EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN

J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

MET MEDEWERKING VAN

Dr. H. J. E. BETH
DEVENTER

Dr. E. J. DIJKSTERHUIS
OISTERWIJK

Dr. G. C. GERRITS
AMSTERDAM

Dr. B. P. HAALMEIJER
AMSTERDAM

Dr. W. P. THIJSEN
BANDOENG

Dr. P. DE VAERE
BRUSSEL

Dr. D. P. A. VERRIJP
ARNHEM

JUBILEUMNUMMER

TER GELEGENHEID VAN HET 300-JARIG BESTAAN VAN DE AMSTERDAMSCHE HOOGESCHOOL

8e JAARGANG 1931/32, Nr. 6

P. NOORDHOFF — GRONINGEN

Prijs per Jg. van 18 vel f 6.—. Voor inteekenaars op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde en Christiaan Huygens f 5.—.

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijksche afleveringen, samen 18 vel druks. Prijs per jaargang *f* 6.—. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6.—) of op „Christiaan Huygens" (*f* 10.—) zijn ingeteekend, betalen *f* 5.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

INHOUD.

☛ De redactie heeft het genoegen in deze aflevering het portret te geven van J. H. VAN SWINDEN.

DE GRONDBEGINSELS DER MEETKUNDE VAN J. H. VAN SWINDEN

Bijdrage tot het jubileum van de Universiteit van Amsterdam.

DOOR

E. J. DIJKSTERHUIS.

---

1. Wanneer men, zooals behoorlijk is, bij de viering van het derde eeuwfeest der Amsterdamsche Hoogeschool zijn aandacht gelijkelijk verdeelt over de twee zijden van de functie, die zij in ons land te vervullen heeft: een centrum van productief wetenschappelijk leven te zijn èn een instelling van onderwijs, dan is er alle aanleiding om bij het overzien van de rol, die hare dienaren in de ontwikkeling der wiskunde hebben gespeeld, niet alleen te letten op hen, die voor hun wetenschap nieuwe wegen hebben gevonden en nieuwe resultaten hebben bereikt, maar ook eens de aandacht te vragen voor een belangrijke daad van een hunner op didactisch gebied, die er toe heeft bijgedragen, voor de jongere generaties den toegangsweg tot de wiskunde en het overzicht over het tot stand gebrachte gemakkelijker en aangenamer te maken.

Ik wil daarom in de volgende bladzijden enkele opmerkingen maken over het bekende leerboek der meetkunde van den Amsterdamschen hoogleeraar J. H. van Swinden [1]), dat na zijn eerste verschijning in 1790 jarenlang een eereplaats heeft ingenomen in de Nederlandsche wiskundige literatuur en dat daarnaast in de bewerking van Jacobi [2]) ook op de beoefening van de wiskunde in Duitschland een sterken invloed heeft uitgeoefend [3]).

2. Het schrijven van Elementen der Meetkunde was in het eind van de achttiende eeuw een zaak van veel meer persoonlijk en verantwoordelijk karakter geworden dan het in de eerste eeuwen na het doordringen van de Grieksche wiskunde in West-Europa was geweest. De tijd, waarin men zich er toe kon beperken, het fundamenteele werk van Euclides (althans de boeken I—VI, XI en XII daarvan) vrijwel onveranderd te herdrukken en van commentaren te voorzien, was voorbij; er was een stemming van critiek

op Euclides ontstaan, waarin gevraagd werd, of de bewondering, die zijn systeem verdiende, nu ook verplichtte tot het slaafs navolgen van de door hem toegepaste methoden en of er dan geen betere en meer doeltreffende middelen waren, den beginner in de meetkunde in te leiden. Tegen die kritiek was ook weer verzet gerezen: Montucla had, in zijn *Histoire des Mathématiques,* een welsprekende verdediging van de Euclidische methode geleverd tegen de aanvallen, die daarop, vooral van Fransche zijde, waren gericht [4]). Simson gaf in Engeland de uitmuntende Euclides-editie uit, die in een dertigtal opvolgende drukken jarenlang het fundament van het Engelsche wiskunde-onderwijs zou blijven vormen [5]). Het is duidelijk, dat wie in 1790 een leerboek der meetkunde schreef, zich de principiëele vraag moest voorleggen, in hoeverre hij met het klassieke systeem rekening wilde houden.

En even duidelijk is het, dat met de beantwoording van die vraag nog niet alle moeilijkheden waren overwonnen. Sedert den bloeitijd der Grieksche wiskunde, waarin, om theoretische redenen, de functie van het getal in de meetkunde aanzienlijk was beperkt, waren arithmetische en algebraische begrippen en methoden in geometrische beschouwingen een veel grootere rol gaan spelen; daarnaast had de goniometrie de oogen geopend voor vroeger onvermoede mogelijkheden van berekening, terwijl door de uitvinding van de logarithmen het middel was geschapen, die berekeningen met weinig moeite uit te voeren. Het lag voor de hand, dat deze onderwerpen uit een elementair leerboek der meetkunde reeds niet meer konden worden weggelaten. Hoe moest men ze echter in het langs geheel andere wegen ontwikkelde systeem der Euclidische meetkunde invoegen?

Hoewel het volledig antwoord, dat van Swinden op deze en dergelijke vragen gaf, uit den aard der zaak slechts uit zijn leerboek zelf is af te lezen, loont het de moeite, eerst kennis te nemen van eenige algemeene beschouwingen over het wiskunde-onderwijs, die de schrijver ontwikkelt in de uitvoerige voorrede van de eerste editie. Hij wijst daar, om te beginnen, de mogelijkheid „iets van den strikten redeneer- en bewijstrant der Ouden agterweege < te laten >, onder voorwendsel van de zaaken bevattelijker voor te stellen of aangenamer te maken," rondweg af. „Den geest te vormen, denzelven aan die nauwkeurigheid van denkbeelden, aan

dien strikten redeneertrant, aan die volmaakt aaneengeschakelde bewyzen te gewennen, is een der hoofdvoorwerpen welke men zich in het onderwyzen der Meetkunde voor oogen moet stellen: eene der voornaamste redenen, die de jongelieden moeten aanzetten, om dezelve te leeren"; aldus betoogt hij [6]), zich op Quintilianus [7]) beroepend en hij is van oordeel, dat juist dit belangrijkste doel niet wordt bereikt, wanneer men zich tevreden stelt met een geringeren graad van exactheid in bepaling en bewijs, dan dien de Ouden in acht hebben genomen.

Deze principieele adhaesiebetuiging aan de Euclidische methode sluit nu echter geenszins in, dat hij nu ook aan den opbouw der meetkunde, dien Euclides geeft, niets zou durven veranderen; dat wil hij integendeel in meer dan een opzicht doen: hij streeft er naar, een naar zijn meening betere ordening der onderwerpen te geven [8]), waarin bij voorbeeld de eigenschappen van de rechte lijnen en de hoeken, die zij vormen, geheel worden afgehandeld, voordat er driehoeken en andere figuren ter sprake komen; hij beoogt verder grootere volledigheid [9]), doordat hij niet, zooals Euclides deed, slechts die stellingen wil geven, die voor het trekken van de groote lijnen van het systeem noodig en voldoende zijn, maar ook de gevolgtrekkingen wil ontwikkelen, die uit die stellingen kunnen worden afgeleid [10]); en hij ziet geen enkele reden, om alles, wat op het gebied der elementaire wiskunde na Euclides is gevonden, alleen daarom uit zijn werk weg te laten; integendeel, hij ziet met leedwezen tal van mathematische voorstellen in honderden boeken wijd en zijd verspreid liggen en zou niets liever doen, dan deze in een lichaam te verzamelen, dat ons eerst onzen rijkdom in de meetkunde zou openbaren [11]).

„De oeffening van het verstand en de scherping van den geest", die hij als resultaat van de studie van het aldus bijeengebrachte materiaal verwacht [12]), zullen echter niet kunnen worden bereikt, zonder een zekere mate van zelfwerkzaamheid van de zijde der leerlingen; om die zelfwerkzaamheid te bevorderen zal hij de bewijzen der voorstellen in het algemeen niet geven, maar slechts de gronden vermelden, waarop die bewijzen steunen; om dezelfde reden zijn ook de Werkstukken van de Voorstellen gescheiden en tot een afzonderlijk geheel vereenigd [13]); achter elk voorstel, dat nieuwe constructiemogelijkheden biedt, wordt vermeld, welke werkstukken men nu in staat is, op te lossen. „Ik laat dus die Werkstukken door de jonge lieden zelve oplossen en bewyzen en besteed eenen dag der weeke, om hunne oplossingen na te zien. Ik heb mij verwonderd over de vaardigheid, die de leerlingen in korten tijd in dit stuk verkrygen" [14]).

De schrijver, die ons zoo uitvoerig inlicht over zijn opvattingen van het doel en de inrichting van het wiskunde-onderwijs, maakt het zijn lateren lezer al even gemakkelijk bij de beantwoording van de vraag, van welke bronnen hij bij de samenstelling van zijn werk gebruik heeft gemaakt. Na de *Voorreede* volgt namelijk een uitvoerige *Aanwijzing der aangehaalde Schriften* [15]), waaruit blijkt, dat voor de eerste editie, naast de werken van de klassieke Grieksche schrijvers (Archimedes in de editie van Rivault [16]) en in de bloemlezing van Tacquet [17]), Euclides in verschillende uitgaven, waarvan vooral die van Clavius [18]) en Tacquet [19]) worden geroemd, Pappus en Ptolemaeus) doorloopend gebruik is gemaakt van het eerste deel van Wolf's *Grondbeginselen van alle Mathematische Weetenschappen* [20]), van Steenstra's *Grondbeginzelen der Meetkonst* [21]) en van Hennert's *Elementa matheseos purae* [22]). Voor bijzondere onderwerpen komen daar voornamelijk bij de werken van Cagnoli voor de gonio- en trigonometrie [23]), van Vieta [24]), Ludolph van Ceulen [25]), Snellius [26]) en Huygens [27]) voor de cyclometrie, van Maclaurin [28]) en L'Huilier [29]) voor de limietentheorie, van Montucla [30]) voor de historie. Ten slotte blijken op philosophisch terrein (gronden voor de exactheid van de meetkunde, beteekenis van definities, postulaten en axiomata) de werken van d'Alembert [31]) geraadpleegd te zijn. Deze (hier niet volledig weergegeven) lijst is in den tweeden druk, deels als gevolg van het verschijnen van nieuwe werken in de 26 jaren, die sinds de eerste uitgave waren verloopen, deels door de uitbreiding, die de inhoud bij de herziening heeft ondergaan, zeer aanzienlijk vermeerderd; het meest interessante, wat ze ons in de tweede editie leert, is, dat de schrijver thans gebruik heeft kunnen maken van het werk van den „nieuwen Euclides", Le Gendre, van wiens *Elémens de Géométrie* [32]) hij den tienden druk heeft geraadpleegd.

3. Het is uit den aard der zaak niet wel mogelijk, om in deze korte verhandeling een volledige kritische bespreking van den inhoud van het werk van van Swinden te geven. We beperken ons

dus tot een kort overzicht van dien inhoud (in de eerste editie) met enkele opmerkingen ter karakteriseering van de wijze van behandeling, om daarna op een drietal belangwekkende punten nog wat dieper in te gaan.

Het werk is verdeeld in twaalf Boeken, waarvan de eerste zeven (met uitzondering van het derde, dat over Evenredigheden en Logarithmen handelt) de Planimetrie bevatten, het achtste, getiteld *Over de maat en bereekening der hoeken,* de goniometrie, het negende, *Over de Driehoeksmeeting,* de Trigonometrie en de laatste drie de Stereometrie. Daarop volgt nog een aanhangsel *Over de Worteltrekking uit Getalen* [33]), waarna het werk besloten wordt met de boven reeds vermelde verzameling Werkstukken.

De Planimetrie begint met een als *Inleiding* betitelde reeks van algemeene opmerkingen over het wezen en de methoden der meetkunde, waarop 14 *Bepaalingen,* 5 *Algemeene Vooronderstellingen* en 6 *Algemeene Kundigheden* of *Axiomata* volgen [34]).

In Boek I worden in Afdeeling I de rechte lijnen in zich zelven beschouwd met inbegrip van loodrechten stand en evenwijdigheid, waarna Afdeeling II over de zijden en hoeken van driehoeken handelt (congruentiegevallen, ongelijkheden). In Boek II wordt over inhouden van rechtlijnige figuren gesproken [35]), waarbij, naar Euclidisch voorbeeld, ook de stelling van Pythagoras met haar gevolgen wordt afgeleid. In de theorie der evenredigheden, die Boek III bevat, komt de kwestie van de irrationale verhoudingen aan de orde (waarover straks meer); uitvoerig worden daarna geometrische, arithmetische en harmonische evenredigheden en reeksen behandeld. Hiermee wordt de theorie der logarithmen in onmiddellijk verband gebracht. De schrijver heeft namelijk nog niet de in den loop van de achttiende eeuw ontstane opvatting van de logarithme als variabele exponent van de basis van het stelsel aan zijn behandeling ten grondslag gelegd [36]); de logarithmen worden, naar het voorbeeld van de grondleggers der theorie, gedefinieerd als „getalen, in eene arithmetische reeks met nul beginnende en tegenover de getalen van eene geometrische reeks, die met 1 begint, staande" [37]).

Het vierde Boek brengt de theorie der gelijkvormigheid. Gelijkvormige figuren worden in overeenstemming met Euclides gedefinieerd als figuren, waarin overeenkomstige hoeken gelijk zijn en overeenkomstige zijden evenredig. Ook de behandeling sluit bij die van Euclides aan, behalve waar het de afleiding van de grondstelling (Euclides VI, 2) over de deelen, waarin een rechte, evenwijdig aan een zijde van een driehoek getrokken, de twee andere zijden verdeelt, betreft. Hier volgt van Swinden niet de Euclidische methode, die op vergelijking van oppervlakken van driehoeken berust, maar de tegenwoordig in de elementaire meetkunde meest gebruikte, waarbij de te vergelijken lijnstukken steeds fijner rationaal worden benaderd [38].

Boek V bevat de meetkunde van den cirkel, Boek VI die van in- en omgeschreven polygonen. Hierin zijn tal van proposities uit de werken van Snellius en Huygens verwerkt. Het zevende Boek, welks hoofddoel de bepaling van omtrek en inhoud van den cirkel is, wordt ingeleid met een beschouwing *Over de limieten der grootheden en der reedens*, de eerste verhandeling over dit onderwerp in onze taal. De schrijver merkt in zijn voorbericht op [39], dat de leer der Limieten „het eenige middel is om de Voorstellen, die de reeden van den omtrek des Cirkels tot den diameter, den inhoud van den Cirkel, van Pyramiden, Cylinders, Keegels, Spheeren, betreffen, met naauwkeurigheid te bewijzen." „Ook hebben", gaat hij voort, „zo wel Archimedes als Euclides die leer min of meer ingewikkeld gebruikt. Zij is bovendien de eenige grond waarop de bereekeningen der hooge Mathesis rusten, indien men deeze naar behooren wil verklaaren, en niet tot het onnaauwkeurig en gansch onmathematische denkbeeld van oneindig groot en oneindig klein zijne toevlugt neemen." Nadat in de tweede Afdeeling van het Boek bewezen is, dat „de omtrek van den cirkel de limiet < is > van alle de veelhoeken, die in den cirkel of om den cirkel beschreeven worden" en dat het „insgelyks met den inhoud geleegen <is>", wordt in Afdeeling III met groote uitvoerigheid over de bepaling van de reden van den omtrek des cirkels tot den diameter gesproken; daarbij wordt de berekening van Archimedes in extenso meegedeeld; vermeld worden de resultaten van Metius en Ludolph van Ceulen [40], terwijl weer behandeld worden enkele van de proposities van Snellius en Huygens, die in staat stellen, deze zelfde resultaten te bereiken met behulp van polygonen met een geringer aantal zijden.

In de Goniometrie (Boek VIII) worden, naar de gewoonte dier tijden, de goniometrische functies ingevoerd als lijnstukken, waarna iets over koordenrekening gezegd wordt en een aantal goniometrische formules (voornamelijk optellingstheoremata met gevolgen) worden afgeleid [41]).

Boek IX behandelt daarop uitvoerig de z.g. oplossing van rechthoekige en scheefhoekige driehoeken; bij de algemeene behandeling van den scheefhoekigen driehoek worden gebruikt de sinusregel, de tangensregel, de logarithmisch gemaakte cosinusregel [42]) en de formules, die de goniometrische functies van de helft van een hoek van een driehoek in de zijden daarvan uitdrukken [43]). In de behandeling van de bijzondere gevallen trekken twee oplossingen van het probleem van Snellius de aandacht, waarvan de eene ontleend is aan de lessen van N. Ypey, die in Franeker van Swinden's ambtgenoot was [44]), terwijl de andere in 1772 door den schrijver zelf gevonden werd [45]). Veelvuldig gebruik wordt gemaakt van de formules, die men tegenwoordig, ten onrechte, met den naam van Mollweide pleegt aan te duiden [46]).

In het zeer korte tiende Boek worden in nauwe aansluiting aan Euclides, Boek XI, de beginselen van de stereometrie behandeld, waarna in Boek XI over de Lichaamlijke Figuren parallelopipedum (sic) of balk, prisma of zuil en pyramide of naald gesproken wordt [47]). Het hoofddoel is daarbij de bepaling van de inhouden dezer lichamen. De schrijver heeft, zooals op zijn standpunt ten opzichte van de Euclidische Meetkunde te verwachten is, principieele bezwaren tegen de methode der indivisibilia, waarbij de lichamen worden beschouwd als samengesteld uit een oneindig groot aantal oneindig dunne vlakjes, „hetgeen geheel en al van de mathematische naauwkeurigheid afwijkt, niets dan valsche denkbeelden inboezemt, en dus geheel verworpen moet worden" [48]). Zelf volgt hij uit den aard der zaak de Euclidische methode slechts voor het parallelepipedum, maar niet voor de pyramide; hierbij wordt wel de voortgezette verdeeling in telkens twee congruente pyramiden en twee aequivalente prismata toegepast, die bij Euclides voorkomt, maar voor het trekken van de eindconclusie wordt van limietovergang gebruik gemaakt. De tweede afdeeling van Boek XI is gewijd aan de regelmatige polyeders, waarvoor de hoek van twee zijvlakken, de lengte van de as en de inhoud berekend worden.

In Boek XII komen ten slotte de eenvoudigste, geheel of ten deele door gebogen oppervlakken begrensde lichamen voor, de rol of cylinder, de keegel of conus (beide lichamen ook scheef gedacht) en de kloot of spheer. Hiervan worden oppervlak en inhoud bepaald (door limietovergangen) [49], waarna nog berekeningen volgen over de bollen, die om de regelmatige veelvlakken beschreven kunnen worden.

In de verzameling Werkstukken, die het boek besluit, beperkt de schrijver zich tot problemen, die „in den striksten zin", d.w.z. enkel met behulp van rechten en cirkels, kunnen worden opgelost. Elders in het boek worden echter ook wel werkstukken behandeld, waarvoor deze mogelijkheid niet bestaat, met name de trisectie van den hoek en de constructie van twee middenevenredigen tusschen twee lijnstukken [50].

4. Van enkele afzonderlijke onderwerpen moge thans nog iets nauwkeuriger de behandelingswijze worden nagegaan. We spreken daartoe over de fundamenten van het door van Swinden opgebouwde systeem, over zijn behandeling van de parallelentheorie en over de invoering van irrationale redens.

Over de eerste groep der fundamenten, de *Bepaalingen,* valt weinig te zeggen. Zij sluiten nauw aan bij de ὅροι van Euclides, behalve bij de bepaling van evenwijdige lijnen, die straks nader ter sprake komt. De befaamde Euclidische definitie van rechte lijn, zonder toelichting letterlijk vertaald als: *Een rechte lijn is eene zodanige lijn, die overal gelijklijk tusschen haare stippen geleegen* is" blijft even duister als in het origineel [51]. De schrijver merkt er bij op, dat bepalingen van dingen als deze, die te eenvoudig zijn om met woorden te kunnen worden uitgelegd, noodzakelijk onvolmaakt en duister zijn en verwijst verder naar d'Alembert, die in het ontbreken van een goede definitie van rechte lijn le scandale des élémens de Géométrie ziet [52].

De *Algemeene Vooronderstellingen,* die de plaats van de Euclidische *Αἰτήματα* innemen, wijken daarentegen sterk van het klassieke voorbeeld af. Men vindt weliswaar als I, II, V hierbij de eerste drie zuivere constructiepostulaten van Euclides herhaald met alleen dit verschil, dat in II ondersteld wordt, „dat het mogelijk is, een rechte lijn te verlengen, of zoveel men wil, of tot dat zij aan eene gegeeven lijn gelijk zij, of grooter dan een gegeeven lijn

C. S. Roos excudit Amstelodami 1792. *Reinr. Vinkeles Sculp.*

geb. 8 Juni 1746, 1763 student te Leiden, gepromoveerd 1766, hoogleeraar te Franeker 1766—1785, hoogleeraar te Amsterdam 1785—1823. † 1823.

PROSPECTUS.

PLANIMETRIE

VOOR MIDDELBAAR EN VOORBEREIDEND HOOGER ONDERWIJS

DOOR

DR. P. MOLENBROEK
'S-GRAVENHAGE

EN P. WIJDENES
AMSTERDAM

TWEEDE DEEL

TWEEDE DRUK

Prijs van het complete werk, groot 128 pag., met overzicht, gec. *f* 1.90.

P. NOORDHOFF N.V. — 1931 — GRONINGEN

VERKRIJGBAAR BIJ DEN BOEKHANDEL

UIT HET VOORBERICHT VAN DE EERSTE DRUK.

Bij onze besprekingen over de besnoeiing van het groote leerboek ten einde het geschikt te maken als schoolboek, hebben we ons afgevraagd of alles wat het groote werk onderscheidde, zonder meer moest worden verwijderd, zoodat er ten slotte niet meer over zou blijven dan b.v. een werkje als Wijdenes „Beknopte Meetkunde".

Er zou hiervoor, oppervlakkig geoordeeld, inderdaad iets te zeggen zijn; gezien de eindexamen-opgaven van de Gymnasia en Lycea voor de Planimetrie, alsmede de opgaven van het Staatsexamen en verder gezien het feit, dat men op de H.B.S. met vijfjarigen cursus in de derde klas het onderwijs in de Vlakke Meetkunde als voltooid acht, moet men tot het besluit komen, dat het onderwijs op die scholen zich niet noemenswaard verheft boven dat van de hoogere burgerscholen met driejarigen cursus te Amsterdam. Worden dan bovendien nog verouderde leerboeken gebruikt, dan kan men zoo ongeveer nagaan, met welke kennis de jongelui naar de Hoogeschool en naar Delft gaan en ook, welke denkbeelden de overige leerlingen omtrent dit leervak, dat voor hen niets moois kon hebben, in hun verder leven meedragen.

Wij hebben gemeend, dat het onderwijs en de ontwikkeling der leerlingen er mede gebaat zullen zijn, indien de volgende onderwerpen, zij het dan eenvoudig en beknopt, behouden blijven.

1. de begrippen positief en negatief; 2. de stellingen van Menelaos en Ceva; 3. de volledige vierzijde; 4. de harmonische ligging; 5. pool en poollijn; 6. de juiste behandeling van de gelijkvormigheid; 7. de machtlijn van twee cirkels; 8. het begrip radiaal.

Het is veel leerzamer en verheffender deze begrippen aan te brengen, dan zich af te slooven op wat wij noemen de mikroskopie van den driehoek; groote stukken daarvan geven we gaarne in ruil voor de begrippen harmonische ligging, poollijn, machtlijn en radiaal.

Er behoort echter een zekere moed toe in den tegenwoordigen tijd, waarin er zooveel leerlingen onder de maat zijn, te pleiten voor een schoolboek, dat er naar streeft goede begrippen aan te brengen, die buiten de sleurstof liggen; we hebben het gewaagd, daar wij weten, hoe zelfs *die* leerlingen een opflikkering vertoonen, als hun wat goeds en wezenlijks wordt geleerd.

Dat dit werk breekt met het aanduiden van een hoek met drie in plaats van één hoofdletter, spreekt van zelf; dat we in deze metrische meetkunde voor een lijnstuk niet A B, maar c zetten, is duidelijk.

INHOUD.

De overzichtelijkheid kan er slechts bij winnen, wanneer men de projectiestelling niet aldus: $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2\,BC \times CD$, maar in den vorm $c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ap$ geeft en de stelling van Ptolemaeus, niet in den vorm $AC \times BD = AB \times CD + BC \times AD$, doch aldus: $pq = ac \times bd$.

Verder is er geen overdaad van vraagstukken; o.i behoeft er geen enkele overgeslagen te worden: in elke reeks worden meestal eerst berekeningen gevraagd, daarop volgen dan bewijzen en werkstukken.

P. WIJDENES.
Dr. P. MOLENBROEK.

BIJ DE TWEEDE DRUK.

Ook dit deel is zorgvuldig herzien; de voornaamste punten, die verbeterd zijn, betreffen:

1) het onderscheid tusschen rechte lijn en lijnstuk;
2) het vervangen van eenige figuren door nieuwe;
3) het uitbreiden van de herhaling van § 89;
4) het vervangen van de vele lastige sommen door minder moeilijke;
5) de vereenvoudiging van werkstuk 22 (blz. 61);
6) de afsplitsing van het laatste stuk van hoofdstuk XXIII, dat nu opgenomen is als XXIV.

Ik heb getracht een beknopte, zuivere theorie te geven op een iets hooger plan, dan waarop men zich in het algemeen thans nog stelt; het blijkt uit het stijgende succes van deze bewerking, dat er velen zijn, die het met mij eens zijn.

Aan het eind is § 125 aangevuld met de opgaven van 1929 en § 126 met die van 1928 en 1930; de oudere opgaven heb ik laten staan, daar deze met de latere voor den leeraar een vindplaats zijn van proefwerksommen.

Aan het eind van het boek heb ik eenige mondelinge examen in Meetkunde van het Staatsexamen A gegeven, die vrij nauwkeurig aard en omvang daarvan aangeven.

Bijzonder houd ik mij aanbevolen voor alle mogelijke op- en aanmerkingen, die tot verbetering kunnen strekken.

Amsterdam Zuid, Mei 1931 P. WIJDENES.
Jac. Obrechtstraat 88

Met goedkeuring van Dr. MOLENBROEK wordt het herzieningsrecht op dit werk door ondergeteekende uitgeoefend buiten eenige verantwoordelijkheid van Dr. MOLENBROEK voor inhoud en vorm.

P. W.

worde", maar evenals hierin reeds in de laatste twee eischen mede gepostuleerd is, wat zoowel bij Euclides, als bij van Swinden zelf, een oplosbaar werkstuk vormt [53]), wordt in III en IV opnieuw de uitvoerbaarheid van constructies gevorderd, die in de werkstukken als probleem worden gesteld, nl. het afpassen van een lijnstuk op een ander [54]) en het trekken van een rechte door een gegeven punt loodrecht op of evenwijdig aan een gegeven rechte [55]).

Deze handelwijze beduidt blijkbaar een principieele afwijking van de Euclidische opvatting van postulaat, dat, hoe ook beschouwd, nooit later nog eens als problema of theorema aan de orde kan komen. En het is een afwijking, die niet zonder bedenking is: zoo wordt in het bewijs van het voorstel I,4 gebruik gemaakt van een door de Algemeene Vooronderstelling IV als mogelijk gewaarborgde constructie, terwijl in de behandeling van deze constructie als Werkstuk I,6 het bewijs weer op Voorstel I,4 blijkt te steunen. Van Swinden vervalt hier in de reeds door Montucla [56]) gegispte fout van hen, die den Euclidischen opbouw van de vlakke meetkunde trachten te verbeteren door alle eigenschappen van rechten af te handelen, alsvorens over driehoeken te gaan spreken.

Wat zuiverder is dan bij Euclides, is de scheiding tusschen de *Algemeene Vooronderstellingen*, die alle over eenvoudige verrichtingen handelen en de *Algemeene Kundigheden*, die evidente uitspraken bevatten [57]). De uitspraken I en II zeggen, dat „rechte lijnen, waarvan twee stippen overeenkomen, geheel overéén <komen>" (wat de ondubbelzinnigheid van de in het eerste postulaat gevorderde constructie waarborgt) en dat snijdende rechten niets gemeen hebben, „behalven het stip, daar zij zich ontmoeten"; III en IV omschrijven resp. voor rechten en hoeken het befaamde Euclidische superpositie-axioma, dat dingen, die op elkaar passen, gelijk zijn, met de omgekeerde, door Euclides wel toegepaste, maar niet uitgesproken stelling [58]), dat gelijkheid voor samenvallen ook een voldoende voorwaarde is; V, waarover aanstonds meer, is een parallel-axioma en VI vult een leemte bij Euclides [59]) aan door te waarborgen, dat twee cirkels, waarvan de som der stralen gelijk is aan of grooter dan de afstand hunner middelpunten, elkander snijden.

Bij de opgesomde vooronderstellingen en kundigheden komen nog andere: in Boek III wordt de mogelijkheid gevorderd, bij drie grootheden een vierde en bij twee een derde evenredige te vinden, terwijl de Euclidische proposities V, 7—11, 13, 15 als axiomata worden gesteld. In Boek V vindt men als axiomata de Euclidische definitie van gelijke cirkels (Euclides III, Def. I) en de uitspraken, dat de middellijn van een cirkel het dubbele van den straal is en dat een punt, welks afstand tot het middelpunt van een cirkel kleiner is dan de straal, binnen dien cirkel ligt. Voor Boek VI is axioma, dat „een veelhoek . . . noch in eenen veelhoek noch om eenen veelhoek beschreeven kan worden, tenzy deeze evenveel zyden hebbe." Voor den opbouw van de Stereometrie worden, in overeenstemming met Euclides, geen nieuwe axiomata of postulaten noodig geacht, een wonderlijke inconsequentie, die in de 19e eeuw nog lang in de leerboeken der elementaire wiskunde zal voortleven.

Wanneer we nu na dit overzicht de vraag stellen, wat van Swinden eigenlijk onder een axioma verstaat, dan zal het wel duidelijk zijn, dat men bij hem niet de opvatting van een modern axiomaticus aanwezig zal mogen achten, die axiomata definieert als „unproved propositions about undefined entities", die geenszins „self-evident or simple" behoeven te zijn [60]). Voor van Swinden is een axioma een bewering, die geen bewijs behoeft, omdat ze „zonneklaar" is of „zoo klaarblijkelijk, dat niemand van gezond verstand er aan kan twijfelen" [61]). Het motief, dat hem er toe drijft, een uitspraak als axioma aan te nemen, is niet gelegen in het feit, dat ze bij de logische analyse van een wiskundige conclusie als niet nader te ontleden element van een sluitrede voor den dag komt, maar daarin, dat het niet noodig lijkt, zich van haar juistheid nader te overtuigen door het houden van een redeneering. Er is dan echter geen afdoende reden, om het aantal axiomata niet nog belangrijk uit te breiden en nog veel meer stellingen, aan welker juistheid de natuurlijke mensch heelemaal niet twijfelen kan, zonder bewijs te aanvaarden. Men krijgt wel eens den indruk, dat van Swinden dat eigenlijk ook wel wil, maar dat de machtige invloed van de Euclidische traditie hem daarvan terughoudt. Want soms behandelt hij op Euclidische wijze zeer conscientieus een of ander voorstel, om er onmiddellijk bij op te merken, dat het toch eigenlijk geen bewijs behoeft en dus onder de algemeene kundigheden zou kunnen worden opgenomen [62]). Uit zulke uitlatingen blijkt dat hij een bewijs in de eerste plaats als overtuigingsmiddel voelt en slechts in de tweede als uitdrukking van een logischen samenhang. Euclides, die in vele opzichten dichter bij de moderne axiomata staat dan de meeste van zijn uitgevers en commentatoren, is hem feitelijk wel eens wat al te scrupuleus. In het bijzonder deelt hij niet diens blijkbaar bezwaar tegen de in de *Elementen* slechts noode toegepaste bewijsmethode der superpositie, waarbij mathematische figuren worden opgenomen en verplaatst, alsof het stoffelijke vaste lichamen waren [63]). Hij steunt daarbij weer op d'Alembert, die het superpositieprincipe als een van de twee fundamenteele proposities van de meetkunde beschouwt, dat hij tegenover de kritiek van hen, die daarin „quelque chose de méchanique" zagen [64]), verdedigt, door er den nadruk op te leggen, dat een figuur niet op een andere wordt gelegd, zooals men een ellemaat op een stuk laken legt; de verplaatsing wordt slechts in gedachte uitgevoerd en daarom heeft de methode het voordeel „d'être la plus rigoureuse et la plus simple qu'il est possible, en un mot de satisfaire l'esprit en parlant aux yeux" [65]).

De schrijver is echter niet voldoende doortastend geweest om met de aanvaarding van de superpositiemethode alle vernuftige kunstgrepen te verwerpen, die Euclides toepast, waar hij die methode wil vermijden, maar die niet den minsten zin meer hebben voor wie niet meer zoo kritisch tegenover haar staat. Ook dit maakt, dat hij soms dingen doet, die hij volkomen overbodig vindt of althans, consequent zijnde, overbodig had moeten vinden [66]).

5. Toen van Swinden in 1790 zijn Leerboek uitgaf, zal hij weinig hebben kunnen vermoeden, dat de lezer, die meer dan een eeuw later nog eens zijn werk zou raadplegen, met bijzondere belangstelling zou uitzien naar de wijze, waarop daarin de theorie der parallelen was gefundeerd en ontwikkeld. Onbekend met de werken van Saccheri, Lambert en Klügel kon hij op dat oogenblik niet weten, welk een verdieping van inzicht in die theorie reeds in den loop der achttiende eeuw was bereikt; nog minder kon hij de ontzaglijke omwenteling in het meetkundig denken voorzien, die al spoedig door het werk van Bolyai en Lobatschewsky zou worden veroorzaakt. Voor hem was het parallelenpostulaat van Euclides niet, wat het voor ons is, een van de meest geniale grepen van de Grieksche wiskunde; veeleer was het de betreurenswaardige vlek op het schoone lichaam der Geometrie [67]), die niet kon worden

verwijderd dan door een geheel anderen opzet van de parallelentheorie.

Het is natuurlijk gemakkelijk, om achteraf, nu we het parallelenprobleem volledig kunnen overzien, de dwaalwegen aan te wijzen, waarop zij, die meenden, de Euclidische behandelingswijze op dit punt te moeten en te kunnen verbeteren zich, zonder eenig onraad te vermoeden, hebben bevonden. Wanneer dit hieronder ook voor de methode van van Swinden geschiedt, dan ligt daarin niet de minste kleineerende bedoeling: de verdiensten, die hij zich door zijn Grondbeginsels heeft verworven, blijven groot genoeg, al faalde hij op de plaats,waar zelfs een Legendre ondanks jarenlange inspanning geen uitweg wist te vinden en waar een Gauss het raadzaam achtte, den uitweg, dien hij wèl zag, aan anderen te verzwijgen.

De behandelingswijze, die van Swinden van de parallelentheorie geeft en die, naar het lijkt, zijn eigen vinding was [68]), komt hierop neer, dat hij als definitie geeft [69]), dat twee rechten parallel of evenwijdig aan elkander zijn, „wanneer zij met betrekking tot een derde lyn, die haar snydt, dezelfde helling hebben: dat is, aan den zelfden kant . . . gelyke hoeken met die lyn maaken" en als axioma stelt [70]), dat „eene lyn, die eene van twee evenwydige lynen snydt, . . . ook de andere, indien zy, zo het nodig is, verlengd wordt, <zal> snyden". Hij wijkt door dezen opzet bewust af van wat hij op dit punt bij twee, veel door hem geciteerde schrijvers, Clavius en Tacquet, heeft gelezen; bij hen toch vindt men in den duidelijkst uitgesproken vorm de z.g. aequidistantietheorie gehuldigd, die het wezen van het parallelisme in de even„wijd"-ig-heid zoekt en waarvan de fout is, dat ze als vanzelfsprekend aanneemt, dat de meetkundige plaats van de punten, die aan een zelfde zijde van een rechte op onderling gelijke afstanden van deze gelegen zijn, een rechte is. Die fout kan d'Alembert, waarvan hij de lectuur juist bij dit onderwerp dringend aanraadt, hem geleerd hebben te vermijden; immers deze wijst erop [71]), dat men desgewenscht wel een rechte parallel aan een andere mag noemen, wanneer twee van haar punten op onderling gelijke afstanden aan dezelfde zijde van haar verwijderd zijn, maar dat men dan zal moeten bewijzen, dat alle andere punten van die eerste rechte dienzelfden afstand tot de tweede hebben; welke propositie hij „un des points les plus difficiles dans les élémens de Géométrie" noemt.

Van Swinden heeft nu blijkbaar gehoopt, deze moeilijkheid te ontgaan door als definieerend kenmerk van parallelisme de gelijkheid van richting te stellen, gewaarborgd door gelijkheid van helling ten opzichte van een transversaal. Het is echter duidelijk, dat hij zoodoende evengoed een bewijsplicht verzuimt: hij had moeten aantoonen, dat als één transversaal twee rechten onder gelijke hoeken snijdt, elke andere transversaal dit ook zal doen, maar dat zou hij, zelfs zoo hij de noodzaak ervan had gevoeld, onmogelijk hebben kunnen doen met geen andere hulp dan die van het axioma, dat een rechte, die de eene van twee parallele rechten snijdt, ook de andere moet ontmoeten.

Het verlaten van den weg, dien Euclides in den doolhof van de parallelen had gewezen, heeft bij van Swinden dezelfde twee consequenties, die het bij tal van andere schrijvers heeft gehad: een verkeerde opvatting van een belangrijke planimetrische stelling en een onbillijke critiek op de Euclidische methode. Vooreerst vindt men de voor de hyperbolische evengoed als voor de Euclidische meetkunde fundamenteele stelling, dat een buitenhoek van een driehoek grooter is dan elke niet aanliggende binnenhoek, afgeleid uit de eigenschap, dat de som van de hoeken van een driehoek gelijk is aan twee rechte hoeken, alsof zij, met deze, van het Euclidische parallelenpostulaat afhankelijk ware [72]). En vervolgens ontmoet men het gebruikelijke gemis aan waardeering voor de fijnheden in den opbouw der Euclidische *Elementen,* dat eerst na den opbloei van de moderne axiomatica overwonnen zou worden: de definitie van parallelen als „rechten, die, in hetzelfde vlak gelegen, en in het oneindige verlengd, elkander nimmer snyden", wordt afgekeurd [73]), omdat de gebruikte termen voor een eerste grondbeginsel niet duidelijk genoeg worden geacht; het vijfde postulaat der *Elementen* (hier als het elfde Axioma aangeduid) wordt als een bewijsbare stelling beschouwd, die door een onnauwkeurigheid der oude copisten van zijn ware plaats als corollarium van I, 28 onder de axiomata zou zijn geraakt [74]); en de volgorde der Euclidische proposities over parallelen (eerst in I, 27, 28 zonder hulp van het vijfde postulaat het bewijs, dat de gestelde voorwaarden voor parallelisme voldoende zijn, tevens existentiebewijs van parallelen; daarna in I, 29 met behulp van het postulaat het bewijs, dat ze ook noodig zijn) wordt aangehaald als een argument, dat Euclides niet van de bepaling van parallelen uitgaat, omdat hij in dat geval in de eerste propositie, die er over handelt, het niet-ontmoeten had moeten onderstellen, om er de gelijkheid van overhandsche hoeken uit af te leiden [75]).

6. Men weet, dat de kritiek, die de wiskundigen van de achttiende eeuw op Euclides hebben uitgeoefend, zich steeds in haar scherpsten vorm heeft gericht tegen twee van de voortreffelijkste deelen van zijn groote werk: naast de parallelentheorie werd ook de redentheorie van het vijfde Boek beschouwd als een zwakke plek in het systeem en men heeft dan ook voortdurend maar steeds tevergeefs ook deze trachten te verbeteren. We kunnen achteraf ook weer gemakkelijk zien, in hoeverre dat in een bepaald stadium van ontwikkeling der wiskunde mogelijk kon zijn; de reden toch is het noodzakelijk complement van het getal en de redentheorie verliest haar bestaansrecht in dezelfde mate als het getalbegrip zich uitbreidt. In de Grieksche wiskunde met haar strenge beperking tot natuurlijke getallen is dat bestaansrecht het grootst: de reden, van essentieel anderen aard dan het getal, ja zelfs dan de grootheid in het algemeen, verdient, zoolang ze geen geheel veelvoud aanduidt, volkomen de afzonderlijke plaats en de afzonderlijke behandelingswijze, die er aan te beurt valt. Zoodra echter het getalbegrip in zijn toepassing op de meetkunde voldoende ver wordt uitgebreid, om de rationale getallen mede te omvatten, is er geen plaats meer voor de rationale reden; haar functie wordt door het rationale getal overgenomen en het heeft, strikt genomen, geen zin, de eigenschappen dezer getallen nog eens opnieuw in een afzonderlijke theorie van evenredigheden te gaan formuleeren. En zoodra men verder gaat en ook irrationale getallen aanvaardt, geldt voor de irrationale reden hetzelfde.

Nu is echter de uitbreiding van het getalbegrip zeer geleidelijk gegaan en de invloed der traditie is in de wiskunde wellicht grooter dan in eenig ander gebied van wetenschap. Er moesten dus noodzakelijk tijden komen (ze zijn nog niet voorbij), waarin de reden op grond van de traditie de functie bleef vervullen, die het getal reeds lang bereid was, over te nemen en waarin dan de theorie der evenredigheden gevoeld werd als een vreemd, in de meetkunde niet passend bestanddeel, zonder dat men zich van hare overbodigheid bewust werd. Het loont de moeite, om ter karakteriseering van zulk een periode te schetsen, hoe van Swinden bij de behandeling der evenredigheden te werk gaat. Hij onderscheidt dan [76]) in de eerste plaats „de meetbare, of ook rationale grootheden, of getalen" d.z. die welke een gemeene maat hebben, van de onmeetbare grootheden (ook irrationeele grootheden of surden genaamd), waarbij zulk een gemeene maat niet is aan te wijzen. Bij de laatste categorie mag niet „of getalen" staan; immers „onmeetbare getalen zijn er in den eigenlijken zin niet, want wie een getal zegt, zegt een aantal eenheden en dus iets, dat met die eenheid meetbaar is". Niettemin wordt er „in eenen oneigenlijken zin en kortheidshalve" wel van onmeetbare getallen gesproken, b.v. als men spreekt van den vierkantswortel van een geheel getal, die zelf geen geheel getal is. Men kan zulk een wortel dan wel door een lijn uitdrukken, maar niet door een getal; „men kan wel een getal vinden, dat „er hoe langer hoe nader bykomt, dat er zoo weinig van verschilt, als men wil, doch nimmer een, dat dien wortel juist evenaart". En hierop volgen dan deze merkwaardige woorden, die, hoe verbijsterend ook, nog steeds onovertrefbaar de behandeling van het irrationale in de elementaire wiskunde karakteriseeren: „Wanneer men dan van onmeetbare getalen spreekt, duidt men dezelven door een teeken aan en spreekt niet van hetgeen zy zyn, want zy zyn er niet, maar van hetgeen zy zouden zyn, indien men ze door getalen uitdrukken kon, hetgeen onmogelijk is" [77]).

Hierna wordt gezegd, dat „de (geometrische) reeden tusschen twee grootheden aantoont, hoe veel maalen de eene de andere bevat," terwijl „het quotient, dat uit de divisie van de voorgaande door de volgende voortkomt, of begreepen wordt voort te komen" de aanwijzer of exponent van die reden genoemd wordt [78]). Hierbij slaat het „of begreepen wordt voort te komen" blijkens de toelichting [79]) op het geval van irrationale redens, waarin het quotient niet door een getal, maar slechts door een teeken of door lijnen uitgedrukt kan worden. In het geval van rationale redens wordt die uitdrukking door een getal dus wel mogelijk geacht. En toch, als men vasthoudt aan het beginsel: „wie een getal zegt, zegt een aantal eenheden", bestaat die aanwijzer of exponent in den eigenlijken zin van het woord bij rationale redens, die geen geheel veelvoud uitdrukken, evenmin als bij irrationale. $^3/_7$ is evenmin een aantal eenheden als $\sqrt{2}$.

Men ziet hier duidelijk, hoe het intuitief gevoelde, maar logisch nog niet geanalyseerde getalbegrip zich reeds ver genoeg heeft uitgebreid, om de rationale getallen te omvatten, maar dat het de irrationale nog buitensluit, al rekent men dan ook practisch met irrationale redens en irrationale wortels volgens geheel dezelfde regels als voor rationale getallen gelden.

Het is wel begrijpelijk, dat vanuit dit onvaste standpunt de redentheorie van Euclides, die, ondanks feilen in de uitwerking, de strenge consequentie en geslotenheid van een exacte mathematische theorie bezit, niet juist beoordeeld kan worden: inderdaad betoogt van Swinden, dat de bepaling, die Euclides van gelijkheid van redens geeft, de beroemde definitie van Boek V, waarin, als men op het wezen van de zaak let, de snede van Dedekind wordt ingevoerd, „niet geheel duidelijk en volkomen is, en niet aan de waare en eenvoudige natuur van hetgeen men oorspronkelyk door reden verstaat, ontleend. De leere der aanwyzers die of meetbaar of onmeetbaar zyn, is gemakkelyker en even algemeen als die van Euclides" [80]).

We hoeven thans niet uitvoerig te spreken over de wijze, waarop van Swinden de redentheorie verder ontwikkelt. Door zeven fundamenteele, bij Euclides bewezen proposities als axiomata te stellen, kan hij de Euclidische definitie van gelijkheid van redens als stelling bewijzen [81]). Maar men wordt nergens gewaar, wat die gelijkheid, waarover voortdurend gesproken wordt, eigenlijk beduidt in het geval, dat de twee vergeleken grootheden onderling onmeetbaar zijn.

7. Er zijn natuurlijk nog tal van andere plaatsen in het werk van van Swinden (we denken hierbij niet in de laatste plaats aan de theorie der limieten) waarop vergelijking van zijn methode met de Euclidische aan den eenen en met die der moderne wiskunde aan den anderen kant tot interessante inzichten in de geleidelijke ontwikkeling van de mathematische begripsvorming leidt. Door het bovenstaande zal echter, naar we hopen, de daad, die de schrijver met het samenstellen van zijn *Grondbeginsels* heeft verricht, voldoende gekarakteriseerd zijn.

Samenvattende kunnen we zeggen, dat van Swinden, zonder een van die allergrootsten te zijn, die een nieuw tijdvak in de geschiedenis van de wiskunde openen of wier naam onverbrekelijk verbonden blijft aan een belangrijke stelling, een fundamenteel begrip of een vernuftige methode, zich in zijn boek toont als een grondig kenner van het mathematische weten van zijn tijd en als een ernstig en helder docent, wiens eerste zorg het is, bij zijn leerlingen dat gevoel voor degelijkheid van opbouw en voor exactheid in formuleering en bewijs te ontwikkelen, dat door alle wiskundigen, hoezeer zij onderling ook van meening kunnen verschillen over het wezen van hun wetenschap, steeds als een onmiskenbaar teeken van samenhoorigheid zal worden beschouwd.

En wanneer de schrijver bescheidenlijk aan zijn boek bij de tweede verschijning het woord van Ovidius meegeeft

Da veniam scriptis, quorum non gloria nobis
Causa, sed utilitas officiumque fuit,

Epist. IX. Ex Ponto Lib. III.

dan kunnen we thans vaststellen, dat juist de degelijke vervulling van dit nobile officium voor ons de eerste aanleiding is, bij het derde eeuwfeest van de onderwijsinstelling, waaraan hij werkzaam was, zijn nagedachtenis te eeren.

NOTEN.

[1]) Jean Henri van Swinden (8 Juni 1746—9 Maart 1823) studeerde vanaf 1763 te Leiden, aanvankelijk in de rechten, later onder leiding van den toenmaligen privaat-docent J. F. Hennert (later hoogleeraar te Utrecht) in de wiskunde. Na zijn promotie in 1766 werd hij nog in hetzelfde jaar hoogleeraar te Franeker, waar hij tot 1785 bleef. In dat jaar werd hij benoemd tot hoogleeraar in de wijsbegeerte, wis-, natuur- en sterrekunde aan het Athenaeum te Amsterdam, welke functie hij met onderbrekingen tot zijn dood in 1823 heeft vervuld. Van Juli 1798 tot October 1799 vertoefde hij te Parijs als lid van de Commissie tot hervorming van het stelsel der maten en gewichten, waarin hij als rapporteur belangrijk werk verrichtte. Van 1800 tot 1802 was hij lid van het Uitvoerend Bewind van de Bataafsche Republiek.

[2]) C. F. A. Jacobi (niet te verwarren met den beroemden mathematicus C. G. J. Jacobi) (1795—1855) was in den tijd, dat hij het werk van van Swinden in het Duitsch vertaalde, Professor an der Landesschule Pforta.

[3]) De geraadpleegde edities zijn:

a) *Grondbeginsels der Meetkunde* door J. H. van Swinden. Te Amsterdam bij Pieter den Hengst. 1790. Naar deze editie wordt, voorzoover het tegendeel niet vermeld wordt, geciteerd.

b) *Grondbeginselen der Meetkunde* door J. H. van Swinden. Tweede, verbeterde en veel vermeerderde druk. Te Amsterdam. Bij Pieter den Hengst en Zoon. 1816.

c) *J. H. van Swinden's Elemente der Geometrie*... übersetzt und vermehrt von C. F. A. Jacobi. Jena (F. Frommann) 1834.

[4]) J. F. Montucla, *Histoire des Mathématiques* I, 204 seq. Ik citeer naar de tweede editie in vier deelen (Paris, An VII), die mij alleen ter beschikking staat.

[5]) *The Elements of Euclid, viz. the first six Books together with the eleventh and twelfth*... By Robert Simson. Glasgow 1756.

[6]) Voorreede II—III.

[7]) Quintilianus, *De Institutione Oratoria* I, 10.

[8]) Voorreede V.

[9]) Voorreede VII.

[10]) Hij wil dus, om het in de terminologie van de Grieksche wiskunde te zeggen, niet slechts στοιχεῖα (elementen) geven, maar ook behandelen, wat στοιχειώδης (elementair) is.

[11]) Voorreede VIII—IX.

[12]) Voorreede III seq.

[13]) *Werkstukken uit de Grondbeginselen der Meetkunde.* Na blz. 486.

[14]) Voorreede V.

[15]) Pag. XIII—XIX. In den tweeden druk, getiteld *Aanwijzing der Wiskundigen, wier Uitvindingen vermeld, of wier schriften, in dit werk, aangehaald worden,* XIX—XXXI.

[16]) *Archimedis Opera quae exstant*.... per D. Rivaltum. Parisis 1615. Voor den tweeden druk is ook gebruik gemaakt van de groote editie van Torelli (Oxford 1792).

[17]) *Elementa Geometriae planae ac solidae. Quibus accedunt selecta ex Archimede theoremata.* Auctore Andrea Tacquet S. J. Amstellaedami, Apud Franciscum van der Plaats 1701. De eerste editie van dit zeer verspreide werk is van 1654.

[18]) *Euclidis Elementorum Libri XV,* auctore C. Clavio. Francfurti 1607.

[19]) Zie noot 17.

[20]) Wolf,*Grondbeginsels van alle Mathematische Weetenschappen.* Amsterdam 1738. Soms is ook geraadpleegd het Latijnsche werk van dezen schrijver *Elementa matheseos universae.* Halae 1742. De schrijver is de philosoof Chr. von Wolf (1679—1754). Zijn werken waren in de 18e eeuw zeer verbreid.

[21]) *Grondbeginzelen der Meetkonst, bevattende kortelyk de ses eerste boeken met het elfde en twaafde van Euclides*.... door Pybo Steenstra. Te Leyden. By Samuel en Johannes Luchtmans. 1763. Pybe Steenstra was eveneens hoogleeraar aan het Amsterdamsche athenaeum.

[22]) *Elementa Matheseos Purae*.... *cura* Ioannis Frederici Hennert. Trajecti ad Rhenum. Ex Officina A. Paddemburg. 1766—1768. 3 vol.

[23]) *Traité de Trigonométrie rectiligne et sphérique*.... par M. Cagnoli. Traduit de l'Italien par M. Chompré. Paris (Didot) 1786.

[24]) Vieta, *Opera Mathematica*.... *operâ atque studio* Francisci à Schooten. Lugd. Batav. 1646.

[25]) *Ludolf van Ceulen,* Van den cirkel. 2e druk. Leiden 1615. *Fundament Arithmetica et Geometrica*.... Lugd. Bat. 1615.

[26]) Willebrordi Snellii *Cyclometricus.* Lugd. Batav. 1621.

[27]) Chr. Huygens, *De Circuli Magnitudine Inventa.* Lugd. Batav. 1654. Thans ook Oeuvres Complètes de Christiaan Huygens, XII (1910).

[28]) Mac Laurin, *Traité des Fluxions.* Paris 1746.

[29]) *Exposition élémentaire des Principes des Calculs supérieurs*... par M. L'Huilier. Berlin (Decker) 1786.

[30]) J. F. Montucla, *Histoire des Mathématiques.* Paris 1758 2 vol.

[31]) J. d'Alembert. *Mélanges de Littérature, d'Histoire et de Philosophie.* IV en V. 4ième édition. Amsterdam (Chatelain). (1767).

[32]) Le Gendre, *Elémens de Géométrie.* 10ième édition. Paris 1810.

[33]) In den tweeden druk worden in dit aanhangsel bovendien behandeld de onderwerpen: reeksontwikkeling van $(a+b)^n$, als n een natuurlijk getal is of een stambreuk; het berekenen van logarithmen door reeksen, uitdrukking van goniometrische lijnen en cirkelbogen door reeksen en een maximumvraagstuk bij den kubus.

[34]) In den tweeden druk worden deze drie groepen van uitspraken over verschillende plaatsen van het werk verdeeld.

[35]) In den tweeden druk worden in aansluiting aan Legendre figuren met gelijken inhoud gelijkhaltig genoemd (vertaling van figures équivalentes).

[36]) Ze wordt terloops vermeld in Aanmerking II van Voorstel 38. Van Swinden kan haar hebben leeren kennen uit het door hem geciteerde werk van Euler: *Introductio in analysin infinitorum.* Lausanne 1748.

[37]) Aanmerking I van Voorstel 32.

[38]) Dit geschiedt door het afpassen van een lijnstuk, dat een der twee zijden meet, op de andere zijde, waardoor de verhouding tusschen rationale grenzen kan worden ingesloten. In den tweeden druk komt ook de benadering van een irrationale verhouding door een kettingbreuk voor, nl. in Boek III, Bepaling VIII, Aanmerking III.

[39]) Voorreede X—XI.

[40]) π wordt volgens Ludolph vermeld in de 32 decimalen, die in de *Fundamenta Arithemtica en Geometrica* (zie noot 25) staan (Liber IV, Zetema 2), niet in de 35, die Snellius (*Cyclometricus* 55) vermeldt.

[41]) In den tweeden druk is een afdeeling (III) van dit Boek gewijd aan de behandeling van de tafels van de logarithmen van de goniometrische functies, terwijl in afd. IV een uitvoerige lijst van goniometrische formules wordt gegeven.

[42]) Dit geschiedt volgens de door Cagnoli meegedeelde methode:

Is $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$, dan stelt men $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{2\sin \frac{1}{2} C}{a-b}\sqrt{ab}$ $(a > b)$,

waarna $$c = \frac{a-b}{\cos\varphi}.$$

[43]) Deze worden tegenwoordig vaak ten onrechte de formules van Gauss genoemd. In wezen zijn ze reeds in 16e en 17e eeuw bekend. Zie Tropfke, *Geschichte der Elementar-Mathematik* V, 82 seq.

[44]) Nicolaas Ypey (7 Juni 1714—14 Juli 1785) was vanaf 1744 hoogleeraar te Franeker, waar van Swinden van 1766 tot 1785 werkzaam was.

[45]) In den tweeden druk wordt ook de graphische oplossing behandeld, die Snellius zelf gegeven heeft, bovendien vindt men daar de thans algemeen gebruikelijke oplossingsmethode van Delambre.

[46]) Deze formules waren in het begin van de 18e eeuw al bekend. Tropfke V, 85.

[47]) De taalfout *parallelopipedum* is in den tweeden druk hersteld. Daar staat echter weer *hypothenusa,* wat in den eersten druk goed was. In het algemeen zijn er wonderlijke verschillen in orthographie tusschen de beide drukken, b.v. *reeden* in den eersten naast *rede* in den tweeden, maar daarentegen *lichaamlyk* in den eersten tegenover *ligchamelijk* in den tweeden. De behandeling van de lichamelijke

figuren is in den tweeden druk onder invloed van Le Gendre nogal uitgebreid.

48) Boek XI. Bepaaling IV. Aanmerking I.

49) In den tweeden druk worden ook behandeld de inhoud van een spherisch segment en van een klootsche schijf. Bovendien is hier een afdeeling gewijd aan „de cirkels, die op de oppervlakte des kloots getrokken worden en de maat der hoeken, welke daaruit ontstaan".

50) We merken hierbij nog op, dat de schrijver een voor onze tegenwoordige begrippen zeer ruime aandacht wijdt aan de mathematische instrumenten. Dit is vooral in den tweeden druk het geval. Hierin komt in de Inleiding (XXXV) een *Aanwijzing der Mathematische Werktuigen, welke in dit werk uitgelegd worden* voor, waarin de belangstellende lezer zich kan orienteeren.

51) *Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.*
In den tweeden druk overtreft de schrijver Euclides zelf, door in de 4e Bepaling een kromme lijn te definieeren als een lijn, die ongelijkelijk tuschen haar uiteinden gelegen is.

52) d'Alembert, l. c. V, 207.

53) Euclides I, 2. Van Swinden, Werkstuk I, 1.

54) Euclides I, 3, Van Swinden, Werkstuk I, 2.

55) Euclides I, 11, 31. Van Swinden, Werkstuk I, 3—6.

56) Montucla, l. c. (noot 4) I, 206—207.

57) Deze indeeling strookt met de opvatting van Geminos over het verschil tusschen axioma en postulaat. Verg. E. J. Dijksterhuis, *De Elementen van Euclides*. I. Groningen (Noordhoff) 1929. I, 122.

58) Ze wordt toegepast in I, 4.

59) Ze wordt toegepast in het bewijs van I, 1.

60) H. G. Forder, *The foundations of Euclidean Geometry*. Cambridge 1927, p. 4.

61) Inleiding IX. Axioma VI. Aanmerking II.

62) Boek I. Voorstel III. Aanmerking.

63) Dijksterhuis, l. c. (noot 57), I. 145 seq.

64) Zooals Jaques Peletier, *Les six premiers livres des Elements Geometriques d'Euclide* .... 1611, p. 26.

65) d'Alembert, l. c. IV, 165 seq.

66) Zoo b.v. de Werkstukken I, 1 en 2. In I, 1 wordt de vernuftige Euclidische constructie (I, 2) gegeven voor het uitzetten van een lijnstuk van gegeven lengte vanuit een gegeven eindpunt, die bij Euclides noodig is ter vermijding van het behandelen van een lijnstuk als een lineaal, die opgenomen kan worden en elders kan worden neergelegd. Van Swinden vraagt, van zijn standpunt terecht, maar met gemis aan begrip voor den gedachtengang van Euclides, of het niet even mathematisch zou zijn, om te zeggen, dat men uit het gegeven punt een cirkel beschrijft met een straal, gelijk aan de gegeven lijn.

67) Aldus de beroemde uitdrukking van Henry Savile, waarop gezinspeeld wordt in den titel van het werk van Saccheri: *Euclides ab omni naevo vindicatus* ....

68) Hiermee wordt natuurlijk niet bedoeld, dat de z.g. richtingtheorie van het parallelisme niet reeds eerder was beproefd. De eerste die haar heeft toegepast, schijnt Varignon geweest te zijn.

69) Boek I. Bepaaling VIII.

70) Boek I. Algemeene Kundigheid V. In den tweeden druk wordt deze uitspraak niet langer als axioma beschouwd, maar als gevolg van de Bepaling (daar X).

71) d'Alembert, l. c. V. 202.

72) Boek I, Voorstel VII. Gevolg IV.
73) Boek I. Bepaaling VII. Aanmerking II.
74) Boek I. Voorstel VI. Aanmerking I.
75) Boek I (2e druk) blz. 21. *Algemeene Aanmerking over de leer der evenwijdige lijnen.*
76) Boek III. Bepaalingen VI en VII.
77) Boek III. Bepaaling VII. Aanmerking I.
78) Boek III. Bepaaling X.
79) Boek III. Bepaaling X. Aanmerking IV.
80) Boek III. Bepaaling XI. Gevolg I.
81) Boek III. Voorstel I.

JOHN PELL IN ZIJN STRIJD OVER DE RECTIFICATIE VAN DEN CIRKEL

Bijdrage tot het jubileum van de Universiteit van Amsterdam.

DOOR

E. J. DIJKSTERHUIS.

Wie de rij der mathematici, die in den loop der drie eeuwen, welker voltooiïng in deze dagen wordt gevierd, aan het Amsterdamsche Athenaeum Illustre werkzaam waren, overziet, zal daarin, naast tal van namen, die hem zelfs dan niets meer zeggen, wanneer hij in de geschiedenis der wiskunde belangstelt, enkele andere aantreffen, die, zonder bepaald coryphaeën der wetenschap aan te duiden, niettemin tot op heden in de herinnering der vakgenooten voortleven en wier dragers inderdaad verdienen door het nageslacht te worden herdacht, om wat ze in het belang der mathesis hebben verricht. Over eeñ van dezen volgt hier een korte schets: over den Engelschen wiskundige John Pell of, met den Latijnschen vorm van zijn naam, Ioannes Pellius, die van December 1643 tot Juni 1646 aan het Athenaeum werkzaam was en die gedurende dien tijd gewikkeld is geweest in een wetenschappelijk conflict, dat destijds de aandacht der Europeesche mathematici heeft getrokken en waarvan het verloop ons thans nog kan interesseeren, deels om den mathematischen kant van de omstreden kwestie, deels om den blik, dien het ons op de wetenschappelijke zeden van den tijd toestaat te werpen.

Pell [1]), in 1611 geboren, als jongeling reeds befaamd aan de universiteiten van Oxford en Cambridge om zijn vlugheid van geest, zijn onverzadelijke weetgierigheid en zijn uitgebreide talenkennis, werd in 1643 op voorspraak van den Engelschen gezant Boswell benoemd tot docent in de wiskunde aan de Illustre School van Amsterdam, waar hij de opvolger werd van den in 1639 overleden hoogleeraar Hortensius [2]). Van zijn werkzaamheid als zoodanig zijn slechts weinig bijzonderheden bekend. Vossius, in zijn werk *De Universae Mathesios natura et constitutione Liber* [3]) roemt in een hoofdstuk *De claris Arithmetices scriptoribus, tum veteribus, tum novis,* de heldere wijze, waarop hij in zijn colleges de moeilijke problemen van Diophantus wist te behandelen; daar hij echter reeds na ruim twee jaar zijn ambt te Amsterdam verwisselde tegen dat van hoogleeraar in de wiskunde aan de nieuw gestichte hoogeschool te Breda, kan zijn invloed op het onderwijs aan het Amsterdamsche Athenaeum niet van blijvenden aard geweest zijn.

Wat wel gebleven is, is echter de herinnering aan het conflict, waaraan deze schets is gewijd en dat een van de meest klassieke kwesties betreft, die de geschiedenis der wiskunde kent: de rectificatie en de quadratuur van den cirkel. Men weet, hoezeer het schijnbaar eenvoudige, maar in werkelijkheid zeer diep liggende probleem, de verhouding van den omtrek van den cirkel tot den diameter of van zijn oppervlak tot dat van het op den straal als zijde beschreven vierkant te bepalen, vanaf de oudste tijden, waarvan wij kennis kunnen nemen, de aandacht der wiskundigen heeft getrokken. Twintig eeuwen voor Christus kent de Aegyptische wiskunde voor die verhouding, die later door de letter π werd voorgesteld, reeds de benaderde waarde $\frac{256}{81} = 3{,}160\ ..$; in -500 komt bij de Indiers de benadering $\sqrt{10} = 3{,}162\ ...$ voor; in de derde eeuw voor Christus sluit Archimedes haar in tusschen de grenzen $3 + \frac{10}{71} = 3{,}1408\ ..$ en $3 + \frac{10}{70} = 3{,}1428\ ..$, terwijl de overlevering van nog nauwere grenzen in de Grieksche wiskunde weet te berichten. In China is in de vijfde eeuw de waarde $\frac{355}{113}$ bekend, die in de zestiende zal worden teruggevonden door Valentinus Otto in Duitschland en door Metius in de Nederlanden en die, decimaal geschreven als 3,14159292 . ., pas in de zevende decimaal van de juiste waarde blijkt af te wijken. Ten slotte brengt in het eind van de 16e eeuw Vieta het tot negen en Adriaen van Roomen tot zeventien juiste decimalen, terwijl Ludolph van Ceulen er ten koste van een onmenschelijk rekenwerk er vijf en dertig weet te berekenen. De methode, die hij daarbij toepaste, was dezelfde als die Archimedes gevolgd had: insluiting van den cirkelomtrek tusschen de omtrekken van een in- en een omgeschreven regelmatig polygoon met hetzelfde aantal zijden, dat bij Archimedes 96, bij Ludolph 2^{65} bedroeg. Nieuwe wegen, om dezelfde resultaten met behulp van polygonen met een geringer aantal zijden te bereiken, waren intusschen gewezen door den Leidschen wiskundige Willebrord Snel.

Men kan zich nu, bij verplaatsing in dezen stand van het vraagstuk, de belangstelling voorstellen, waarmee Pell, toen hij omstreeks Juli 1644 in den boekwinkel van den uitgever Blaeu te Amsterdam den catalogus van diens nieuwe uitgaven raadpleegde, kennis heeft moeten nemen van een juist verschenen werk van den Deenschen astronoom Longomontanus [4]), waarvan de titel *Rotundi in plano, seu Circuli, absoluta mensura, Duobus libellis comprehensa Quorum* Prior *veram constitutionem Peripheriae Circuli* Syntheticè *perficit, et mox huius ad Diametrum rationem . . . . .* [5])
een nieuwe bijdrage tot de behandeling van het beroemde probleem beloofde en nog meer de verbazing, die hem moet hebben vervuld, toen hij in het onverwijld geraadpleegde werk de herhaalde en nadrukkelijke verzekering aantrof, dat, wanneer de diameter van een cirkel wordt voorgesteld door het getal 43, de omtrek wordt uitgedrukt door $\sqrt{18252}$ en dat dus de verhouding van den omtrek tot den diameter, het getal π de waarde 3,141859604427 moest hebben. Een dergelijke uitspraak, 48 jaar na het verschijnen van het werk van Ludolph van Ceulen met emphase aangekondigd als de na ongeloofelijke inspanning bereikte uiteindelijke verlossing van de wiskunde uit het cyclometrisch labyrinth, zou wel minder kritisch en strijdlustig aangelegde naturen tot tegenspraak hebben kunnen prikkelen; Pell werd er door vervuld met een hevige verontwaardiging; het boek wegslingerend verklaarde hij met luider stem aan alle aanwezigen, dat hij in één bladzijde, als vrucht van enkele uren arbeid, dit geheele resultaat van jarenlange inspanning, zou kunnen weerleggen: *Tot, annorum labor tantus, toties editus, una in pagella, paucularum horarum labore, funditus refutari potest.*

De weerlegging, waartoe Pell zich aldus openlijk had verbonden, was niet zoo gemakkelijk te geven, als de moderne lezer bij eerste beschouwing wellicht zal denken. Longomontanus toch, die zich reeds vanaf 1612 in 11 voorafgaande publicaties [6]) met het onderwerp had beziggehouden en die een typisch voorbeeld schijnt te zijn geweest van de ongelukkige klasse van menschen, die door den

Vacantiecursussen Wiskunde KI en KV.

1932.

Dr. F. SCHUH, Hoogleeraar te Delft, zal weder in een te **'s Gravenhage** te houden vacantiecursus **eenige belangrijke onderwerpen** betreffende de **studie voor de Akten KI en KV** behandelen. **De stof zal verschillen van die van den vorigen cursus.**

Duur van ieder der cursussen **ongeveer 23 uur** ($9^1/_2$—12 en $1^1/_2$—$3^1/_2$ uur).

KV: 26 Juli — 30 Juli, f 45;
KI: 2 Aug. — 6 Aug., f 35;

aanvang op 26 Juli en 2 Aug. te $9^1/_2$ uur, van Boetzelaerlaan 28 (lijn 11, 1, 21 of 10).

Voor studeerenden voor KV, die dit jaar nog niet voor het examen opgaan, bestaat gelegenheid tot het volgen van den eersten cursus gedurende de eerste drie dagen tegen *f* 30.

Het cursusgeld kan eenige dagen voor den aanvang van den cursus per postwissel aan **Prof. SCHUH** worden toegezonden. Inlichtingen en aangifte (liefst voor 23 Juli) bij Prof. Dr. F. SCHUH, van Boetzelaerlaan 28, den Haag; evenwel is ook **latere** toetreding mogelijk.

N. B.

Op den cursus KI zullen desgewenscht vragen van schriftelijke en mondelinge examens besproken worden (zie P. Wijdenes, schriftelijke opgaven KI; idem: Uitgewerkte mondelinge examens H. Algebra; de mondelinge verslagen in het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde; Mondelinge examens wiskunde L. O., KI en KV, door Verkaart, Wijdenes en Schuh, uitgaven van P. Noordhoff). Wenschen dienaangaande liefst voor 26 Juli kenbaar te maken. Ook voor den cursus KV kunnen wenschen kenbaar gemaakt worden (zie Mondelinge examens wiskunde L. O., KI en KV en F. Schuh, Schriftelijke opgaven KV met volledige aanwijzingen ter oplossing, uitgaven van P. Noordhoff). Zoo veel mogelijk zal ook met later (desnoods op den cursus) kenbaar gemaakte wenschen rekening gehouden worden.

VACANTIECURSUS REKENKUNDE KI,

te geven door **Prof. Dr. F. SCHUH**, van Boetzelaerlaan 28, den Haag,

8—10 AUGUSTUS.

Duur ongeveer 14 uur ($9\frac{1}{2}$—12, $1\frac{1}{2}$—$3\frac{1}{2}$ uur).

Behandeld worden de voornaamste gedeelten uit de theorie, voorkomende in:

SCHUH, Theorie der Hoogere-Machtscongruenties en der Hoogere-Machtsresten,

SCHUH, Toepassingen van de Theorie der Getallencongruenties, in het bijzonder op Repeteerende Breuken,

uitgaven van Gebr. van der Hoek te Leiden.

Vooral zullen Vraagstukken uit beide boeken behandeld worden. Wenschen kunnen van te voren, of op den cursus, kenbaar gemaakt worden. Aangifte liefst voor 1 Augustus.

Genoemde boeken dienen op den cursus te worden meegebracht. Overigens zijn aan het volgen van den cursus **geen kosten** verbonden.

---

eenvoud van de propositie van een moeilijk mathematisch probleem steeds weer verleid worden tot den waan, dat het antwoord nu ook wel met middelen van gelijken eenvoud te geven zal zijn, was er langzamerhand toe gekomen, twee in cyclometrische berekeningen gebruikelijke hulpmiddelen, namelijk het gebruik van goniometrische tafels en de herhaalde worteltrekking als ondeugdelijk te verwerpen uit vrees voor accumulatie van fouten bij afgebroken bewerkingen met afgeronde getallen. Om hem dus van zijn dwaling te overtuigen, zonder de vraag aan de orde te stellen, hoe de bij deze methode inderdaad dreigende gevaren te voorkomen zijn, moest Pell beide middelen vermijden; hij kon zich dus noch op de resultaten van Ludolph, noch op die van Snellius beroepen, hoewel uit hunne werken de onjuistheid van de bewering van Longomantanus onmiddellijk is af te lezen, maar hij moest een nieuwen weg inslaan, om rechtstreeks aan te toonen, dat de nieuw opgegeven waarde onjuist was.

Deze weg bestond nu daarin, dat hij een formule opstelde voor den tangens van het dubbele van een boog, die kleiner is dan 45°, een formule, die tegenwoordig van de meest elementaire wiskundige kennis deel uitmaakt, maar die, voorzoover bekend is, bij deze gelegenheid voor het eerst is meegedeeld. Zij luidt

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2R^2 \operatorname{tg} \varphi}{R^2 - \operatorname{tg}^2 \varphi}$$

waarin R den straal van den cirkel voorstelt [7]).

Met behulp van deze formule toont hij nu aan, dat de omtrek P_{256} van den omgeschreven regelmatigen veelhoek met 256 zijden, uitgedrukt in den diameter van den cirkel, kleiner is dan 3,14176. Was dus de door Longomontanus gevonden uitdrukking voor den cirkelomtrek juist, dan zou deze grooter moeten zijn dan de omtrek van een omgeschreven regelmatig polygoon, terwijl ook het oppervlak van den cirkel dat van het polygoon zou overtreffen. Het eerste is absurdum, het tweede absurdissimum; daarmee is dus de bewering van Longomontanus weerlegd.

Het bedoelde bewijs nu wordt gegeven, door met behulp van de bovenstaande formule ongelijkheden op te stellen voor de waarde van

$$\operatorname{tg} \frac{45^\circ}{2^n} \qquad n = 1, \ldots . 6$$

Bekend is [8]) $tg\ 45^\circ < 1{,}0000001$

Daaruit volgt $tg\ \frac{45^\circ}{2} < 0{,}4142136$

omdat uit (1) voor $tg\ \varphi = 0{,}4142136$

volgt $tg\ 2\varphi = 1.0000001$ dus $2\varphi > 45^\circ$.

Zoo voortgaande vindt men ten slotte

$$tg\ \frac{45^\circ}{64} < 0{,}0122725$$

zoodat de zijde van den omgeschreven regelmatigen 256-hoek, die een middelpuntshoek van $\frac{45^\circ}{32}$ onderspant en waarvan dus de lengte $2 \cdot tg\ \frac{45^\circ}{64}$ bedraagt, uitgedrukt in den diameter, kleiner is dan 0,0122725.

Hieruit volgt nu het boven meegedeelde resultaat omtrent P_{256}; men vindt nl.

$$256 \cdot 0{,}0122725 = 3{,}14176$$

dus

$$P_{256} < 3{,}14176 < 3{,}1418$$ [9]).

Pell liet deze korte weerlegging van de stelling van Longomontanus, die, zooals beloofd was, inderdaad niet meer dan een blad beslaat, onder dagteekening 1 Augustus 1644 drukken bij den zelfden uitgever Blaeu, die ook het bestreden werk had verzorgd, om zoodoende, zooals hij niet zonder pathos zegt, de door de wanproducten van Longomontanus bezoedelde lettervormen boete te laten doen. Blaeu beloofde hem — een wonderlijk gebaar voor een uitgever! — het stukje met de pagineering 73 en 74 in de nog onverkochte exemplaren van het werk van den Deen, dat met bladzijde 72 eindigde, te leggen, terwijl Pell zelf zorg droeg voor de verspreiding van zijn betoog bij allen, die in staat konden worden geacht, het geval te beoordeelen.

Van dit inlegvel, dat later steeds wordt aangeduid met den naam van *Refutatiuncula,* zijn geen exemplaren meer bekend; wel bezitten onze bibliotheken nog het werkje, waarin Pell enkele jaren later nog eens alle documenten, die het geschil betreffen, heeft verzameld [10]) en waarin men na een uitvoerige inleiding, ook de *Refutatiuncula* afgedrukt vindt [11]). Die inleiding, waarin het ontstaan van de controversie wordt behandeld en waaraan de boven vermelde bijzonderheden zijn ontleend, vormt op zich zelf reeds een strijdschrift: Pell toont er zich een vaardig beheerscher van een rijkelijk emphatischen polemischen stijl, die zich voortreffelijk leent voor de uiting van de heilige verontwaardiging, die hij voorgeeft te gevoelen over de wijze, waarop de beroemde leerling en helper van Tycho nog als tachtigjarige grijsaard volhardt in zijne reeds dertig jaar lang beleden krasse dwalingen, die zonder den ondergang van de geometrie niet verdedigd zouden kunnen worden. Voor die verontwaardiging zegt hij een dubbelen grond te bezitten: vooreerst de liefde tot de waarheid, maar daarnaast het feit, dat Longomontanus het heeft bestaan, zijn werk op te dragen aan Albertus Conradus Burgius, Burgemeester van Amsterdam en Curator van het Gymnasium (d.i. het Athenaeum Illustre) en het te laten drukken bij denzelfden uitgever, waaraan hij, Pell, zelf zijn editie van de werken van Diophantus wil toevertrouwen. Zullen, als hij niet protesteert, de Europeesche mathematici niet meenen, dat het werk van Longomontanus met zijn goedkeuring en instemming in deze stad en bij dezen uitgever gedrukt is? De mogelijkheid van dien smaad moet met alle beschikbare middelen worden afgewend; hij is aan zijn goeden naam verplicht, de verkeerde gevolgtrekkingen en „stinkende paralogismen" van den Deen te bestrijden.

Op 17 Augustus 1644 zendt Pell een exemplaar van de *Refutatiuncula* aan Longomontanus zelf toe, vergezeld van een kort en nogal impertinent briefje [12]), waarin hij verklaart, geen enkele reden te hebben, den ontvanger voor zoo dom te houden, dat hij de juistheid van de gegeven weerlegging niet zou kunnen of voor zoo stijfhoofdig, dat hij haar niet zou willen inzien en waarin hij hem uitnoodigt, ten spoedigste een palinodie uit te geven.

Het was te voorzien, dat deze uitnoodiging vruchteloos zou blijven. Zoo Pell zich hierover nog illusies heeft gemaakt, zullen die wel volkomen vernietigd zijn door een brief van een niet met name genoemden correspondent [13]), waarin een uitlating van een ontvanger der *Refutatiuncula,* die Longomontanus persoonlijk kende, wordt overgebracht. Deze achtte de weerlegging zeer sterk, maar raadde af, haar aan Longomontanus zelf te zenden: geen weerlegging, zet hij uiteen, zal in staat zijn, den hardnekkigen grijsaard, die beschouwd moet worden als lijdende aan een ongeneeselijke ziekte, van zijn cyclometrische dwalingen te bevrijden; als hij antwoordt, zullen het dwaasheden zijn en als hij zwijgt, zal toch in ieder geval de ergernis, die de aanval hem zal berokkenen, de overpeinzingen over de onsterfelijkheid en het leven hiernamaals verstoren, waarmee iemand van zoo gevorderden leeftijd geacht kan worden, althans behoorlijk zou doen, zijn tijd door te brengen. Een dergelijke berusting in de zwakheden van een ander strookte echter heelemaal niet met het heftig karakter van Pell: hij heeft zich juist gehaast, zijn bestrijding zoo snel mogelijk uit te geven, om den tegenstander nog voor diens dood te kunnen bereiken; het zal zijn eeuwigheidsoverpeinzingen niet dan goed kunnen doen, wanneer hij eerst nog zijn cyclische beuzelarijen verwerpt en in het openbaar verfoeit.

Het zou spoedig blijken, dat Longomontanus er evenmin over dacht, om geërgerd te zwijgen, als om zijn dwalingen toe te geven. Hij antwoordde nog in het zelfde jaar [14]), zeer verbolgen over den onbeschaamden aanval van den onbeteugelden jongeling, tegenover wiens onwetendheid hij zijn cyclometrisch werk tot heil der menschheid door een korte en bescheiden verdediging wil handhaven.

Van die verdediging blijkt kortheid wel de eenige verdienste; overigens bevestigt zij slechts de boven weergegeven karakteristiek van den inderdaad beklagenswaardigen grijsaard, wiens autoriteit in Denemarken wel groot genoeg zal zijn geweest, om de kritiek op zijn cyclometrische theorieën te doen zwijgen, maar die nu geheel zonder verweer stond tegenover den fellen aanval van zijn Amsterdamschen tegenstander. Hij blijkt twee argumenten te hebben: het eerste, dat Pell ten onrechte meent, met een voorbeeld een geheel werk te kunnen weerleggen, zonder dit punt voor punt te bespreken, het tweede, dat, wanneer men de waarden van sinussen en tangenten, die in de goniometrische tafels staan, voor volkomen exact houdt, men tot conclusies komt, die in strijd zijn met bekende stellingen van Euclides [15]).

Beide argumenten zijn blijkbaar krachteloos. Pell's tegenvoorbeeld tegen de bewering van Longomontanus heeft ongetwijfeld bewijskracht en de in het tweede argument genoemde fout wordt nergens door hem gemaakt [16]).

Het is begrijpelijk, dat Pell, na eenmaal den strijd te hebben aangebonden, zich bij dit antwoord niet kon neerleggen. Er bestaat een heftige brief van zijn hand aan een ongenoemden correspondent in Kopenhagen, waarin hij aan zijn gevoelens tegenover Longomontanus en de Denen, die diens houding verdedigen of vergoelijken, onomwonden lucht geeft [17]. Daarnaast vraagt hij echter aan verschillende deskundigen, die de *Refutatiuncula* ontvingen, hun oordeel over het geschil met het verzoek, dit met het antwoord van Longomontanus te mogen publiceeren. Aan dit verzoek werd blijkbaar gaarne voldaan en vol trots kan Pell in zijn werk tien getuigenissen ten zijnen gunste afdrukken waaronder enkele van de eerste geleerden van Europa afkomstig zijn. Het zijn de antwoorden van Gilles Persone de Roberval [18], Thomas Hobbes [19], Pierre de Carcavy [20], Charles Cavendish [21], Pallieur [22], Mersenne [23], Tassius [24], Wolzogen [25], Descartes [26] en Cavalieri [27]. Allen betuigen hun instemming met Pell's geschrift; de meesten leveren bovendien bewijzen voor de door Pell zonder bewijs meegedeelde formule voor *tg* 2 [28].

Intusschen had ook Longomontanus niet stilgezeten. In Mei 1645 verscheen in Kopenhagen een anoniem geschrift [29], waarin de schrijver (die volgens Pell wel niemand anders zal zijn geweest dan Longomontanus zelf) ter nadere adstructie van diens uitlatingen over de onbetrouwbaarheid van de goniometrische tafels met groote uitvoerigheid uiteenzet, dat de relatie

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta} > \frac{\alpha}{\beta} > \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \qquad \text{voor } \alpha > \beta.$$

niet blijkt uit te komen, als men de waarden van den sinus en den tangens voor hoeken van 24′ en 18′ aan de tafels ontleent.

Dit geeft Pell dan weer aanleiding, zijn geheele betoog, ingedeeld in honderd paragraphen, nog eens in extenso te herhalen [30], om te laten zien, dat de beschouwingen van den anonymus zijn standpunt in het geheel niet treffen; daarna sluit hij het eerste deel van zijn werk af met een Ciceroniaansche peroratie aan alle mathematici, waarin hij nogmaals de euveldaden van Longomontanus samenvat, zijn eigen handelwijze verdedigt en . . . nieuwe betoogen in het vooruitzicht stelt.

Het zal den lezer ongetwijfeld geen leed doen, als hij verneemt, dat dit vooruitzicht niet verwezenlijkt is. De uitgever deelt mee, dat de schrijver, naar Breda beroepen, de stad ijlings heeft verlaten en dat hij het werk zeker wel in zijn nieuwe woonplaats zal voortzetten. Hiervan schijnt echter niets te zijn gekomen. Ten slotte vindt men dan nog de getuigenissen, die na zijn vertrek nog zijn ontvangen van Claude Mydorge [31]) en van den Leidschen hoogleeraar Iacobus Golius [32]); beiden leveren ook nog bewijzen voor Pell's formule.

Hiermee eindigt het relaas van het conflict, dat Pell gedurende zijn korte verblijf te Amsterdam heeft beziggehouden. In zijn veelbewogen leven is het slechts een korte episode geweest: men vindt hem na zijn professoraat te Breda, dat hij tot 1652 vervulde, terug in dienst van Cromwell, voor wien hij een gezantschap in Zwitserland heeft bekleed, later, in Engeland teruggekeerd, als priester van de Anglicaansche kerk, als huiskapelaan van den bisschop van Canterbury en bijna zelf als bisschop. Beladen met schulden en menigmaal zelf gebrek lijdend, zwerft hij dan rond bij familieleden en vrienden, overal omvangrijke handschriften nalatend, die thans in veertig deelen in het Britsch Museum berusten. Hij stierf in 1682, den naam van een groot wiskundige nalatend, zonder dat hij echter op de ontwikkeling van zijn wetenschap noemenswaarden invloed heeft uitgeoefend. De ironie van het lot heeft gewild, dat zijn naam tot op heden verbonden is gebleven aan een probleem tot welks oplossing hij niet wezenlijk heeft bijgedragen: het is de z.g. vergelijking van Pell, waarbij gevraagd wordt, aan de relatie

$$x^2 - dy^2 = 1 \qquad (d \text{ geheel})$$

door geheele waarden voor x en y te voldoen.

NOTEN.

[1]) De biographische bijzonderheden over Pell zijn ontleend aan het artikel s. v. Pell in het Nieuw Nederlandsch Biographisch Woordenboek, onder redactie van Dr. P. C. Molhuijsen en Prof. Dr. P. J. Blok. III, 961—965. Leiden (Sijthoff) 1914. Dit artikel is van de hand van C. de Waard.

[2]) Martinus Hortensius Delft 1605—Leiden 1639, was een leerling van I. Beeckman. Hij werd in 1634 docent, in 1635 hoogleeraar aan het Athenaeum Illustre.

[3]) Gerardi Ioannis Vossii de Universae Mathesios natura et constitutione Liber, cui subjungitur Chronologica Mathematicorum. Amstelodami (J. Blaeu) MDCLX. Caput X, pag. 37—38.

[4]) Christianus Severini Longomontanus (geboren 1562 te Longberg in Denemarken) is een van de bekende leerlingen en assistenten van Tycho Brahe. Van 1605 tot zijn dood in 1647 was hij hoogleeraar in de wiskunde en de astronomie te Kopenhagen.

[5]) Christiani Severini Longomontani, Cimbri, Rotundi in plano,

seu Circuli, absolut mensura, duobus libellis comprehensa, quorum prior veram constitutionem Peripheriae Circuli Syntheticè perficit, et mox hujus ad Diametrum rationem (cui apologia adversus Ludolphaeos est adjecta) Posterior Geodaesiam Rotundi plano analyticè absolvit. Amsterdami, apud Ioan. Blaeu. Anno 1644.

6) Men vindt de titels alle vermeld in het hieronder (noot 10) te citeeren werkje van Pell, pag. 84—85.

7) Men bedenke, dat het in de trigonometrie van de 17e eeuw nog geen gewoonte was, den straal van den cirkel als eenheid van lengte te gebruiken.

8) We hebben hier de schrijfwijze eenigszins gemoderniseerd; bij Pell wordt $R = 10^5$ gesteld; boven is $R = 1$ aangenomen.

9) De methode is dus als volgt weer te geven:

Stel $R = 1$ en $\frac{2x}{1 - x^2} = f(x)$.

Bepaal a_i, zoodat

$$f(a_i) > a_{i-1} \quad i = 1 \ldots 6, \; a_0 = 1.$$

Daar de tangensfunctie monotoon stijgt, volgt hieruit

$$\operatorname{tg} \frac{45^\circ}{2^i} < a_i.$$

Het bewijs is nu geleverd, wanneer het gelukt, a_6 zoo te bepalen, dat

$$512\, a_6 < 3{,}1418.$$

10) Dit werkje verscheen eerst in 1646 in het Engelsch, daarna in 1647 in het Latijn. We hebben de laatste editie geraadpleegd. De titel luidt: Controversiae de verâ Circuli mensurâ Anno CIↃIↃ CXLIV exortae, inter Christianum Severini Longomontanum, Cimbrum, Superiorum Mathematum in Regiâ Danorum Academiâ Hauniensi, Professoren publicum et Ioannem Pellium, Coritano-Regnum, Anglum, Matheseos, in Illustri Amstelodamensium Gymnasio, Professorem publicum. Pars Prima. Amstelodami, apud Ioannem Blaeu. CIↃIↃ CXLVII.

11) l.c. pag. 13—14.

12) l.c. pag. 17.

13) l.c. pag. 19.

14) Ἐλέγξεως Ioannis Pellii contra Christianum S. Longomontanum De Mensura Circuli Ἀνασκευὴ In Pellium et Guldinum verae Cyclometriae adversantes. Hauniae, Anno Domini MDCXLIV.

15) Men vindt namelijk $\sin 24' = \operatorname{tg} 24'$, waaruit zou volgen, dat de zijde van den ingeschreven regelmatigen 450-hoek (waarvan 24′ de halve middelpuntshoek is) gelijk is aan die van den omgeschreven regelmatigen veelhoek met hetzelfde aantal zijden.

16) Het is, als men de weerlegging van Longomontanus beschouwt, niet duidelijk, hoe Cantor (Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, II, 713) zeggen kan, dat de strijd tusschen Pell en Longomontanus „zu einen eigentlichen Ergebnisse nicht führte".

17) l.c. (noot 10) pag. 43—45.

18) Fransch wiskundige (1602—1675), bekend door zijn werk op het gebied van meetkunde, mechanica en astronomie.

19) Bekend Engelsch philosoof, 1588—1679.

20) Fransch jurist, een van de eerste leden van de Académie des Sciences. Hij stierf in 1684.

21) Engelsch edelman, vaak genoemd in de correpondentie uit het midden van de 17e eeuw.

[22]) Pallieur wordt door Pell vermeld als Nobilis Pariensis; overigens is niets van hem bekend..

[23]) De bekende Minoriet, middelpunt van wetenschappelijke correspondentie, jeugdvriend van Descartes.

[24]) Johann Adolph Tasse (1585—1654) was professor in de wiskunde aan het Gymnasium te Hamburg.

[25]) Over Wolzogen zijn mij geen feiten bekend.

[26]) De beroemde Fransche philosoof en mathematicus (1569—1650). Zijn brief is verzonden uit Egmond, waar hij destijds vertoefde,

[27]) Bonaventura Cavalieri (1598—1647), bekend door zijn methode der indivisibilia.

[28]) Deze bewijzen worden geleverd door Roberval, Hobbes, de Carcavy, Cavendish, Pallieur, Wolzogen en Cavalieri. Ze worden uit den aard der zaak alle langs meetkundigen weg verkregen.

[29]) *Controversia inter Christanum Longomontanum et Ioanne Pellium, De vera Circuli mensura, ubi Defectus Canonis Trigonometrici, sub initium ejusdem, ostenditur....* Hauniae 8 Calend. Iunii. Anno MDCXLV. Literis Viduae Salomonis Sartorii. Afgedrukt l.c. (noot 10) 63 seq.

[30]) l.c. (noot 10) pag. 75—82.

[31]) Fransch wiskundige, 1585—1647.

[32]) Golius (1596—1667) werd in 1625 hoogleeraar in het Arabisch te Leiden en volgde in 1628 Snellius op als hoogleeraar in de wiskunde.

WAT DIENT, BIJ DE INVOERING VAN DE DIFFERENTIAAL- EN INTEGRAALREKENING OP DE H.B.S., ER VAN IN DE 4e EN 5e KLASSE BEHANDELD TE WORDEN?

DOOR

W. C. POST.

Over bovenstaand onderwerp is door mij een inleiding gegeven op de jaarlijksche algemeene vergadering van de Vereeniging van Leeraren in de Wiskunde, de Mechanica en de Kosmographie aan Hoogere burgerscholen met vijfjarigen cursus B, Lycea en Meisjes hoogere burgerscholen met 5-/6-jarigen cursus, welke op 29 December 1931 te Utrecht gehouden is. Op verzoek van de redactie van Euclides geef ik hieronder een overzicht van het door mij gesprokene.

Bij de beantwoording van de vraag, wat bij de invoering van de D.- en I.-R. op de H. B. S. behandeld dient te worden, heb ik mij op het standpunt geplaatst, dat het doel van dit onderwijs vooral moet zijn het bijbrengen van de begrippen differentiaalquotiënt (afgeleide functie) en bepaalde en onbepaalde integraal. De rekentechniek moet pas in de tweede plaats komen; het aantal van buiten te leeren regels moet tot een minimum beperkt worden. Het onderwijs mag niet ontaarden in mechanisch en begriploos differentiëeren en integreeren. Ik ga verder van de onderstelling uit, dat de graphische voorstellingen en het limietbegrip in de eerste drie klassen grondig behandeld zijn. Men kan dan aanknoopen bij de graphische voorstellingen, de aandacht vestigen op het in het algemeen toenemen of afnemen van een functie bij aangroeiing van de onafhankelijk veranderlijke en het daarmee gepaard gaande stijgen of dalen van de lijn, die de functie graphisch voorstelt. Verder kan men er opmerkzaam op maken, dat de aangroeiingen van de functie bij dezelfde aangroeiing van de onafhankelijk veranderlijke voor verschillende beginwaarden van deze aangroeiing zeer verschillend kunnen zijn. Men komt zoo tot de begrippen differentiequotient en differentiaalquotient. De leerlingen moeten ook vertrouwd gemaakt worden met de gebruikelijke notaties, dus hier met

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \text{ als } y = f(x) \text{ is,}$$

waarbij dus $\frac{dy}{dx}$ wordt opgevat als de grenswaarde van een quotiënt en het symbool $\frac{dy}{dx}$ een onverbreekbaar geheel is. Het begrip differentiaal en de opvatting van $\frac{dy}{dx}$ als een quotiënt van twee differentialen lijkt mij te moeilijk voor de leerlingen. Door het differentiaalquotiënt als een functie van de onafhankelijk veranderlijke te beschouwen komt men tot het begrip afgeleide functie met de notatie $y' = f'(x)$.

Uit de graphische voorstelling kan verder worden afgeleid, dat het differentiaalquotiënt van een functie voor een bepaalde waarde van de onafhankelijk veranderlijke de tangens van den hoek voorstelt, dien de raaklijn in het bij die waarde van de onafhankelijk veranderlijke behoorende punt van de graphische voorstelling maakt met de positieve richting van de as der onafhankelijk veranderlijke.

Ik vind het nu zeer gewenscht, dat de leerlingen zelf de afgeleide van verschillende functies bepalen door telkens opnieuw van de definitie van differentiaalquotiënt uit te gaan. Voor het differentiëeren van de goniometrische functies is dan noodig, dat men vooraf met de leerlingen behandelt, dat $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ is.

Van buiten behoeven alleen te worden geleerd de volgende uitkomsten:

$$y = au, \ \frac{dy}{dx} = a\frac{du}{dx} \ (y \text{ en } u \text{ zijn functies van } x, \ a \text{ is een constante})$$

$$y = u_1 + u_2 + \ldots + u_n, \ \frac{dy}{dx} = \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \ldots + \frac{du_n}{dx}$$

$$(y, u_1, u_2, \ldots u_n \text{ zijn functies van } x)$$

$$y = x^n, \ \frac{dy}{dx} = nx^{n-1} \ (\text{voor alle geheele waarden van } n)$$

$$y = \sin(ax+b), \ \frac{dy}{dx} = a\cos(ax+b)$$

$$y = \cos(ax+b), \ \frac{dy}{dx} = -a\sin(ax+b).$$

Met het oog op het begrip versnelling van een rechtlijnige beweging, kan men in de mechanica het tweede differentiaalquotiënt niet missen. Men vermijde echter de notatie $\frac{d^2y}{dx^2}$, daar deze notatie niet te verklaren is zonder het begrip differentiaal in te voeren, welk begrip ik, naar ik boven reeds opmerkte, te moeilijk acht voor de leerlingen. In de mechanica kan men schrijven $s = f(t)$, $v = \frac{ds}{dt}$, $a = \frac{dv}{dt}$, met de gewone beteekenis van s, v, en a.

Aan de hand van de graphische voorstelling kan men ook de relatieve extrema van een functie behandelen en aantoonen, dat voor het bestaan van een relatief extremum in het punt $x = a$ van de functie $y = f(x)$, het noodig, maar niet voldoende is, dat $\frac{dy}{dx} = o$ voor $x = a$. Is nu a een waarde van x, waarvoor $\frac{dy}{dx} = o$ is, dan kan men door $f(a) - f(a-h)$ en $f(a) - f(a+h)$ te bepalen, gemakkelijk nagaan of men al of niet met een extremum te doen heeft en in het geval van een extremum uitmaken of dit een maximum of minimum is, zoodat men hier het tweede differentiaalquotiënt kan missen.

Bij de integraalrekening lijkt het mij het beste met de bepaalde integraal, als limiet van een som, te beginnen en hierbij weer uit te gaan van de graphische voorstelling, door het oppervlak te beschouwen van de figuur, begrensd door de ordinaten $x = a$ en $x = b$ en door het tusschen deze ordinaten in gelegen stuk van de x-as en van de lijn, waarvan $y = f(x)$ de vergelijking is. De leerlingen moeten weer vertrouwd gemaakt worden met de gebruikelijke notaties, dus hier met

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x=a}^{x=b} f(x)\,\Delta x.$$

Het is nu wenschelijk de leerlingen enkele integralen, bijv. $\int_0^1 x\,dx$ en $\int_0^1 x^2\,dx$, volgens de definitie te laten uitrekenen. Om de laatste integraal te berekenen moet dan met de leerlingen behandeld worden, dat $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}\,n\,(n+1)\,(2n+1)$ is.

Door de bovenste grens van de integraal veranderlijk te nemen, komt men tot

$$O(x) = \int_a^x f(x)\,dx$$

en met behulp van de graphische voorstelling leidt men dan gemakkelijk af, dat

$$\frac{dO}{dx} = f(x)$$

en dat

$$\int_a^b f(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a),$$

waarin $\varphi(x)$ een functie voorstelt, waarvan de afgeleide $f(x)$ is.
Men kan dan het begrip onbepaalde integraal invoeren, dus

$$\int f(x)\,dx = \varphi(x) + C,$$

waarin C een willekeurige constante voorstelt en $\frac{d\varphi(x)}{dx} = f(x)$ is, waarmee dan het verband tusschen de integraalrekening en de differentiaalrekening gevonden is.

Verder kan men dan op de bekende manier met behulp van de integraalrekening het oppervlak, den inhoud en de ligging van het zwaartepunt van verschillende lichamen bepalen.

Men zal nu allicht vragen, waar moet de tijd vandaan gehaald worden, om het bovenstaande te behandelen?

Wanneer men de behandeling van de wortelvormen beperkt tot wat voor de meetkunde onmisbaar is en de logarithmische en exponentiëele vergelijkingen geheel weglaat, wat naar mijn meening zonder bezwaar kan geschieden, of althans sterk besnoeit, dan kan het tegenwoordige programma voor algebra in de eerste drie klassen geheel worden afgehandeld. Men kan dan in de vierde klas de beginselen der differentiaal- en integraalrekening behandelen, waarvoor 20 lesuren zeker ruimschoots voldoende zijn. Een bezwaar is dan nog, dat de mechanica in de vierde klas gewoonlijk begonnen wordt met de kinematica, zoodat men al dadelijk bij het begrip snelheid van een veranderlijke beweging met de differentiaalrekening te doen krijgt, terwijl de leerlingen op de wiskundeles er dan nog niet voldoende vertrouwd mee zijn geworden. Dit bezwaar is te ondervangen, door de mechanica niet met de kinematica te beginnen, maar met het samenstellen van krachten en koppels. Daar de leerlingen dan het begrip versnelling nog niet kennen, moet in de plaats van de gebruikelijke dynamische invoering van het begrip kracht de statische komen. Men kan echter ook meer wiskundig te werk gaan door het begrip vector in te voeren en aan de mechanica een inleiding in de theorie van de vrije en de glijdende vectoren te laten voorafgaan.

INGEKOMEN BOEKEN.

NEWTON'S „PRINCIPIA" door Dr. H. J. E. Beth, 2e deelen geb. *f* 8,50; voor int. op Chr. Huygens, N. T. v. Wiskunde en Euclides tot 1 Aug. 1932 *f* 6,25; ook voor hen, die het congresnummer ontvingen.

SUPPLEMENT OP NOORDHOFF's CATALOGUS C

VAN STUDIEBOEKEN VOOR WIS- EN NATUURKUNDE

TITEL	Geschikt voor
Prof. Dr. J. WOLFF. **Fourier'sche Reihen mit Aufgaben,** geb. *f* 2.40.	**Hoogeschool.**
Prof. H. J. VAN VEEN. **Systematische verzameling van opgaven over Analytische Meetkunde, met antwoorden,** 70 blz., *f* 2.60. *Het platte vlak:* Inleiding. — Rechte lijn. — Cirkel. — Kegelsneden. — Samen 229 vraagstukken. *De ruimte:* Inleiding. — Plat vlak en rechte lijn. — Bol. — Oppervlakken als meetkundige plaatsen van lijnen. — Oppervlakken van den tweeden graad. — Samen 175 vraagstukken. *Gemengde opgaven* van de Delftsche propaedeutische examens 1924—1929.	**Delft; K I; K V; eerste jaar universiteit; Wageningen, officiersopleiding.**
Prof. Dr. F. SCHUH. **Axiomatische behandeling der meetbare en onmeetbare verhoudingen,** 123 blz., geb. *f* 3.25. Algemeene eigenschappen van grootheden. — Meetbare verhoudingen van grootheden. — Onmeetbare verhoudingen van grootheden. — Continuïteit en volledigheid. — Nadere beschouwing der natuurkundige en meetkundige toepassingen. — Theorie der verhoudingen volgens Euclides. — Theorie van het onmeetbare getal, gebaseerd op de definitie van Euclides. — Aanhangsel I. Nieuwe arithmetische theorie van het positieve reëele getal. Algemeen gedeelte. — II id. Bijzonder gedeelte. — III. Toepassing van de definitie van Euclides op de theorie van Aanhangsel I.	**Voor allen, die zich verdiepen in de logische grondslagen der wiskunde.**
Dr. P. MOLENBROEK. **Leerboek der Vlakke Meetkunde, 7e druk.** Inhoud als de 6e druk, geb. *f* 6.50. **Oplossingen van de vraagstukken** uit dit Leerboek door P. Wijdenes, *f* 2.50.	**Acte L. O., K I en verschillende N-acten.**

TITEL	Geschikt voor
Prof. Dr. Hk. DE VRIES. **Leerboek der Beschrijvende Meetkunde. Deel I. De leer der projectiemethoden, 3e druk,** met atlas, *f* 11.75. Inhoud als de 2e druk.	**Hoogeschool. K V; Teeken-acten.**
Prof. H. J. VAN VEEN. **Beknopt leerboek der Beschrijvende Meetkunde,** 382 blz., geb. met atlas met 381 figuren, *f* 10.50. **A.** Projectiemethoden. Gewone rechthoekige projectie. — Centrale projectie; *a.* Vrije perspectief, *b.* Gewone perspectief. — Scheeve projectie. — Orthogonale axonometrie. — Verschillende projectiemethoden. **B.** Oppervlakken en ruimtekrommen. Inleiding. — Kegels en cylinders. — Omwentelings-oppervlakken. — Scheeve regelvlakken. — Doorsnijding van oppervlakken. **C.** Aanhangsel. Ellips als parallelprojectie van een cirkel. — Vlakke doorsneden van omwentelingskegels. — Centrale collineatie. — Stelling van Pascal en Brianchon. Opgaven van de propaedeutische examens van Delft 1924—1930.	**Delft. N-acten. Teeken-acten. K I en K V.**
Deel III van de Historische Bibliotheek. Dr. E. J. DIJKSTERHUIS. **De Elementen van Euclides. Deel II.** 287 blz., 107 figuren, geb. *f* 5.75. Inhoud. De boeken II—XIII der Elementen. Boek II De oppervlakteberekening. — Boek III De cirkel. — Boek IV Cirkel en driehoek. — Boek V De redentheorie. — Boek VI De meetkundige toepassing der redentheorie. — Boek IX De drie arithmetische boeken. — Boek X Theorie der irrationaliteiten. — Boek XI Stereometrie. — Boek XII Inhoudsbepalingen. — Boek XIII Regelmatige veelvlakken. — Appendix I. Komen in de Grieksche Wiskunde irrationale getallen voor? — Appendix II. Uit de geschiedenis van de termen reden en evenredigheid.	**Voor hen, die belang stellen in de Grieksche Wiskunde en iets willen weten van de grondleggers.**
Prof. G. MANNOURY. **Woord en gedachte.** Een inleiding tot de signifika, inzonderheid met het oog op het onderwijs in de wiskunde, *f* 1.50. De hoofdbegrippen der signifika. — Het meetkundig of syntheties denken. — Het algebraies of analyties denken, het Funksiebegrip.	**Leeraren in de exacte wetenschappen.**

TITEL	Geschikt voor
J. G. G. NOTTROT. **Leerboek der Nomografie,** 271 blz., 96 figuren, 128 opgaven, geb. *f* 6.90. I. *Inleiding.* — Historische ontwikkeling. — Taak en wezen der nomografie. — Elementen der grafische voorstellingswijzen. — De voorstelling van een betrekking tusschen twee veranderlijken. — id. tusschen drie veranderlijken. — Het schaalnomogram. II. *Functieschalen en functievergelijkingen.* — Veranderlijken, functies en functieverg. — Functieschalen. — Dubbelschalen. — Indeeling der functieverg. naar haar nomografische orde. III. *De constructie van schaalnomogrammen voor betrekkingen met drie veranderlijken.* — Algemeene inleiding, dualiteit. — Nomogrammen op een evenwijdig schalenstel. — id. op een snijdend schalenstel. — Onderlinge herleiding van de behandelde functieverg. — Verbetering van nomogrammen. — Nomogrammen op een gebogen schalenstel met afzonderlijke dragers. — id. met een gemeenschappelijke drager. — Kegelsnedenomogrammen. — Kubische nomogrammen. IV. *Scheiding der veranderlijken.* — Inleiding. — 5e en 6e orde. — 4e orde. — 3e orde. — Algemeene functievergelijkingen. V. *Aanvullende hoofdstukken.* — Voorstelling van grensbetrekkingen door stop-, toegangs- en waarschuwingslijnen. — Nomogrammen met gebroken schalen. — Benoodigde gegevens voor de constructie van een nomogram.	**Ingenieurs.** **Leeraren M.T.S.** **Laboratorium.** **Officieren.**

REDEVOERINGEN.

Prof. Dr. G. SCHAAKE, **De bouw der meetkunde.** *f* 0.60.

Dr. O. BOTTEMA, **De meetkunde als invariantentheorie.** *f* 0.50.

Dr. E. J. DIJKSTERHUIS, **Het getal in de Grieksche wiskunde.** *f* 0.60.

Dr. J. DE RIDDER, **De ontwikkeling van het Integraalbegrip.** *f* 0.60.

PROEFSCHRIFTEN.

Dr. A. VAN DOP, **Over W-stralencongruenties en R-oppervlakken.** *f* 2.50.

Prof. Dr. J. F. KOKSMA, **Over stelsels diophantische ongelijkheden.** *f* 3.90.

Dr. P. G. MOLENAAR, **Eindige substitutiegroepen. Toepassing in de Quantatheorie.** *f* 2.50.

Bespreking uit het Weekblad voor M. en G. Ond. van 29 Jan. 1932.

P. Wijdenes. *Beknopte beschrijvende meetkunde*, 2de druk, 112 blz., 139 fig., gec. *f* 2.—. P. Noordhoff N.V., 1931.

Er bestaat tusschen de verschillende leerboeken voor dit onderdeel der elementaire wiskunde bij oppervlakkige beschouwing een grootere mate van overeenstemming dan tusschen die van andere onderdeelen aanwezig behoeft te zijn; een nader onderzoek brengt de verschillen aan het licht, en op grond van zulk een onderzoek blijkt gemakkelijk, dat *het beknopte leerboek van Wijdenes door de bondige, stelselmatige en nauwkeurige behandelingswijze, de duidelijke uiteenzetting en den overvloed van goed gekozen, keurig uitgewerkte, voorbeelden en oefenstof voor de leerlingen, tot de beste van zijn soort behoort.*

Echter is er een bijzondere aanleiding, die mij noopt (zelfs geruimen tijd na de verschijning) de aandacht van de vakgenooten voor dezen tweeden druk te vragen; die aanleiding bestaat in het ruime gebruik, dat de schrijver maakt van affiniteitsassen. Nu is, zooals hij zelf erkent, deze gebruikmaking van affiniteitsassen in een elementair leerboek niet nieuw, maar zij is in de latere jaren geleidelijk uit de leerboeken verdwenen. Sommigen mogen daarmede het bewijs geleverd zien, dat de methode voor ons onderwijs ongeschikt is; *voor anderen staat het vast, dat niet alle wijzigingen, die onze leerstof in den loop der jaren ondergaan heeft, verbeteringen zijn geweest*, en dat de eindexamenopgaven op die leerstof hun, uit den aard der zaak weinig gunstigen, invloed hebben uitgeoefend; door de mogelijkheid tot vrijstelling van het mondeling examen is die invloed stellig nog vergroot.

Men zal over het gebruik van affiniteitsassen in de beschrijvende meetkunde verschillend oordeelen naar gelang men in het onderwerp van dit leervak meer ziet de constructieve behandeling van ruimtelijke vraagstukken op grond van vooraf opgestelde voorschriften, dan wel een stelselmatige oefening ter vergrooting van het ruimtelijk voorstellingsvermogen. Doch hoe men hierover ook denkt, *het pleidooi, dat de schrijver door de zorgvuldige behandeling in dit leerboek ten gunste van de methode houdt, verdient door de vakgenooten met aandacht te worden bestudeerd.*

Het hernieuwde gebruik van affiniteitsassen zal bij velen de vraag doen rijzen, of de bijzondere verwantschap tusschen vlakke figuren, die hier aan de orde gesteld wordt, en die inderdaad in de beschrijvende meetkunde haar voornaamste gebied van toepassing vindt, niet eigenlijk in de vlakke meetkunde behoorde behandeld te worden. Dit dringt vanzelf de vraag naar voren of het wellicht tijd wordt de Euclidische methode van rangschikken der meetkundige waarheden, die we (zij het in gematigden vorm) nog steeds volgen, door de meer moderne te vervangen, waarbij het begrip groep als beginsel voor de rangschikking optreedt. Ten onzent is over deze gewichtige vraag zelden of nooit gesproken; de eenige strijdvraag op het gebied van de didactiek der meetkunde, waarmede wij ons hier bezig houden, is die omtrent den propaedeutischen meetkundigen cursus, een vraag, waarop nooit een beslissend antwoord gegeven zal worden, omdat tusschen de inzichten der partijen geen essentieele, doch slechts gradueele verschillen, hoe groot dan wellicht ook, bestaan.

Misschien wordt ook bij ons door het aangekondigde leerboek van Wijdenes de belangstelling in de zooeven aan de orde gestelde vraag opgewekt.

Deventer. H. J. E. Beth.

Leeraren, die dit boek niet kennen, wordt verzocht, een pres. ex. aan te vragen.

PROSPECTUS

LEERBOEK DER NATUURKUNDE

BESTEMD VOOR HET

MIDDELBAAR, VOORBEREIDEND HOOGER EN PROPAEDEUTISCH ONDERWIJS

DOOR

Dr. W. J. H. MOLL

EN

Dr. H. C. BURGER

EERSTE DEEL
MECHANICA, EIGENSCHAPPEN DER MATERIE, WARMTE, GELUID

TWEEDE DRUK

Prijs van het complete werk, groot 236 pag. f 3.90, geb. f 4.50

P. NOORDHOFF N.V. — 1931 — GRONINGEN

In den Boekhandel verkrijgbaar.

VOORWOORD.

Het verschijnen van dit boek behoeft nadere toelichting. Er bestaan vele leerboeken der natuurkunde, en het was zeker niet onze bedoeling dit aantal met een van analoge strekking te vermeerderen. Het is ons streven geweest, ons los te maken van de conventie, en in ons leerboek naar eigen inzicht een blijvenden indruk te geven van de hedendaagsche physica.

Bij de keuze der onderwerpen en de wijze van behandelen hebben wij ons laten leiden door de volgende overwegingen.

De belangstelling van den lezer moet gewekt worden. Daarom zijn tal van problemen besproken, die men gewoonlijk niet in een elementair leerboek aantreft. Naar wij hopen, zullen deze met minder tegenzin worden bestudeerd, dan vele gebruikelijke onderwerpen, die men vergeefs in ons boek zal zoeken. In het bizonder is daarin plaats ingeruimd voor de bespreking van verschijnselen, die uit het dagelijksch leven bekend zijn, teneinde de natuurkunde aan te doen sluiten aan den gewonen gedachtengang der leerlingen.

Zooals wel van zelf spreekt moet de leerstof niet te moeilijk zijn voor het bevattingsvermogen der leerlingen. Schijnbaar in tegenspraak hiermede gaat op enkele plaatsen het behandelde zeker te ver, om door den beginnenden leerling volkomen begrepen te worden. Maar het gold hier zoo uiterst belangrijke onderwerpen, dat wij den lezer eenige voorlichting dienaangaande niet wilden onthouden. Hij zal daardoor een, misschien vaag, maar toch juist begrip kunnen krijgen van een gedachtengang, die hem eerst later volkomen duidelijk kan worden.

Wat geen andere dan historische beteekenis heeft, en geen integreerend deel vormt van het systeem der hedendaagsche physica, hoort in een elementair leerboek niet thuis. Dit behoort een overzicht te bevatten van de denkbeelden, die heden de belangstelling hebben van de physica zooals die thans in de laboratoria wordt beoefend, en in de praktijk wordt toegepast. Een bizondere „schoolphysica", waarin andere onderwerpen den voorrang hebben, en waarin een andere terminologie wordt gebezigd, heeft geen reden van bestaan.

Herhaaldelijk zijn wij getroffen door een begripsverwarring, als zou de natuurkunde als een onderdeel te beschouwen zijn der wiskunde. Voor de natuurkunde is de wiskunde een hulpmiddel, even onmisbaar als de taal waarin men zijn gedachten uitdrukt. Mede tengevolge van dit misverstand kan de studie der natuurkunde ontaarden in een uit het hoofd leeren en toepassen van formules. Wij hebben in tegenstelling hiermede, in den regel het qualitatieve verband tusschen physische grootheden vooropgesteld; naar onze meening is het inzicht daarvan het eenig wezenlijke, dat den leerling voor zijn verder leven kan worden meegegeven.

Wij hebben hiermede in het kort uiteengezet welke beginselen ons bij het schrijven van dit leerboek voor oogen zweefden, maar zijn er ons van bewust, ze niet voldoende consequent te hebben doorgevoerd, en ons nog te weinig van het oude te hebben losgemaakt. Wij houden ons zeer aanbevolen voor opmerkingen en raadgevingen.

Utrecht, April 1926.

VOORWOORD BIJ DEN TWEEDEN DRUK.

De meest wezenlijke verandering in dezen tweeden druk is de invoering van een kleinen letter voor onderwerpen, die òf te moeilijk zijn voor de school, òf zoo weinig noodzakelijk zijn voor het begrijpen van hetgeen volgt, dat ze bij een eerste behandeling kunnen overgeslagen worden. Daarnaast zijn enkele aanvullingen, en een groot aantal kleine verbeteringen aangebracht.

Zeist, }
Utrecht, } October 1930.

INHOUD.

MECHANICA.

EIGENSCHAPPEN DER MATERIE.

WARMTE.

Blz.

HOOFDSTUK XII. **Warmte-transport.**

HOOFDSTUK XIII. **Warmte en Energie.**

HOOFDSTUK XIV. **Warmtebeweging.**

HOOFDSTUK XV. **Kinetische gastheorie.**

HOOFDSTUK XVI. **Overgang van phase.**

Overal waar wrijving optreedt, staat men dus voor een dubbel raadsel. Eenerzijds ontstaat warmte, schijnbaar uit niets, anderzijds gaat mechanische energie verloren. De eenvoudige oplossing van dit raadsel is, dat warmte een vorm is van energie.

In deze opvatting is dus wrijving niets anders dan de omzetting van mechanische energie (arbeidsvermogen van plaats of van beweging) in deze nieuwe energiesoort, d.i. in warmte. Een bewijs van de juistheid van deze opvatting ligt in het bovenstaande niet; de gelijkwaardigheid van warmte en arbeidsvermogen wordt door het optreden van warmte bij alle wrijving hoogstens waarschijnlijk gemaakt. Om hieromtrent zekerheid te verkrijgen, moest door metingen worden uitgemaakt, of bij het verdwijnen van een zeker bedrag aan mechanisch arbeidsvermogen steeds een zelfde bedrag aan warmte ontstaat.

§ 69. *Warmte een energievorm.*

De eerste nauwkeurige metingen van de hoeveelheid warmte, die door wrijving wordt ontwikkeld, en van het arbeidsvermogen dat daarbij verloren gaat, zijn verricht door JOULE. Zijn proefnemingen zullen hier beschreven worden, zonder dat wij echter ingaan op tal van bizonderheden, die het wezen der zaak niet raken.

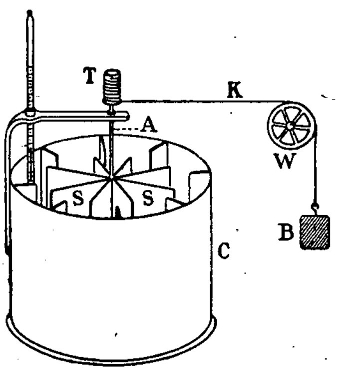

Fig. 50.

De wrijving waardoor mechanische energie in warmte werd omgezet, was bij de meeste dezer proeven de inwendige wrijving van een vloeistof, bijv. van water. Het principe waarop het toestel berustte, is in fig. 50 voorgesteld.

C is een calorimeter, d.w.z. een metalen bak gevuld met water, waarin zich een thermometer bevindt, met behulp waarvan een temperatuurverandering van het water nauwkeurig kan afgelezen worden. Binnen den calorimeter kunnen door draaiing van de as *A* een aantal schoepen *S* in beweging worden gebracht. De invloed van de inwendige wrijving wordt nog grooter gemaakt, doordat loodrecht op den wand van den calorimeter verticale schotten zijn

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN

J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

8e JAARGANG 1931/32

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN-BATAVIA

Inhoud van den achtsten jaargang.

—Portretten van de hoogleeraren Dr. J. DROSTE, Dr. J. WOLFF, Dr. M. VAN HAAFTEN, verder van Dr. D. P. A. VERRIJP en overdruk van het portret van Prof. J. H. VAN SWINDEN, naar een ets van Reinier Vinkeles (1792).