

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDAC-
TIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN
J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

MET MEDEWERKING VAN

Dr. H. J. E. BETH
DEVENTER

Dr. E. J. DIJKSTERHUIS
OISTERWIJK

Dr. G. C. GERRITS
AMSTERDAM

Dr. B. P. HAALMEIJER
AMSTERDAM

Dr. W. P. THIJSSEN
BANDOENG

Dr. P. DE VAERE
BRUSSEL

Dr. D. P. A. VERRIJP
ARNHEM

8e JAARGANG 1931/32, Nr. 1



P. NOORDHOFF — GRONINGEN

Prijs per Jg. van 18 vel f 6.—. Voor inteekenaars op het
Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde en Christiaan Huygens f 5.—.

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken, verschijnt in zes tweemaandelijksche afleveringen, samen 18 vel druks. Prijs per jaargang *f* 6.—. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6.—) of op „Christiaan Huygens” (*f* 10.—) zijn ingeteekend, betalen *f* 5.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Het honorarium voor geplaatste artikelen bedraagt *f* 20.— per vel.

De prijs per 25 overdrukken of gedeelten van 25 overdrukken bedraagt *f* 3,50 per vel druks *in het vel gedrukt*. Gedeelten van een vel worden als een geheel vel berekend. Worden de overdrukken buiten het vel verlangd, dan wordt voor het afzonderlijk drukken bovendien *f* 6.— per vel druks in rekening gebracht.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

I N H O U D.

	Biz.
Dr. P. G. TIDDENS, De beginselen der nomografie	1—22
E. J. DIJKSTERHUIS, De opgaven voor mechanica op het eind-examen der H. B. Scholen met 5-jarigen cursus in 1931	23—27
Dr. H. C. SCHAMHARDT, Over de wiskunde-eischen voor het „Staatsexamen”	28—43
Boekbespreking	44—48
Ingekomen boeken	48

 De redactie heeft het genoegen in deze aflevering het portret te geven van Prof. Dr. J. DROSTE.

DE BEGINSELEN DER NOMOGRAFIE

DOOR

Dr. P. G. TIDDENS.

1. Onderscheidene formules, voorkomende in de wiskundige en natuurwetenschappelijke vakken, worden in de praktijk zoodanig toegepast, dat men ze gebruikt voor de berekening van de waarden van grootheden, die met andere grootheden samenhangen op de wijze als zulks door deze formules wordt aangegeven. De bedoelde berekening eischt in zijn uitkomst wel een bepaalde nauwkeurigheid, doch deze behoeft in vele gevallen niet op de spits te worden gedreven: integendeel kan men dikwijls met een min of meer ruwe benadering volstaan. In plaats van nauwkeurige uitkomsten vraagt de praktijk veeleer een methode, die zonder veel berekening, liefst zonder eenige berekening, de gevraagde uitkomsten levert.

Als een der meest moderne voorbeelden moge hier worden gewezen op de formule van de golflengte λ , behoorende bij een elektrische trilkring met capaciteit C en zelfinductie L.

$$\lambda = 1.884 \sqrt{CL},$$

als λ in meters, C in mikrofara's en L in microhenry's is uitgedrukt.

Om voor willekeurig gegeven waarden van C en L de bijbehorende waarden van λ , zij het dan in meerdere of mindere mate benaderd, zonder veel berekening te vinden, zou men eens en voor goed hiervoor een tabel kunnen maken. Dit heeft echter het bezwaar, dat men dan zou moeten hebben een tabel met 2 ingangen, daar C en L onafhankelijk van elkaar zijn, hetgeen in de eerste plaats veel werk voor de samenstelling vraagt en in de tweede plaats geen gemakkelijk te overzien resultaat levert.

Zulks geldt natuurlijk voor de benadering van elke grootheid, die uit 2 andere, onderling onafhankelijke, moet worden berekend, terwijl de bezwaren nog veel grooter worden wanneer het aantal onafhankelijk veranderlijken meer dan twee wordt.

De techniek heeft daarom uitgezien naar een beter middel en dit

gevonden door gebruik te maken van grafische voorstellingen van zoodanigen aard, dat als het ware met één enkele handgreep de waarde der gezochte grootheid, behoorende bij bepaalde waarden der onafhankelijk veranderlijken, kan worden gevonden. Men duidt dit procédé aan met de benaming nomografie: het in teekening brengen van bepaalde wetten.

De nomografie is er allengs in geslaagd om van vrij ingewikkelde gevallen met eenvoudige hulpmiddelen de uitkomst te vinden en men heeft daarbij gebruik gemaakt van methoden en constructies, die den mathematicus mogelijk wel belang zullen kunnen inboezemen, om welke reden ik het waag het een en ander daaromtrent hier weer te geven. Daarbij zal ik mij tot eenige der eenvoudigste gevallen bepalen. Ik doe zulks met te meer vrijmoedigheid, omdat, naar het mij wil voorkomen, de methoden der nomografie ook wel van toepassing zijn op zuiver wiskundige gevallen en daarbij van zoo eenvoudigen aard gekozen kunnen worden, dat ze met succes behandeld kunnen worden met de leerlingen der hogere klassen onzer middelbare scholen. Mocht dit laatste juist blijken te zijn, dan zoude de invoering ervan bij het wiskunde-onderwijs mogelijk een zeer welkome afwisseling kunnen bieden in de algebra-leerstof dier scholen.

2. De ontwikkeling der nomografie kan misschien het best duidelijk gemaakt worden aan de hand van een voorbeeld.

Stel men wil een grafiek van een vermenigvuldigingstafel samenstellen: Het ligt dan het meest voor de hand om van de vergelijking

$$xy = a,$$

de factoren van het product aan te geven met behulp van rechtehoekige, Cartesiaansche coördinaten. Elke waarde van a bepaalt dan een gelijkzijdige hyperbool, wiens punten alle zoodanige coördinaten hebben, dat de getallen, die door deze coördinaten worden aangeduid, een product a hebben. Kent men aan a achtereenvolgens verschillende waarden toe, bijv. die van de geheele getallen van 1 tot n , en construeert men bij elke waarde de bijbehorende hyperbool, dan heeft men een figuur, met behulp waarvan men de producten van verschillende, binnen zekere grenzen gelegen, getallen kan aflezen of schatten.

Een eenvoudiger figuur krijgt men als men de vergelijking schrijft in de vorm:

$$\log x + \log y = \log a;$$

brengt men op de beide coördinaat-assen een logarithmische verdeling aan, zoodat elk punt van het coördinaten-vlak een bepaalde waarde van $\log x$ zoowel als van $\log y$ aangeeft, m.a.w. dat $\log x$ en $\log y$ de loopende coördinaten zijn, dan wordt de laatste vergelijking voor elke waarde van a afgebeeld door een rechte lijn, die met beide coördinaat-assen hoeken van 45° maakt. Voor verschillende waarden van a krijgt men zodoende een stel evenwijdige lijnen, die voor hetzelfde doel kunnen dienen als zoo juist de hyperbolen.

In elk der beide voorafgaande gevallen krijgt men te doen met even zoovele krommen, opv. rechten, als men waarden voor a heeft genomen. Zou men aan de hand dier figuren na willen gaan de factoren van eenig niet geheel getal, inliggende tusschen 1 en n , dan is men op interpolatie, dus op schatting, aangewezen: een schatting, die uit den aard der zaak tot minder betrouwbare resultaten aanleiding zal geven.

Een veel eenvoudiger figuur en bovendien een resultaat, waarbij de bedoelde schatting geringere fouten zal opleveren, kan verkregen worden door invoering van de evenwijdige lijn-coördinaten van *d'Ocagne*. Deze coördinaten-stelling komt op het volgende neer:

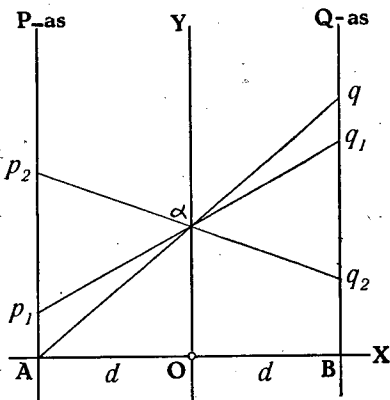


Fig. 1.

Zijn in een vlak twee rechtehoekige coördinaat-assen OX en OY getrokken, dan teekenen we bovendien twee rechten, evenwijdig aan de Y -as op een afstand $x = -d$, opv. $x = +d$, daarvan verwijderd. De snijpunten dezer lijnen met de X -as noemen we A en B , en de lijnen zelve de P -as en de Q -as. Punten op deze assen worden bepaald door hun afstand tot A opv. B ;

d.w.z. een punt op zoo'n as stelt een getal voor, dat evenredig is met zijn afstand tot A of B , waarbij dus een zekere lengte als eenheid moet worden gekozen, of het stelt door zijn afstand tot A of B de een of andere functie van een getal voor.

Zoo kan men bijv. de getallen aangeven door hun logaritmen van het punt A af langs de P-as uit te zetten. Men plaatst dan de getallen zelve bij de punten, die op een afstand, evenredig met hun logaritmen, van A verwijderd zijn. Ook hier dient dus een vooraf vast te stellen eenheid te worden aangenomen; daarbij kan het dikwijls voorkomen, dat voor beide assen verschillende eenheden worden aangenomen. Neemt men nu op de P-as een punt aan, waarvan de logaritmische coördinaat p is, en op de Q-as een punt met dito coördinaat q , zoodanig dat voldaan wordt aan de betrekking

$$\log p + \log q = \log a$$

en trekt men de verbindingslijn pq , dan zullen al de verbindingslijnen der punten p_1q_1 , p_2q_2 enz., als de coördinaten dezer punten aan bovenstaande betrekking voldoen, door éénzelfde punt gaan. Dit punt is gelegen op de as OY. Omgekeerd zullen alle door dit punt getrokken lijnen op de P- en de Q-as punten bepalen, wier coördinaten aan de gegeven vergelijking voldoen.

Bij gebruikmaking van Cartesiaansche coördinaten konden we de vergelijking

$$\log x + \log y = \log a$$

weergeven door een rechte, die we de rechte a zouden kunnen noemen. De coördinaten van de verschillende punten dier lijn leeren getallen kennen, wier product gelijk a is.

De coördinaten van *d'Ocagne* leveren een punt a ; elke lijn door dit punt snijdt de P-as en de Q-as opv. in twee punten, die getallen bepalen, wier product gelijk a is. De beide methoden staan derhalve dualistisch tegenover elkaar. Het voordeel der methode van *d'Ocagne* komt er nu op neer, dat verandering van de waarde van het product een ander punt op de Y-as geeft. Het trekken van een nieuwe lijn, wat bij Cartesiaansche coördinaten noodig was, vervalt hier dus. We kunnen hier volstaan met drie evenwijdige lijnen.

Rest alleen de vraag, volgens welke schaal de punten a op de Y-as moeten worden geplaatst. Het antwoord hierop wordt gevonden door te bedenken, dat een lijn door A, die de Q-as snijdt in een punt, dat het getal q voorstelt, de Y-as moet snijden in een punt, dat eveneens het getal q voorstelt. Het punt A toch, met p -coördinaat $= 0$, stelt het getal 1 voor, aangezien $\log 1 = 0$ is. Hieruit volgt, dat we op de Y-as een schaalverdeeling moeten aan-

brengen met een eenheid, die de helft is van die, welke we gebruikt

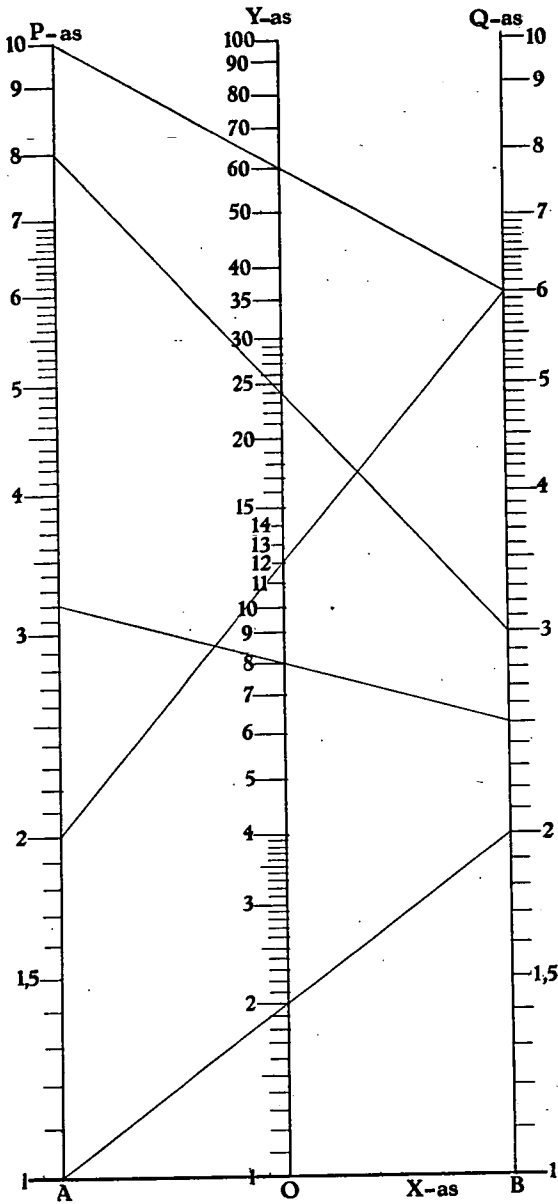


Fig. 2. $pq = a$.

hebben voor de schalen op de P- en de Q-as. Zijn de verdeelingen op de beide laatste assen aangebracht, dan kan de verdeeling op de

Y-as worden verkregen door die der Q-as van A uit op de Y-as te projecteeren.

Moesten we bij de Cartesiaansche methode ons bepalen tot het teekenen van een bepaald aantal rechten α , hier krijgen we daarentegen een continue reeks van punten α . De min of meer juiste bepaling dier punten hangt alleen af van de nauwkeurigheid, waarmee we de schaalverdeeling kunnen aanbrengen. Zijn de schaalverdeelingen aangebracht, dan verkrijgt men de waarde van het product pq door een draad te spannen tusschen de punten p en q , of een liniaal langs deze punten te leggen, en het snijpunt met de Y-as af te lezen. (Fig. 2).

3. Wil men een nomogram volgens *d'Ocagne* maken voor de meetkundig middelevenredige van 2 variabele grootheden

$$\sqrt{pq} = a$$

$$\text{of } \log p + \log q = 2 \log a,$$

dan kan men van dezelfde drie assen uit het vorige geval gebruik maken. De schaalverdeeling op de middelste as, de Y-as, moet dan echter, wegens de factor 2 van $\log a$, met dezelfde eenheid worden aangebracht als die van de P- en de Q-as.

4. Een natuurkundige toepassing van een soortgelijk nomogram kan gegeven worden naar aanleiding van de formule van *Snellius* voor de breking van lichtstralen:

$$\sin p = n \sin q,$$

waarin p de invalshoek, q de hoek van breking en n de brekings-index is.

Bij gebruik van het assen-stelsel van *d'Ocagne* kunnen we op de P-as van A af afzetten de waarden van de sinus voor onderscheiden hoeken van 0° tot 90° .¹⁾ Op de Q-as nemen we van B uit een even groote lengte, als waarop op de P-as de sinussen zijn afgezet, maken nu evenwel de verdeeling in tegengestelde richting, zoodat $\sin 90^\circ$ bij B komt en $\sin 0^\circ$ boven aan. (Fig. 3).

De verbindingslijnen van de sinussen van hoeken p en q , die voor een bepaalde waarde van n volgens de brekings-wet bij elkaar hooren, snijden elkaar, zoolang n hetzelfde blijft, alle in éénzelfde

¹⁾ Men zie hiervoor Gonggrijp Tafel D of Versluys Tafel H.

punt. Zooals gemakkelijk valt af te leiden met een paar gelijk-

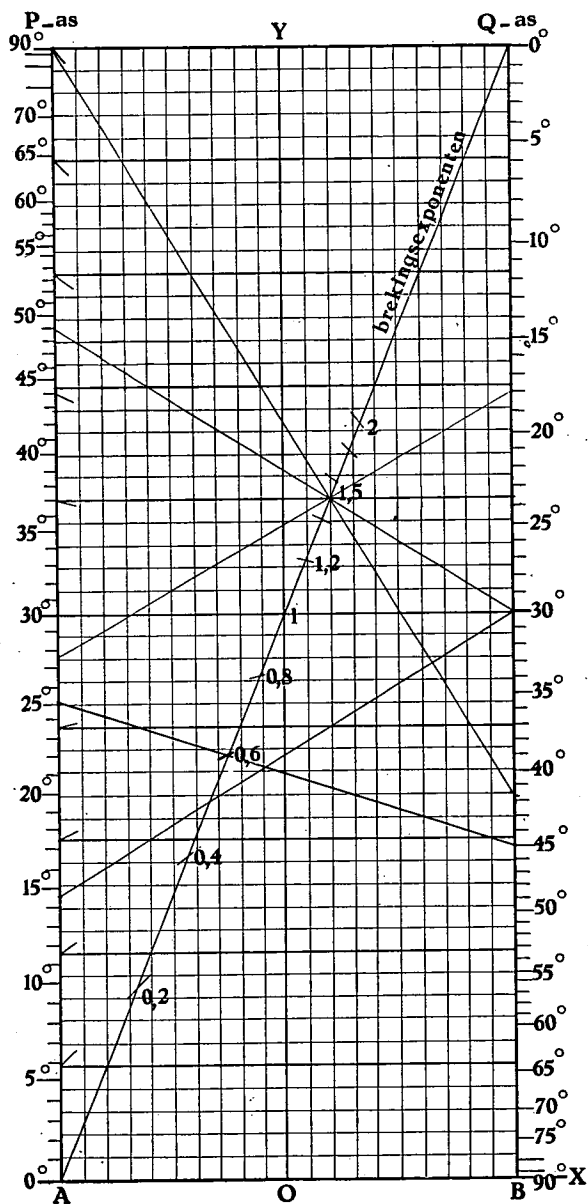


Fig. 3.

vormige driehoeken zijn de Cartesiaansche coördinaten van dit punt:

$$x = d \frac{n-1}{n+1}, \quad y = \frac{n}{n+1}.$$

De waarde van de x -coördinaat wordt uitgedrukt in de grootheid d , de halve afstand der assen P en Q , die van de y -coördinaat in een eenheid, gelijk aan die, welke op elk dier assen de sinus van 90° voorstelt.

Laten we nu n verschillende waarden doorloopen, dan beweegt het bedoelde snijpunt zich langs een rechte, loopende van het punt A naar het punt $\sin 0^\circ$ van de Q -as. De vergelijking dezer lijn, die verkregen wordt door eliminatie van n uit de gevonden waarden voor x en y wordt:

$$y = \frac{x}{2d} + \frac{1}{2}.$$

Punten dezer lijn, die bij bepaalde brekingsindices behooren, zou men kunnen krijgen door voor die indices de waarde van x en y te berekenen, en dan deze in de tekening uit te zetten, hetgeen eenvoudig kan geschieden als men de figuur op millimeter-papier heeft gemaakt. Vlugger en nauwkeuriger kan men te werk gaan, door van het punt $\sin q = \frac{1}{2}$ der Q -as verschillende waarden der P -as, bijv. $\sin p = 0.1, 0.2, 0.3$ enz. op de lijn der brekingsindices te projecteren.

Met behulp van een gespannen draad of van een liniaal kan men, als de schaalverdelingen gemaakt zijn, onmiddellijk de brekingsindex aflezen, die behoort bij een gegeven invalshoek en een gegeven brekingshoek.

Fig. 3 geeft $\sin 48^\circ 50' = 1\frac{1}{2} \sin 30^\circ = 0.75$; de tafel geeft $48^\circ 36'$; ook $\sin 14^\circ 25' = \frac{1}{2} \sin 30^\circ = 0.25$; de tafel geeft $14^\circ 28'$. Deze kleine figuur geeft reeds verrassende uitkomsten. Men begrijpt, dat een groote figuur, zuiver geconstrueerd op mm-papier uitkomsten geeft, die nauwkeuriger zijn.

Ook kan men, als de brekingsindex voor twee stoffen gegeven is, met behulp van de figuur dadelijk de grenshoek bepalen, die optreedt bij overgang van licht van de eene stof naar de andere. Zoo volgt bijv. uit de figuur, dat bij een waarde $n = 1.5$ een grenshoek behoort van 42° (zie op de Q -as).

5. Een naar mijn meening zeer interessante toepassing van de nomografie, die bovendien vermoedelijk wel zal vallen binnen het bereik van de leerjngen der hoogere klassen onzer middelbare scholen, ligt op het gebied van de vierkantsvergelijkingen.

Men gaat daarbij misschien wel het beste uit van de behandeling der vraag, voor welke waarden der coëfficiënten x en y de vergelijking

$$z^2 + xz + y = 0$$

een bepaalde, bestaanbare wortel w , heeft, daarbij volgende de methode, die het eerst is aangegeven door de Fransche wiskundige *Lalanne*.

Zulks zal het geval zijn als x en y voldoen aan de betrekking

$$w_1^2 + xw_1 + y = 0.$$

Hieruit volgen oneindig veel stellen waarden voor x en y . Een grafische voorstelling op rechthoekige Cartesiaansche coördinaten geeft een rechte lijn, die we de wortellijn w_1 noemen. De wortellijn snijdt de x -as in het punt $x = -w_1$, en de y -as in $y = -w_1^2$. De wortellijn $-w_1$ snijdt de y -as in hetzelfde punt, de x -as in een punt, dat symmetrisch gelegen is t.o.v. de oorsprong met het punt $x = -w_1$. M.a.w. de wortellijnen w_1 en $-w_1$ liggen symmetrisch t.o.v. de y -as. (Fig. 4).

De wortellijnen voor alle bestaanbare wortels snijden alle de negatieve Y -as; bovendien de negatieve X -as als de wortel positief en de positieve X -as als de wortel negatief is. Wortellijnen voor positieve waarden verloop in het tweede, derde en vierde kwadraat, die voor negatieve waarden in het eerste, derde en vierde kwadraat.

Een vierkantsvergelijking in de normaalvorm met positieve coëfficiënten x en y kan, zooals uit het verloop der wortellijn blijkt, nimmer een positieve wortel hebben,

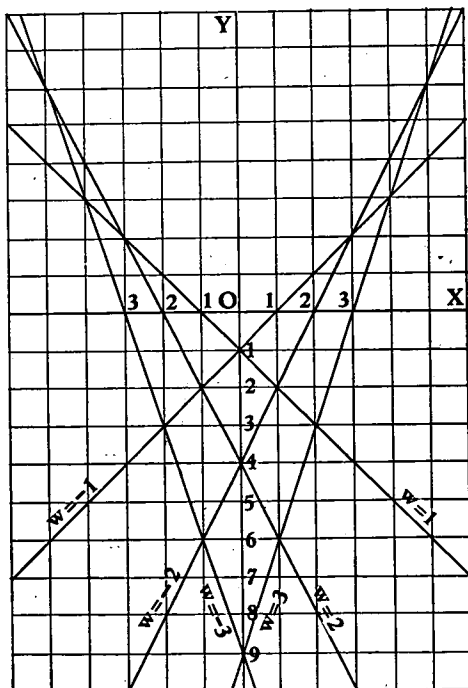


Fig. 4.

terwijl de bestaanbare wortels van een vergelijking met negatieve x en positieve y altijd positief zijn.

(Onbestaanbare wortels worden hier en bij het volgende buiten beschouwing gelaten).

De richtingscoëfficiënt van een wortellijn w is gelijk aan $-w$; onder alle mogelijke wortellijnen zijn er dus nooit twee evenwijdige.

Twee wortellijnen w_1 en w_2 snijden elkaar in een punt, waarvan de coördinaten de coëfficiënten zijn van de vergelijking, die w_1 en w_2 tot wortels heeft.

Twee positieve wortellijnen zullen elkaar steeds snijden in het tweede kwadrant; de vergelijking heeft dus 2 positieve wortels als x negatief en y positief is. Uit de noodzakelijke ligging van het snijpunt van 2 willekeurige negatieve wortellijnen volgt, dat de vergelijking met positieve coëfficiënten steeds negatieve wortels heeft.

Een positieve en een negatieve wortellijn kunnen elkaar slechts in het derde of in het vierde kwadrant snijden: de vergelijking zal een positieve en een negatieve wortel hebben, als of x en y beide negatief zijn of x positief en y negatief is.

Het snijpunt van 2 wortellijnen w en w_1 heeft tot coördinaten

$$x = -(w + w_1), y = ww_1,$$

hetgeen weergeeft de bekende eigenschappen van de wortels eener vierkantsvergelijking.

Als de beide wortels aan elkaar gelijk zijn, $w = w_1$, dan is $x = -2w$, $y = w^2$. De meetkundige plaats van alle punten, waarbij twee gelijke wortels behooren, wordt gevonden door eliminatie van w uit de twee laatstgenoemde betrekkingen. Deze eliminatie geeft

$$x^2 = 4y,$$

wat een parabool door de oorsprong voorstelt, met de Y -as tot as.

Deze parabool is de omhullende van alle wortellijnen. Om dit langs elementaire weg te bewijzen, toonen we aan, dat een willekeurige rechte

$$y + ax + b = 0$$

aan de parabool zal raken, indien $b = a^2$ is. Immers als voldaan is aan deze voorwaarde, vallen de beide snijpunten van rechte en parabool samen. De vergelijking van de rechte gaat dan over in

$$a^2 + ax + y = 0,$$

en dit is juist de vergelijking van de wortellijn $w = a$.

Van geen enkele wortellijn kan derhalve een punt binnen de parabool gelegen zijn, d.w.z. de coördinaten van alle punten, waarvoor

$$x^2 < 4y,$$

is, bepalen door hun coördinaten coëfficiënten van een vierkantsvergelijking, waarbij de bestaanbaarheid der wortels is buitengesloten.

Daar door elk punt van het vlak, dat noch op, noch binnen de parabool ligt, twee raaklijnen aan de kromme getrokken kunnen worden, gaan er dus door al deze punten twee wortellijnen. Alle vierkantsvergelijkingen, die de coördinaten van zoodanige punten tot coëfficiënten hebben, hebben derhalve twee bestaansbare wortels.

Heeft men een aantal wortellijnen geconstrueerd, dan is het met behulp van de alsdan gevormde figuur mogelijk om voor een willekeurig stel waarden der coëfficiënten x en y de wortels der vergelijking $z^2 + zx + y = 0$ min of meer nauwkeurig te bepalen. Men behoeft enkel maar na te gaan, welke wortellijnen door het punt met de coördinaten x en y gaan, of, als door dit punt geen wortellijn gaat, wat wel in het algemeen het geval zal zijn, hoe dit punt gelegen is t.o.v. naburige wortellijnen.

De benadering van de wortels langs dezen weg blijft uit den aard der zaak onnauwkeurig, terwijl de methode bovendien onvolledig is, omdat we ons bij het teekenen der wortellijnen steeds tot een beperkt aantal daarvan zullen moeten bepalen.

6. Ook in dit geval kunnen we het hier gestelde doel, het bepalen der wortels eener vierkantsvergelijking met behulp van een figuur, gemakkelijker en nauwkeuriger benaderen door gebruik te maken van de coördinaten van *d'Ocagne*.

We noemen, ten einde de reeds vroeger gebruikte benaming der evenwijdige assen hier ook te kunnen blijven volgen, de coëfficiënten der vierkantsvergelijking nu p en q en zetten op de P-as, opv. de Q-as van A opv. B als oorsprong, met een zelfde lengte als eenheid aangenomen, punten uit, die verschillende waarden van p en q voorstellen.

Bestaat tusschen de variabele grootheden p en q een betrekking

van de eerste graad, dan zullen alle rechten, die twee punten der P- en Q-as verbinden, door één punt gaan, als de coördinaten p en q dier punten aan de betrekking voldoen. Zij deze laatste onze vergelijking

$$w^2 + wp + q = 0,$$

dan gaan alle hierbij behorende rechten door het punt, waarvan

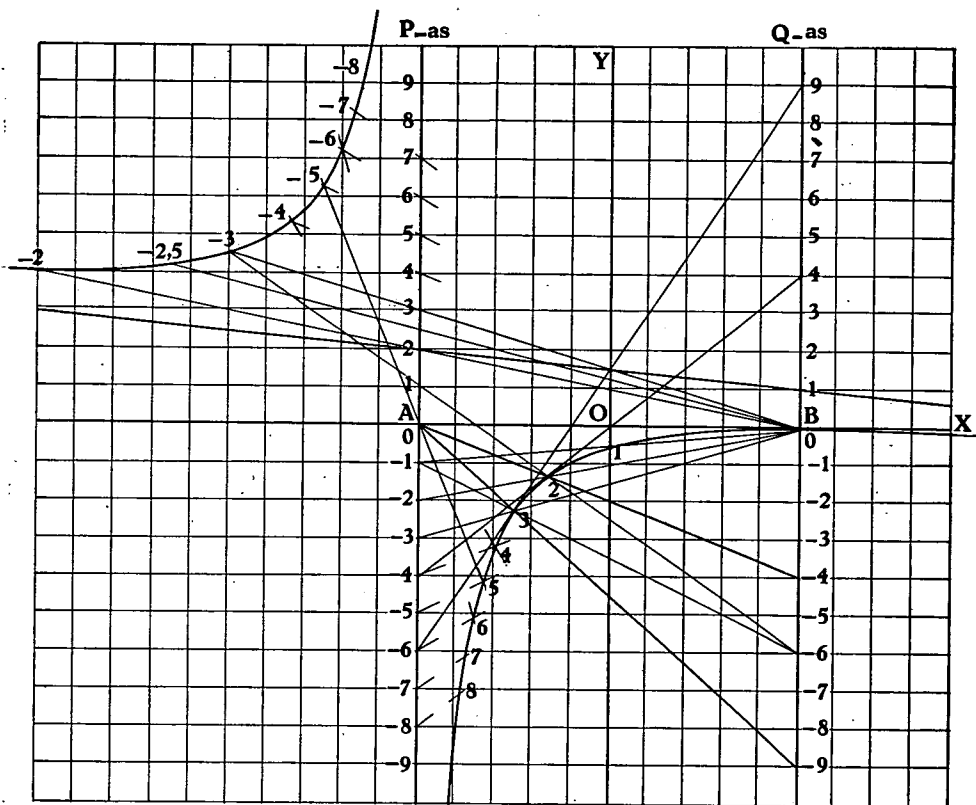


Fig. 5.

$$z^2 + pz + q = 0.$$

de Cartesiaansche coördinaten zijn, met betrekking tot de reeds vroeger aangegeven assen:

$$x = -d \frac{w-1}{w+1}, \quad y = -\frac{w^2}{w+1};$$

en omgekeerd snijdt elke lijn, die door dit punt gaat, op de evenwijdige assen punten uit, waarvan de coördinaten p en q voldoen aan de betrekking

$$w^2 + wp + q = 0.$$

Het punt in quaestie het wortelpunt w noemende, kunnen we zeggen, dat dit wortelpunt w en de wortellijn w , die we in het voorafgaande hebben besproken, dualistisch tegenover elkaar staan.

Het geheel van wortelpunten, dat we krijgen als we w achtereenvolgens alle bestaانبare waarden laten aannemen, bepaalt in de figuur een hyperbool. De vergelijking dezer kromme krijgen we door in de waarden van x en y bovengenoemd de grootheid w te elimineeren. Deze eliminatie levert

$$x^2 + 2 d xy - 2 dx + 2 d^2 y + d^2 = 0.$$

Deze hyperbool heeft tot asymptoten

$$x = -d \text{ en } y = -\frac{x}{2d} + \frac{3}{2},$$

terwijl zijn middelpunt bepaald wordt door

$$x = -d, y = 2.$$

De wortelpunten, behorende bij waarden van w grooter dan -1 , liggen op de eene hyperbooltak, die, behorende bij de waarden kleiner dan -1 , op de andere tak.

De vergelijking

$$w^2 + wp + q = 0$$

stelt op d'Ocagne-coördinaten de hyperbool voor. Immers, we moeten deze vergelijking zoo opvatten, dat we voor elke waarde van w een oneindig groot aantal stellen waarden van p en q krijgen; elk van deze stellen bepaalt een rechte, terwijl alle zoo bepaalde rechten door eenzelfde punt gaan, dat we het punt w noemen. Hiervan gebruikmakende vinden we gemakkelijk de raaklijn in een punt der kromme. Een raaklijn toch moet zoodanige coördinaten p en q hebben, dat zijn twee snijpunten met de kromme samenvallen, dat dus, m.a.w. voor deze waarden van p en q de wortels der vierkantsvergelijking gelijk worden. Zulks is het geval, indien $p^2 = 4q$ is.

Het punt B der Q-as is het wortelpunt $w = 0$; de raaklijn in dit punt is de lijn AB. Daaruit volgt, dat de eene tak der hyperbool beneden AB ligt. De andere tak heeft een raaklijn, evenwijdig aan de lijn AB. De d'Ocagne-coördinaten van deze raaklijn worden bepaald door na te gaan voor welke gelijke waarden van p en q onze vergelijking twee gelijke wortels heeft. Dan moet voldaan worden aan de betrekking $p^2 = 4p$, waaruit volgt $p = 4$, of $p = 0$. De laatste waarde hadden we zoo juist reeds gevonden; $p = q = 4$ geeft $w = -2$.

Om te komen tot de grafische oplossing van de vierkantsvergelijking moet de hyperbool geteekend worden en bij onderscheidene zijner punten de waarden van w worden neergeschreven.

Gebruik makende van millimeter-papier kunnen verschillende punten w der kromme geteekend worden na voorafgaande berekening van de waarden van x en y , die bij verschillende waarden van w behooren.

Ook kunnen we uitgaan van de betrekking

$$w^2 + wp + q = 0,$$

waarin we achtereenvolgens voor w geheele, zoo positieve als negatieve waarden, substitueeren, en dan voor elk dezer substituties te berekenen de waarde van q , als we $p = 0$ nemen, en de waarde van p , als we $q = 0$ nemen. Dit komt daarop neer, dat we stralen trekken uit A, waarop bijv. het punt 1, 2, 3 enz., der kromme gelegen moet zijn, en eveneens stralen uit B, waarop achtereenvolgens dezelfde punten liggen. De snijpunten van telkens twee bij elkaar behorende stralen zijn punten der kromme, waarvan we dan de bijbehorende waarde van w kennen.

Hierbij merken we op, dat de straâl uit B, waarop een punt w der kromme ligt, de P-as steeds snijdt in het punt $-w$ dier as. De stralen uit A snijden de Q-as in punten, die op een afstand $-w^2$ van B verwijderd zijn: een omstandigheid, die het trekken dier stralen op deze wijze bemoeilijkt, omdat de punten op de Q-as weldra te ver van B komen te liggen. Het zal den lezer duidelijk zijn, dat men bij gebruik van millimeter-papier dit bezwaar gemakkelijk kan ondervangen, juist omdat de straâl uit A slechts zoover getrokken behoeft te worden, totdat hij die uit B snijdt.

d'Ocagne zelf maakt voor de constructie der kromme gebruik van de zoo juist geschetste stralenbundel uit B en van de eigenschap, dat het voetpunt C der loodlijn, uit een punt w der kromme op de lijn AB neergelaten, deze lijn AB verdeelt in stukken AC en BC, zoodanig, dat $\frac{CB}{AC} = w$ is.

Het bewijs dezer eigenschap wordt gemakkelijk gegeven door gebruik te maken van de boven reeds vermelde waarden van x en y als functies van w .

Om de constructie der kromme zoo zuiver mogelijk te maken kan men, vooral in het sterk gekromde gedeelte, met voordeel ge-

bruik maken van de raaklijnen der kromme, die met behulp der betrekking $p^2 = 4q$ gemakkelijk te teekenen zijn. Zoo behoort bij het punt $w = 2$ de raaklijn $(-4, 4)$, bij het punt $w = -3$ de raaklijn $(-6, 9)$ enz. (Fig. 5).

7. Naar aanleiding van de tweede manier, waarop we ons boven de kromme konden voortgebracht denken, moge nog worden opgemerkt, dat deze voortbrengingsmethode de kromme feitelijk leert kennen als het geheel der snijpunten van twee projectieve stralenbundels.

De stralenbundel met A als centrum heeft tot vergelijking (op het assenstelsel XOY)

$$y = -\frac{w^2}{2d}(x + d),$$

die met B als centrum

$$y = \frac{w}{2d}(x - d).$$

De bundel A bevat voor bestaانبare waarden van w enkel stralen, die gelegen zijn in het 2de of in het 4de kwadraat; de stralenbundel B vult het vlak rondom B geheel op.

Elke waarde van w levert één punt van de kromme; maar de twee punten, die bij twee tegengestelde waarden van w behooren, liggen op éézelfde straal van de bundel A, terwijl de bijbehorende stralen van B symmetrisch liggen t.o. van de X-as. De voortgebrachte kromme ligt dus in het tweede en in het vierde kwadrant en moet uit dien hoofde een hyperbool zijn. Uit deze voortbrengingswijze volgt ook, dat de X-as een raaklijn aan de kromme is in het punt B. Met het naderen van w tot nul naderen de snijpunten, die een straal door A met de twee symmetrische stralen door B geeft, het punt B, om bij limiet-overgang in dit punt samen te vallen; dan valt de straal door A zoowel als die door B met de X-as samen.

8. Voor het practisch gebruik der kromme, d.i. voor het oplossen der vierkantsvergelijking langs nomografischen weg kan men volstaan met het teekenen van dat gedeelte van de kromme, dat de positieve wortels bevat, dus van het stuk, dat beneden de lijn AB en tusschen de P-as en de Q-as gelegen is. Heeft toch de vergelijking

$$z^2 + pz + q = 0$$

een positieve en een negatieve wortel, of 2 negatieve wortels, dan verkrijgt men de absolute waarden dezer negatieve wortels onmiddellijk als de positieve wortels der vergelijking

$$z^2 - pz + q = 0.$$

Het hieruit voortvloeiende voordeel komt daarop neer, dat men 1°. een figuur krijgt, die met minder moeite te teekenen is, 2°. de schaal waarop de figuur geteekend kan worden, grooter kan nemen.

Heeft men eens en voor goed de figuur geteekend, dan levert de reeds eenige malen besproken draad- of liniaal-methode dadelijk, zonder eenige berekening, de wortels van iedere willekeurige vierkantsvergelijking, mits deze geen groote coëfficiënten heeft. Is dit laatste wel het geval, dan zal eerst een omzetting plaats moeten hebben, waardoor de coëfficiënten tot kleinere bedragen worden teruggebracht.

9. *d'Ocagne* behandelt behalve de vierkantsvergelijking ook de vergelijking van de derde graad

$$z^3 + rz^2 + pz + q = 0.$$

De zaak wordt nu ingewikkelder, omdat er een nieuwe grootheid r is bijgekomen. Hij neemt voor r de achtereenvolgende geheele waarden van $+10$ tot -10 en bovendien de waarde 0 , en teekent met behulp van zijn evenwijdige coördinaten voor al deze waarden de bijbehorende krommen en kan dan grafisch oplossen alle derde-machts-vergelijkingen, waarvan de coëfficiënten r , p en q inliggen tusschen $+10$ en -10 ; met eventueele interpolaties daarbij rekening houdende.

Vervormt men op de bekende manier de bovenstaande 3de graads-vergelijking tot een andere, waarvan alle wortels $\frac{1}{3} r$ grooter zijn, dan ontstaat een vergelijking van de vorm

$$z^3 + pz + q = 0.$$

Deze vergelijking kan op geheel analoge wijze behandeld worden als de vierkantsvergelijking. Voor de bespreking der wortellijnen van *Lalanne* vervangen we de coëfficiënten p en q door x en y , om deze lijnen weer te kunnen betrekken op een assenstelsel XOY. Met behulp der wortellijnen zullen we allereerst de bekende eigenschap dezer vergelijking aantonen, nl. dat deze maar één bestaanbare wortel heeft als de coëfficiënt van z positief is.

Een wortellijn w_1 (w_1 positief) snijdt de negatieve X-as in een punt $-w_1^2$, de negatieve Y-as in het punt $-w_1^3$; de wortellijn $-w_1$ snijdt de X-as in hetzelfde punt, de Y-as in een punt, dat t.o.v. O

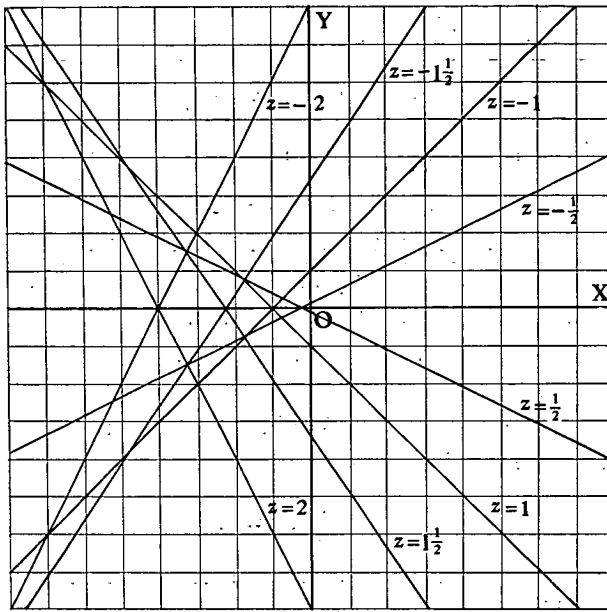


Fig. 6.

symmetrisch ligt met het snijpunt der lijn $+w_1$. Deze twee wortellijnen liggen symmetrisch t.o.v. de X-as (Fig. 6).

Alle positieve wortellijnen verlopen in het 2de, 3de en 4de kwadrant, alle negatieve in het 1ste, 2de en 3de.

De snijpunten der positieve wortellijnen onderling liggen alle in het 2de, die der negatieve wortellijnen alle in het 3de kwadrant. Bovendien kunnen een positieve en een negatieve wortellijn elkaar om de bovengenoemde reden nimmer in het 1ste of 2de kwadrant snijden, zoodat in deze beide laatste kwadranten geen snijpunt van twee wortellijnen kan komen. Een dergelijk snijpunt zou beteekenen, dat de derdemachtsvergelijking, wier coëfficiënten de coördinaten van dit punt zijn, twee bestaanbare wortels zou hebben. De onmogelijkheid van het bedoelde snijpunt, waarvoor x positief zou zijn, bewijst, dat er geen twee bestaanbare wortels kunnen zijn bij een positieve waarde van x .

10. Om een idee te vormen van het beloop van het geheel der

wortellijnen, behoorende bij alle mogelijke derdemachtsvergelijkingen van de vorm $z^3 + xz + y = 0$, waarin x en y alle mogelijke waarden aan kunnen nemen, maken we gebruik van lijn-coördinaten op het assenstelsel XOY.

Een willekeurige wortellijn w_1 heeft tot lijn-coördinaten

$$u = -\frac{1}{w_1^2}, \quad v = -\frac{1}{w_1^3}.$$

Eliminatie van w_1 uit deze beide betrekkingen geeft

$$u^3 + v^2 = 0.$$

Hieruit volgt o.a. dat de wortellijnen 2 aan 2 symmetrisch liggen t.o.v. de X-as en dat door elk punt der Y-as slechts één wortellijn gaat. Dit laatste is het gevolg van de omstandigheid, dat de vergelijking $u^3 + v^2 = 0$, maar één bestaانبare waarde voor u geeft voor eenige gegeven waarde van v .

De omhullende van alle wortellijnen heeft in Cartesiaansche coördinaten tot vergelijking:

$$y^2 + \frac{4}{27}x^3 = 0.$$

Deze uitkomst leert de voorwaarde kennen, waaronder de derdemachtsvergelijking twee gelijke wortels heeft. Immers de kromme is als omhullende der wortellijnen de meetkundige plaats der snijpunten van telkens twee opvolgende lijnen. De coördinaten van een snijpunt van twee wortellijnen leeren de coëfficiënten kennen van de vergelijking, die als wortels de getallen dier wortellijnen heeft. Aangezien bij een raakpunt der kromme twee samenvallende wortellijnen behooren, leveren de coördinaten van het raakpunt een vergelijking met twee gelijke wortels. De derde wortel wordt bepaald door de wortellijn, die uit het beschouwde raakpunt aan de tweede tak der kromme getrokken kan worden. Uit een punt, dat zoodanig gelegen is, dat

$$y^2 + \frac{4}{27}x^3 < 0 \text{ is.}$$

kunnen 3 bestaانبare raaklijnen aan de kromme getrokken worden. Voldoen de coëfficiënten der vergelijking aan deze ongelijkheid, dan heeft de vergelijking drie bestaانبare wortels: een bekende eigenschap der bedoelde derdemachtsvergelijking.

Het gebruikmaken van de evenwijdige lijn-coördinaten van

d'Ocagne levert ook voor deze vergelijking een eenvoudige figuur

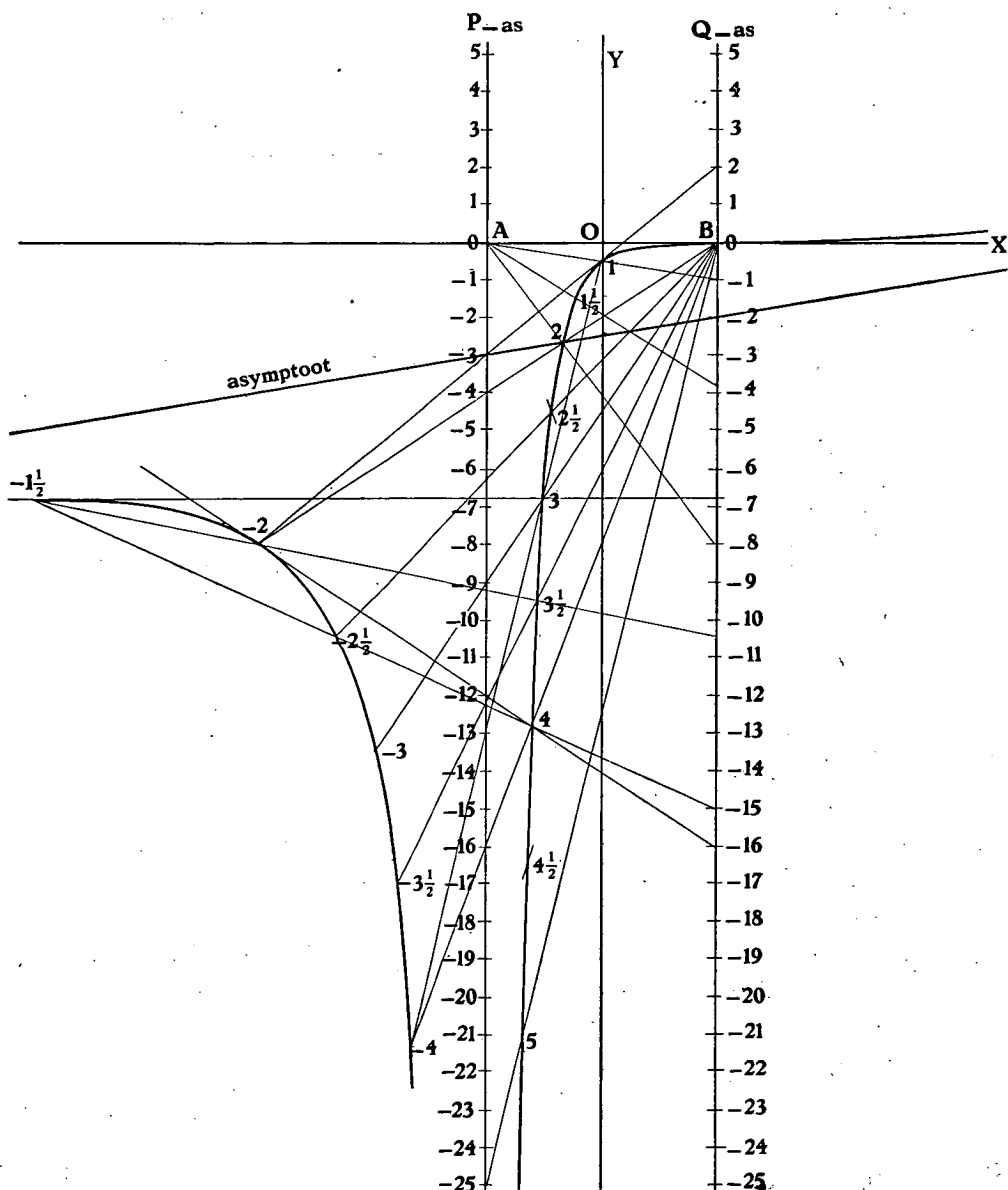


Fig. 7.

$$z^3 + pz + q = 0.$$

voor het grafisch vinden van zijn wortels. We bepalen ons hier tot de positieve wortels. De negatieve toch kunnen desgewenscht ge-

vonden worden, wát hun absolute waarde betreft, als de positieve wortels der vergelijking

$$z^3 + xz - y = 0.$$

Na vervanging van x en y door p en q , kunnen we de kromme teekenen t.o.v. de P- en de Q-as. Punt voor punt kan de kromme geteekend worden met behulp van de betrekkingen die de coördinaten zijner punten leeren kennen als functie's der wortels:

$$x = -d \frac{w-1}{w+1}, \quad y = -\frac{w^3}{w+1}.$$

Hieruit volgt als vergelijking der kromme

$$2 \, dy \, (x+d)^2 = (x-d)^3.$$

De kromme heeft een buigpunt in B en een keerpunt in het oneindige op de negatieve P-as. Voor ons doel is voldoende het gedeelte dat beneden de lijn AB en tusschen de P-as en de Q-as gelegen is; op dit gedeelte liggen alle positieve wortels.

Bij de constructie kan men nog gebruik maken van de eigenschap, dat de raaklijn in eenig punt z der kromme van de evenwijdige assen stukken afsnijdt, bepaald door

$$p = 3z^2, \quad q = 2z^3.$$

11. De grafiek van een betrekking met 3 veranderlijke grootheden kan ook wel op andere manier dan die, welke uitgaat van de evenwijdige lijncoördinaten, worden verkregen. In sommige gevallen kunnen met voordeel de gewone lijn-coördinaten, op een recht- of scheefhoekig assenstelsel, worden toegepast.

Hiervan zal ten slotte nog eèn voorbeeld behandeld worden, en wel de bekende formule uit de leer van het licht, die de betrekking aangeeft tusschen de afstanden van het voorwerp (v) en het beeld (b) tot een lens of bolvormige spiegel en de hoofdbrandpuntafstand (f) van lens of spiegel:

$$\frac{1}{v} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}.$$

We vervormen deze betrekking tot

$$\frac{f}{v} + \frac{f}{b} = 1$$

en noemen nu $\frac{1}{v} = p$, $\frac{1}{b} = q$ en krijgen dan

$$fp + fq = 1.$$

Hierin zijn p en q te beschouwen als lijn-coördinaten; als assenstelsel XOY nemen we twee rechthoekig op elkaar staande lijnen. De laatstgenoemde betrekking stelt dan voor alle lijnen, die gaan door het punt, waarvan de Cartesiaansche coördinaten zijn: $x = f$, $y = f$. Dit punt ligt derhalve op de halve lijn, die de hoek XOY middendoor deelt, als f positief is, en op de halve lijn, die de overstaande hoek middendoor deelt, als f negatief is.

Voor iedere waarde van f vinden we een bepaald punt op een dezer deellijnen. Is nu v en dus p gegeven, dan kunnen we, als op

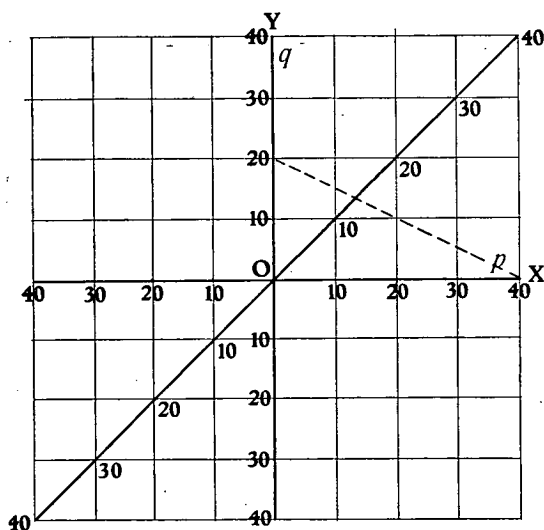


Fig. 8.

de assen de verdeelingen zijn aangebracht, bij elke waarde van v door de draad- of liniaal-methode de bijbehorende waarde van b vinden.

Deze verdeelingen zijn zeer eenvoudig aan te brengen; ze geven toch niet anders aan dan de waarden van v en b , in een gelijke eenheid gemeten opv. op de X-as en de Y-as van de oorsprong af, hetgeen daaruit

volgt, dat v en b de omgekeerde waarden zijn opv. van p en q . De waarde van f komt overeen met zijn punt-coördinaten, in dezelfde eenheid als v en b gemeten.

De vergroting wordt bepaald door de tangens van de scherpe hoek, die de lijn p, q met de X-as maakt.

Het beeld is t.o.v. het voorwerp rechtopstaand of omgekeerd, al naarmate de hoek, die bepaald wordt door het gedeelte der lijn p, q , dat tusschen de coördinaat-assen ligt, met de positieve richting der X-as een scherpe dan wel een stompe hoek maakt.

Bij de voorafgaande beschouwingen is gebruik gemaakt van een artikel van *E. Rouché* in de *Nouvelles Annales de Mathématiques* 1891 en van *d'Ocagne* in dezelfde *Annales* 1902 en van het werkje van *P. Luckey* *Nomographie*, Band 59/60 van de *Mathematisch-*

physikalische Bibliothek 1927, terwijl een soortgelijk nomogram als dat van fig. 7 voorkomt in A Treatise on Light van *R. A. Houston* 1928.

Met de verzorging van de figuren, die in dit artikel voorkomen, heeft de heer *P. Wijdenes* zich welwillend belast. Met mijn besten dank voor de door hem in dezen genomen moeite breng ik hem gaarne hulde voor zijn keurige bewerking.

DE OPGAVEN VOOR MECHANICA OP HET EINDEXAMEN DER H. B. SCHOLEN MET 5-JARIGEN CURSUS IN 1931

DOOR

E. J. DIJKSTERHUIS.

In den 6en jaargang van dit tijdschrift, p. 44—48, heeft *H. J. E. Beth* een beschouwing gewijd aan het feit, dat de mechanica door het K. B. van 8 Juni 1929 weer hersteld was als examenvak op het Eindexamen der H.B.S. Tevens gaf hij daar een indruk van de mogelijkheden, die in verband met het vigeerende leerplan en met de algemeene formuleering van de te stellen eischen in het eind-examenprogramma bij het samenstellen van de opgaven aanwezig konden worden geacht. Hij betoogde daarbij de wenschelijkheid, om niet terug te keeren tot de ingewikkelde vraagstukken van vóór 1920, maar inplaats daarvan een grooter aantal enkelvoudige vraagstukken te geven, die dadelijk bij de theorie zouden aansluiten, benevens enkele opgaven, waarin behandeling van een onderwerp uit de theorie zou worden gevraagd. Ik wil thans nagaan, in hoeverre de door hem uitgesproken wenschen, welker redelijkheid, voorzoover mij bekend is, door niemand is betwist, in de opgaven voor mechanica bij het schriftelijk eindexamen in 1931 zijn verwezenlijkt.

Het opgegeven werk, waarvoor een tijd van drie uren beschikbaar was, bestond uit drie vragen: in de eerste werd verlangd, de samenstelling van krachten in een plat vlak te behandelen; de tweede betrof de krachten, die op de hand worden uitgeoefend door een daarop rustend lichaam, wanneer die hand in verticale richting al dan niet versneld bewogen wordt; de derde was een evenwichtsvraagstuk over een zonder wrijving ondersteunde staaf.

Het trekt nu in de eerste plaats de aandacht, dat in deze opgaven een onevenredig groote plaats wordt ingenomen door het onderwerp „samenstellen van krachten in een plat vlak”, waaraan twee

van de drie vragen zijn gewijd, terwijl daarentegen de kinematica in het geheel niet vertegenwoordigd is en de dynamica in de tweede vraag slechts onvolledig tot haar recht komt. Deze eenzijdigheid van het werk lijkt mij vooral te betreuren in verband met het feit, dat de mechanica alleen maar schriftelijk wordt geëxamineerd. Men moet namelijk wel bedenken, dat er voor leerlingen, die hun schriftelijk werk onvoldoende maken, geen gelegenheid meer bestaat, om den slechten indruk, dien zij daardoor vestigen, nog weer te verbeteren. Het is daarom niet meer dan billijk, dat men hun bij het schriftelijk examen dan ook alle mogelijke kansen biedt, om te laten zien, wat zij weten, zooals toch ook op een mondeling examen (vooral als er alleen mondeling wordt onderzocht) een humaan examinerator, wanneer hij op leemten in de verlangde kennis stuit, zich niet tevreden zal stellen, die leemten te constateeren, maar ook zijn best zal doen, onderwerpen te vinden, waarover de candidaat wel iets weet te vertellen.

De consequentie van deze beschouwing is, dat men bij het examen Mechanica in ieder geval een grooter aantal vragen zal moeten geven, waarin zooveel mogelijk alle hoofdgebieden der Mechanica gelijkmatig tot haar recht komen. Wie die consequentie aanvaardt, zal echter met een stel opgaven, waarin van de kinematica der rechte, cirkelvormige, harmonische en parabolische beweging niet gerept wordt, waarin onderwerpen als verandering van omgeving, evenwicht met wrijving, zwaartepunt, vectorstelsels in de ruimte, alle zijn veronachtzaamd en waarin over de begrippen arbeid, arbeidsvermogen, arbeidssnelheid evenmin iets voorkomt als over de fundamenteele wetten, waarin deze begrippen optreden, moeilijk vrede kunnen hebben.

In de tweede plaats zou ik als mijn meening willen uitspreken, dat het stellen van een zoo vage en algemeen geformuleerde vraag als die van opgave I voor een eindexamen H.B.S. als ontoelaatbaar moet worden beschouwd. Als men een leerboek der Mechanica opslaat, dan zal men daarin aan het onderwerp „samenstelling van krachten in een plat vlak” minstens één, menigmaal wel meer dan een hoofdstuk gewijd vinden. Gaat het nu aan, van leerlingen, die eindexamen H.B.S. doen, te eischen, dat zij, zonder eenig ander hulpmiddel dan hun inzicht en hun geheugen en zonder eenige aanwijzing betreffende de in acht te nemen grenzen, den inhoud van een of meer hoofdstukken van hun leerboek in behoorlijken

LEERBOEK

DER

BESCHRIJVENDE MEETKUNDE

DOOR

Dr. Hk. DE VRIES

HOOGLEERAAR AAN DE UNIVERSITEIT VAN AMSTERDAM.

DERDE, VERBETERDE DRUK.

DEEL I.

DE LEER DER PROJECTIEMETHODEN.

Tekst + Atlas geb. f11.75.

P. NOORDHOFF N.V. — 1931 — GRONINGEN-BATAVIA

IN DEN BOEKHANDEL VERKRIJGBAAR

INHOUDSOPGAVE.

[N.B. De met * gemerkte onderwerpen kunnen bij eerste lezing worden overgeslagen.]

	Pagina.
Inleiding	I—3

HOOFDSTUK I. Centrale projectie.

§ 1.	De stralenbundel. Een stel evenwijdige stralen is een bijzonder geval van een bundel. Limietovergang. De methode der Centrale projectie. Hare geschiedenis	4—6
§ 2.	Het tafereel τ . De distantie. Het centrum van projectie. De projecteerende stralenbundel. De distantiecirkel. Centrale projectie van een punt P . De methode der Centrale Projectie is een nabootsing van de verrichting van het zien	6
§ 3.	De rechte lijn. Haar projecteerend vlak. Doorgangspunt. Vluchtpunt. Drager van een punt. Evenwijdige lijnen. Lijnen $\perp \tau$. Lijnen $// \tau$. Projecteerende stralen	6—8
§ 4.	Standhoek eener rechte met τ . Standhoekcirkels . . .	8—9
§ 5.	Het platte vlak. Het projecteerende parallelvlak. Doorgang. Vluchtlijn. Evenwijdige vlakken $\perp \tau$. Projecteerend vlak. Vlak $// \tau$. Rechte in een vlak. Vlakke stralenbundel of waaier. Punt in een vlak. Het vlak als drager van een punt. Standhoek van een vlak met τ . Standhoekcirkels . . .	9—11
§ 6.	Het verdwijnpunt eener rechte. Het verdwijnvlak. De verdwijnas van een vlak	11—12
§ 7.	Oneindig verre punten. Het zoogenaamde „axioma” der evenwijdige lijnen	12—14
§ 8.	Aan de rechte lijn wordt slechts één oneindig ver punt toegekend. De richting eener rechte lijn. Nieuwe definities van vluchtpunt en verdwijnpunt. De oneindig verre rechte van een vlak. Stand van een vlak. Nieuwe definities van vluchtlijn en verdwijnas. Het oneindig verre vlak der ruimte. De drie ruimten Σ_1 , Σ_2 , Σ_3	14—16
§ 9.	Snijlijn van twee vlakken. Snijpunt van drie vlakken. Snijlijn van twee vlakken met evenwijdige doorgangen. Snijpunt van een lijn en een vlak. Verbindingslijn van twee punten A en B op elkaar kruisende dragers. Vlak door een punt en een lijn evenwijdig aan een gegeven lijn. Vlak door drie punten. Lijn door A die twee elkaar kruisende lijnen snijdt. Snijpunt van een lijn met een vlak $// \tau$	16—18
§ 10.	Loodrechte afstand punt-tafereel. Centrale en orthogonale projectie eener lijn. De meetkundige verwantschap der Centrale Collineatie. De centrale en orthogonale projectie	

	eener vlakke figuur zijn centraal-collineaire figuren, de figuur zelve en hare centrale projectie eveneens. Centrum, hoofdas, en nevenassen der Collineatie. Projectieve eigenschappen der figuren. Centrale projectie van een driehoek die het verdwijnvlak snijdt. Figuur in een vlak $// \tau$. . .	Pagina. 18—21
§ 11.	Normalen-vluchtpunt van een vlak. Normaalvlakken-vluchtlijn van een lijn. Lijn en vlak loodrecht op elkaar. Twee lijnen loodrecht op elkaar. Drie lijnen loodrecht op elkaar. Twee vlakken loodrecht op elkaar. Drie vlakken loodrecht op elkaar. Loodrechte afstand punt-vlak. Het neerslaan van een projecteerend vlak. Kortste afstand van twee elkaar kruisende lijnen	21—24
§ 12.	Standhoek van twee rechten. Standhoek lijn—vlak. Standhoek van twee vlakken. Vlakken door een gegeven rechte die met een gegeven vlak een voorgeschreven hoek insluiten. Twee gevallen: 1°) het gegeven vlak is het tafereel; 2°) het gegeven vlak is willekeurig. De lijn evenwijdig aan het vlak. De lijn ligt in het vlak	24—27
§ 13.	Rechten die met twee gegeven rechten gelijke hoeken insluiten; met drie gegeven rechten. Vlak onder gelijke hoeken met twee en drie gegeven vlakken. Rechten onder voorgeschreven hoeken met twee gegeven rechten. Gemeenschappelijke ribben van twee omwentelingskegels met denzelfden top	27—31
§ 14.	Het neerslaan van een niet-projecteerend vlak. De projectie en de neergeslagen vlakke figuur zijn centraal-collineair. Bijzondere gevallen der Centrale Collineatie	31—35
§ 15.	Dubbelverhouding van vier punten eener rechte; van vier stralen van een waaier	35—41
§ 16.	Centrale projectie van een parallelogram. Volledige vierhoek. Harmonische stralen. Constructie 4e harmonische straal. Een gegeven punt met het ontoegankelijke snijpunt van twee rechten te verbinden. Drie oplossingen	41—45
§ 17.	Volledige vierzijde. Harmonische punten. Constructie 4e harmonisch punt. Snijpunt van twee rechten die een zeer kleinen hoek insluiten	45—48
§ 18.	Poollijn van een punt ten opzichte van een cirkel. Pool eener rechte. Het middelpunt is de pool der oneindig verre rechte. Eigenschap betreffende de poollijnen van de punten eener lijn, en de polen van de lijnen door een punt. Pooldriehoek ten opzichte van een cirkel	48—51
§ 19.	Centrale projectie van den cirkel. Drie gevallen, al naarmate de cirkel de verdwijnas van zijn vlak snijdt, niet snijdt of raakt. Het geval der aanraking; de parabool. De top. De as. Orthogonale symmetrie ten opzichte van de as*. Snijpunten met een rechte; raaklijnen uit een punt*	52—55
§ 20*.	De involutorische Collineatie, en de vier snijpunten van een (neergeslagen) cirkel met zijn centrale projectie	55—58

	Pagina.
§ 21. De hyperbool. Hare oneindig verre punten en asymptoten. Middelpunt. Toegevoegde middellijnen. Assen*. Symmetrie. Rechthoekige of gelijkzijdige hyperbool	58—61
§ 22. De ellips. Middelpunt. Toegevoegde middellijnen. Constructies der assen.* Symmetrie.* De centrale projectie van een cirkel kan een cirkel zijn*	61—67
§ 23*. Bijzondere gevallen van de constructie eener kegelsnede als centraal-collineaire figuur van den cirkel: 1 ^o) de neergeslagen cirkel gaat door O ; 2 ^o) ook de doorgang d gaat door O ; kromtecirkel in een punt der kegelsnede. Kromtecirkel in de toppen	67—69
§ 24. De stelling van Pascal. Toepassingen op het construeeren van punten en raaklijnen van kegelsneden. Metrisch gespecialiseerde gevallen. Vijf willekeurig gegeven punten kunnen steeds beschouwd worden als de centrale projecties van vijf punten van een cirkel	69—74
§ 25. De stelling van Brianchon. Toepassingen op het construeeren van raaklijnen en punten van kegelsneden. Metrisch gespecialiseerde gevallen (de parabool). Iedere kromme die door vijf raaklijnen bepaald is, kan beschouwd worden als centrale projectie van een cirkel. Twee bewijzen	74—77

HOOFDSTUK II.

De Perspectief.

§ 26. De Perspectief afgeleid uit de Centrale Projectie; de richting van het zien	78—80
§ 27. Oog, oogpunt, grondvlak, grondlijn, horizon, distantiepunten. De perspectieven van lijnen loodrecht op het tafereel, van 45°-lijnen; van vertikale lijnen, van lijnen evenwijdig aan de grondlijn. Perspectief van een punt in het grondvlak. Het neerslaan van het grondvlak in het tafereel. Perspectief van een punt in de ruimte. De wijkende schaal der perspectivische diepten. De hoogtenschaal.	80—84
§ 28. Gereduceerde distantie. Verdeeling van een in het grondvlak gelegen rechte in een zeker aantal gelijke deelen. Het harmonische net. De beide verdeelpunten. Vluchtpunt van een hellende lijn; en van hare grondprojectie. Verdeeling van een niet in het grondvlak gelegen rechte	84—88
§ 29. Perspectief van een lichaam, begrensd door platte vlakken. Verlichting door evenwijdige lichtstralen. Constructie van eigen- en slagschaduw. Het zonpunt	88—91
§ 30. Lichtstraal van voorgeschreven richting. Twee gevallen: Lichtstraal evenwijdig aan het tafereel. Perspectief der doorsnijding van een prisma en een pyramide. Doorboring en afscheuring. Eigen- en slagschaduw	91—96

	Pagina.
§ 31. Perspectief van een in het grondvlak gelegen cirkel. De vertikale raaklijnen. Omwentelingscylinder met vertikale as. De schijnbare omtrek. Eigen- en slagschaduw. Doorsnijding van den cylinder met een plat vlak. De sterkst verlichte beschrijvende lijn. Het „point brillant”	96—100
§ 32*. Doorsnijding van twee cylindervormige buizen van gelijken straal, en wier assen elkaar loodrecht snijden. Bijzondere hulpvlakken. Raaklijn in een punt der doorsnijding	100—103
§ 33*. Het kruisgewelf	103—105
§ 34. De omwentelingskegel met vertikale as. Constructie van den schijnbaren omtrek op twee manieren	105—107
§ 35*. Vlak dat met grondvlak en tafereel voorgeschreven hoeken insluit. Omwentelingskegel, met een beschrijvende lijn op het grondvlak liggend. Hoofdvluchtpunt van een vlak. As van den kegel. Schijnbare omtrek	107—111
§ 36. Doorsnijding van een omwentelingskegel met een plat vlak. De brandpunten der doorsnede; stelling van Dandelin. Richtlijnen der doorsnede. Excentriciteit. Omwentelingskegels door een gegeven kegelsnede*; focaalkegelsnede*. Brandpunten en richtlijnen van de projectie der doorsnede	111—117
§ 37. Perspectief van den bol. Eerste methode; uitbreiding van de stelling van Dandelin op de doorsneden van een omwentelingskegel, gelegen in evenwijdige vlakken. Brandpunten van de perspectief van den bol. De vertikale en horizontale raaklijnen met hunne raakpunten. Tweede methode, door middel van vlakken evenwijdig aan het tafereel. Bol met meridianen en parallelcirkels*	117—121
§ 38*. Het omgekeerde vraagstuk der Perspectief. Photogrammetrie	121—122
§ 39. Reliefperspectief. Basrelief van een kubus	122—123
§ 40. Stereographische projectie. Conforme afbeelding. Stereographische projectie van een cirkel op den bol; Toepassing op het aardoppervlak	123—126

HOOFDSTUK III.

Aanvulling van de methode der Orthogonale Parallelprojectie.

§ 41. Overgang op een oneindig ver projectiecentrum. De vluchtpunten en vluchtlijnen, verdwijnpunten en verdwijnsassen, van lijnen en vlakken zijn niet meer bruikbaar. Het oneindig verre vlak der ruimte kan door een ander vlak vervangen worden.	127—128
§ 42*. Methode van orthogonale parallelprojectie met twee evenwijdige vlakken. Lijn, vlak, punt. Snijlijn van twee vlakken. Snijpunt lijn-vlak. Samenhang der constructies met die der Centrale Projectie. Doorsnijding van twee veelvlakke lichamen. Het net	128—132

§ 43*.	Methode der genummerde projecties, „projections cotées”. Toepassing op het terreinoppervlak. Hoogtelijnen of niveau-lijnen. Raakvlak in een punt. Profiel.	Pagina. 132—134
§ 44.	De verwantschap der orthogonale affiniteit tusschen een vlakke figuur en haar projectie. De vlakke figuur neergeslagen. Perspectief-affiene figuren. Affiniteitsas. Affiniteitsstralen. De karakteristieke dubbelverhouding der affiniteit	134—135
§ 45.	Doorsnijding van een omwentelingscylinder met een plat vlak. Ware gedaante der doorsnede. Het vermijden der doorgangen bij het neerslaan van een vlak. De hoofdlijnen van het vlak. Orthogonale symmetrie	136—138
§ 46.	Scheeve affiniteit tusschen de beide projecties eener vlakke figuur. De beide deelvlakken μ_{x1} , μ_{x2} . De affiniteitsas van een vlak.	138—140
§ 47.	Constructie der affiniteitsas en der snijlijn met μ_{x1} van een vlak; indien het vlak bepaald is door zijn doorgangen of door twee elkaar snijdende lijnen. Bijzondere standen van het vlak. Rechten en vlakken evenwijdig aan, of loodrecht op, één van de twee vlakken μ . De vertikale projectie van de doorsnijding van een omwentelingscylinder met vertikale as en een plat vlak:	140—143
§ 48*.	Het derde projectievlak en de zes vlakken μ met hunne snijlijnen. Meetkundige plaats van alle punten der ruimte met drie samenvallende projecties. De 1e en 2e, en evenzoo de 2e en 3e projectie eener vlakke figuur, zijn perspectief affien; de 1e en 3e echter niet. De beide affiniteitsassen van een vlak. Hun snijpunt. De karakteristieken der affiniteiten	143—147
§ 49.	Te onderzoeken of twee rechten elkaar snijden. Een vlak te brengen door twee rechten wier snijpunt nagenoeg, of juist, op de as van projectie ligt. Snijpunt lijn-vlak. Rechte die de as van projectie loodrecht kruist. De snijlijn van twee vlakken. Verschillende gevallen	147—150
§ 50.	Afstand van twee gegeven punten. Loodrechte afstand punt-vlak. Standhoeken. Loodrechte afstand punt-rechte. Twee oplossingen. Het punt ligt op de rechte. Bol door vier punten. Twee dezer punten vallen samen. De beide andere vallen eveneens samen. Vlak door een gegeven rechte loodrecht op een gegeven vlak. Vlakken door een gegeven rechte van een vlak onder voorgeschreven hoeken met dat vlak. Kortste afstand van twee elkaar kruisende rechten	150—152
§ 51.	De snijpunten van een rechte met een bol. Raakvlakken in de snijpunten. Raakvlakken door een lijn aan een bol. De beide constructies van Monge. Projecties van een grooten cirkel van den bol. Ingeschreven bol van een viervlak. De 4 aangeschreven bollen van de eerste, en de 3 van de tweede soort. Constructies van Monge en Hermary. Projectie van den ingeschreven bol uit den top der pyramide op het grondvlak, met behulp van de stelling van Dandelin	152—157

	Pagina.
§ 52. Rechten door een punt, onder gegeven hoeken, met andere rechten, of met vlakken. Vlakken door een punt, onder gegeven hoeken met andere vlakken, of met rechten. Bijzonder geval: de gegeven vlakken zijn de projectievlakken . . .	157—160
§ 53*. Het invoeren van nieuwe projectievlakken. Eén nieuw projectievlak. Snijpunten eener rechte met een bol. Omgeschreven bol van een viervlak	160—163
§ 54*. Het invoeren van twee nieuwe projectievlakken. Toepassing op omwentelingsoppervlakken. Een punt te bepalen, op gegeven afstanden van drie gegeven punten gelegen. Verschillende projecties van het regelmatige twintigvlak en het regelmatige twaalfvlak	163—168

HOOFDSTUK IV.

A. Scheeve Parallelprojectie.

§ 55. De „perspectives rapides”, in tegenstelling met de centrale perspectief. Zij zijn slechts bruikbaar bij voorwerpen van bescheiden afmetingen. De Scheeve Parallelprojectie in hoofdzaak slechts afbeeldingsmethode. Scheeve parallelprojectie van een punt (1°) in het grondvlak gelegen, 2°) niet in het grondvlak gelegen	169—171
§ 56. Scheeve parallelprojectie van een kubus. Slagschaduw bij centrale verlichting. Scheeve projectie van een grafkruis. Overgang op een nieuw tafereel. Eigen- en slagschaduw bij evenwijdige verlichting	171—173
§ 57. Scheeve projectie van een in het grondvlak gelegen cirkel. Cirkel en ellips zijn perspectief-affiene figuren. Omwentelingscylinder. Omwentelingskegel. Schijnbare omtrek. Bol	174—175
§ 58. Assen van de scheeve parallelprojectie van een cirkel. Constructie der ellips uit den om- en ingeschreven cirkel, met behulp der orthogonale affiniteit. Constructie der ellips uit twee toegevoegde middellijnen; constructies van Frézier en Rytz	176—179

B. Axonometrie.

§ 59. Projectie van een kubus als regelmatige zeshoek. De drie onderling loodrechte projectievlakken en het tafereel der Axonometrie. Tafereeldriehoek. Verkortingsverhoudingen der assen. Isometrische Axonometrie. Overgang tot de anisometrische Axonometrie. De projecties der assen zijn de hoogtelijnen van den tafereeldriehoek. De tafereeldriehoek is steeds scherphoekig	179—181
§ 60. Verkortingsdriehoeken voor de drie assen. Afstand van het punt O tot het tafereel. Standhoeken der assen met het tafereel. Axonometrische afbeelding van een kubus. De drie	

	Pagina.
soorten van Axonometrie: isometrische, anisometrische, en monodimetrische, of isometrische, dimetrische, trimetrische Axonometrie. Afbeelding van het 48-vlak. Ontbeerlijkheid van den tafereeldriehoek in sommige gevallen	181—183
§ 61. Bepaling der rechte lijn, met hare drie projecties en doorgangspunten. Vlak door drie doorgangen. Rechte door axonometrische en horizontale projectie. Snijpunt lijn—vlak. Standhoeken eener rechte met de drie projectievlakken en het tafereel. Tafereeldoorgang eener rechte. Loodrechte afstand punt-tafereel. Standhoek van een vlak met het tafereel. Tafereeldoorgang van een vlak	184—187
§ 62. Het beginsel van evenwijdige verschuiving naar O . Standhoek van een rechte met τ_1 . Afstand van twee punten. Hoek van twee rechten. De constructies van Pelz. Loodlijn punt-vlak. Loodlijn punt-rechte	187—190
§ 63. Cirkel in τ_1 . Axonometrische afbeelding op twee verschillende manieren. Omwentelingscylinder met vertikale as. Eigen- en slagschaduw, ook op de binnenzijde, indien de cylinder hol, en van boven open is	190—192
§ 64. Omwentelingskegel, met één zijner beschrijvende lijnen rustende op τ_1 . Axonometrische afbeelding van het grondvlak. Constructie van de as, den top, en den schijnbaren omtrek	192—194
§ 65. Verplaatsing van de projectievlakken en van het tafereel. Toepassing op de constructie van de axonometrische afbeelding van den bol. Snijpunten van den bol met een rechte lijn. Axonometrische afbeelding van een grooten cirkel op den bol	194—195
§ 66. Betrekkingen tusschen de verkortingsverhoudingen der drie assen. Constructie van het assenkruis, indien de verkortingen zijn voorgeschreven. De stelling van Weisbach—Schlömilch. De constructie van Tesar	195—201
§ 67. Scheeve Axonometrie. De stelling van Pohlike. Het bewijs van Schwarz. Hulpstelling: een driehoek van gegeven horizontale projectie zóódanig te construeeren dat de driehoek zelf gelijkvormig wordt met een gegeven driehoek	201—205
§ 68. Scheeve Axonometrie met het tafereel evenwijdig aan de z -as. Methode van Beyel. Toepassing op de dubbele vierzijdige pyramide	205—206

C. Cavalière-Perspectief.

§ 69. Cavalière-perspectief zonder, en met verkorting der y -as. De eerste geeft slechts afbeeldingen. Constructie der projecteerende stralen bij gegeven verkorting der y -as. Cavalière-perspectief van een in het grondvlak gelegen cirkel. Omwentelingskegel met vertikale as. Schijnbare omtrek	206—208
--	---------

vorm weergeven? Voor een eventueel leeraarsexamen, af te leggen na het volbrengen van een universitaire studie, zou het wellicht een geschikte opgave zijn; aan schooljongens moet men echter liever wat meer concrete vragen stellen en, zoo dit om een of andere reden niet gaat, zal men toch in ieder geval goed doen, hun door het formuleeren van te bespreken punten een schema voor hun opstel in handen te geven.

En nu is het merkwaardige, dat dit op het eindexamen voor Natuurkunde toch ook reeds lang gebruikelijk is. Zoo is b.v. aan de in dit jaar gestelde opgave, den electrischen condensator te behandelen, een leidraad van negen regels druks toegevoegd, die den candidaat er in ieder geval voor zal hebben behoed, belangrijke punten te vergeten en die hem toch ook een belangrijken steun zal hebben geboden bij de moeilijke taak, zijn kennis van een bepaald onderwerp in behoorlijk samenhangenden vorm uiteen te zetten. Waarom mag hij op het examen Mechanica niet dezelfde tegemoetkoming verwachten?

In verband met de vorige opmerking staat een derde bezwaar, dat men tegen de opgaven van 1931 kan inbrengen. Er zijn drie vragen gesteld met de blijkbare bedoeling, dat deze voor de beoordeeling als gelijkwaardig zullen worden beschouwd. Maar is er van die gelijkwaardigheid werkelijk sprake? Zal men de praestatie van een leerling, die vraag I werkelijk goed beantwoord heeft (ik twijfel nog eenigszins aan zijn bestaan), die dus m.a.w. een vrij groot stuk van een leerboek der mechanica heeft geschreven, op dezelfde hoogte moeten stellen als die van een ander, die vraag II (een ongetwijfeld goede opgave, maar waarvan de oplossing afhangt van het al of niet bezitten van inzicht op een enkel punt of van het al of niet onthouden hebben van de behandeling van dit eene punt in de les) behoorlijk heeft gemaakt?

Een gevolg van dit gemis aan gelijkwaardigheid is geweest, dat de tijd van een uur, die gemiddeld voor elke vraag was uitgetrokken, voor een volledige behandeling van vraag I veel te kort was en voor de beantwoording van vraag II veel te lang. En nu gaat het niet aan te zeggen, dat er dan maar meer tijd aan I en minder aan II moest worden besteed. Want de moeilijkheid van vraag I was van dien aard, dat de gemiddelde candidaat haar eenvoudig niet behoorlijk kon beantwoorden, ook al had men hem een heelen dag tijd gegeven. Het curieuse gevolg is, voor-

zoover mijn eigen ervaring reikt, dan ook dit geweest, dat er leerlingen voor het einde van den examentijd vertrokken, zonder dat het werk af was. Zij zouden hun tijd gaarne hebben besteed aan de oplossing van andere vragen, maar ze konden niet langer zitten peinen over de beantwoording van een vraag, die nu eenmaal boven hun krachten ging.

Wanneer ik het gezegde samenvat, moet ik tot de conclusie komen, dat de wenschen, die *Beth* over het schriftelijk examen *Mechanica* heeft uitgesproken, in de opgaven van dit jaar op zeer onvolkomen wijze zijn verwezenlijkt. Geheel in den geest dier wenschen gesteld lijkt mij alleen opgave II. Opgave III is op zich zelf niet af te keuren, maar is ongewenscht naast I, die zelf geheel en al ongeschikt is.

De beste verzorging van het examenwerk voor *Mechanica* zou waarschijnlijk te verkrijgen zijn, wanneer men de inrichting der Natuurkundeopgaven als voorbeeld nam. Men zou dan b.v. kunnen geven:

- a. een vraagstuk van den omvang en den graad van moeilijkheid van de opgave III.
- b. keuze uit twee theorievragen, scherp geformuleerd en begrensd, waaraan een leidraad van beantwoording is toegevoegd.
- c. vijf kleine vragen in den trant van opgave II.

Voorloopig zal er onder de voorstanders van onderwijs in theoretische *Mechanica* dus nog geen stemming van tevredenheid kunnen bestaan. Zij zijn nog niet vergeten, welke schade er aan dit vak is toegebracht door de facultatief-stelling en afschaffing als eindexamenvak in 1921 (een ruw en onoordeelkundig ingrijpen in het wezen van het H.B.S.-onderwijs!); in het herstel als eindexamenvak in 1931 kunnen zij hiervoor slechts een zeer partieel redres zien, omdat de uitsluitend schriftelijk geëxamineerde en door geen deskundige mee beoordeelde *Mechanica*¹⁾ blijkbaar

¹⁾ Het is nog steeds niet duidelijk, welk motief hiervoor eigenlijk is aan te geven. Dat *Mechanica* niet mondeling wordt geëxamineerd, pleegt te worden verklaard door de opmerking, dat men dan of een zesden deskundige zou moeten aanstellen of een der fungeerende vijf te zwaar zou moeten belasten, een argument, dat meer pleit tegen de vigeerende regeling van het eindexamen dan tegen de *mechanica*. Maar waarom zou geen der deskundigen het schriftelijk werk mee corrigeren? Zou de reden hiervan ook kunnen liggen in de vrees,

toch nog niet voor vol wordt aangezien en ten slotte hebben nu de opgaven voor 1931 getoond, dat de hoop, het onderwijs in dit vak althans door bemiddeling van een zorgzaam uitgeoefenden eindexameninvloed in nieuwe banen te zien leiden, vooralsnog ijdel is.

dat de toch al flagrante ondeskundigheid, die sommige dezer functionarissen vertoonen, dan wel eens wat al te duidelijk aan het licht zou kunnen komen? In ieder geval staat het wel vast, dat de Mechanica wordt opgeofferd aan het instituut van het schoolexamen, waaraan al zoo veel goeds opgeofferd is!

OVER DE WISKUNDE-EISCHEN VOOR HET „STAATSEXAMEN”

DOOR

Dr. H. C. SCHAMHARDT.

In den eersten jaargang van het „Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde”, 1924/25 No. 3 pag 111 werd door mij op verzoek van den heer P. Wijdenes het een en ander over bovenstaand onderwerp meegedeeld. Dit artikeltje is reeds meermalen van dienst geweest om vragers te beantwoorden, die zich om inlichtingen tot den heer W. wendden, maar toch — zooals deze mij schrijft — vraagt men steeds meer. En daarom noodigt hij ondergeteekende uit nogmaals iets te willen meedeelen, vooral over het mondelinge gedeelte van het staatsexamen, zoo mogelijk uitvoeriger dan in het eerste artikel.

Aan dit verzoek wil ik gaarne voldoen; zoowel mijne collega’s-examinatoren als ik zelf willen gaarne op alle mogelijke wijzen medewerken om zooveel en zoo volledig mogelijk inlichtingen over het Staatsexamen te geven.

Vooraf moet mij echter de opmerking van het hart, dat de candidaten in de eerste plaats kennis moeten nemen van de jaarlijksche verslagen die de Staatscommissie publiceert en die toch gemakkelijk in elke Openbare Leeszaal te verkrijgen zijn. In die verslagen toch geeft de Sub-Commissie voor de Wiskunde geregeld allerlei raadgevingen, door voorbeelden toegelicht, die echter zeer dikwijls door de belanghebbenden in den wind worden geslagen. En dan kan men zich toch ook nog altijd wenden tot de Wiskunde-docenten aan de Gymnasia en Lycea, die met de eischen voor het Gymnasiale eind-examen en dus ook met die voor het Staatsexamen volkomen op de hoogte zijn.

Als voorbeeld van het hierboven gezegde over de jaarlijksche verslagen, wil ik beginnen met hieronder eerst over te nemen een „Uittreksel uit het verslag van de commissie, die in 1930 belast is

geweest met het afnemen van het examen, bedoeld in art. 12 der Hooger-onderwijswet (Staatsexamen) Bijvoegsel tot de Nederlandsche Staatscourant van Vrijdag 6 en Zaterdag 7 Februari 1931 No. 26.

„De resultaten van het examen in de *wiskunde* waren ook dit jaar wederom verre van bevredigend; immers van de 195 A-candidaten behaalden niet meer dan 14 % een goed, en slechts 35.89 % een voldoende eindcijfer voor de groep. Voor de 18 B-candidaten zijn de overeenkomstige cijfers 2 en 38.89 %.

Bij het examen in de algebra bleek, dat vele kandidaten nog steeds heil verwachten van het memoriseeren van allerlei — vaak overbodige — regels en formules, welker afleiding velen absoluut onbekend is; zoo werd om de extreme waarde van de functie $(x-5)^2+3$ te bepalen, lustig begonnen met het uitwerken van het kwadraat, om dan de formule voor de maximum-waarde te kunnen toepassen; zoo werd op de vraag naar het teeken van $(x-3)(x-6)$ geantwoord: de vorm is negatief, als x tusschen de wortels ligt; een nadere verklaring van dit antwoord kon men echter niet geven. Ook de bespreking van reeds geteekende graphische voorstellingen liet zeer veel te wenschen over.

De verdeling van vergelijkingen in identieke, niet-identieke en valsche vergelijkingen stond velen kandidaten slecht voor den geest; juiste begrippen omtrent invoeren en verdrijven van wortels ontbraken dikwijls. Dit kwam o.a. aan het licht, wanneer men vroeg een valsche vergelijking op te schrijven en die daarna liet kwadrateren; of bij het vermenigvuldigen van beide leden van eene van een stel van twee vergelijkingen met twee onbekenden met $x+y$.

Nauwkeurigheid van uitdrukking laat nog steeds veel te wenschen over: tusschen een irreeël getal en een onmeetbaar getal bestaat nog wel verschil. Sommigen noemden zelfs $\sqrt{-5}$ een imaginair getal.

De subcommissie betreurt het, dat vele kandidaten op zien tegen het in teekening brengen van

$$y = \frac{(x-4)(x+3)}{(x-2)(x+5)}, \quad y = x + \frac{1}{x-1}.$$

Bij het examen in de meetkunde bleek, dat de meest eenvoudige meetkundige plaatsen dikwijls, of wel in het geheel niet worden gekend, of wel voor de uitvoering van eenvoudige constructies niet gebruikt kunnen worden.

Men dient ook te weten, dat de diagonalen van een regelmatigenvijfhoek onderling gelijk zijn en hoe deze diagonalen elkaar verdeelen. Herhaaldelijk hadden kandidaten met groote moeilijkheden te kampen, wanneer deze en andere uit de planimetrie bekende eigenschappen in de stereometrie moesten worden toegepast. Doorsnijdingen van platte vlakken met lichamen, begrensd door deelen van platte vlakken, werden over het algemeen vlot geteekend; niet zoo ging het met het opsporen van het snijpunt eener rechte lijn met een zijvlak van het lichaam, het aangeven van den hoek tusschen lijn en vlak en het in teekening brengen van den hoek van lijn en vlak.

Het schriftelijk gedeelte van het examen der B-candidaten was dikwijls geheel onvoldoende, niet tengevolge van gebrek aan theoretische kennis, maar wegens verregaande slordigheid bij het lezen der opgaven en onmethodisch werken.

Vragen naar aanleiding van de graphische voorstelling van ${}^2\log x$, ${}^2\log (x-3)(6-x)$ en derg. werden door verscheidene kandidaten moeilijk gevonden.

De kennis der hoofdformules van de goniometrie liet bij sommigen nogal te wenschen over. Toepassing van trigonometrie op planimetrische vraagstukken, gebruik van den sinusregel, invoeren van tangenten gebeurt nog steeds te onpractisch.

Bij het examen in de analytische meetkunde bleek, dat er te veel mechanisch van buiten geleerd wordt. Men kan bijv. wel de richtingen der asymptoten eener hyperbool vinden, weet echter de methode niet te verklaren en nog veel minder de asymptoten zelf te vinden. Dat de ellips kan opgevat worden als projectie van een cirkel weet men wel, gebruikt men echter nooit."

Uit het aangehaalde verslag blijkt wel, dat de commissie volstrekt geen prijs stelt op het uit het hoofd kennen van formules. Zij waardeert het b.v. veel meer, dat een candidaat, die een vierkantsvergelijking moet oplossen eerst rustig in het eerste lid een kwadraat afsplitst, dan dat de formule machinaal wordt toegepast, zonder te kunnen worden afgeleid. Eveneens wordt machinale kennis van formules voor de inhouden van bolschil, bolschijf en dergelijke allerminst op prijs gesteld.

De opmerkingen in mijn vorig artikeltje gemaakt, gelden natuurlijk nog heden. Misschien zou ik alleen één uitzondering moeten maken. Op pag. 113 van genoemd artikel staat: „Weliswaar stelt

de Staatscommissie aan de A's geen al te zware eischen en beperkt zij zich in den regel tot het onderzoek van de functie $y = ax + b$ en van den drieterm $ax^2 + bx + c$." Thans, bijna 7 jaar later, — nu de graphische voorstellingen allerwegen in het algebraonderwijs zijn doorgedrongen, worden ook aan de A's meer dan vroeger functies voorgelegd als

$$y = \frac{2x-3}{7-x}, \quad y = \frac{(x-4)(x+3)}{(x-2)(x+5)}, \quad y = 2^x$$

en dergelijke. Ook bij deze vragen wordt echter steeds er naar gestreefd de hoofdzaken naar voren te laten komen en te onderzoeken of er eenig wiskundig inzicht aanwezig is.

Ik wil nu het hierboven gezegde nader toelichten, door enkele vragen uitvoerig te bespreken,, zooals die op het Staatsexamen aan de candidaten worden voorgelegd. Beginnen we met de Algebra.

Vraag I. Tot welke grenswaarde nadert

$$\frac{x^3 - x^2 - 15x + 12}{x^3 - 9x + 22x - 8}$$

als x onbepaald nadert tot 4?

Vermoedelijk zal de candidaat maar eens beginnen met $x = 4$ te substitueeren. Hij vindt dan, dat zoowel de teller als de noemer van de breuk $= 0$ worden; de breuk wordt dan $\frac{0}{0}$ of onbepaald. Door de substitutie is echter gebleken, dat de teller en noemer ieder $= 0$ worden voor $x = 4$. De reststelling leert dan, dat beide deelbaar zijn door $(x - 4)$. Is tot dusverre goed geantwoord, dan zal hier natuurlijk gevraagd worden naar de juiste formuleering van de reststelling. Zoo kort mogelijk geformuleerd, luidt deze: Als functie (x) gedeeld wordt door $(x - a)$, dan is de rest $=$ functie (a) . Het bewijs daarvoor verloopt als volgt:

Bij iedere niet opgaande deeling geldt de eigenschap

$$\text{Deeler} \times \text{Quotient} + \text{Rest} = \text{Deeltal}.$$

Noemen wij het quotient Q , dan hebben we dus:

$$(x - a) \times Q + R \equiv F(x).$$

Dit is een *identiteit* d.w.z. het is een gelijkheid, die geldt voor elke waarde van x . Immers wordt het eerste lid uitgewerkt, dan staat er volkomen hetzelfde als in het tweede lid. Geven we nu aan x de waarde a , dan vinden we:

$$\begin{aligned} 0 \times Q + R &= F(a) \\ \text{of} \quad R &= F(a). \end{aligned}$$

Hier moet het den examinandus nu goed duidelijk zijn, dat R bij deze substitutie *niet* veranderd is. Immers R is altijd van één graad lager dan de deeler en deze is hier van den 1en graad in x . De rest R bevat dus geen x meer en kan dus ook niet veranderen als x door iets anders vervangen wordt. Hadden we door $(x-a)^2$ gedeeld, dan zou de rest wel degelijk veranderd zijn bij substitutie van $x=a$, want dan bevatte de rest wel een x .

Na deze theoretische vragen loopt het vraagstuk nu snel ten einde. Zoowel teller als noemer bevatten dus den factor $(x-4)$. Zij worden nu door deeling, of nog fraaier als volgt in factoren ontbonden:

$$x^3 - x^2 - 15x + 12 = x^3 - 4x^2 + 3x^2 - 12x - 3x + 12 =$$

$$(x^2 + 3x - 3)(x - 4)$$

$$x^3 - 9x^2 + 22x - 8 = x^3 - 4x^2 - 5x^2 + 20x + 2x - 8 =$$

$$(x^2 - 5x + 2)(x - 4)$$

$$\text{De breuk is dus} = \frac{(x^2 + 3x - 3)(x - 4)}{(x^2 - 5x + 2)(x - 4)} = \frac{x^2 + 3x - 3}{x^2 - 5x + 2}.$$

Substitueeren we nu weer $x=4$, dan vindt men we

$$\frac{16 + 12 - 3}{16 - 20 + 2} = -12\frac{1}{2}.$$

De grenswaarde, waartoe de breuk nadert voor $x=4$ is dus $-12\frac{1}{2}$.

Misschien zullen sommige candidaten het vraagstuk anders aanpakken en als volgt redeneeren:

Directe substitutie van $x = 4$ maakt teller en noemer $= 0$. Substitueer daarom eerst $x = 4 + \delta$ en laat daarna δ tot nul nadereen. Deze oplossing verloopt als volgt:

$$\frac{(4 + \delta)^3 - (4 + \delta)^2 - 15(4 + \delta) + 12}{(4 + \delta)^3 - 9(4 + \delta)^2 + 22(4 + \delta) - 8} =$$

$$= \frac{64 + 48\delta + 12\delta^2 + \delta^3 - 16 - 8\delta - \delta^2 - 60 - 15\delta + 12}{64 + 48\delta + 12\delta^2 + \delta^3 - 144 - 72\delta - 9\delta^2 + 88 + 22\delta - 8}$$

$$= \frac{\delta^3 + 11\delta^2 + 25\delta}{\delta^3 + 3\delta^2 - 2\delta} = \frac{\delta^2 + 11\delta + 25}{\delta^2 + 3\delta - 2}.$$

$$\text{Voor } \delta = 0 \text{ wordt de waarde} = \frac{25}{-2} = -12\frac{1}{2}.$$

Het spreekt vanzelf, dat deze laatste oplossing evengoed gegeven mag worden als de eerste!

Vraag II. Het getal 5 ligt midden tusschen de wortels der vergelijking:

$$ax^2 - bx + a + 2b = 0.$$

De minimumwaarde van den vorm $ax^2 - bx + a + 2b$ is -8 .
Bepaal a en b .

Daar 5 midden tusschen de wortels van de vergelijking ligt, zal de halve som der wortels gelijk zijn aan 5. Volgens de bekende eigenschap van de wortels eener vierkantsvergelijking is

$$x_1 + x_2 = -p, \text{ dus hier } = \frac{b}{a}.$$

Derhalve is

$$\frac{b}{2a} = 5 \quad \text{of} \quad b = 10a. \quad (1)$$

Verder is:

$$\begin{aligned} ax^2 - bx + a + 2b &= a \left(x^2 - \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} \right) - \frac{b^2}{4a} + a + 2b = \\ &= a \left(x - \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4a^2 - 8ab}{4a}. \end{aligned}$$

De minimum-waarde is gelijk aan $-\frac{b^2 - 4a^2 - 8ab}{4a}$. (Waarom?)

Dus is:

$$\begin{aligned} -\frac{b^2 - 4a^2 - 8ab}{4a} &= -8 \\ \text{of} \quad b^2 - 4a^2 - 8ab &= 32a \quad (2) \end{aligned}$$

Uit (1) en (2) volgt:

$$\begin{aligned} 100a^2 - 4a^2 - 80a^2 - 32a &= 0 \\ 16a^2 - 32a &= 0 \\ a^2 - 2a &= 0 \\ a(a - 2) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ b_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_2 = 2 \\ b_2 = 20. \end{cases}$$

Het is duidelijk, dat $a = 0$, $b = 0$ niet bedoeld kan zijn, daar dan de geheele vorm identiek $= 0$ wordt. Het antwoord is dus $a = 2$, $b = 20$.

Vraag III. Maak een graphische voorstelling van de functie:

$$y = \frac{3x^2 - 6x}{x^2 - 2x - 8}.$$

Wij zien terstond, dat de teller gelijk is aan $3x(x-2)$ en dus de nulwaarden $x_1 = 0$ en $x_2 = +2$ heeft. De grafiek van deze functie snijdt dus de X-as in de punten $(0,0)$ en $(+2,0)$.

De noemer $x^2 - 2x - 8 = (x-4)(x+2)$ heeft de nulwaarden

$x_1 = +4$ en $x_2 = -2$. Daar de teller voor deze waarden van nul verschilt, zal de waarde van de functie dan oneindig groot zijn, d.w.z. de eene verticale asymptoot is $x = 4$ en de andere $x = -2$.

Bepalen we de limietwaarde waartoe de functie nadert als x nadert tot ∞ :

$$y = \frac{3x^2 - 6x}{x^2 - 2x - 8} = \frac{3 - \frac{6}{x}}{1 - \frac{2}{x} - \frac{8}{x^2}}.$$

Voor $x = \infty$ vinden we $y = 3$, waarmede de horizontale asymptoot van de kromme gevonden is.

De bepaling van maximum en (of) minimum geschiedt als volgt:

Uit de gegeven functie volgt:

$$(y-3) x^2 - 2(y-3) x - 8y = 0.$$

Deze vierkantsvergelijking moet reële wortels hebben, daar het hier alleen om reële waarden gaat; dus moet de discriminant ≥ 0 zijn.

Dit geeft:

$$4(y-3)^2 + 32y(y-3) \geq 0$$

of herleid:

$$(y-3)(3y-1) \geq 0.$$

De discriminant wordt 0 voor $y = +3$ en $y = +\frac{1}{3}$.

Daar alleen waarden van $y \geq +3$ en $y \leq +\frac{1}{3}$ een positieve discriminant geven en dus gebruikt kunnen worden, moet $y = +3$ het minimum en $y = \frac{1}{3}$ het maximum zijn.

Gaan wij nu echter de bijbehorende x -waarden bepalen, dan doet zich een moeilijkheid voor. Immers de waarde van x , die hoort bij $y = +3$ vinden wij uit de vergelijking:

$$0 \cdot x^2 - 0 \cdot x - 24 = 0.$$

Hieraan voldoet alleen de waarde $x = \infty$. (Een A-candidaat mag ook gerust zeggen: „hieraan voldoet geen enkele waarde van x). Het minimum $y = 3$ wordt bereikt bij een oneindig groote waarde van x (de candidaat kan ook zeggen: bij geen enkele waarde van x , zoodat er in de graphische voorstelling geen minimum voorkomt).

De x -waarde voor $y = +\frac{1}{3}$ blijkt te zijn $x = +1$.

In fig. (1) is de graphische voorstelling der functie geteekend.

(Opmerking. Verplaatst men de Y-as naar het punt (1,0), dan wordt de vergelijking $y = 3 \frac{x^2-1}{x^2-9}$, zoodat de grafiek bestaat uit twee symmetrische deelen t.o. van de nieuwe Y-as; hieruit volgt

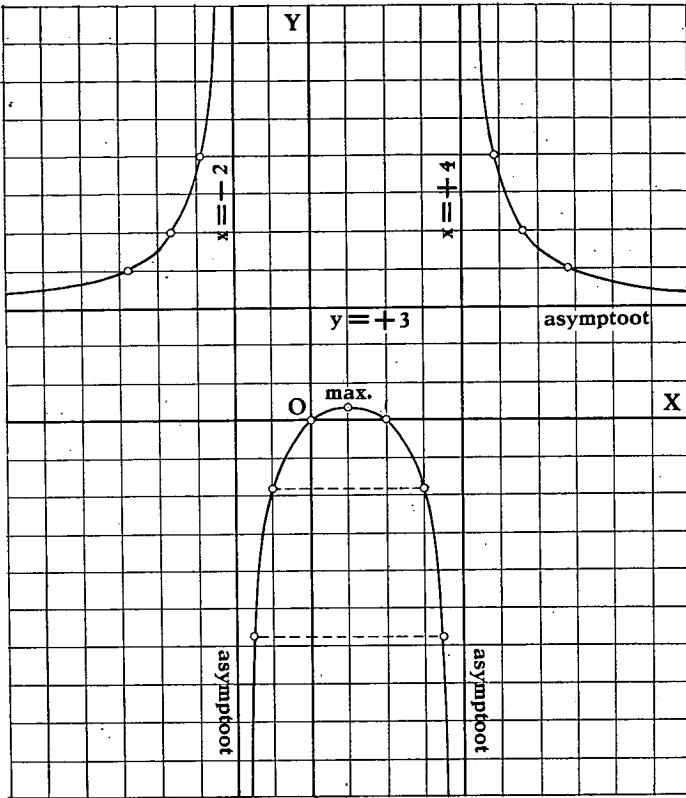


Fig. 1.

$$Y = \frac{3x^2 - 6x}{x^2 - 2x - 8}.$$

dadelijk, dat er slechts één extreme waarde op de figuur te zien is. Immers, een tweede zou een derde tot gevolg hebben).

Vraag IV. Bewijs, dat van de vergelijking:

$$\frac{(x^2 + x - 2 + \sqrt{2})(x^2 - 3x - 14)^2}{x^2 - 10x + 27} = -8(x^2 + x - 2 + \sqrt{2})$$

slechts twee wortels reëel zijn. Bepaal ook deze reële wortels.

Wanneer een candidaat wellicht niet direct weet hoe hij deze opgave moet aanpakken, zal hem waarschijnlijk eerst gevraagd worden van welken graad deze vergelijking wel is. Hij moet dan

kunnen zien, dat na vermenigvuldiging van beide leden met $(x^2 - 10x + 27)$ het eerste lid als hoogste macht x^6 bevat en de vergelijking dus van den zesden graad is. Er zijn dus in het geheel 6 wortels. Als de opgave juist is, moeten er hiervan dus 2 reëel zijn de andere vier imaginair (beter: twee aan twee toegevoegd complex). Het spreekt van zelf, dat men dus moet weten, wat men verstaat onder een reëel getal, een imaginair getal en een complex getal!

Men kan verder gemakkelijk inzien, dat beide leden een gemeenschappelijke factor $(x^2 + x - 2 + \sqrt{2})$ bevatten. Hierdoor kan dus gedeeld worden, maar dan moet die factor ook gelijk aan 0 gesteld worden (Verduisteren van wortels!). De vergelijking splitst zich dus in:

$$x^2 + x - 2 + \sqrt{2} = 0 \quad \text{en} \quad \frac{(x^2 - 3x - 14)^2}{x^2 - 10x + 27} = -8.$$

De eerste vergelijking is de eenvoudigste en gemakkelijk op te lossen:

$$\begin{aligned} x^2 + x - 2 + \sqrt{2} &= 0 \\ x &= -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2 - \sqrt{2}} \\ &= -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{9 - 4\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

De oplossing kan nog in eenvoudiger vorm geschreven worden, daar $\sqrt{9 - 4\sqrt{2}}$ te trekken is. Hoe is dat direct te zien? Theorie over de herleiding van $\sqrt{A + B\sqrt{C}}$. Het blijkt, dat $\sqrt{9 - 4\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} - 1$ is.

De beide gevonden wortels zijn dus:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{2} + \sqrt{2} - \frac{1}{2} = -1 + \sqrt{2} \\ \text{en } x_2 &= -\frac{1}{2} - \sqrt{2} + \frac{1}{2} = -\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Blijkbaar zijn deze waarden reëel, waarmee tevens aan de laatste vraag is voldaan. Er moet dus nu nog bewezen worden, dat de vergelijking

$$\frac{(x^2 - 3x - 14)^2}{x^2 - 10x + 27} = -8$$

uitsluitend onbestaanbare wortels heeft. De vergelijking is van den vierden graad en zal dus wel niet op te lossen zijn. Echter valt op te merken: $(x^2 - 3x - 14)^2$ is een volkomen kwadraat en is dus voor reële waarden van x nooit negatief. Verder is de noemer: $x^2 - 10x + 27 = (x - 5)^2 + 2$ en dus minstens gelijk

geven tot bespreking van allerlei theoretische kwesties. Gaan wij nu over tot de behandeling van een paar meetkundige voorbeelden.

Vraag I. Construeer in een gegeven cirkel een regelmatigen vijfhoek. Hier kan de examinandus gebruik maken van de eigenschap, dat de zijde van den regelmatigen ingeschreven tienhoek het grootste stuk is van den in uiterste en middelste reden verdeelden straal. Hij kan dus deze constructie uitvoeren — denk om het bewijs! — en vervolgens eerst den regelmatigen tienhoek en daarna den regelmatigen vijfhoek teekenen. Ook kan men te werk gaan als in fig. 2 is aangegeven. Trek de middellijn PQ en loodrecht daarop

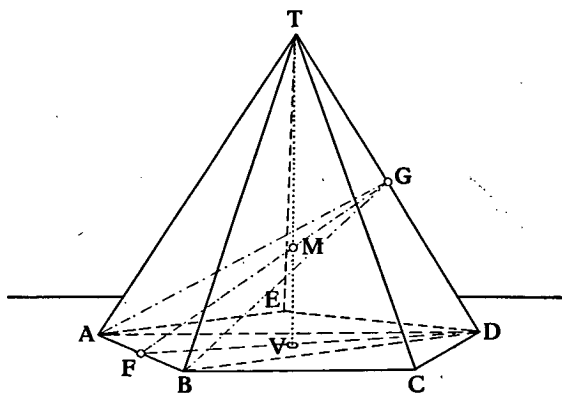


Fig. 3.

VE. Deel PV middendoor; verbind het midden R met E; cirkel RE om R als middelpunt om tot S. Dan is $VS = a_{10}$ en $ES = a_5$. 't Bewijs hiervoor is in de meeste leerboeken te vinden en moet daarbij natuurlijk gekend worden.

Is nu zoo de regelmatige vijfhoek verkregen, dan kan nog gevraagd worden naar de eigenschap der diagonalen; deze deelen elkaar in uiterste en middelste reden; het grootste stuk is gelijk aan a_5 . Vervolgens worden nu de zijden van den vijfhoek doorgetrokken tot ze elkaar in T_1, T_2, T_3, T_4 en T_5 snijden. De zoo gevormde driehoeken als T_1AB zijn gelijkbeenig, de tophoek is 36° . Ze zijn dus congruent met $\triangle DAB$, gevormd door één zijde en twee diagonalen van den regelmatigen vijfhoek.

Beschouw nu de verkregen stervormige figuur eens als het netwerk van een regelmatige pyramide. In die pyramide (zie fig. 3) wordt het midden F van AB verbonden met het midden G van TD.

Zoudt ge kunnen bewijzen, dat deze lijn loodrecht staat op AB, zoowel als op TD? Het ligt voor de hand de lijnen TF en FD te trekken. FD gaat door het voetpunt V van de hoogtelijn der pyramide. Nu is $\triangle ABT$ gelijkbeenig, dus $AB \perp FT$; evenzoo is $\triangle ABD$ gelijkbeenig, dus $AB \perp FD$. Hieruit volgt, dat $AB \perp$ vlak FDT en dus ook op FG. Verder is $\triangle ABT \cong \triangle ABD$ (zie boven), dus $FT = FD$. De lijn FG is in den gelijkbeenigen driehoek FTD dus tevens hoogtelijn, derhalve $FG \perp TD$, waarna de vraag beantwoord is. Uit het gegeven bewijs volgt nu tevens, dat vlak ABG $\perp$ TD. Immers $AB \perp$ vl. FTD, dus $AB \perp TD$ en $FG \perp TD$. $\perp$ TD staat dus loodrecht op 2 snijdende lijnen in vlak ABG.

Beschouw nu eens het snijpunt M van TV en FG. Als punt van de hoogtelijn TV ligt M evenver van alle hoekpunten van het grondvlak; als punt van FG ligt M evenver van T als van D. Het punt M ligt dus blijkbaar evenver van alle hoekpunten der pyramide, is dus het middelpunt van den omgeschreven bol. Zoudt ge nu in de uitslagfiguurfiguur den straal van dezen bol kunnen construeeren? Gemakkelijk is in te zien, dat daartoe slechts $\triangle TFD$ behoeft te worden neergeslagen. Hiervan zijn de drie zijden bekend. In fig. 2 is de constructie uitgevoerd. In $\triangle T_nFD$ zijn daar de lijnen T_nV en FG getrokken. T_nM is de ware grootte van den gevraagden straal.

Vraag II. Hoeveel gegeven zijn er noodig om een bol te bepalen? Antwoord: vier, bijv. vier punten in de ruimte, niet in één vlak gelegen.

Hoe zoudt ge een bol construeeren, die gaat door drie gegeven punten en die raakt aan een gegeven lijn? (Zie fig. 4).

A, B en C zijn de gegeven punten en l is de gegeven lijn. Alle punten, die evenver verwijderd zijn van A, B en C liggen op de loodlijn p , die in het middelpunt O van den omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$ op 't vlak V door A, B en C wordt opgericht. Het middelpunt van den gezochten bol ligt dus al op de lijn p . De gegeven lijn l snijdt het vlak V in het punt S. Nu zal de afstand van S tot het raakpunt van de lijn l met den bol gelijk zijn aan de raaklijn uit S getrokken aan cirkel O. Immers alle raaklijnen uit een punt aan een bol getrokken zijn gelijk. Zoo wordt dus het raakpunt R_1 (opv. R_2) gevonden. Breng nu in dat raakpunt het vlak aan loodrecht op l , dat de lijn p in M snijdt, dan is het middelpunt van den bol gevonden.

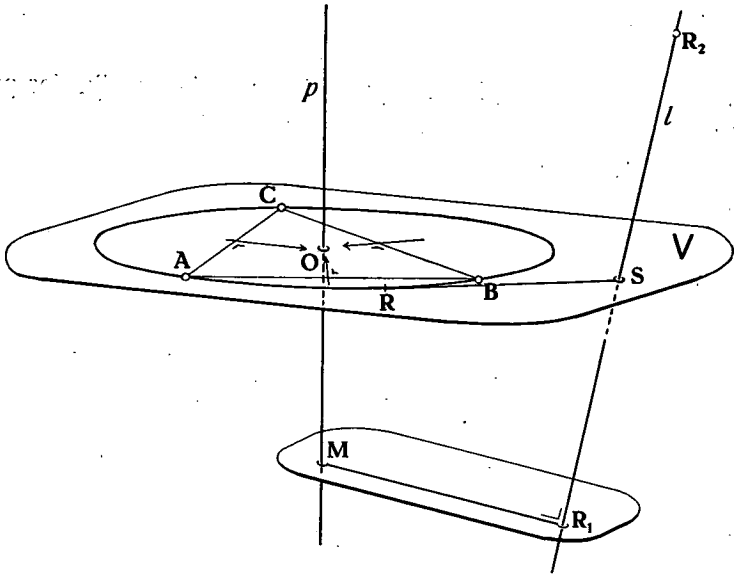


Fig. 4.

Bespreking. In 't algemeen zijn er twee punten R_1 en R_2 en dus ook twee middelpunten, die aan de vraag voldoen.

Ligt S binnen cirkel O , dan is er geen bol te vinden, die aan de vraag voldoet; ligt S op den omtrek van cirkel O , dan vallen R_1 en R_2 met S samen en is er dus maar één middelpunt te vinden.

Een andere mogelijkheid is nog, dat l het vlak V niet snijdt, dus $l \parallel V$; er kan dan door p een vlak gebracht worden loodrecht op l . 't Snijpunt van l met dit vlak is het raakpunt van l met den bol. Er is dan één bol, die voldoet.

Ligt tenslotte l in V , dan kan alleen een oplossing gevonden worden, als l aan cirkel O raakt.

Vraag III. Gegeven is vierhoek $ABCD$ en op de zijde AB het punt B , (fig. 5).

a) Construeer een nieuwen vierhoek, gelijkvormig met $ABCD$, terwijl AB_1 de zijde is, gelijkstandig met AB .

AB_1 valt langs AB ; we kunnen dus A als gelijkvormigheidspunt beschouwen. Noem de beide nog ontbrekende hoekpunten C_1 en D_1 , dan kan C_1 gevonden worden door $B_1C_1 \parallel BC$ te trekken, terwijl C_1 op AC moet liggen. Verder is $C_1D_1 \parallel CD$ en ligt D_1 op AD .

b) Construeer nu eens een vierhoek, die gelijkvormig is met de

beide vorige vierhoeken en welks oppervlakte gelijk is aan de som van de oppervlakten van beide vierhoeken.

Noem $AB = a$, $AB_1 = a_1$ en de zijde van den nieuwen vierhoek,

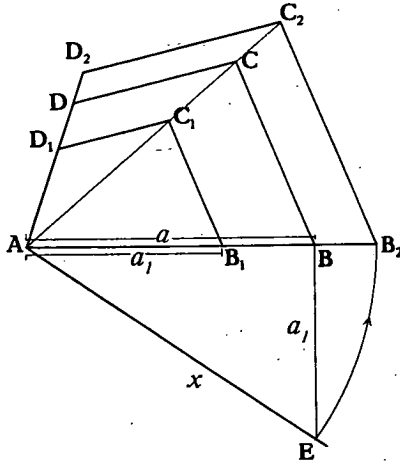


Fig. 5.

gelijkstandig met $AB : x$. We weten, dat de oppervlakten van gelijkvormige figuren zich verhouden als de kwadraten van gelijkstandige zijden. Wij kunnen dus schrijven:

$$\text{Opp. vierhoek } ABCD = f \times a^2$$

$$\text{Opp. vierhoek } AB_1C_1D_1 = f \times a_1^2$$

$$\text{Opp. gevraagde vierhoek} = f \times x^2.$$

waarin f een evenredigheidsfactor is.

Nu moet dus:

$$f \times x^2 = f \times a^2 + f \times a_1^2$$

$$\text{of } x^2 = a^2 + a_1^2$$

m.a.w. x is de hypotenusa van een rechthoekigen driehoek, waarvan a en a_1 de rechthoekszijden zijn; x is dus gemakkelijk te construeeren. Maak nu $AB_2 = x$; trek $B_2C_2 \parallel BC$. (C_2 ligt op 't verlengde van AC) en trek $C_2D_2 \parallel CD$ (D_2 ligt op 't verlengde van AD), dan is $AB_2C_2D_2$ de gevraagde vierhoek.

Vraag IV. In een koordenvierhoek laet men uit het snijpunt der diagonalen loodlijnen neer op de zijden. Bewijs, dat de vierhoek, die de voetpunten dezer loodlijnen tot hoekpunten heeft, een raaklijnvierhoek is.

Zij ABCD (fig. 6) de koordenvierhoek en K, L, M en N de voetpunten der loodlijnen uit S op de zijden neergelaten. Nu valt terstond op te merken, dat ANSM, NBKS, SKCL en MSLD koordenvierhoeken zijn, want in elk dezer vierhoeken zijn twee overstaande

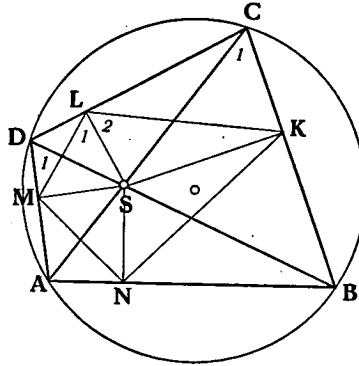


Fig. 6.

hoeken van 90° . Daaruit volgt nu gemakkelijk $\angle L_1 = \angle D_1$; $\angle D_1 = \angle C_1$ (hoeken in den koordenvierhoek ABCD) en $\angle C_1 = \angle L_2$. Dus is LS de bissectrix van $\angle MLK$. Op dezelfde wijze kan worden aangetoond, dat MS, NS en KS bissectrices zijn van de hoeken van vierhoek KLMN. Hun snijpunt S ligt dus evenver van de zijden verwijderd en is dus het middelpunt van den cirkel, ingeschreven in vierhoek KLMN, waarmee het gestelde bewezen is.

Bij deze voorbeelden wil ik het laten. Iedere candidaat kan ze zelf gemakkelijk aanvullen met opgaven van de eindexamens der Gymnasia en van het Staatsexamen. De theorie, die aan de hand der vraagstukken gevraagd wordt, is hier natuurlijk niet uitvoerig besproken, daar ze in elk leerboek te vinden is. Voor de meetkunde wil ik nog de aandacht vestigen op den tweeden druk van het leerboek der Planimetrie door Dr. P. Molenbroek en P. Wijdenes, deel II, en het leerboek der Stereometrie (derde druk) van dezelfden, waarin aan het eind een aantal vragen van het mondelinge examen in Meetkunde van het Staatsexamen zijn opgenomen; mondelinge examens in Algebra vindt men in P. Wijdenes' Algebraïsche Vraagstukken, deel II, 6e druk.

Naar aanleiding van blz. 176, vraag 4 van III, waar de Heer Wijdenes bij de vraag: Als ik $F(x)$ deel door $(x-a)^2$, wat is dan de rest? de opmerking voegt: Deze vraag is veel te zwaar voor het

Staatsexamen, zou ik gaarne dit willen zeggen: Is de heer W. er wel zeker van, dat deze vraag in dien vorm gesteld is? Toevallig heb ik zelf die geheele kwestie wel eens gevraagd. En dan kwam de vraag naar de rest bij deeling door $(x-a)^2$ te pas, als de candidaat bij het bewijs van de reststelling niet wist te verklaren, dat bij de substitutie $x = a$ de rest onveranderd blijft. Om hem er op te brengen, dat die rest van den 0en graad in x is, werd dan gevraagd: „als ik nu eens deelde door $(x-a)^2$, wat weet ge dan van de rest? zou die dan ook onveranderd blijven? In dien geest vragen ook de andere examinatoren er wel eens naar; maar ik vermoed, dat hier de auditor niet juist heeft aangeteekend, hoe de vraag precies gesteld werd en dat dus ook de opmerking niet volkomen juist is.

Het mondeling gedeelte van het wiskunde-examen der B-candidaten wordt op soortgelijke wijze afgenomen. Het komt mij voor, dat het echter voor dezen niet noodig zal zijn dit nog door uitgewerkte voorbeelden toe te lichten.

BOEKBESPREKING.

Prof. Dr. J. Wolff, *Fourier'sche Reihen mit Aufgaben*. P. Noordhoff N.V. Groningen.

Dit handig, slechts 60 bladzijden tellend boekje, dat voor $\frac{3}{5}$ uit theorie en voor $\frac{2}{5}$ uit vraagstukken bestaat, is in twee ongeveer even groote deelen verdeeld. Deel I bestaat uit de paragrafen 1 en 2, terwijl § 3 op zichzelf het tweede deel vormt. Om het eerste deel, waarin uitsluitend Riemann'sche integralen optreden, te begrijpen, behoeft de lezer alleen elementaire dingen te kennen; in het tweede deel wordt verondersteld, dat de lezer op de hoogte is van het integraalbegrip van Lebesgue. Op zeer beknopte, duidelijke en voor den lezer eenvoudige wijze worden hier een groot aantal merkwaardige resultaten betreffende de Fourierreeksen afgeleid, waarvan ik er hier enkele wil vermelden.

In de eerste plaats zij hier genoemd de stelling (blz. 4), dat een volgens Riemann integreerbare functie met periode 2π in elk punt, waarin ze aan een voorwaarde van Lipschitz van positieve orde voldoet, in een Fourierreeks ontwikkeld kan worden. Natuurlijk ontbreekt niet de bekende stelling van Dirichlet (blz. 8): indien een volgens Riemann integreerbare functie $f(x)$ met periode 2π in de omgeving van een punt x_0 , zoowel rechts als links van dat punt monotoon is, dan is

$$\frac{1}{2} f(x_0 + 0) + \frac{1}{2} f(x_0 - 0)$$

in een Fourierreeks ontwikkelbaar. Om te laten zien, dat periodiciteit, integreerbaarheid volgens Riemann en continuïteit samen geen voldoende voorwaarde vormen voor de convergentie der corresponderende Fourierreeks, geeft de schrijver op blz. 9 een volgens Riemann integreerbare functie met periode 2π , die in den oorsprong continu is, terwijl de Fourierreeks van die functie in dat punt divergeert.

Met dit voorbeeld sluit de theorie van § 1; de volgende paragraaf vangt aan met het begrip sommeerbaar C_1 volgens Cesàro, ook al komt deze uitdrukking zelf niet in het boek voor. Op blz. 18 wordt de stelling van Fejér bewezen, dat van een volgens Riemann integreerbare functie $f(x)$ met periode 2π de Fourierreeks in elk continuïteitspunt x der functie sommeerbaar C_1 is met som gelijk aan $f(x)$. De theorie van het eerste deel eindigt met eenige algemeene beschouwingen, waarin de formule van Parseval afgeleid wordt, en waarin verder nog o.a. aangetoond wordt, dat een volgens Riemann integreerbare functie met periode 2π hoogstens door één trigonometrische reeks overal kan worden voorgesteld.

In het begin van deel II wordt bewezen, dat in menige stelling van

het eerste deel het begrip „integreerbaar volgens Riemann” door „integreerbaar volgens Lebesgue” mag worden vervangen. Verder worden nog een aantal stellingen afgeleid, waaraan o.a. de bekende namen van De la Vallée Poussin, Lebesgue, Fatou en Du Bois Reymond verbonden zijn.

Dit werk bevat meer dan een honderdtal met zorg gekozen opgaven, welke de lezer, die de theorie van dit boekje doorgewerkt heeft, zoo noodig gebruik makend van de verstrekte aanwijzingen, zonder eenige moeite oplossen kan. Ook in deze vraagstukken komen nog verschillende merkwaardige resultaten voor, o.a. de sommatieformule van Poisson en de sommen van Gauss.

Mij is geen enkel werk bekend, dat op zoo beknopte, en toch eenvoudige wijze de belangrijkste resultaten betreffende Fourierreeksen bewijst, zoodat ik dit boekje kan aanbevelen aan ieder, die in deze reeksen belang stelt.

J. G. van der Corput.

Dr. H. de Vries. Leerboek der Beschrijvende Meetkunde. Derde verbeterde druk. Groningen, P. Noordhoff, 1931, 208 blz. en atlas met 166 fig.

De eerste druk van dit boek, die in 1908 verscheen, werd toen in het achtste deel van het *Nieuw Archief voor Wiskunde* door Prof. P. H. Schoute met veel waardeering besproken. Op geestige wijze roemde de beoordeelaar de duidelijkheid en frischheid van dit werk, waarop het aan veel wiskundige boeken terecht gedane verwijt van duisterheid en dorheid zeker niet van toepassing bleek. Indien alle leerboeken der wiskunde zóó waren, zou er van de impopulariteit dezer wetenschap geen sprake meer zijn.

Inderdaad en door den boeienden betoogtrant en door de talrijke ingelaschte historische opmerkingen is dit een boek, dat belangstelling voor de daarin behandelde onderwerpen wekt en gaande houdt. Daarom is het bij uitnemendheid geschikt voor hen, die zich, hetzij met het oog op een examen aan een hoogeschool of voor een middelbare acte wiskunde, hetzij uit loutere belangstelling, door zelfstudie met de Beschrijvende Meetkunde of met bijzondere onderwerpen uit dit vak vertrouwd willen maken.

Vermeld zij, dat in dit eerste deel de leer der projectiemethoden (Centrale projectie, Perspectief, Orthogonale en scheeve parallelprojectie, Axonometrie, Cavalière-perspectief) behandeld wordt en dat het zonder veel moeite bestudeerd kan worden door hem, die zich vooraf met behulp van een elementair leerboekje van de beginselen der gewone orthogonale projectie op de hoogte heeft gesteld.

Dit boek, dat door de op verschillende belangrijke punten achtereenvolgens aangebrachte verbeteringen nog meer aan zijn doel beantwoordt dan het door Prof. P. H. Schoute zoo uitbundig geprezen werk (men zie bijv. de in dezen druk op pag. 116 aangebrachte fraaie beschouwingen van de Heeren Stokmans en Heuperman over de horizontale projectie eener vlakke doorsnede van een op het horizontale vlak rustenden omwentelingskegel, die aan het *Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde* ontleend zijn), zal zonder twijfel voortgaan belangstelling en liefde voor het daarin behandelde deel der meetkunde op te wekken.

Schaa ke.

Prof. Dr. phil. W. Lorey und Dr. rer. pol. G. Beyrodt. *Tafeln zur Mathematik des Geldverkehrs und der Versicherung mit Beispielen und Formeln*. Leipzig-Berlin. B. G. Teubner 1931. 37 pag. R.M. 3.60.

Dit boekje geeft veel bruikbaar in een verwonderlijk kleine ruimte. Alle tabellen hebben betrekking op toepassing van wiskunde op economisch en financieel gebied. Ten eerste de gebruikelijke renten- en annuïteitentafels waarbij ook zulke voor de omrekening van jaarpercentages in percentages die eenige malen per jaar vervallen en omgekeerd. Dan zijn er koerstafels voor eeuwige renten met halfjaarcoupons, voor ineens aflosbare leeningen en annuïteitenleeningen, beide met jaarcoupons. Onder die tafels zijn eenige uitgewerkte vraagstukken geplaatst, waarbij ook grootheden, die niet in de tafels voorkomen, door interpolatie berekend worden en waarin ook leeningen met halfjaarcoupons door gebruikmaking van een hulptafeltje (No. 11) behandeld worden.

Voor actuair werk is tafel 15 bestemd. Het is een Duitsche sterftetafel (1926) met 13 daaruit afgeleide bijkolommen. En wel de onmiddellijk uit een sterftetafel af te leiden grootheden, waarbij o.a. de „volle Lebenserwartung” (door de Engelschen „complete expectation of life” genoemd). Verder eenige kolommen met gedisconteerde aantallen en eenige premien, alles op een basis van 4%.

Voor statistisch werk is er de waarschijnlijkheidsintegraal en een kwadraattafel.

Ook de meer gewone tafels (gewone en natuurlijke log., goniometrische functies en hun log.) ontbreken niet.

Aan het einde van het boekje wordt het gebruik van nomogrammen uiteengezet, waarbij het nut van grafieken op logaritmisch papier aan den dag treedt. Eenige vraagstukken over renten en annuïteiten worden langs nomografischen weg opgelost.

Daarna komt nog een formularium van samengestelde interest, rentabiliteit en levensverzekering en formules voor lineaire en Newtonsche interpolatie.

Dat al het genoemde in zoo een klein bestek kon geplaatst worden, was mogelijk door beperking van de omvang der tafels en het decimalenaantal, maar vooral ook door uiterst doelmatige ruimteverdeling zonder dat daardoor ergens het drukwerk een minder aangename indruk maakt. Ook het dikke beige papier is goed gekozen voor een boek waarin veel gebladerd moet worden.

De auteurs bestemmen de tafels voor het onderwijs. Ook de practijk zal ze kunnen gebruiken wanneer groote nauwkeurigheid niet verlangd wordt.

E. L. Elte.

Dr. F. Sch u h, *Leerboek der Theoretische Mechanica met inbegrip der Kinematica*. Eerste deel, eerste stuk. Leiden, A. W. Sijthoff, 1931. 328 bladzijden; f. 11,50.

De redactie heeft ter beoordeeling ontvangen het eerste gedeelte van een omvangrijk werk over de theoretische mechanica, van de hand

$$f(x) = F(a) + \frac{x-a}{1!} F'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} F''(a) + \dots$$

$$\frac{f(x)}{x-a} = \frac{F(a)}{x-a} + (F'(a) + \dots) \quad \text{PROSPECTUS.}$$

BEKNOPT LEERBOEK DER BESCHRIJVENDE MEETKUNDE

DOOR

$$\underline{F(a) + (x-a)F'(a)}$$

H. J. v. VEEN,

HOOGLEERAAR AAN DE TECHNISCHE
HOOGESCHOOL TE DELFT

- A. PROJECTIEMETHODEN
- B. OPPERVLAKKEN EN RUIMTEKROMMEN
- C. AANHANGSEL (KEGELS NEDEN)

VOORBERICHT.

Dit Beknopt Leerboek is in het bijzonder bestemd voor de studenten van de T. H.

Eenige hoofdstukken uit mijn „Leerboek der Beschrijvende Meetkunde“ zijn hier weggelaten, andere zijn sterk bekort, terwijl meerdere geheel omgewerkt zijn, o.a. de „Gewone Rechthoekige Projectie“, welke nu voorop geplaatst is. Ook in de vraagstukken zijn vele wijzigingen aangebracht.

Wie een meer uitvoerige behandeling dan de hier gegevene wenscht, wordt naar genoemd Leerboek verwezen; zulks geldt in het bijzonder w. b. het behandelde over Centrale Projectie (vrije en gewone perspectief) en over Oppervlakken en Ruimtekrommen.

Delft, Maart 1931.

H. J. VAN VEEN.

P. NOORDHOFF N.V. — 1931 — GRONINGEN-BATAVIA
IN DEN BOEKHANDEL VERKRIJGBAAR

Prijs van het complete boek,
groot 382 pagina's, met af-
zonderlijke atlas, geb. f 10.50

INHOUD.

A. PROJECTIEMETHODEN.

GEWONE RECHTHOEKIGE PROJECTIE.

No.	HOOFDSTUK I.	Blz.
1—3	Cirkel; opgaven	I
4—18	Rechte cirkelkegel	5
19—27	Rechte cirkelcylinder	15
28—40	Bol	21
41	Uitgewerkte opgave	31
	Opgaven	34

CENTRALE PROJECTIE.

a. VRIJE PERSPECTIEF.

HOOFDSTUK II.

1—3	Inleiding	39
4—12	Het bepalen van punten, lijnen en vlakken	40
13—15	Opmerkingen	44
	Opgaven	45

HOOFDSTUK III.

1—4	Het construeeren van snijlijnen en snijpunten; opgaven	47
5—10	Het construeeren van vlakken en lijnen, die aan gegeven voorwaarden voldoen; opgaven	49
11—13	Hoeken van lijnen en vlakken met τ ; opgaven	51
14—18	Afstand van een punt tot τ ; loodrechte stand van lijnen en vlakken; opgaven	53
19—20	Het neerslaan van een willekeurig projecteerend vlak; opgaven	55
21—24	Het neerslaan van een willekeurig vlak	58
25—26	Projecties van vlakke krommen	59
	Opgaven	60

b. GEWONE PERSPECTIEF.

HOOFDSTUK IV.

1—2	Inleiding	62
3—8	Perspectief van een punt	63
9—10	Horizontale rechten	65
11—13	Hellende rechten	69

III

No.		Blz.
14—15	Ware verhoudingen van op één drager gelegen lijnsegmenten	71
16—17	Ware lengten van lijnsegmenten, meetpunt, meetcirkel	73
	Opgaven	74

HOOFDSTUK V.

1—6	Cirkel	77
7—10	Rechte cirkelkegel	80
11—15	Rechte cirkelcylinder	83
16—17	Bol	85
18—21	Uitgewerkte opgaven	86
	Opgaven	94

SCHEEVE PROJECTIE.

HOOFDSTUK VI.

1—11	Inleiding	99
12—13	Grondconstructies met punten, lijnen en vlakken	105
14—18	Het neerslaan van vlakken; loodrechte stand	106
19	Het wentelen van vlakken evenwijdig met τ	108
20	Uitgewerkte opgave	109
	Opgaven	109

HOOFDSTUK VII.

1—4	Cirkel	112
5—6	Rechte cirkelkegel	114
7—9	Rechte cirkelcylinder	115
10—11	Bol	117
12—14	Uitgewerkte opgaven	120
	Opgaven	124

ORTHOGONALE AXONOMETRIE.

HOOFDSTUK VIII.

1—3	Inleiding	129
4—10	Verkortingsverhoudingen	130
11—12	Grondconstructies met punten, lijnen en vlakken	136
13—15	Loodrechte stand	137
16—19	Het neerslaan van vlakken	139
	Opgaven	141

HOOFDSTUK IX.

1	Cirkel	143
2	Rechte cirkelkegel	143
3	Rechte cirkelcylinder	144

No.		Blz.
4	Bol	145
5—6	Uitgewerkte opgaven	146
	Opgaven	153

VERSCHILLENDE PROJECTIEMETHODEN.

HOOFDSTUK X.

1	Scheeve Axonometrie	156
2—3	Methode der genummerde projecties	157
4—5	Verschillende onderwerpen	159
	Opgaven	159

B. OPPERVLAKKEN EN RUIMTEKROMMEN.

INLEIDING.

HOOFDSTUK XI.

1—5	n -dimensionale verzameling; opgaven	161
6—12	Vlakke krommen	164
13—20	Ruimtekrommen	167
21—28	Oppervlakken	170
	Opgaven	174

KEGELS EN CYLINDERS.

HOOFDSTUK XII.

1—2	Bepalingen	175
3—8	Algebraïsche kegel; graad van de projectie van een algebraïsche kromme	176
9	Symmetrieeigenschappen	178
10	Constructie van de snijpunten met een rechte lijn	179
11—12	Constructie van raakvlakken aan een kegel en aan een cylinder	179
13	Schijnbare omtrek van een kegel en een cylinder	180
14—16	Singulariteiten van een kegel en van de projectie van een kromme	181
	Opgaven	182

HOOFDSTUK XIII.

1—3	Vlakke snijkromme van kegels en cylinders	184
4—6	Snijkromme van een kegel met een vlak $\perp \tau_2$	186
7—8	Snijkromme van een kegel met een willekeurig vlak	188

No.		Blz.
9	Constructie van de asymptoten eener vlakke snijkromme	189
10	Parabool als snijkromme van een scheeven cirkelkegel	190
11	Vlakke snijkromme van een scheeven cirkelcylinder	191
	Opgaven	192

HOOFDSTUK XIV.

1—5	Het ontwikkelen van oppervlakken; gebroken vlak; kegels	194
6—12	Omwentelingskegel; asymptoten en buigpunten van een ontwikkelde vlakke kromme	197
13	Het ontwikkelen van cylinders	200
14—15	Scheeve cirkelcylinder; ontwikkelde richtcirkel; omwentelingscylinder	200
	Opgaven	202

HOOFDSTUK XV.

1—3	Geodetische krommen; schroeflijnen	203
4—6	Eigenschappen van de gewone schroeflijn	204
7—8	Orthogonale projectie van een s.l. op een vlak // met de as	206
9—14	Raaklijnen; osculatievlakken; bisecanten; richtingskegels	207
15	Gewone singulariteiten van de projectie van een s.l.	209
16—18	Constructie van gewone en singuliere punten van de parallelprojectie van een s.l.	210
19	Parallelprojectie van een s.l. op een vlak $\perp$ op de as	213
	Opgaven	213

OMWENTELINGSOPPERVLAKKEN.

HOOFDSTUK XVI.

1—3	Eigenschappen van omwentelingsoppervlakken	215
4	Graad van een algebraïsch omwentelingsoppervlak	216
5—6	Constructie van parallelcirkels en meridianen	216
7—11	Raakvlakken; normalen; parabolische kromme	217
12	Vlakke snijkrommen van omwentelingsoppervlakken	219
13—18	Torus; eigenschappen; vlakke snijkrommen	220
19—20	Omhuillingskegels en cylinders	224
21—24	Schijnbare omtrekken en schaduwen	225
25—27	Schijnbare omtrek van een torus	227
	Opgaven	229

HOOFDSTUK XVII.

1—2	Eigenschappen van 2 ^e graads omwentelingsoppervlakken	231
3	Vlakke snijkromme van een omwentelingsellipsoïde	232
4—6	Omhuilingskegels; constructie van de a.k. bij een omwentelingsparaboloïde	233
7	Algemeene 2 ^e -graadsoppervlakken	234
	Opgaven	234

HOOFDSTUK XVIII.

1—5	Eigenschappen van de eenbladige omwentelingshyperboloïde	235
6—9	Grondconstructies bij een E.O.H.	237
10—14	Vlakke snijkrommen. Snijpunten met een rechte	240
15—17	Omhuilingskegels en cilindfers; schijnbare omtrek	243
	Opgaven	245

SCHEEVE REGELVLAKKEN.**HOOFDSTUK XIX.**

1	Algemeene opmerkingen over regelvlakken	250
2—4	Graad van een algebraïsch regelvlak	250
5	Veelvoudige krommen	252
	Opgaven	252

HOOFDSTUK XX.

1—2	Eigenschappen van de eenbladige hyperboloïde	253
3—5	Grondconstructies bij een E.H.	254
6—8	Asymptotenkegel. Symmetrie-eigenschappen	255
9—10	Vlakke snijkrommen. Snijpunten met een rechte	257
11	Omhuilingskegels en cilindfers; schijnbare omtrek	259
	Opgaven	259

HOOFDSTUK XXI.

1—4	Eigenschappen van de hyperbolische paraboloïde	262
5—6	Grondconstructies bij een H.P.	263
7—10	Asymptotische raakvlakken. Symmetrie-eigenschappen	264
11—12	Vlakke snijkrommen. Snijpunten met een rechte	266
13—16	Omhuilingskegels en cilindfers; schijnbare omtrek	268
	Opgaven	270

HOOFDSTUK XXII.

1—4	Eigenschappen van het 4 ^e -graads regelvlak, dat twee rechten en een kegelsnede tot richtlijnen heeft	273
-----	--	-----

No.		Blz.
5—10	Wig van Wallis; eigenschappen; constructies . . .	275
11	Een 4 ^e -graads normalenoppervlak	278
12	Conoïde van Plücker	278
13	Het scheeve tongewelf	279
14—15	Bolconoïden; eigenschappen	280
	Opgaven	281

HOOFDSTUK XXIII.

1	Verschillende soorten van schroefvlakken	282
2—6	Gesloten horizontaal schroefvlak; eigenschappen; constructies	282
7—13	Gesloten hellend schroefvlak; eigenschappen; constructies	284
14	Open schroefvlakken; ontwikkelbaar schroefvlak	287
	Opgaven	287

DOORSNIJDING VAN OPPERVLAKKEN.

HOOFDSTUK XXIV.

1—5	Algemeene opmerkingen over snijkrommen van oppervlakken	289
6—7	Doorsnijding van twee kegels	291
8—14	Doorsnijding van twee kwadratische kegels; bi-kwadratische en kubische ruimtekrommen	292
15—17	Constructie van vierdegraadssnijkrommen van kwadratische kegels en cylindrs	295
18	Twee kwadratische kegels; rechte lijn en kubische ellips	297
19	Kegel en hyperbolische paraboloïde; vierdegraadssnijkromme	298
20—21	Eenbladige omwentelingshyperboloïde en hyperbolische paraboloïde; rechte lijn en kubische hyperbool	299
22	Regel en hyperbolische paraboloïde; rechte lijn en kubische hyperbolische parabool	301
23	Kegel en hyperbolische paraboloïde; twee rechte lijnen en een hyperbool	302
24—26	Doorsnijdingen met omwentelingsoppervlakken	302
	Opgaven	304

C. AANHANGSEL.

ELLIPS ALS PARALLELPROJECTIE VAN EEN CIRKEL.

HOOFDSTUK XXV.

1	Middelpunt, middellijnen	309
---	------------------------------------	-----

No.		Blz.
2—4	Assen van symmetrie	310
5—7	Puntconstructie uit toegevoegde middellijnen	312
	Opgaven	314

VLAKKE DOORSNEDEN VAN OMWENTELINGS- KEGELS.

HOOFDSTUK XXVI.

1—4	Inleiding	316
5—10	De ellips	320
11—15	De hyperbool	325
16—17	De parabool	328
18—21	Richtcirkels; constructies van punten en raaklijnen van een kegelsnede en van hare snijpunten met een rechte	330
22	Projecties van kegelsneden	333
23—24	Omhuilingskegels en cylinders van een bol	333
	Opgaven	335

CENTRALE COLLINEATIE.

HOOFDSTUK XXVII.

1—6	Algemeen geval	338
7—12	Perspectievische affiniteit	342
13	Homothetie	346
	Opgaven	347

STELLING VAN PASCAL EN BRIANCHON.

HOOFDSTUK XXVIII.

1—3	Stelling van Pascal	349
4—5	Stelling van Brianchon	350
6—8	Eigenschappen van kegelsneden	351
9—10	Constructie van kegelsneden	353
	Opgaven	355

OPGAVEN PROPAEDEUTISCHE EXAMENS T. H. VOOR C, W, S, E EN N IN MEI 1924—1930.

HOOFDSTUK XXIX	356
--------------------------	-----

ALPHABETISCH REGISTER	363
---------------------------------	-----

van Prof. Schuh. Het kan slechts tot vreugde stemmen, dat de hooggeleerde schrijver, die ons reeds op zoo menig gebied heeft voor-gelicht, thans ook over de theoretische mechanica zijn licht laat schijnen. En als de in het prospectus gedane belofte, dat de rest van het werk spoedig zal verschijnen, inderdaad wordt vervuld, dan is de Nederlandsche leerboekenlitteratuur binnenkort met een hoogst belangrijk boekwerk verrijkt.

Het thans verschenen eerste stuk van het eerste deel bevat eene wiskundige inleiding, gevolgd door de kinematica van het punt en een gedeelte der kinematica van vlakke stelsels. In de wiskundige inleiding wordt de theorie der zwaartepunten van eindige puntenstelsels en van continue stelsels besproken, alsmede de theorie der glijdende vectoren (de theorie der vrije vectoren is bekend ondersteld). Van de kinematica van het punt worden besproken: beweging langs eene rechte, algemeenheden over beweging langs eene kromme, harmonische bewegingen en combinaties daarvan, en bewegingen met constante sectorsnelheid. Van de kinematica der vlakke stelsels worden translatie en rotatie besproken, een groot aantal onderwerpen uit de kinematische meetkunde, de samenstelling van bewegingen in het platte vlak, en de stelling van Coriolis.

Reeds vele, vele boeken van de hand van Prof. Schuh zijn den Nederlandschen wiskundigen evenzoovele betrouwbare gidsen gebleken. Het zal dan ook wel overbodig zijn, met voorbeelden aan te toonen, dat dit werk dezelfde voortreffelijke eigenschappen heeft als die voorgangers: helderheid, betrouwbaarheid, volledigheid, en illustratie door een groot aantal (in dit geval 362) niet te moeilijke vraagstukken.

Volgens het prospectus is het leerboek bestemd voor studenten aan de technische hoogeschool te Delft en aan onze universiteiten, alsmede voor degenen, die zich bekwamen voor eene middelbare acte, waarbij theoretische mechanica gevraagd wordt. En verder staat er: „Ook leeraren, die aan een middelbare school de beginselen der theoretische mechanica hebben te onderwijzen, kunnen hun kennis van dit vak door de studie van dit leerboek verdiepen; de studie der gewone schoolboeken is daarvoor natuurlijk geenszins voldoende”. Het karakter van het tijdschrift „Euclides” brengt mede, dat het ons het meeste belang inboezemt, in hoeverre het boek berekend is voor zijne taak, het inzicht der leeraren in de theoretische mechanica te verdiepen. Een antwoord op deze vraag kan eerst gegeven worden, als ook de overige deelen verschenen zullen zijn, want de neteligste quaesties komen pas daarin ter sprake. Toch kan naar aanleiding van wat er in het thans verschenen gedeelte te lezen staat, wel een voorloopig oordeel worden uitgesproken. Het eerste stuk van het eerste deel draagt een duidelijk wiskundig karakter. Allerlei wiskundige vraagstukken, waartoe de kinematica direct of indirect aanleiding geeft, worden in den breede uitgesponnen. Of de studie daarvan veel bijdraagt tot verdieping van het inzicht in de mechanica, betwijfel ik. Op bladzijde XIV der inleiding vindt men de vaak gehoorde bewering, dat de kinematica zich slechts van de meetkunde onderscheidt, doordat een zekere parameter als tijd wordt geïnterpreteerd. Voor de leerlingen

moge dit zoo zijn, den leeraar, die zijn inzicht wenschte te verdiepen, mag er toch wel even op gewezen worden, wat er vastzit aan het voorstellen van den tijd door een van het coördiatenstelsel onafhankelijken parameter. De terminologie van paragraaf 330 (met noot) lijkt mij niet geschikt om ingeworteld misverstand uit te roeien. In het begin van hoofdstuk II, waar de zwaartepuntsbepaling op oneindige stelsels wordt uitgebreid, worden essentieele moeilijkheden niet eens genoemd; voor aanstaande technici en voor leerlingen van middelbare scholen behoeft dat ook niet, maar voor den leeraar die zijn inzicht verdiepen wil, behoort dat m. i. wel te geschieden. Deze kleine bedenkingen beletten echter niet, dat ik den mechanica-leeraren de bestudeering van het werk van Prof. Schuh dringend kan aanbevelen. De wiskundige begrippenvorming is er natuurlijk onberispelijk in behandeld. Wanneer bijvoorbeeld het feit, dat de in de wiskundige voorbereiding behandelde onderwerpen werkelijk van wiskundigen aard zijn, niet van natuurkundigen, eens in die mate gemeengoed der leeraren werd, dat het zelfs den leerlingen niet meer verborgen werd gehouden, dan zou er op het punt van verheldering der gedachtensfeer al veel bereikt zijn.

Met gespannen verwachting zie ik de verschijning der nog ontbrekende deelen tegemoet.

J. H. S.

INGEKOMEN BOEKEN.

P. WIJDENES, <i>Beknopte Meetkunde I</i> , 7e druk, gec.	f 1,70
Dr. P. MOLENBROEK en P. WIJDENES, <i>Planimetrie</i> voor het middelbaar en voorbereidend hooger onderwijs, 2e druk, gecartonneerd	f 1,90
— <i>Stereometrie</i> , 3e druk, gecartonneerd	f 2,75
P. WIJDENES en Dr. H. J. E. BETH, <i>Nieuwe School-algebra</i> I, 5e druk, gebonden	f 2,25
P. WIJDENES, <i>Algebraïsche Vraagstukken II</i> , 6e druk, geb.	f 3,25
— <i>Kleine Stereometrie</i> , 3e druk, geb.	f 1,40
J. VAN DE GRIEND Jr., <i>Trigonometrische Vraagstukken</i> , 3e druk	f 1,90
Prof. H. J. VAN VEEN, <i>Beknopt leerboek der Beschrijvende meetkunde met afzonderlijke atlas</i> , geb.	f 10,50
Van den uitgever M. Nijhoff:	
Mevr. EHRENFEST—AFANASSJEW, <i>Uebungensammlung zu einer geometrischen Propädeuse</i> , 44 blz.	f 1,—



Opname Oct. 1931

Prof. Dr. J. WOLFF

geb. te Nijmegen 18 April 1882; leeraar bij het Middelbaar en Gymnasiaal onderwijs van 1906-1917; hoogleeraar te Groningen van 1917-1922, sinds 1922 hoogleeraar te Utrecht.

Zoo juist verscheen:

Antwoorden, Aanwijzingen en korte oplossingen
bij de

Vraagstukken van het examen Wiskunde L.O. 1891-1929

door H. G. A. VERKAART

Prijs f 1.20

P. NOORDHOFF N.V.

GRONINGEN — BATAVIA

Zoo juist verschenen:

**ONEVEN TOOVERVIERKANTEN
ZIJN GEEN PUZZLES**

door M. J. VAN DRIEL

„Het samenstellen van verschillende soorten oneven toovervierkanten kan thans geen bezwaar meer opleveren.”

Ing. f 4.—

W. VERSLUYS

AMSTERDAM — BATAVIA

Zoo juist verscheen:

De Meetkunde als Invariantentheorie

OPENBARE LES gehouden bij de aanvaarding van het ambt van privaät-docent aan de Rijksuniversiteit te Groningen op 20 Oct. 1931

door Dr. O. BOTTEMA

PRIJS f 0.50

P. NOORDHOFF N.V.

GRONINGEN — BATAVIA

Verschenen:

De ontwikkeling van het Integraalbegrip

REDE uitgesproken bij de aanvaarding van het ambt van Lector aan de Rijksuniversiteit te Groningen op 22 Sep. 1931

door Dr. J. RIDDER

PRIJS f 0.60

P. NOORDHOFF N.V.

GRONINGEN — BATAVIA

A. A. D. BOUWHOF en J. C. LAGERWERFF

HANDELSREKENEN

voor middelb. en hogere handelsscholen, h.b.s. A, handelscurssussen, studie praktijkexam., akte U en zelfstudie

Deel I. 5e druk f 2.25, geb. f 2.65; deel II, 4e druk f 2.90, geb. f 3.30; deel III, 3e druk f 2.90, geb. f 3.30; deel IIIA f 1.75; deel IV, 2e druk f 4.25, geb. f 5.—; supplement f 5.50, geb. f 6.—.

Antwoorden op deel I en II à f 0.50; volledige uitwerkingen (alle geheel bijgewerkt) I, II en III à f 1.—, IV f 1.50, op supplement f 2.25.

Volledige uitwerkingen uitsluitend voor h.h. leeraren verkrijgbaar.

De eerste drie deelen bevatten de volledige stof, vereischt voor de eindexamens der handelsscholen.

Het vierde deel is uitsluitend bestemd voor candidaten, die wenschen opgeleid te worden voor verschillende praktijkexamens. Het supplement is voor de studie akte m.o., voor accountantsexamens en staatspraktijkdiploma.

BOEKHOUDEN

Leerboek v. Handelsscholen en Practijkexam.

door A. A. D. BOUWHOF, J. C. LAGERWERFF en J. H. A. KREDIET

Eerste deel . . . f 2.90, geb. . . . f 3.30, Uitwerkingen . . . f 1.25

Tweede deel. . . f 3.25, geb. . . . f 3.65.

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN-BATAVIA

Verschenen :

Prof. Dr. J. WOLFF

FOURIER'SCHE REIHEN

MIT AUFGABEN

gebonden . . . f 2.40

UITGAVE VAN P. NOORDHOFF N.V. TE GRONINGEN

Verschenen :

Beknopt leerboek der beschrijvende meetkunde door Prof. H. J. v. VEEN.

Prijs met afzonderlijke atlas . . . , geb. f 10.50

Zoo juist verscheen :

Schriftelijke Opgaven van de eindexamens der Hoogere Burgerscholen vanaf 1868

Twee en twintigste druk vermeerderd en herzien door
Dr. G. C. GERRITS. Prijs f 2.50 . . geb. f 2.75

Zoo juist verscheen :

Algebraïsche Vraagstukken

Met hoofdpunten van de Theorie voor het Middelbaar en Voorbereidend Hooger onderwijs door P. WIJDENES
Deel II zesde druk. Prijs geb. f 3.25

Verschenen :

Stereometrie

voor Middelbaar en Voorbereidend Hooger Onderwijs
door Dr. P. MOLENBROEK en P. WIJDENES.
Derde zorgvuldig nageziene druk.

Gec. met overzicht f 2.75

UITGAVEN VAN P. NOORDHOFF N.V. TE GRONINGEN