoek (R_2 en R_3) met basis $\frac{1}{5^2}$ en hoogte $\frac{1}{2}$, waarvan de basis weer een middensegment is van de basis van ϱ_1 , resp. ϱ_2 . In iedere van de vier nog overblijvende rechthoeken $\varrho'_1, \varrho'_2, \varrho'_3$ en ϱ'_4 van $AEFD$ plaatsen we een rechthoek (R_4, R_5, R_6, R_7) met basis $\frac{1}{5^3}$ en hoogte $\frac{1}{2}$, waarvan de basis een middensegment is van die van $\varrho'_i, i = 1, 2, 3, 4$. Dit proces eindigt nooit. De lijnsegmenten van rechthoek $AEFD$ die $\parallel AB$ zijn, de lengte $\frac{1}{2}$ hebben en die binnen geen R_n loopen, verplaatsen wij over den afstand $\frac{1}{2}$ in hun eigen richting, zoodat zij een deel S van rechthoek $EBCF$ gaan vormen. Zij W de verzameling bestaande uit S en de rechthoeken R_n , dan heeft W de lengte 1 en overal de breedte $\frac{1}{2}$. Maar de oppervlakte van W is

$$\Sigma \text{ opp. } R_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{2^2}{5^3} + \dots \right) = \frac{1}{6} < \frac{1}{2}.$$

De „methodus indivisibilium” van Cavalieri laat ons dus hier in den steek. Men bewijst echter gemakkelijk, dat Cavalieri's stelling juist is voor puntverzamelingen met dunne grenzen.

§ 3. Dat de inhoud van een cylinder grondvlak maal hoogte



is volgt gemakkelijk uit het stereometrische analogen van Stelling 3. En hieruit weer op dezelfde manier dat de inhoud van een bol (straal R) de limiet is voor $n \rightarrow \infty$ van de som van de inhouden van n cylinders die eenzelfde middellijn tot as hebben en tot hoogte $\frac{R}{n}$ zie fig.), d.w.z.



Dec. 1932

Prof. Dr. J. F. KOKSMA,

geb. te Heerenveen 21 April 1904, studeerde te Groningen van 1922—1927, 1926 Leeraar M. T. S. te Groningen, 1927—1930 aan het Gereformeerd Gymnasium te Kampen, promoveerde in 1930 te Groningen, studeerde daarna in Göttingen. Sinds 1931 Hoogleeraar aan de Vrije Universiteit te Amsterdam.

$$\begin{aligned}
2 \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \pi R^2 \left(1 - \frac{k^2}{m^2}\right) \cdot \frac{R}{m} &= 2 \pi R^3 \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \frac{m^2 - k^2}{m^3} = \\
&= 2 \pi R^3 \lim_{m \rightarrow \infty} \left\{1 - \frac{(m+1)(2m+1)}{6m^2}\right\} = \frac{4}{3} \pi R^3.
\end{aligned}$$

De oppervlakten van gebogen oppervlakken moeten gedefinieerd worden. Als voorbeeld kiezen wij eerst den bol; daarna gaan wij over tot een algemeene definitie.

Wij trachten de oppervlakte van een bol te definieeren met behulp van den inhoud, zooals wij den omtrek van een cirkel gedefinieerd hebben met behulp van zijn oppervlakte.

Beschouw op het boloppervlak een triangulatie en bereken de som van de oppervlakken van de *vlakke* driehoeken $\triangle PQR$ der triangulatie. Wij vragen ons af, wat er met deze som gebeuren kan, als we een oneindige serie van triangulaties beschouwen waarbij de grootste zijde die bij de driehoeken $\triangle PQR$ voorkomt, nul tot limiet heeft.

De som van de inhouden der viervlakken, die één hoekpunt in het middelpunt O van den bol hebben, en $\triangle PQR$ als overstaand zijvlak, heeft de limiet $\frac{4}{3} \pi R^3$, nl. den inhoud van den bol.

De eisch nu, dat de grootste zijde van alle $\triangle PQR$ tot nul moet naderen, laat nog zóóveel vrijheid, dat daarmee bijvoorbeeld iedere van de drie volgende eischen verenigbaar is: (verg. met den cirkel, p. 159, waar zoo'n moeilijkheid zich niet voordeed).

A. de grootste en de kleinste afstand van O tot de vlakken PQR hebben beide R tot limiet.

B. die beide limieten zijn $\frac{1}{2} R$,

C. die beide limieten zijn nul.

Men heeft wegens $\frac{1}{3} \lim \Sigma$ (opp. $\triangle PQR \times$ afstand van O tot vlak PQR) $= \frac{4}{3} \pi R^3$

$$\begin{aligned}
\lim \Sigma \text{ opp. } \triangle PQR &= 4 \pi R^2 \text{ in geval A,} \\
&= 8 \pi R^2 \text{ in geval B,} \\
&= \infty \text{ in geval C.}
\end{aligned}$$

Geval A wordt verwezenlijkt als de hoeken van alle $\triangle PQR$ tusschen twee vaste grenzen h en $\pi - h$ ($h > 0$) blijven (noodig is dit echter niet).

Voor den bol komen we zodoende tot de volgende steekhoudende definitie:

de oppervlakte van een bol is de limiet van de som der oppervlakten der vlakke driehoeken van een veranderlijke triangulatie, als de grootste zijde van alle driehoeken tot nul nadert, en de hoeken van alle driehoeken tusschen twee vaste grenzen h en $\pi - h$ ($h > 0$) blijven.

§ 4. Uit het volgende zal blijken dat een dergelijke definitie voor alle oppervlakken steek houdt, die gedefinieerd worden als volgt:

binnen en op een dunne gesloten kromme C zonder dubbelpunten, liggende in een u, v vlak, zijn gegeven 3 functies

$$x = x(u, v) \quad y = y(u, v) \quad z = z(u, v)$$

voorzien van continue partieele afgeleiden $x_u, x_v, y_u, y_v, z_u, z_v$. Aan elk punt (u, v) binnen en op C voegen we het punt toe, dat ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel $Oxyz$ de coördinaten $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$ heeft. Daardoor is een stuk oppervlak S in de x, y, z -ruimte bepaald.

Het binnengebied G van C verdeelen wij in driehoeken $\Delta(u, v)$, waarvan alle hoeken tusschen twee vaste grenzen h en $\pi - h$ ($h > 0$) liggen.

Bewering: de som van de oppervlakten van de vlakke driehoeken Δ in de x, y, z -ruimte, die tot hoekpunten hebben de punten behoorende bij de hoekpunten der $\Delta(u, v)$ heeft een limiet, als de bovenste grens van de zijden van alle $\Delta(u, v)$ tot nul nadert.

Deze limiet noemen we de oppervlakte van S .

Bewijs. Van een der driehoeken $\Delta(u, v)$ noemen we de hoekpunten $(u_1, v_1), (u_2, v_2)$ en (u_3, v_3) . De corresponderende hoekpunten van Δ : $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ en (x_3, y_3, z_3) . Zonder bezwaar kunnen we de oppervlakten van $\Delta(u, v)$ en Δ voorstellen door $\Delta(u, v)$ en Δ . Zijn $\Delta(y, z), \Delta(z, x)$ en $\Delta(x, y)$ de oppervlakten van de projecties van Δ op het yz -vlak, zx -vlak en xy -vlak, dan is

$$\Delta = \sqrt{\Delta(y, z)^2 + \Delta(z, x)^2 + \Delta(x, y)^2} \quad \dots \quad (I)$$

$$\pm \Delta(y, z) = (y_2 - y_1)(z_3 - z_1) - (z_2 - z_1)(y_3 - y_1)$$

Wij kiezen nu in $\Delta(u, v)$ een willekeurig punt (u^*, v^*) , dan is

$$\begin{aligned} \pm \Delta(y, z) = & \{(u_2 - u_1) y_u(u^*, v^*) + (v_2 - v_1) y_v(u^*, v^*)\} \times \\ & \times \{(u_3 - u_1) z_u(u^*, v^*) + (v_3 - v_1) z_v(u^*, v^*)\} - \\ & - \{(u_2 - u_1) z_u(u^*, v^*) + (v_2 - v_1) z_v(u^*, v^*)\} \times \\ & \times \{(u_3 - u_1) y_u(u^*, v^*) + (v_3 - v_1) y_v(u^*, v^*)\} + \\ & + \Theta \cdot 8 M s^2 \omega + 8 s^2 \omega^2, \text{ waarin} \end{aligned}$$

$|\Theta| < 1$, $M \equiv$ een getal dat het maximum van den modulus van iedere der 6 partieele afgeleiden $x_u, \dots, z_v$ binnen en op C overtreft, $s =$ de omtrek van $\Delta(u, v)$ en ω een getal dat de schommelingen van die 6 partieele afgeleiden in alle driehoeken $\Delta(u, v)$, waarin G verdeeld is, overtreft. Dank zij de onderstelling aangaande de $\Delta(u, v)$, is voor al deze driehoeken $s^2 < N \Delta(u, v)$ waarin N een constante is. Bijgevolg:

$$\left. \begin{aligned} \pm \Delta(y, z) &= (y_u z_v - z_u y_v)_{u^*, v^*} \Delta(u, v) + \Theta K \omega \Delta(u, v) \\ \text{Evenzoo:} \\ \pm \Delta(z, x) &= (z_u x_v - x_u z_v)_{u^*, v^*} \Delta(u, v) + \Theta' K \omega \Delta(u, v) \\ \pm \Delta(x, y) &= (x_u y_v - y_u x_v)_{u^*, v^*} \Delta(u, v) + \Theta'' K \omega \Delta(u, v) \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

waarin $|\Theta|$, $|\Theta'|$ en $|\Theta''| < 1$ en K een constante.

Zij nu ε een willekeurig positief getal. Wij beschouwen eerst de $\Delta(u, v)$, waarop $|y_u z_v - z_u y_v|_{u^*, v^*}$, $|z_u x_v - x_u z_v|_{u^*, v^*}$ en $|x_u y_v - y_u x_v|_{u^*, v^*}$ alle $< \varepsilon$ zijn. Zoodra de zijden van alle $\Delta(u, v)$ voldoende klein zijn, is $K\omega < \varepsilon$, dus de Δ behoorende bij iedere der beschouwde $\Delta(u, v)$ is volgens I en II kleiner dan $\Delta(u, v) \varepsilon \sqrt{12}$. De som van al deze Δ is dus kleiner dan $\varepsilon \sqrt{12} \times$ opp. G . Voor de andere Δ geldt

$$\begin{aligned} \Delta &= \Delta(u, v) \sqrt{\{(y_u z_v - z_u y_v)_{u^*, v^*} + \Theta K \omega\}^2 + \text{cycl.}} = \\ &= \Delta(u, v) \left\{ \sqrt{(y_u z_v - z_u y_v)_{u^*, v^*}^2 + \text{cycl.}} + \frac{\Theta}{\varepsilon} (24 K M^2 \omega + 3 K^2 \omega^2) \right\} \end{aligned}$$

waarin $|\Theta| < 1$.

Zijn de zijden van alle $\Delta(u, v)$ voldoende klein, dan is

$$24 K M^2 \omega + 3 K^2 \omega^2 < \varepsilon^2.$$

Uit dit alles volgt, dat bij voldoende kleinheid van de zijden van alle $\Delta(u, v)$ de som van alle Δ zoo weinig als men wil afwijkt van

$$\iint_G \sqrt{(y_u z_v - z_u y_v)^2 + \text{cycl.}} \, du \, dv,$$

waarmee niet alleen de stelling bewezen is, maar ook een uitdrukking gevonden is voor de oppervlakte van S .

Opm. 1. Voor den vorm onder het wortelteeken kan geschreven worden $EG - F^2$, waarin

$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2$$

$$F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$$

$$G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2.$$

Opm. 2. Als overal in G de functie $EG - F^2$ positief is, mag de eisch, dat de hoeken van de $\Delta(u, v)$ alle tusschen h en $\pi - h$ ($h > 0$) liggen, vervangen worden door den eisch dat de hoeken van alle Δ (in de x, y, z ruimte) tusschen twee dergelijke grenzen liggen.

Het verdient aanbeveling, kennis te nemen van H. VI van de „Inleiding tot de leer der verzamelingen” door de H.H. Haalmeyer en Schogt, waar niet alleen de oppervlakten behandeld worden, maar ook de algemeene maattheorie van Borel en Lebesgue.

UITSLAG VAN DE ENQUÊTE

*betreffende het derde vraagstuk, dat in 1931 op het schriftelijk
eindexamen voor Algebra is opgegeven.*

Dit vraagstuk luidde als volgt:

„Van een quadratische functie raakt de graphiek in den oorsprong aan de X -as en gaat door het punt $(-2, -2)$. Welke is de functie?

Welke rechte evenwijdig met de rechte $y = x$ raakt aan deze graphiek?

Van welke quadratische functie snijdt de graphiek de X -as in de punten, waarvoor x de waarden -2 en 6 heeft, terwijl de functie voor $x = 0$ de waarde 6 aanneemt?

Wat kunt ge zeggen bij vergelijking van de graphieken der beide functies, van welke in dit vraagstuk sprake is?”

Aan alle leeraren in de wiskunde aan Hoogereburgerscholen met vijfjarigen cursus B, Lycea en Meisjeshoogereburgerscholen met 5-/6-jarigen cursus is een vragenformulier toegezonden met het verzoek dit ingevuld en onderteekend te willen terugzenden.

Van de 490 leeraren, aan wie een vragenformulier is toegezonden, hebben er 181 aan dit verzoek voldaan.

Er waren twee vragen gesteld, waarvan de eerste luidde:

V r a a g 1. Acht U het 3e vraagstuk Algebra, opgegeven op het schriftelijk eindexamen 1931, te moeilijk? Zoo ja, zoudt U dan Uw antwoord hieronder nader willen toelichten?

Deze vraag werd door 97 inzenders met „Nee” en door 61 met „Ja” beantwoord, terwijl 17 inzenders het vraagstuk ongeschikt vonden, zonder er zich verder over uit te laten of ze het al of niet te moeilijk vonden. Door 6 inzenders is deze vraag niet beantwoord; 5 van hen deelden mee, dat ze zich van beantwoording der vraag onthouden hadden, omdat ze geen les in de 5e klasse geven.

Bijna alle 61 inzenders, die het vraagstuk te moeilijk achtten, gaven als nadere toelichting van hun antwoord, dat met dit vraagstuk het terrein der graphische voorstellingen wordt verlaten om dat der analytische meetkunde te betreden en het dus buiten het eindexamenprogramma valt, dat wel graphische voorstellingen maar niet analytische meetkunde voorschrijft.

De tweede vraag luidde:

Vraag 2. Wat mag naar Uwe meening op het schriftelijk eindexamen omtrent de graphische voorstellingen gevraagd worden?

Er konden zich 81 inzenders vereenigen met de stof zooals die omschreven is in den brief van het College van Inspecteurs van het Middelbaar Onderwijs, welke gepubliceerd is in het Weekblad voor Gymnasiaal en Middelbaar Onderwijs van 6 November 1929 (26e Jaargang No. 10), blz. 314—315.

Betreffende de graphische voorstellingen staat er te lezen:

„De eenvoudige grafische voorstellingen kunnen zich bepalen tot de grafieken van de functies:

$$y = ax + b; y = ax^2 + bx + c; y = \frac{ax + b}{cx + d}.$$

De behandeling van de functie $ax^2 + bx + c$ voert van zelf tot het onderzoek van maxima en minima van kwadratische functies; bij $\frac{ax + b}{cx + d}$ dient men vooral te letten op de asymptoot loodrecht op de X-as en die loodrecht op de Y-as.”

Er waren 6 inzenders, die niet zoo ver wilden gaan en die de graphische voorstellingen wilden beperken tot de graphieken van de functies $y = ax + b$ en $y = ax^2 + bx + c$.

Verscheidene inzenders wilden echter verder gaan. Hieronder zijn de functies vermeld, welke zij, behalve die, in het schrijven van het College van Inspecteurs genoemd, zouden behandeld willen zien.

21 inzenders: de functie $y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx^2 + ex + f}$ (één van hen achtte van deze laatste functie wel een discussie van het teeken, maar niet een graphische voorstelling gewenscht);

2 inzenders: de gebroken functie, waarvan de teller van den eersten of tweeden graad en de noemer van den eersten graad is;

1 inzender: de functie $y = \frac{f(x)}{g(x)}$, waarin $f(x)$ en $g(x)$ geheele

rationeele functies van x zijn, die gemakkelijk in factoren van den eersten of tweeden graad kunnen worden ontbonden;

1 inzender: de functies $y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx^2 + ex + f}$, $y = 2^x$ en $y = {}^2\log x$;

2 inzenders: de impliciete functie $x^2 + y^2 = r^2$;

1 inzender: de impliciete functies

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

2 inzenders: de goniometrische functies, de exponentiële functie en de logarithmische functie met verschillende grondtallen.

Er was 1 inzender, die de graphische voorstellingen wilde bepalen tot de graphieken van de functies $y = Ax + B$, $y = Ax^2 + Bx + C$, $y = \frac{Ax^2 + Bx + C}{A'x^2 + B'x + C}$ en een zeer beknopte bespreking van $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ gewenscht achtte.

In plaats van de graphische voorstellingen wenschten 10 inzenders de beginselen der analytische meetkunde op het programma van de H.B.S. geplaatst te zien, terwijl 1 inzender als programma voor de wiskunde op de H.B.S. het volledige programma van de wiskunde van de B-afdeeling van het Gymnasium, met beperking van zuiver technische cijfersommen, wenschte overgenomen te zien.

Voorts legden 20 inzenders er den nadruk op, dat de graphische voorstellingen uitsluitend tot doel moeten hebben bijzonderheden van een of ander functioneel verband ook door een meetkundige figuur toe te lichten en 5 van hen spraken daarom den wensch uit, dat er bij het opnemen van de graphieken als examenstof rekening mee zal worden gehouden, dat zij den aanschouwelyken kant moeten blijven vormen bij het algebraïsch onderzoek van een functioneel verband.

Ten slotte achtten 17 inzenders geen schriftelijk, maar alleen een mondeling examen in de graphische voorstellingen gewenscht.

Door 15 inzenders is geen antwoord op de 2e vraag gegeven, waaronder zich de 5 bevinden, die zich ook van beantwoording der eerste vraag onthouden hebben, omdat ze geen les in de 5e klasse geven.

UIT HET VERSLAG DER STAATSEXAMEN-
COMMISSIE 1932.

Aantal malen, dat is toegekend de beoordeeling:	Wiskunde.			Natuur- wetenschappen.		
	<i>a</i> Algebra.	<i>b</i> Meetkunde.	<i>c</i> Trigonometrie en anal. meetk.	<i>a</i> Natuurkunde.	<i>b</i> Scheikunde.	<i>c</i> Nat. historie.
(Voor diploma A.)						
Zeer goed (5)	3	2	—	—	—	—
Goed (4)	28	28	—	—	—	—
Voldoende (3)	77	71	—	—	—	—
Onvoldoende (2)	68	55	—	—	—	—
Slecht (1)	51	54	—	—	—	—
(0)	2	1	—	—	—	—
Totaal	229	211	—	—	—	—
(Voor diploma B.)						
Zeer goed (5)	—	—	—	—	—	—
Goed (4)	6	6	5	6	8	20
Voldoende (3)	24	15	21	14	20	13
Onvoldoende (2)	7	9	9	15	11	8
Slecht (1)	6	5	9	8	3	2
(0)	1	1	1	—	—	—
Totaal	44	35	45	43	42	43

De uitkomsten van het examen in de *wiskunde* zijn vervat in de bovenstaande tabel. Bevredigend zijn deze cijfers nog steeds niet. In verschillende vorige verslagen is de opmerking gemaakt, dat tal van kandidaten hun heil hebben gezocht in het van buiten leeren

van allerlei onnutte, voor het inzicht zelfs schadelijke regels en formules. Hoewel de subcommissie vóór de wiskunde meent, dat te dezen opzichte wel van *eenige* verbetering kan worden gesproken, aarzelt zij toch geen oogenblik ook dit jaar haar verslag weer met deze opmerking te beginnen.

Bij de *A-examens* in *stelkunde* bleek dikwijls, op hoe ontstellend slechte wijze sommige kandidaten zijn voorbereid, als zij voor de commissie durven verschijnen. Er waren ook nu weer verschillende, die verklaarden, aan graphische voorstellingen te hebben gedaan, maar die de graphiek van $y = 3x$ niet konden schetsen, ook niet *punt voor punt*; er was een candidaat, die, toen de examiner hem ten slotte (ten einde te kunnen beslissen tusschen de cijfers 0 en 1) de vierkantsvergelijking $2x^2 + x - 3 = 0$ ter oplossing voorlegde, antwoordde, dat hij zulk een „vreemde vergelijking” nooit gezien had; hij zei: „ik kan alleen een vierkantsvergelijking oplossen, waarbij rechts evenveel keer x^2 voorkomt als links”. Ten slotte is der subcommissie in levendige herinnering gebleven een candidaat, die, na ijverige, maar vergeefsche pogingen van de zijde van den examiner om het examen althans in één enkel opzicht te doen slagen opmerkte: „och, mijnheer, doe u maar geen moeite; ik ben heelemaal geen ernstige candidaat; ik ben leerling van de 5de klasse van een lyceum en doe het examen alleen maar om eens te zien, in welke vakken ik het volgend jaar hard zal moeten werken”. Deze gevallen zijn wellicht uitersten; zij staan echter niet alleen en geven, naar de meening der subcommissie, een voldoende antwoord op de vraag, waarom toch zooveel examens onvoldoende of slecht zijn. De voorbereiding der kandidaten is er nu eenmaal naar.

Enkele speciale tekortkomingen, die de subcommissie dit jaar heeft geconstateerd, mogen hier worden opgenoemd.

Nog steeds is niet voldoende het besef doorgedrongen, dat men op alle vragen, die omtrent een kwadratischen vorm, zooals $x^2 - 3x - 10$, kunnen worden gesteld, kan antwoorden door den vorm eerst in één der gedaanten $(x + p)^2 + q$ of $(x - \alpha)(x - \beta)$ te brengen. Een candidaat, die in deze materie geoefend is, heeft geen moeite om uit te maken, wanneer $x^2 - 3x - 10 > 0$ is, of om aan te toonen, dat $x^2 + 3x + 10$ steeds positief is. Veelal dachten de kandidaten, dat een kwadratische vorm steeds positief is, als zijn discriminant dit is.

Het schetsen van de graphische voorstelling van een quotient als $y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - x - 6}$ kostte dikwijls ontzaglijk veel moeite, ook al had de candidaat te voren verklaard, dit onderwerp bestudeerd te hebben. Een vraag als deze: „Hoe verandert y van teeken, als x de waarde 3 passeert?” wordt soms niet eens begrepen, soms zelfs niet door B-candidaten.

Een goed begrip van wat men onder den wortel van een vergelijking verstaat, was dikwijls afwezig. Het onderwerp invoeren en verdrijven van wortels was evenmin voldoende bestudeerd, en al waren er kandidaten, die, na een vergelijking met wortelvormen door kwadraatverheffing te hebben opgelost, wisten, dat de gevonden uitkomsten moesten worden gesubstitueerd (sommigen wilden in de allerlaatste vergelijking substitueeren), vrijwel geen der kandidaten begreep, *waarom* dit substitueeren noodzakelijk was.

Bij het afnemen der *meetkunde*-examens aan de *A-candidaten* bleek aan de kennis van de omwentelingslichamen, met name aan die van den bol, zeer veel te ontbreken. De subcommissie wil hier nog eens uitdrukkelijk vermelden, dat de meening van vele candidaten, dat deze gedeelten der meetkunde mogen worden weggelaten, op een misverstand berust. Zij geeft haar opvolgster in overweging, meer dan tot dusver haar aandacht aan dit deel der stereometrie te wijden.

De vlakke meetkunde der A's was in vele gevallen onvoldoende of slecht. Blijkbaar wordt door velen dit vroeger behandelde deel der meetkunde niet voldoende gerepeteerd. De uitdrukking „algebraïsche analyse” is veelal onbekend. Van de constructie der regelmatige veelhoeken zijn tal van kandidaten niet op de hoogte; om de grenzenlooze onwetendheid van sommigen hunner te typeeren, moge hier het merkwaardige geval vermeld worden van een candidaat, aan wien gevraagd werd, een regelmatigen vijfhoek te construeeren, welke candidaat, na eerst zonder aarzeling geantwoord te hebben: „die bestaat niet!”, blijkbaar geschrokken van de houding van den examiner, uitriep: „naar uw gezicht te oordeelen, zou ik weer zeggen van wel!”. Aan dit en de vroegere voorbeelden, die niet op zich zelf staan, is te zien, hoe ook de subcommissie voor wiskunde dikwijls gedwongen is, geheel onnut werk te verrichten.

Bij de *B-candidaten* is de opleiding, zooals vanzelf spreekt, in tal van gevallen serieuzer. Toch zou ook daar nog heel wat verbe-

terd kunnen worden. Een onderdeel, waaraan de kandidaten hun aandacht moeten wijden, is b.v. de eliminatie van grootheden. In de analytische meetkunde komt het bij eliminatie van een of meer parameters nogal eens voor, dat men zonder omvangrijke berekeningen niet kan klaarkomen; in zulke gevallen is het nuttig, dat de kandidaten kunnen aangeven, *hoe* ze zullen elimineeren niet alleen, maar ook, *van welken vorm* het resultaat van de eliminatie zal zijn. Nog een opmerking over de analytische meetkunde moge hier tegelijkertijd gemaakt worden: de kennis en het begrip der *bundels* is over het algemeen onvoldoende. Dit geldt niet alleen van kegelsnedenbundels, maar evenzeer van cirkelbundels en lijnenbundels. Dikwijls was een vraag als deze: „stel de vergelijking van den bundel op, die alle cirkels bevat, die door twee gegeven punten gaan”, nog te moeilijk. Trouwens de indruk der subcommissie is deze, dat in het algemeen de analytische meetkunde den kandidaten het moeilijkst viel. Daaraan zal in de toekomst meer studie moeten worden gegeven.

De stelkunde en de meetkunde der B-kandidaten levert niet veel stof tot bijzondere opmerkingen. Met de trigonometrie staat het nog steeds minder gunstig; hier kwam in tal van gevallen een gebrek aan oefening voor den dag, dat ontstellend mag heeten. Hier zij nogmaals de raad gegeven, die ook in het verslag van 1931 te vinden is: weinig formules, veel oefening in het afleiden en het hanteeren er van!

Daar de subcommissie voor *natuurkunde* tot haar spijt constateert, dat méér dan de helft der examens voor dit onderdeel onvoldoende zijn, welk resultaat ongunstig afsteekt bij het vorige jaar, dringt zij er nogmaals met klem bij de kandidaten, die zich aan dit examen zullen onderwerpen, op aan, zich degelijk voor dit onderdeel voor te bereiden, liefst onder beproefde leiding, om zodoende hoofdzaken van bijzaken te leeren onderscheiden. Ook ditmaal neemt de subcommissie de vrijheid eenige tekortkomingen naar voren te brengen, die zoo dikwijls door haar werden waargenomen.

Met de kennis der eenheden, waarmee de kandidaten toch goed op de hoogte dienen te zijn, om met de formules te kunnen opereeren, was het dikwijls treurig gesteld: dynes, ergen en gramcentimeters werden telkens weer met elkaar verward. Enkele kandidaten bleken niet op de hoogte te zijn van de beteekenis en de grootte van

het mechanisch warmte-aequivalent, wisten zelfs niet, waaraan de zichtbare veranderingen, die vaste stoffen, vloeistoffen of gassen bij verwarming ondergaan, toegeschreven dienen te worden. De kennis van de trillingsleer was dikwijls zeer oppervlakkig en slecht: verschillende kandidaten begrepen niet, waarom men bij het geluid geen polarisatieverschijnselen kent, waren niet op de hoogte van het karakteristieke van een staanden trillingstoestand, konden geen verklaring geven van het optreden van kleuren in dunne vliezen, van de buigingsverschijnselen door een tralie, enz. Het uitvoeren van eenvoudige beeldconstructies liet nogal eens te wenschen over; de mondelinge toelichtingen en de bijbehorende berekeningen moesten door de examinatoren soms aanmerkelijk worden gecorrigeerd.

Evenals vorige jaren bleek vooral de studie van de electriciteit onvoldoende verzorgd. Formules als $c = \frac{\epsilon_0}{4\pi d}$ en $i = \frac{10 H r}{2\pi} \operatorname{tg} \alpha$ bleken aan sommige kandidaten totaal onbekend te zijn; ternauwernood wisten zij aan te geven, hoe men op de aanwezigheid van een electrischen stroom kan reageeren. Met de begrippen electromotorische kracht, klemspanning en stroomeffect was menig candidaat niet goed vertrouwd. Transformatoren, gloeidraadelectroden, dynamo's waren door sommige kandidaten „nog niet behandeld”. Om niet te veel in herhalingen te vervallen, wordt den kandidaten vooral op het hart gedrukt nog eens de verslagen van vorige jaren ter hand te nemen.

De resultaten van het examen in de *scheikunde* zijn heel wat gunstiger dan die van het examen in de natuurkunde. Het aantal voldoende examens is 66.7 % (het vorig jaar 60 %). Vergist de commissie zich niet, dan hebben haar herhaalde waarschuwingen in de verslagen ten slotte bewerkt, dat vragen omtrent het chemisch evenwicht met meer vrucht konden worden gesteld dan vorige jaren. Waar het echter de meer eenvoudige leerstof betrof: toepassingen van de dubbele omzettingen, eigenschappen en bereidingen van stoffen als joodwaterstof, zwaveldioxyde, natriumarseniet, aethyleen, mierenzuur, enz., verder grepen uit de maatanalyse, kon de commissie geen verbetering bespeuren. Zonder potlood en papier durfden verschillende kandidaten niet van wal steken; op de vraag: „en wat krijgt u eigenlijk bij deze reactie te zien?” bleken deze

candidaten over 't algemeen niet zeer gesteld te zijn. Tot enkele candidaten *zeker* is het nog niet voldoende doorgedrongen, dat ze ook wel het een en ander van de techniek mogen weten. Daar men toch dagelijks met toepassing van de schei- en natuurkunde te maken heeft, moet een examinandus zich niet verbazen, als de subcommissie soms een wijle vertoeft in een gasfabriek of een electrische centrale. Maar welk een teleurstelling soms voor haar: zoo werd in de gasfabriek de steenkool verbrand en was men onbekend met de energie-omzettingen in de electrische centrale.

De kennis van de organische chemie vertoonde ook verschillende hiaten. Zooals door vroegere commissies meermalen met nadruk werd gezegd, moeten de candidaten zich ook in deze materie eenigszins thuis gevoelen: met allerlei syntheses op de hoogte zijn, evenals met de eigenschappen van de steeds weer terugkeerende radicalen, waartoe elk leerboek, in gebruik op gymnasia en hogere burgerscholen, als leidraad kan dienen. Men behoort propionzuur te kunnen onderscheiden van boterzuur, te weten wat glycerine is, het woord hydreeren te verstaan, bekend te zijn met den aard der dissociatie van mierenzuur, enz. enz.

BOEKBESPREKINGEN.

O. Donker, Handleiding Nr. 1, Analyse. Delft, Naaml. Venn. W. D. Meinema, 1932. 84 bldz., f 1,90.

Het is den recensent onmogelijk, in het korte bestek van een boekbespreking een denkbeeld te geven van de geweldige hoeveelheid dwaasheden, slordigheden en fouten, die het dunne boekje herbergt. Een paar grepen uit den overstelpenden overvloed mogen den lezer een flauwe notie daarvan geven. Op bladzijde 7, in het overzicht der te memoreeren H.B.S.-formules leest men

$$\cos p - \cos q = 2 \sin \frac{1}{2}(p + q) \sin \frac{1}{2}(p - q).$$

Op bldz. 17 vindt men, dat

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ 0 & c & d \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Nadat op bldz. 30 is gezegd, dat een functie algebraïsch heet, als ze een graad bezit, volgt op bldz. 31 letterlijk het volgende:

„Transcendent zijn alle functies, die niet algebraïsch zijn. Dus functies, die geen bepaalde graad hebben (b.v. $y = \log x$) of waarvan de graad ∞ groot is (b.v. $y = x^{3.6}$). N.l. om van de graad van de laatstgenoemde functie een geheel getal te maken, zouden we moeten verheffen tot de macht ∞ .”

De limietdefinitie luidt als volgt (bldz. 35).

„Hebben we een getallenrij $a_1, a_2, a_3, \dots a_n$ (waarin n beteekent ∞ groot), en staan die getallen met elkaar in een zeker verband (b.v. een reeks), dan is het mogelijk, dat die getallen tenslotte naderen tot een zekere grenswaarde, en die grenswaarde pas op het ∞ bereiken (dus in werkelijkheid nooit), dan noemen we die grenswaarde de limietwaarde van die getallenrij.”

De onbeschrijflijk malle paragraaf over het begrip differentieeren, waarin van eenige beschouwingen gezegd wordt, dat Leibniz ze bedacht heeft, worde met stilzwijgen voorbijgegaan; de belangstellende lezer zij naar het boekje verwezen.

De recensent denkt met deernis aan de gebruikers.

J. H. S.

Woordenlijst van de Nederlandsche wiskundige vaktaal. Uitgave van den Vlaamschen Leeraarsbond O. M. O. Borgerhout, 1932. 80 bldz., frank 6,50.

In de laatste jaren is in België het Nederlandsch meer en meer voertaal van het middelbaar onderwijs, en daarmee van het middelbaar wiskunde-onderwijs geworden. Dit bracht voor de docenten eigenaardige moeilijkheden mee, in het bijzonder op taalkundig gebied. De Nederlandsche terminologie was niet algemeen bekend, men zag zich genoodzaakt, nieuwe woorden te maken, hetzij door vertaling uit het Fransch of door eigen phantasie, en het resultaat was, dat de Vlaamsche wiskundige taal een bont aanzien dreigde te krijgen. Om dit te voorkomen heeft de Vlaamsche Leeraarsbond een commissie ingesteld, die een lijst van Nederlandsche vaktermen zou aanleggen.

Dit is thans geschied: de commissie heeft vele Nederlandsche werken bestudeerd en in gevallen van twijfel haar licht opgestoken bij een aantal Nederlandsche docenten. Zoo is een lijst ontstaan, waarin, gerangschikt naar de onderwerpen, de voorgestelde termen zijn vermeld; de lijst is zeer volledig.

Blijkbaar heeft de commissie zich op het standpunt gesteld, dat de Zuidnederlandsche terminologie niet meer dan strikt noodig is van de Noordnederlandsche moet afwijken, en heeft zij deze laatste vrijwel zonder critiek aanvaard — de lijst van geraadpleegde werken vertoont boeken van zéér verschillend gehalte —; het gevolg is, dat eenige gebreken van de Noordnederlandsche vaktaal mede zijn overgenomen. De Nederlandsche vaktaal staat bij de Fransche achter in woordenrijkdom en in zuiverheid; het eerste gaf aanleiding tot moeilijkheden bij de vertaling van Fransche uitdrukkingen. Zoo is het Nederlandsch blijkbaar niet bij machte, het zeer belangrijke onderscheid tusschen „*inégalité*” en „*inéquation*” tot uitdrukking te brengen; men vindt in de lijst dan ook vermeld „ongelijkheden met één onbekende”. De malle verdeling der vergelijkingen in identieke, niet-identieke en valsche ontbreekt evenmin. Bedenkt men, hoe kort het geleden is, dat in Noord-Nederland eenige belangstelling voor de terminologie ontwaakte — tien jaar geleden was het woord „lijnstuk” in de schoolboeken nog onbekend — dan kan ons dit niet verwonderen; ik begriip best, dat de Vlamingen het niet tot hun taak rekenen, de Noordnederlandsche vaktaal te verbeteren, maar het blijft toch jammer, dat de vermelde gebreken — en eenige andere — nu ook naar België worden overgebracht. De gemiddelde Nederlander — doorsneehollander noemt hij zich zelf — geeft weinig om zijn moedertaal; een gevolg is, dat nu ook de Vlamingen gaan spreken van vlakke-eenheid en vlaktematen (in plaats van oppervlakte-eenheid, enz.) en dat hij cirkels gaat beschrijven *uit* (inplaats van *met* of *om*) een gegeven middelpunt.

Zooals men ziet, betreffen mijn aanmerkingen meer de Nederlandsche vaktaal dan het werk der Vlamingen. Wat zij hebben tot stand gebracht heeft mijn groote bewondering; zij hebben iets geleverd, waartoe hun noordelijke broeders waarschijnlijk nooit in staat zullen zijn. Zij hebben recht op onze gelukwensen, en bovendien op onze dankbaarheid. Want als het hier te lande nog ooit tot rationalisatie der vaktaal zal komen, dan vindt men den weg geëffend door den arbeid der Vlamingen. Hun Woordenlijst kan door haar volledigheid als leidraad bij de verbetering der Nederlandsche wiskundige terminologie uitstekende diensten bewijzen. J. H. S.

Noordhoff's Schooltafel.

Groningen—Batavia, P. Noordhoff N.V., 1933.

Prijs f 1.50.

De eigenaardigheid van deze tafel, die haar bij uitstek geschikt maakt voor schoolgebruik, is deze: de intervallen zijn overal zoo gekozen, dat interpolatie met evenredige deelen juiste uitkomsten geeft. Bijzondere voorschriften omtrent interpolatie behoeven dus nergens te worden gegeven.

Doordat telkens weerkerende decimalen vaak zijn weggelaten,

missen de bladzijden het compacte uiterlijk dat anders aan logarithmentafels eigen is: dit vergemakkelijkt het opzoeken zeer.

De tafel bevat: de logarithmen der getallen van 1 tot 10000, de logarithmen der goniometrische functies, en de waarden dezer functies, voorts de waarden van $(1+i)^n$ en $(1+i)^{-n}$ van $1\frac{1}{2}\%$ tot 7% voor waarden van n tot en met 50. De uitvoering is bijzonder net.

J. H. S.

P. W i j d e n e s, Algebraïsche Vraagstukken I, 7e druk. Groningen—Batavia, P. Noordhoff N.V., 1932. 128 bldz., f 2.25.

De nieuwe bewerking der Algebraïsche Vraagstukken, waarvan ik het tweede deel vroeger heb aangekondigd (Euclides VIII, bldz. 110) is thans gereed gekomen doordat ook het eerste deel is verschenen. Ook in het eerste deel is een kort overzicht van eenige belangrijke punten der theorie opgenomen, en het aantal vraagstukken is hier en daar eenigszins beperkt. Geheel nieuw is een paragraaf over ongelijkheden, bevattende een duidelijke, door figuren toegelichte theorie, gevolgd door 33 vraagstukken.

J. H. S.

P. W i j d e n e s, Lagere Algebra I, 3e druk. Groningen—Batavia, P. Noordhoff N. V., 1933. 268 bldz., f 5.50.

Deze herdruk is met zorg herzien; vooral de complexe getallen hebben hiervan geprofiteerd.

J. H. S.

INGEKOMEN BOEKEN.

Van Nicola Zanichelli, Bologna.

Gli Elementi d'Euclide e la critica antica e moderna editi da Federigo Enriques.

Van P. Noordhoff, Groningen.

- P. WIJDENES, *Algebra voor M.U.L.O.*, 1e stukje. **25ste** onveranderde druk, geb. f 1,40
- Prof. Dr. F. SCHUH, *Mechanica-vraagstukken van kantelen en uitglijden*, 44 fig., geb. f 3,25
- P. WIJDENES, *Planimetrie*. Een eenvoudig schoolboek voor het eerste onderwijs in de Vlakke meetkunde. **2de druk.** Prijs, gebonden, met gradenboog, overzicht en twee driehoeken f 3,20
Uitgave in 2 deeltjes, gecartonneerd à f 1,60
- P. WIJDENES, *Beknopte Driehoeksmeting*. **5de** omgewerkte druk. 85 fig. gec. f 2,25
- P. WIJDENES en Dr. D. DE LANGE, *Rekenboek voor de H.B.S.* I. **15de** herziene druk f 1,70

Verschenen:

P. WIJDENES

Beknopte Driehoeksmeting

5de druk, gec. f 2.25

Dr. P. MOLENBROEK—P. WIJDENES

Vlakke Driehoeksmeting

2de druk, gec. f 2.25

De eindexamenopgaven van vele Gymnasia en Lycea en de vraagstukken van de Staatsexamens getuigen van voortdurende verfijnde evolutie; deze waren de directe aanleiding en de wegwijzers voor de geheel nieuwe bewerkingen.

Zoo juist verscheen:

Analytische Meetkunde

door Dr. J. A. BARRAU

Eerste deel: HET PLATTE VLAK

2e druk, gebonden f 10.20

Voor abonne's N. T. v. Wisk., Christ. Huygens
en Euclides tot 1 Juni 1933 f 8.20

Vroeger verscheen:

Tweede deel: DE RUIMTE

gebonden f 14.50

Verschenen:

Over eenige roosterpuntproblemen

door Dr. L. W. NIELAND f 2.50

Over de vergelijking van Pell

door Dr. D. SCHEPEL f 2.50

Verschenen:

Noordhoff's Schooltafel

In slap linnen bandje f 1.50

P. NOORDHOFF N.V. : GRONINGEN—BATAVIA

MECHANICA

voor het Middelbaar onderwijs

door Dr. H. J. E. BETH en Dr. P. J. VAN LOO

Prijs, gebonden f 2.50

Ter perse om ongeveer half Maart te verschijnen:

P. WIJDENES

FUNCTIES EN GRAFIEKEN

voor het Middelbaar en voorbereidend hoger onderwijs

Werkschrift (18 bij 24 cm) 64 blz. met 27 fig.

Prijs f 1.25

3 blz. titel en voorbericht

30 blz. over functies en grafieken

4 blz. overzicht van eenige theorie van de algebra

5 blz. met zwarte figuren

21 blz. met groene ruitjes

1 blz. (en de derde zijde van de omslag) voor aantekeningen

De Theorie wordt voor het grootste deel gegeven in vragen en opgaven en het daarbij teekenen van figuren.

INHOUD.

§ 1. Statistische gegevens (slechts één voorbeeld). § 2. Het begrip afhankelijkheid. § 3. Het begrip functie. § 4. Vragen. § 5. Overgaan naar een ander argument. Reststelling. § 6. Coördinaten. § 7. De rechte lijn. § 8, 9. $y = ax^2 + bx + c$. § 10. Het teekenen van functies van x , die lineaire en kwadratische vormen bevatten. § 11. Uiterste waarde van $y = ax^2 + bx + c$.

§ 12. De functie $y = \frac{ax + b}{cx + d}$. § 13. Vragen en opgaven.

§ 14. Reeksen. § 15. Gebroken grafiek. § 16. $y = \frac{ax^2 + bx + c}{px + q}$

§ 17. $y = \frac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r}$. § 18. Limiet van een variant.

§ 19. Limiet van een functie. § 19. Algemeene herhaling.

§ 20. Eenige theorie van de algebra.



Ter herhaling voor de Eindexamens en voor het Staatsexamen.

Present-ex. worden zoo spoedig mogelijk aan alle H.B.S., Gymnasia en Lycea toegezonden.