

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDAC-
TIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN
J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

MET MEDEWERKING VAN

Dr. H. J. E. BETH
DEVENTER

Dr. E. J. DIJKSTERHUIS
OISTERWIJK

Dr. G. C. GERRITS
AMSTERDAM

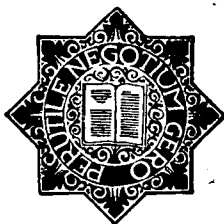
Dr. B. P. HAALMEIJER
AMSTERDAM

Dr. D. J. E. SCHREK
UTRECHT

Dr. P. DE VAERE
BRUSSEL

Dr. D. P. A. VERRIJP
ARNHEM

6e JAARGANG 1930, Nr. 5-6



P. NOORDHOFF — GRONINGEN

Prijs per Jg. van 18 vel f 6.—. Voor intekenaars op het
Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde en Christiaan Huygens f 5.—.

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken, verschijnt in zes tweemaandelijksche afleveringen, samen 18 vel druks. Prijs per jaargang *f* 6.—. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6.—) of op „Christiaan Huygens” (*f* 10.—) zijn ingeteekend, betalen *f* 5.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans-van-Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Het honorarium voor geplaatste artikelen bedraagt *f* 20.— per vel.

De prijs per 25 overdrukken of gedeelten van 25 overdrukken bedraagt *f* 3,50 per vel druks *in het vel gedrukt*. Gedeelten van een vel worden als een geheel vel berekend. Worden de overdrukken buiten het vel verlangd, dan wordt voor het afzonderlijk drukken bovendien *f* 6.— per vel druks in rekening gebracht.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

I N H O U D.

	Blz.
E. J. DIJKSTERHUIS, De opleiding tot leeraar in Wis- en Natuurkunde volgens de plannen van de commissie-Sijmons	193—203
D. J. STRUIK, N. L. W. H. Gravelaar. (1851—1913) . . .	204—207
Boekbespreking	207
Dr. Q. VETTER, Die Čechoslovakische Mittelschule, insbesondere ihr mathematischer Unterricht	209—240
B. L. VAN DER WAERDEN, De tangensregel in de trigonometrie	241—243
P. WIJDENES, De tafel der goniometrische verhoudingen	244—249
Dr. H. J. E. BETH, Het eerste hoofdstuk der stereometrie	250—262
P. WIJDENES, Voor het laatst twee vraagstukken?	263—276

 De redactie heeft het genoeg in deze aflevering het portret te geven van Prof. H. BREMEKAMP; zij hoopt de portretten van al onze hoogleraren den intekenaars achtereenvolgens te kunnen aanbieden.

innemen. Ter wille van de overzichtelijkheid laat ik dergelijke associaties echter voorloopig nog rusten. Een volgend onderwerp, dat ook weer in nauw verband met de methodiek te brengen is, kan bestaan in een behandeling van de begrippen oppervlak en inhoud en van de oneindige processen, die bij de bepaling van oppervlakken en inhouden kunnen optreden. Weer andere stof wordt geleverd door de klassieke, met passer en lineaal onoplosbare problemen, die immers reeds op zeer elementair standpunt kunnen worden gesteld en waarvan zeker twee, namelijk de trisectie van den hoek en de rectificatie van den cirkel, in het onderwijs vroeg of laat onvermijdelijk ter sprake komen. Men zal van den beginnenden leeraar mogen eischen, dat hij met dergelijke kwesties, in het bijzonder met de onmogelijkheidsbewijzen voor de bedoelde constructies, volkomen vertrouwd is en dat hij, wanneer hij vertelt, dat er bewezen is, dat de rectificatie van den cirkel met passer en lineaal alleen niet uitvoerbaar is, met die mededeeling niet zijn geheele kennis van het onderwerp uitput. Afgezien van de onmogelijkheidsbewijzen zullen dan de klassieke problemen en de met hen verwante nog kunnen voeren tot een bespreking van de oplossingen, die zij toelaten, wanneer men een uitbreiding van het aantal constructiepostulaten toestaat, waarbij men dan in het algemeen zou kunnen spreken over de terugvoerbaarheid van problemen van verschillende graad op bepaalde constructiemiddelen.

Ik wil deze opsomming niet voortzetten; het zal ieder van u wel duidelijk zijn, hoe die voortzetting zou moeten geschieden. Men zou kunnen zeggen: sla een willekeurig planimetrie- of stereometrieboek open, daal af in de diepten, die achter elke stelling liggen en ge vindt overal stof voor een college in de kennis van de elementaire meetkunde. En waarlijk niet alleen op historisch terrein: de moderne ontwikkeling van de axiomatica heeft o.m. een vroeger onvermoede verdieping en verbreiding van de axiomatische fundeering van de Euclidische Meetkunde ten gevolge gehad. Ook met deze zal de a.s. leeraar ter dege kennis hebben moeten gemaakt, omdat eerst zij het volle licht heeft doen schijnen over schijnbaar zeer elementaire vragen. De leeraar moet zulke dingen weten, niet met de bedoeling — dit wordt telkens weer misverstaan —, dat hij zal trachten, de resultaten dier moderne strenge onderzoekingen zonder meer in het onderwijs in te voeren, maar eenvoudig op grond van een paar postulaten, die ik stilzwijgend aan al mijn beschouwingen over de

leeraarsopleiding ten grondslag heb gelegd en die ik hier nog eens expliciet wil formuleeren: wie de beginselen van een vak goed doceeren wil, moet er naar streven het geheele vak op wetenschappelijke wijze te beheerschen. Vrees voor wanverhouding tusschen de eigen ontwikkeling en het niveau van het te geven onderwijs is ongegrond. Volledige beheersching van het vak bevordert duidelijkheid en overtuigende werking; onduidelijkheid en onbegrijpelijkheid van een docent zijn in den regel symptomen van eigen gemis aan kennis of inzicht.

Wat ik tot dusver over meetkunde zei, is, *mutatis mutandis*, maar met geen andere dan quantitative verschillen, toe te passen op de andere gebieden der elementaire wis- en natuurkunde. De pas afgestudeerde doctorandus zal in den regel onvoldoende vertrouwd zijn met den inhoud en de techniek van de te onderwijzen vakken: het is b.v. zeer waarschijnlijk, dat hij niet zeer bedreven zal zijn in de tamelijk ver doorgevoerde gonio- en trigonometrie, die in het M.O. wordt gegeven, dat hij moeite zal hebben met de klassieke mechanica, waarvan hij aan de universiteit wellicht alleen de hoogere gebieden heeft leeren kennen en met tal van wetenschappelijk niet meer actueele onderwerpen uit de physica. Dat kan hem en zijn leerlingen in de moeilijke eerste jaren van zijn loopbaan veel, misschien onherstelbaar kwaad doen. Men moest niets nalaten wat kan strekken, om de kans hierop te verminderen.

Het zal u, in wat ik tot dusver gezegd heb, wel zijn opgevallen, dat ik in de didactische colleges, die de kennis van het vak betreffen, een tamelijk ruime plaats toegekend zou willen zien aan historische beschouwingen. Het lijkt me gewenscht, op dit punt iets dieper in te gaan, omdat men, al wint de tegenovergestelde meening veld, toch nog veelvuldig de opvatting aantreft, dat de beoefening van de geschiedenis van de wis- en natuurkunde wel een heel aardige bezigheid is voor enkelingen, die zich daarvoor nu toevallig interesseeren, maar dat het onzinnig zou zijn, om van alle wis- en natuurkundigen, die leeraar willen worden, een zekere mate van historische ontwikkeling te eischen. En toch zou ik dien eisch uitdrukkelijk gesteld willen zien en zelfs om verschillende redenen.

De eerste is wel deze, dat men in het M.O. bijna altijd te maken heeft met tot historie geworden fasen der wetenschap. Dit komt vooral tot uiting bij het onderwijs in Natuurkunde en Kosmographie, waar feitelijk van jaar tot jaar geheele perioden der geschiedenis

herleven. Men spreekt b.v. over vrijen val en houdt daarbij in wezen dezelfde redeneeringen, die Galilei, Beeckman en Huygens eens hielden; men experimenteert over luchtdruk en herhaalt daarbij vrijwel onveranderd, wat von Guericke, Boyle en Pascal eens deden; bij de behandeling van het licht gaat men de gedachtengangen van Huygens en Newton na, bij de electriciteit spreekt men over Coulomb, Galvani, Volta, Faraday, Oersted; in de astronomie zal men nooit kunnen nalaten, de namen Copernicus, Tycho Brahe, Kepler, Galilei, Huygens, Newton te noemen. Men leeft dus als het ware voortdurend weer in het verleden. Maar daaruit vloeit dan ook de verplichting voort, dat verleden ook te kennen, opdat de groote historische namen meer zullen zijn dan klanken, die dienen, om wetten en theorieën aan te duiden.

In de tweede plaats begint men hoe langer hoe meer in te zien, dat de uit didactisch oogpunt meest aan te bevelen weg van uiteenzetting in vele gevallen geen andere is dan die de wetenschap in haar natuurlijke ontwikkeling eens gegaan is. Het veldwinnend historisch karakter van onze leerboeken (ik denk hier b.v. aan het leerboek der natuurkunde van Reindersma en van Lohuizen) is een getuigenis van den groei van dat inzicht, dat echter als onafwijsbare consequentie met zich mee brengt, dat de a.s. leeraar zich heeft leeren verplaatsen in den gedachtengang van de groote figuren uit het verleden.

Vraagt men mij nu, of ik op deze twee gronden historische ontwikkeling speciaal voor den leeraar in wiskunde onmisbaar acht, dan moet ik die vraag ontkennend beantwoorden. Het is in de wiskunde zelden bepaald noodig, historische namen te noemen en heel vaak zou het didactisch bepaald ongewenscht zijn, den historischen weg als doceermethode te kiezen. Toch is ook voor den wiskundeleeraar kennis van de geschiedenis van zijn vak om verschillende redenen gewenscht; ik noem er drie: bestudeering van vroegere fasen van later geperfectioneerde en gemakkelijker begrijpbaar gemaakte methoden bevordert niet alleen de waardeering voor het in die methoden ontplooiende mathematische vernuft, maar verheldert ook menigmaal het inzicht in processen, die dank zij de moderne techniek wel eens wat al te machinaal dreigen te verlopen; kennismaking met perioden der wiskunde, waarin, wat tegenwoordig elementair heet, tot de hoogste en moeilijkste onderwerpen van het vak hoorde, verhoogt het besef van de cultuur-

historische beteekenis van een stof, die in jarenlang voortgezette schoolsche behandeling gevaar loopt, triviaal te gaan worden; ondervinding van de langdurige worstelingen, die het wiskundig denken vaak heeft moeten doormaken om tot inzichten te geraken, die ons vanzelfsprekend lijken of om begripsuitbreidingen te volbrengen, die later voor de hand schenen te liggen, zal den leeraar in staat stellen, beter de moeilijkheden te begrijpen, die zijn leerlingen met het verwerven van dezelfde inzichten en het tot stand brengen van dezelfde uitbreidingen hebben. Het is niet moeilijk, de geldigheid van al deze drie motieven door voorbeelden te staven: ik denk b.v. bij het eerste aan een historische studie van het onderwerp logaritmen, waarin men b.v. kennis maakt met het systeem van Napier, dat allerlei eigenschappen bezit, die van de ons vertrouwde rekenregels afwijken en waarin de bestudeering van de samenstelling van de oorspronkelijke tafels dwingt tot een geheel andere opvatting van de logaritmeneming dan die, waarin ze als een omkeering van de machtsverheffing wordt beschouwd. Of, om een ander voorbeeld te noemen: kennismaking met de wijze, waarop b.v. Huygens het slingerpunt van physische slingers van verschillenden vorm bepaalt, of waarop hij het tautochronisme van de cycloidale slingerbeweging afleidt, dwingt tot veel dieper doordringen in de kern van deze problemen dan bij de machinale uitvoering van een integratie ter bereiking van dezelfde resultaten vereischt wordt. Het tweede motief, bevordering van het besef van de waarde der behandelde onderwerpen, zal misschien niet ieder even sterk voelen. Mij persoonlijk is het echter altijd zoo gegaan, dat ik allerlei stellingen zelf veel belangrijker ben gaan vinden, als ik gemerkt had, welke rol ze in de ontwikkeling van de wiskunde hebben gespeeld. Men ziet het theorema van Pythagoras met andere oogen, wanneer men het heeft zien groeien van een reeds in overoude tijden empirisch bekende eigenschap tot de bij Euclides met de modernste hulpmiddelen van zijn tijd voor het eerst streng bewezen propositie, die het eerste boek der *Elementen* besluit; de stelling van Ptolemaios over den koordenvierhoek wint aan beteekenis, wanneer men haar in den *Almagest* heeft zien gebruiken om de koordentafels te berekenen, die bij de Grieken de rol van onze goniometrische tafels moesten vervullen; de goniometrische formules waarmee men het product van twee sinussen of twee cosinussen in een som of verschil van sinussen of cosinussen omzet,

doen zich anders voor; wanneer men zich de rol herinnert, die zij vóór de uitvinding van logarithmen in de rekenwijze der prostaphairesis hebben gespeeld. En ten slotte het derde motief, beter begrip voor de moeilijkheden van den leerling, wel, hiervoor is de heele wiskunde een groot voorbeeld. Als men eenmaal iets helder heeft ingezien, is het moeilijk, zich weer te verplaatsen in den toestand van hen, die dat inzicht nog missen en zich niet te verbazen en te ergeren over de toch eigenlijk uit niets dan misverstand bestaande belemmeringen, die het begrip verre houden. Het is onze grootste didactische moeilijkheid, dat altijd weer te moeten doen en onze grootste didactische fout, wanneer we dat niet kunnen. Het kan daarbij zeer nuttig zijn, door studie van de geschiedenis te hebben leeren ervaren, hoe de wetenschap in vroegere jaren heeft stilgestaan voor dezelfde moeilijkheden, die onze leerlingen van jaar tot jaar ondervinden.

Ik ben met de laatste opmerking, waarin niet alleen de leeraar en zijn vak, maar ook de leerling voorkomen, reeds overgetreden op het tweede der drie stofgebieden, waarin ik de didactiek verdeelde, de studie van de vraag namelijk, hoe de docent de leerlingen, waarvoor hij komt te staan, in het door hem zelf bestudeerde vak zal onderrichten. Wanneer we nu willen nagaan, wat het didactisch college in deze zal kunnen doen, dan moet vooreerst worden opgemerkt, dat er op dit gebied reeds een zeer omvangrijk studiemateriaal aanwezig is. Er bestaat immers, vooral in Duitschland, een tamelijk uitgebreide, door tijdschriften voortdurend aangevulde, litteratuur over de methodiek der wis- en natuurkunde, die hier te lande weliswaar door vele in functie zijnde leeraren met belangstelling wordt gevolgd, maar waarmee ongetwijfeld de meesten pas kennis zullen hebben gemaakt, toen zij zelf leemten voelden in hun didactisch vermogen en daardoor behoefte kregen aan voorlichting. Dat moest niet zoo zijn. Iemand, die leeraar wordt, behoorde in deze litteratuur althans georiënteerd te zijn, zooals hij het is in de wetenschappelijke litteratuur van zijn vak. Hiermee is reeds een eerste onderwerp voor het college methodiek aangegeven. Er zijn nog verschillende andere, waaruit ik een greep doe.

In de eerste plaats zal het niet kunnen blijven bij oriëntering in de werken, waaruit men de methodiek zou kunnen leeren. Er zijn tal van actueele vragen, die de leeraren in wis- en natuurkunde in hun onderlinge gedachtenwisseling bezig houden en waarmee dus

de a.s. leeraar in deze vakken ook wel op de hoogte mag worden gebracht. Ik noem in de eerste plaats heel algemeene kwesties: zal men bij het beginonderwijs in meetkunde de traditioneele methode van de meeste leerboeken blijven volgen, zal men trachten, het onderwijs van den aanvang af te laten beïnvloeden door de resultaten van de moderne axiomatica, of zal men beginnen met de ontwikkeling van het ruimtelijk voorstellingsvermogen, om zoo- doende eerst de belangstelling te wekken voor de problemen, die bij de studie van de ruimte rijzen en tevens de oplossing van die problemen voor te bereiden? Verdient het aanbeveling, de natuurkunde inplaats van in de derde klasse reeds in de tweede of eerste klasse te laten beginnen? Is het mogelijk en wenschelijk, in de lagere klassen een nauw verband te leggen tusschen wiskunde en natuurkunde? Welke plaats in het natuurkunde-onderwijs in te ruimen aan practische oefeningen door de leerlingen? Zal men in het wiskunde-onderwijs de beginselen van de differentiaal- en integraalrekening invoeren? Zoo ja, zal men dit dan zuiver wiskundig doen of in nauw verband met mechanica en natuurkunde? Hoe kan men die invoering in de lagere klassen voorbereiden door een meer consequente toepassing van het functiebegrip en van de meetkundige voorstelling van functioneele relaties?

Zulke vragen zouden behandeld kunnen worden; ze zouden dan vanzelf leiden tot overweging van de methoden, die men bij het volgen van deze nieuwe wegen zou moeten toepassen en daardoor zou het ook eerst mogelijk worden, principieele wijzigingen in het onderwijs met vrucht in te voeren. Het mag namelijk wel eens duidelijk worden uitgesproken, dat dit onder de tegenwoordige omstandigheden niet kan. Iedere poging, om nieuwe wegen in te slaan, wordt niet zoozeer belemmerd door de bezwaren van de principieele tegenstanders van de voorgestelde wijzigingen dan wel door het inderdaad tot voorzichtigheid manende inzicht, dat een groot deel van de Nederlandsche leeraren didactisch niet voldoende geoefend en geïnteresseerd zijn, om nieuwe methoden maar dadelijk met succes te kunnen toepassen.

Naast de meer algemeene methodische vragen kan men nog tal van andere, meer bijzondere, noemen, waarvan een bespreking met a.s. leeraren gewenscht zou zijn. Ik noem enkele voorbeelden: hoe zal men te werk gaan bij de opvolgende uitbreidingen van het getalbegrip? Zal men het b.v. zoo voorstellen, dat, wanneer men nog

geen andere dan rationale getallen kent, $\sqrt{2}$ reeds bestaat en dat het probleem gevormd wordt door de bepaling van de waarde daarvan; of zal men van het begin af duidelijk maken, dat 2 in het gebied van de rationale getallen geen vierkantswortel heeft en dat men met $\sqrt{2}$ een nieuw getal schept? Hoe zal men handelen met het begrip limiet, hoe met het woord oneindig? zal men in de trigonometrie een systematisch instrumentarium van formules vooropstellen en de leerlingen oefenen in het gebruik daarvan? of zal men de formules meer incidenteel naar aanleiding van geschikt gekozen vraagstukken laten vinden? welk nut kan men bij het beginonderwijs in stereometrie trekken van opzettelijk vooropgezette aanschouwelijke hulpmiddelen? hoe zal men in de B. M. het vaak bedreigde evenwicht tusschen voorstelling en redeneering bewaren? is het mogelijk en wenschelijk, in de meetkunde het begrip van de omgekeerde stelling te vermijden en van inplaats daarvan al heel vroeg het noodig zijn en het voldoende zijn van een voorwaarde te onderscheiden? Hoe zal men in de mechanica moeten handelen bij de invoering van de axiomata? Welk gebruik kan men maken van algemeene intuïtief te aanvaarden principes, zooals dat van de onmogelijkheid van het perpetuum mobile of dat van de constante potentieele zwaartepuntshoogte? Hoe zal men in de physica de behandeling van verschillende onderwerpen verdeelen over het opmerken van eenvoudige ervaringsfeiten, het doen van heuristische, kwalitatieve experimenten, het uitvoeren van meet- en verificatieproeven, de opstelling van hypothesen, hun wiskundige formuleering, de deductie daaruit en de toepassing van het geleerde in vraagstukken? is het mogelijk en wenschelijk, om van de vertrouwdheid van de tegenwoordige jeugd met electricische verschijnselen te profiteeren door de begrippen stroomsterkte en spanning als empirisch bekend voorop te stellen en daarop een electriciteitsleer te bouwen, die van de thans gangbare afwijkt? In hoeverre en op welke wijze kan het physica-onderwijs rekening houden met de ontwikkeling van de moderne physica? U voelt wel, dat men nog tijden lang zoo door zou kunnen gaan; het onderwijs in wis- en natuurkunde wekt gelukkig nog voortdurend nieuwe problemen op en het is ongewenscht, dat dat alles buiten den a.s. leeraar omgaat.

Men zou verder, om tot een nieuw punt over te gaan, kunnen vragen, of het niet mogelijk zou zijn, den a.s. leeraar systematisch voor te bereiden op het peil van ontwikkeling en het bevattings-

vermogen van de leerlingen, die hij zal moeten onderwijzen. Ik geloof, dat de meeste universitair gevormde leeraren in wis- en natuurkunde, die zelf op school met deze vakken wel niet veel last zullen hebben gehad en die daarna jarenlang van elk contact met de schooljeugd verstoken zijn gebleven, hun ambt beginnen met verkeerde voorstellingen daarover en dat hierin een gevaar schuilt voor henzelf en voor hun leerlingen. Zij loopen kans om als ze gaandeweg de realiteit ervaren, eerst in verbazing en daarna in wanhoop te vervallen en of zelf ontmoedigd te worden, of hun leerlingen te ontmoedigen. Natuurlijk zullen er velen zijn, die deze moeilijkheid te boven komen, zooals ze het de anderé moeilijkheden van het vak, waarin ze zoo plotseling op hoop van zegen verplaatst zijn, doen. Maar ik wil er den nadruk op leggen, dat men het probleem van de opleiding niet mag beschouwen van het standpunt van den geslaagden leeraar uit. Zoolang er nog leeraren zijn, die geen orde kunnen houden of slecht les geven en zoolang het nog aannemelijk kan worden gemaakt, dat zij misschien hun werk beter zouden doen, als zij van den aanvang af beter daarop voorbereid waren geweest, mag men niet ophouden, voor een verzorging van de opleiding, die ten slotte toch ook ten goede komt aan hen, die de moeilijkheden van het begin wel uit eigen kracht overwinnen, te pleiten.

Het zou dus gewenscht zijn, indien de beginnende leeraar o.a. een helder denkbeeld had van wat hij met zijn leerlingen wel en wat hij niet kan bereiken. Waarom zal ieder opnieuw in den loop der jaren beseffen dat wat hij aanvankelijk hield voor individueele domheden van zijn eerste leerlingen, vaak niets anders zijn dan de algemeene menschelijke zwakheden tegenover de abstracties van de wiskunde en de raadselen van de natuur? Het is nu eenmaal een aangeboren overtuiging van den gemiddelden leerling, dat alle bewerkingen distributief zijn en alle stellingen omkeerbaar, dat twee vlakken loodrecht op hetzelfde vlak evenwijdig zijn en dat men een bewering kan bewijzen door er een identiteit uit af te leiden. Hij mist alle gevoel voor symmetrie van notatie en kent de eigenschappen der ongelijkheden niet bij intuïtie, hij meent, dat de kracht, die op een lichaam werkt, evenredig is met de snelheid, die dat lichaam krijgt en dat omgekeerd de snelheid verdwijnt, als de kracht ophoudt te werken. Waarom zou men den a.s. leeraar niet op deze eigenaardigheden voorbereiden?

Een volgende mogelijkheid voor een didactisch college bestaat in

de critische behandeling van de beschikbare leerboeken. Men zal daarbij van den leider van het college natuurlijk een voldoende mate van objectiviteit moeten eischen, om principieel van elkaar afwijkende standpunten, die in de verschillende boeken tot uiting komen, tot hun recht te laten komen; tevens echter zal men moeten hopen, dat hij kritisch genoeg is, om een fout een fout te noemen en dat hij op die manier zal kunnen medewerken om ons onderwijs te bevrijden van de vele verouderde en onjuiste zegswijzen, ontoereikende bewijzen en slecht geformuleerde begrippen, die zich daarin nog steeds handhaven.

Ik kan ook op dit punt niet volledig zijn; toch zou ik, alvorens van dit onderwerp af te stappen, nog een onderwerp willen noemen, waarvan de behandeling mij vooral voor a.s. leeraren in wiskunde gewenscht lijkt. Zooals u allen weet, wordt de positie der wiskunde in het middelbaar en gymasiaal onderwijs in de laatste jaren aan een steeds fellere kritiek onderworpen, zoowel van de zijde der buitenstaanders als vanuit het wiskundige kamp zelf. De vroegere vaak ongegronde stemming van zelfverzekerdheid onder wiskundeleeraren heeft daardoor bij menigeen plaats gemaakt voor een niet zelden even slecht gefundeerden ontmoedigenden twijfel in de waarde van zijn werk. Ik zou het wenschelijk vinden, indien de a.s. leeraren op wetenschappelijke wijze werden ingelicht over al de vragen, die het wiskunde-onderwijs doet rijzen: welk doel vervolgt het? welke middelen past het toe, om dat doel te bereiken? bestaat er een redelijke verhouding tusschen den besteden tijd en de aangewende energie eenerzijds en het bereikte nuttig effect anderzijds? zoo neen, is die verhouding door wijziging van doel of middel te verbeteren? Het zou ongetwijfeld zeer van de persoonlijkheid van den leider van het college afhangen, welke antwoorden op deze vragen zouden worden gegeven; bij den een zou het een apologie zijn, bij den ander wellicht een requisitoir. Maar dat doet er niet veel toe; hoofdzak is, dat men over dergelijke dingen heeft leeren nadenken; bodemloos enthousiasme is even waardeloos als ongegronde minachting.

En nu, na deze natuurlijk niet volledige opsomming van wensche-lijkheden en mogelijkheden, die evenmin een minimum- als een maximumprogramma wil zijn, maar waarvan het slechts de bedoeling was, in groote lijnen een richting te schetsen, zou ik de vraag willen herhalen, die aanleiding was om haar te geven: is de

didactiek van de wis- en natuurkunde een vak van voldoende inhoud en voldoende wetenschappelijk peil, om haar te kunnen toelaten als bijvak op een doctoraal-examen? En zal de leeraar voor zijn werk op school practisch iets hebben aan wat hij op die colleges heeft geleerd?

Ik ben dan ten eerste overtuigd, dat niemand de eerste vraag ontkennend zal durven beantwoorden. Gesteld, dat men eens ernst maakte met den eisch van kennis der Euclidische meetkunde in haar historische ontwikkeling en haar moderne voltooiing, zou dan de didactiek niet reeds alleen daardoor menig thans toegelaten bijvak in wetenschappelijke waarde overtreffen? En wat de tweede vraag betreft: zou niet de doctorandus, die op de geschetste wijze was voorbereid, dadelijk heel anders tegenover zijn leerlingen komen te staan, met veel meer, althans meer gemotiveerd zelfvertrouwen en met een grootere kans, van het begin af met zijn onderwijs iets te bereiken, dan wij zelf, als we eerlijk willen zijn, zullen moeten erkennen, in den eersten tijd van ons leeraarsbestaan te hebben kunnen doen?

Waarbij men dan nog bedenken moet, dat het derde deel van de didactische opleiding, de practische oefening, nog niet ter sprake is gebracht. Wanneer de a.s. leeraar eens een paar maanden lessen heeft helpen voorbereiden en ze daarna heeft bijgewoond, wanneer hij schriftelijk werk heeft helpen ontwerpen en corrigeeren, wanneer hij ten slotte onder ervaren toezicht zoo nu en dan zelf eens een van te voren besproken en na afloop gecritiseerde les heeft gegeven, zal hij ongetwijfeld bij zijn eerste geheel zelfstandige optreden tal van fouten vermijden, die hij anders vrij zeker zou hebben gemaakt. En dit is van groot belang. Een leeraar kan zich niet steeds de weelde veroorloven, door schade en schande wijs te worden. Het sterkste wapen, dat hij in den strijd met den leerling kan hanteeren is de suggestie en hij kan geen betere suggestie uitoefenen dan door van den aanvang af te laten merken, dat hij weet, hoe te handelen, dat hij zijn vak kent en dat hij de moeilijkheden daarvan begrijpt.

Ik zie er vanaf, over de practische oefening in details te treden. Wat iemand als leeraar voor een klas doen en laten moet, kan men moeilijk in woorden omschrijven; het bestaat uit een aaneenschakeling van kleinigheden, elk op zich zelf schijnbaar onbeduidend, maar alle te samen van ontzaglijk belang. Ik beperk me dus tot het uitspreken van de stelling, dat ervaring van het lesgeven, onder

ongevaarlijke omstandigheden opgedaan en vereenigd met voorlichting van ervaren zijde, den a.s. leeraar ten goede zal komen.

Liever dan hierover verder te spreken, wil ik, voordat ik mijn voordracht besluit, nog even enkele woorden zeggen over de mogelijkheid van een regeling van de opleiding voor hen, die onderwijsbevoegdheid verwerven op grond van een middelbare acte of van een ingenieursdiploma. Ik kan hierover zeer kort zijn.

Het is namelijk wel duidelijk, dat wanneer eenmaal het universitaire onderwijs in den door ons gewenschten zin zou zijn hervormd, de twee genoemde categorieën van bevoegdheden ook niet zonder wijziging zouden kunnen worden gehandhaafd. Men zal dus het examen KV moeten uitbreiden met de eischen, die op het doctoraal-examen wiskunde in het bijvak didactiek worden gesteld, terwijl de Technische Hoogeschool, indien zij er prijs op stelt, zelf onderwijsbevoegdheid te blijven verleen, zal moeten streven naar een outillage op het gebied der didactiek, die gelijk staat met die van de universiteiten. Geschiedt dit niet, dan zou aan ingenieurs slechts onderwijsbevoegdheid moeten worden verleend na het afleggen van een staatsexamen voor een speciaal daartoe ingestelde commissie.

En hiermee meen ik voldoende over de plannen der commissie-Sijmons in hun toepassing op het gebied der wis- en natuurkunde te hebben gezegd, om een vruchtbare gedachtenwisseling mogelijk te maken. Ik ben er mij natuurlijk wel van bewust, dat die plannen bij nader onderzoek wellicht niet ongewijzigd in practijk zullen kunnen worden gebracht. Maar ik bezit voorloopig nog wel de overtuiging, dat de richting, die het rapport der commissie wijst, de juiste is en dat de regeering het Nederlandsche Onderwijs kwaad zal doen, indien zij nog langer verzuimt, deze richting in te slaan.

N. L. W. H. GRAVELAAR. (1851—1913).

DOOR

D. J. STRUIK.

Tot nu toe is nog geen overzicht verschenen van wat de in 1913 overleden leeraar aan de Rijkskweekschool voor Onderwijzers te Deventer op het gebied der geschiedenis van de wiskunde heeft gepubliceerd. Naar aanleiding van een biografische schets van dezen begaafden opvoeder en geleerde voor het Nieuw Nederlandsch Biografisch Woordenboek bood zich mij de gelegenheid aan, zijn werk wat nauwkeuriger te bezien. Hier volgt een overzicht van zijn werk op het gebied van de geschiedenis van de wiskunde.

Vooraf ga een enkel woord over zijn levensloop. Geboren 29 November 1851 te Groningen als zoon van een commies bij de douane, doorliep Nicolaas Lambertus Willem Anthonie Gravelaar de kweekschool voor onderwijzers te Groningen, werd daarna onderwijzer te Groningen, hoofd eener school te Zwolle en in 1880 leeraar aan de kweekschool te Deventer, welke betrekking hij tot zijn dood, den 18 Februari 1913, vervulde.¹⁾ Hij had een uitstekenden naam als paedagoog en schreef vele leerboeken voor het schoolonderricht, o.a. een „Theorie der Rekenkunde” in 2 deelen (1881), die een groote bekendheid in vakkringen genoten. Ook schreef hij enkele opstellen over rekenkundige en algebraïsche problemen.²⁾ Zijn voornaamste wetenschappelijke werk is evenwel op het gebied van

¹⁾ Verschillende aanwijzingen heb ik aan Mevrouw L. Vrind—Gravelaar in Den Haag te danken.

²⁾ De voornaamste zijn „Neuer Beweis für die Realität der Wurzeln einer wichtigen Gleichung” (Archiv f. Mathem. 58 (1875), p. 302—318, de vergelijking is de seculairvergelijking); „Eene stelling uit de theorie der lineaire substituties” (Nieuw Archief 3 (1877), p. 193—202, de stelling betreft de determinant van Hesse, doch behoeft aanvulling); „Een bijzondere vergelijking” (Nieuw Archief 4 (1878), p. 113—124, ook de seculairvergelijking).

de geschiedenis der wiskunde. Zijn publicaties hieromtrent zijn de volgende.

1. *Pitiscus' Trigonometria*. („Nieuw Archief voor Wiskunde" (2) 3 (1898) pg. 253—278). Bevat een beschrijving en een inhoudsbespreking van Pitiscus' (1561—1613) boeken „De solutione Triangulorum tractatus" (1595); „Trigonometriae sive de Dimensione Triangulorum Libri Quinque" (1e ed. van 1600, 2e ed. van 1608, 3e ed. van 1612). Een der conclusies van deze studie is, dat Cantor's uitspraak, dat Pitiscus de stip als decimaalteeken zou hebben gebruikt en dus ons decimaalteeken van dezen en van Bürgi zou afkomstig zijn, aanvechtbaar is. Komma en stip als decimaalteeken vindt men het eerst bij Napier (1619). Van deze conclusie vindt men bij Tropfke „Geschichte der Elementar-Mathematik" (2e Auflage) I pg. 143 geen gewag gemaakt. Vgl. ook Cantor, Vorlesungen II (2e Aufl. 1900) p. 733.

2. *John Napier's werken*. („Verhandelingen Kon. Akademie v. Wetenschappen Amsterdam (1e sectie)" 6, No. 6 (1899), 159 bldz.). Deze zeer uitvoerige studie bevat een levensbeschrijving en een volledige beschrijving en inhoudsbespreking van alle werken van Napier:

a. *A plaine discovery of the whole revelation of St. John* (1e ed. 1593), met de verschillende edities, o.a. twee in Middelburg (1600, 1607).

b. *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (1e ed. 1614), met de verschillende edities.

c. *Rabdologia* (1e ed. 1617), met de verschillende edities, o.a. één Hollandsche in het „Eerste Deel van de Nieuwe Telkonst" van Dè Decker te Gouda (1626).

d. *Mirifici logarithmorum canonis constructio* (1619), met de verschillende edities.

e. *De Arte Logistica* (1639).

Groote klaarheid wordt verkregen door een opsomming, op p. 15—17, van „Onderwerpen en Punten, die in Napier's wiskundige werken bijzonder de aandacht verdienen."

Door dit werk is een volledige orientatie over het opus van Napier mogelijk.

Eenige voorstudies waren reeds verschenen in:

3. *De logarithmen van Neper* („De Natuur", 1891, 2 bldz.).

4. *Over de logarithmen van Neper*. („Supplement op de Vriend

der Wiskunde", 4 (1892) pp. 103—116). In beide artikelen legt G. sterk den nadruk op de fout, die men maakt, door Nepersche en natuurlijke logarithmen gelijk te stellen.

Met deze studies hangt samen:

5. *De notatie der decimale breuken*. („Nieuw Archief" (2) 4 (1900) pp. 54—73). Hierin wordt de stelling verdedigd, dat wij onze hedendaagsche decimale notatie verschuldigd zijn aan Napier en niet aan Bürgi, Pitiscus of Kepler. Men vindt in deze verhandeling o.a. bijzonderheden over Stevin's „De Thiende" (1585).

6. *Stevin's Problemata geometrica*. („Nieuw Archief" (2) 5 (1902) pp. 106—191). Bevat, na een opsomming van de werken van Stevin, een zorgvuldige bespreking van Stevin's zeldzaam werkje „Problematum Geometricorum Libri V" (Antwerpen, 1583). Vooral wordt de aandacht gevestigd op het derde boek, dat hoofdzakelijk over halfregelmatige veelvlakken handelt; hieraan knoopt de schrijver pp. 164—166 een geschiedenis dezer lichamen vóór Stevin vast. Ook vergelijkt hij den inhoud van de „Problemata" met dien van Stevin's „Meetdaet" (1605), waarin groote stukken der „Problemata" zijn opgenomen.

7. *Over den oorsprong van den naam sinus* („Wiskundig Tijdschrift" 2 (1906) pp. 12—15). Is een samenvatting van wat bij v. Braunmühl, Cantor, Tropfke e.a. te vinden is.

8. *Cardano's Transmutatiemethoden*. („Nieuw Archief" (2) 8 (1909) pp. 408—444). Behandelt methodes, door Cardano in zijn „Ars magna" (1545) en zijn posthume „Ars magna arithmeticae" ontwikkeld om door middel van de substituties $x = -y$, $x = k : y$ en $x = y \pm k$ vergelijkingen tot voor hem bruikbaarere vormen te reduceeren. Tevens bevat deze verhandeling een poging de verdiensten van Cardano precies vast te leggen. Als vrucht van deze studie van Cardano is ook op te vatten:

9. *De leerwijze van Ferrari voor de oplossing der vergelijkingen van den vierden graad* („Wiskundig Tijdschrift" 1 (1904) pp. 62—71, 167—171), dat na een uitstapje op historisch gebied over deze oplossing refereert.

10. *Over den oorsprong van ons maalteeken ($\times$)*. („Wiskundig Tijdschrift", 6 (1909) pp. 1—25). Hierin tracht de schrijver de invoering van ons maalteeken $\times$ door Oughtred (1631) als tamelijk voor de hand liggend begrijpelijk te maken. Immers, in een groot aantal rekenboeken van vóór 1631 wordt bij het uitvoeren

van vermenigvuldigingen zóó vaak en zóó geregeld gebruik gemaakt van kruisen, dat zich in den loop van eenige eeuwen het denkbeeld van de „saamhoorigheid” van bewerking en teeken ontwikkeld kan hebben. Tropfke l.c. II (1921) p. 23 neemt van dit vermoeden wel kennis, doch kan het niet zonder meer als juist erkennen, omdat het kruis ook vaak voor optelling en aftrekking van twee breuken gebruikt werd. Van Gravelaar's kennis van Oughtred profiteerde ook Cantor, Vorlesungen II (2e Aufl. 1900) p. 721.

Al deze publicaties, en in het bijzonder de no's 1, 2, 5, 8 en 10, kenmerken zich door groote nauwgezetheid en laten zien, dat de schrijver zich heeft laten beïnvloeden door de z.g. exacte richting in de beoefening der geschiedenis der wiskunde, die minutieuze bronnenstudie voorstaat en die o.a. door Prins Boncompagni en later door Eneström was vertegenwoordigd.

BOEKBESPREKING.

Dr. E. J. Dijksterhuis. De Elementen van Euclides. Tweede deel. Deel III van de historische bibliotheek voor de exacte wetenschappen. Groningen, P. Noordhoff, 1930. 287 blz.

Was het nog mogelijk van deel I een eenigszins volledige bespreking te geven (zie 6e jaargang no. 1 van dit tijdschrift), voor het tweede deel is dit niet wel uitvoerbaar. In dit deel toch is een zeer uitgebreid materiaal in compacten vorm behandeld. Schrijver bespreekt in opvolgende hoofdstukken:

Boek II der Elementen: de oppervlakterekening;
 „ III „ „ de cirkel;
 „ IV „ „ cirkel en driehoek; regelmatige veelhoeken;
 „ V „ „ de redentheorie;
 „ VI „ „ de meetkundige toepassing der redentheorie;

Boeken VII—IX der Elementen: behandeling van arithmetische onderwerpen;

Boek X der Elementen: theorie der irrationaliteiten;
 „ XI „ „ stereometrie;
 „ XII „ „ inhoudsbepalingen;
 „ XIII „ „ regelmatige veelvlakken.

Het boek wordt besloten met twee appendices over de vraag of in

de Grieksche wiskunde irrationale getallen voorkomen en over de geschiedenis van de termen „reden” en „evenredigheid.”

Een paar losse toelichtingen mogen hier nog volgen. Bij de oppervlakterekening wordt behandeld de methode die men tegenwoordig geometrische algebra noemt en die de Grieken in staat stelde resultaten te verkrijgen, welke anders, wegens hun beperkt getalbegrip en gemis aan een algebra, misschien niet bereikt zouden zijn.

Te midden van het overwegend geometrische werk doen de boeken VII—IX eigenaardig aan. Zij staan tusschen de planimetrische boeken en die welke over de irrationale rechten en de stereometrie handelen. Zonder verband met het voorgaande en in schijnbaar slechts lossen samenhang met het volgende, bevatten zij slechts arithmetische onderwerpen. Verschillende vragen die hier rijzen, worden uitvoerig besproken.

Bij de behandeling van boek X komt ter sprake het principiële verschil tusschen de Grieksche en de moderne beschouwingwijze van irrationale grootheden.

Boek XII geeft de afleiding van stellingen betreffende inhouden van pyramiden, kegels en bollen. Als hulpmiddel wordt gebruikt de, ongetwijfeld van Eudoxos afkomstige, maar voor het eerst bij Euclides optredende exhaustiemethode. Deze naam is onjuist, daar van werkelijke uitputting geen sprake is. Na een eindig aantal stappen wordt het proces gestaakt en men gaat dan over tot een indirect bewijs van de onmogelijkheid der ontkenning van het reeds te vermoeden resultaat. Bijzonder duidelijk bespreekt de Schrijver het verband met de moderne methode van limietovergang.

Zooals reeds voor enkele kwesties is aangegeven gaat het overal: steeds worden de Grieksche opvattingen en methoden vergeleken met die der huidige wetenschap. Ook de verschilpunten tusschen de tegenwoordige leerboeken en het groote werk van Euclides worden belicht.

Met dit tweede deel heeft de heer Dijksterhuis een meesterlijke prestatie voltooid. Grondige lezing neemt hier aanmerkelijk meer tijd dan bij het eerste deel, maar wie zich zet tot kalme studie zal zijn moeite ruimschoots beloond vinden.

B. P. H.

DIE ČECHOSLOVAKISCHE MITTELSCHULE, INSBESONDERE IHR MATHEMATISCHER UNTERRICHT

VON

Dr. Q. VETTER.

§ 1. *Organisation.*

Um den vielleicht weniger informierten Lesern eine verständnisvolle Einsicht in unser Schulwesen zu gewähren, sei mir erlaubt über die Čechoslovakische Republik einige Worte vorauszuschicken. Nach den 300-jährigen Centralisierungsbestrebungen der ehemaligen Habsburgischen Monarchie wurde den 28. Oktober 1918 der böhmische Staat in der Form der Čechoslovakischen Republik erneuert. Er besteht aus 4 administrativen Teilen, wie folgt: 1) dem ehemaligen Königreich Böhmen (6,576.825 Einw. laut der letzten Volkszählung im Jahre 1921), 2) Mähren und Schlesien (2,616.436 + 622.825 Einw.), 3) der Slovakei (2,958.557 Einw.) und 4) Karpathenrussland (599.808 Einw.).

Die ersten zwei Teile, die sogenannten historischen Länder, gehörten vor der Befreiung zu der österreichischen Hälfte, die letzten zwei zu der ungarischen Hälfte des ehemaligen Österreich-Ungarn. In beiden Hälften herrschten verschiedene politische und kulturelle Verhältnisse. In der österreichischen Hälfte, dem sog. Cisleitanien, hat sich die čechische Nation, wenn auch nicht im genügenden der Zahl der čechischen Bevölkerung entsprechenden Masse im Verhältnisse zur Zahl der Einwohner, ein Schulwesen aller Stufen und Typen in čechischer Sprache vor dem Weltkriege erkämpft, in der ungarischen Hälfte, dem sog. Transleitanien, existierten nur öffentliche Schulen ausschliesslich mit magyarischer Unterrichtssprache und nur einige private Volksschulen, von den verschiedenen Kirchen unterhalten, hatten zur Unterrichtssprache das Idiom der slavischen Bevölkerung, doch auch da wurde die Mehrzahl der Unterrichtsstunden

dem Magyarischen gewidmet. Erst im Jahre 1921 wurde bei der Volkszählung die Nationalität auf Grund der Muttersprache festgestellt, wogegen das alte Regime nur die sog. Umgangssprache die der Machthabende dem Schwächeren aufzwingen konnte, gezählt hat. In dem Jahre 1921 waren die Nationalitäten, folgenderweise verteilt:

	Čecho-slovaken	Deutsche	Polen	Russen	Magyaren	Juden	Andere	Im Ganzen
Einw.	8.760.937	3.123.568	75.853	461.849	745.431	180.855	25.871	13.374.364
%	65,51	23,36	0,57	3,45	5,57	1,35	0,19	100

Die Čechoslovakische Nation teilt sich in 2 Stämme, deren Sprachen sich von einander weniger unterscheiden, als das Deutsche eines Bayern vom Deutschen eines Preussen: in Čechen, welche kompakt in den historischen Ländern und zerstreut im Osten der Republik wohnen, und in Slovaken, die die kompakte Bevölkerung in der Slowakei vorstellen. Die Deutschen bewohnen kompakt die Grenzgegenden der historischen Länder, wogegen sie im Osten ebenfalls zerstreut leben. Die Russen bilden eine kompakte Bevölkerung im östlichen Teil der Slowakei und in Karpathenrussland, die Polen sind im östlichen Teil Schlesiens.

Die Čechoslovakische Republik übernahm vom ehemaligen Österreich-Ungarn die Schulorganisation, der die Verhältnisse in Cisleitänien vorbildlich waren, wo schon seit langer Zeit die 8-jährige Schulpflicht (vom 6. zum 14. Lebensjahr) eingeführt war, wogegen es in Transleitänien nur eine 6-jährige Schulpflicht gab. Eine der ersten Aufgaben der neuen Schulbehörde war, im Osten der Republik die fehlenden Schulen zu errichten, ehe eine genügende Zahl einheimischer Lehrer ausgebildet sein wird, die Lücken mit Lehrern aus den historischen Ländern auszufüllen (gegen 300 čechische Mittelschullehrer meldeten sich freiwillig unter dem Einflusse des ersten idealistischen Freiheitsjubels zur Transferierung in die Slowakei unter viel schwereren dortigen Verhältnissen), und die einheitliche 8-jährige Schulpflicht auch dort einzuführen. In der Slowakei ist dieses Bestreben schon durchgeführt worden.

Das čechoslovakische Schulwesen besteht aus drei Stufen: 1) dem Elementarschulwesen, d.i. der Kleinkinderbewahranstalten und Kindergärten, der Volksschule und Bürgerschule, 2) dem Mittelschulwesen, zu dem sich die Fachschulen reihen, 3) dem Hochschulwesen.

In die Kleinkinderbewahranstalten können die Mütter ganz kleine Kinder bis zu 3 Jahren schicken, wenn sie selbst ihrer Arbeit nachgehen. Die Kindergärten besuchen freiwillig Kinder von 3 bis zu 6 Jahren. Der normale Typus der Volksschulen in Städten ist eine 5-klassige Volksschule. Wo es aber keine Bürgerschule gibt, dort werden bis 8-klassige Volksschulen errichtet. In kleinen Dörfern, wo nur wenige Schulkinder sind, gibt es auch Volksschulen von 4 bis 1 Klasse, in denen natürlich in Abteilungen unterrichtet wird. Die Schuljugend wird in einer normalen Volksschule nach dem Geschlecht geteilt. Wo aber wenige Kinder sind, existieren gemischte Volksschulen. Für subnormale Kinder gibt es dann in grösseren Städten auch besondere Klassen für minder begabte, schliesslich Blinde, Taubstumme, Idioten und ähnliche abnormale Kinder werden in besonderen Anstalten erzogen.

Im 11ten oder 12 Lebensjahr entscheidet sich das Kind, resp. seine Eltern, ob es studieren, das heisst eine Mittelschule besuchen will, oder ob es sich einem sog. praktischen Berufe widmen will. In dem zweiten Falle besucht es eine Bürgerschule, und wo die nicht ist, bleibt es bis zu seinem 14. Jahre in der Volksschule. Es wird ein Gesetz vorbereitet, in Kraft dessen in jedem Sprengel eine Bürgerschule errichtet werden muss, so dass mit der Zeit alle Kinder die Möglichkeit haben werden, eine Bürgerschule aus dem Elternhause aus zu besuchen. Die Bürgerschulen sind 3-klassig, den Unterricht erteilen Fachlehrer, die in 3 Gruppen geteilt sind, in die linguistisch-historische, mathematisch-naturwissenschaftliche und mathematisch-zeichnerische. Die Fachlehrer sind Volksschullehrer, die gewöhnlich einen speziellen Kurs absolviert haben und eine besondere Prüfung abgelegt haben. Das mathematische und darstellend geometrische pensum dieser Prüfung ist etwas höher als das der Reifeprüfung auf einer Realschule.

An manchen Bürgerschulen wird noch ein unobligater IV. Jahrgang errichtet, der den Stoff ergänzen und vertiefen soll. Es gibt Bestrebungen, diesen 4. Jahrgang auf allen Bürgerschulen einzuführen, wodurch sich via facti die Schulpflicht um ein Jahr verlängern würde.

Den sachlichen Kostenaufwand auf öffentlichen Volks- und Bürgerschulen trägt gewöhnlich die Gemeinde, den Personalaufwand die Landesbehörde. Wo aber eine Schule in einer Gemeinde sich befindet, die eine grosse anderssprachige Majorität hat, dort trägt

der Staat den ganzen Kostenaufwand. Dasselbe gilt von den meisten Schulen in den östl. Ländern. In den historischen Ländern gibt es nur sehr wenige Privatvolks- und Privatbürgerschulen, in den östlichen Ländern aber werden solche Schulen insbesondere von den Kirchen unterhalten. Doch diese Schulen haben so grosse Staatssubventionen, dass auch sie hauptsächlich der Staat unterhält. Alle Schulen, auch die Privatschulen, müssen den vorgeschriebenen Lehrplan einhalten und nur vorgeschriebene Schulbücher gebrauchen. Ihre Lehrer müssen die vorgeschriebene Qualifikation haben und wenigstens nach den an den Staatsschulen eingeführten Normen bezahlt werden. Alle Schulen unterliegen der Aufsicht der Schulinspektoren, die Staatsbeamten sind und aus den Reihen hervorragender Bürgerschullehrer und Mittelschulprofessoren ernannt werden. Im Ganzen herrscht die Tendenz, die sich auch auf die höheren Schulstufen bezieht, langsam das ganze Schulwesen zu verstaatlichen.

Die nachstehenden Tabellen beweisen den gewaltigen Fortschritt, den das Volksschulwesen unter den neuen Verhältnissen, besonders in den östlichen Ländern, gemacht hat. Der Kürze halber gebrauchen wir die folgenden Abkürzungen: B = Böhmen, MS = Mähren und Schlesien, Sl = die Slowakei, K = Karpathenrussland, ö = öffentliche Schulen, pr = private Schulen, č = čechoslovakisch, d = deutsch, p = polnisch, r = russisch, m = magyarisch, rum = rumänisch, h = hebräisch, a = andere Sprachen.

Zahl der Volks- u. Bürgerschulen am Boden der heutigen
Čechosl. Republik vor dem Umsturz:

Land und Jahr	č	d	p	r	m	a	Summe
B, MS, 1918 . .	6.040	3 805		—	—	—	9.845
Sl, K, 1915. . .	320	20	—	16	3.615	37	4.008

Das traurige Resultat der Schulverhältnisse im ehemaligen Ungarn ist die horrende Zahl der Analphabeten. Laut der Volkszählung im Jahre 1910 gab es auf 1000 Einw., die älter als 10 Jahre waren, in den historischen Ländern 24,3, in den slowakischen Gauen in Ungarn 349, in den russischen 659 Analphabeten. Der Fortschritt wird aus den Resultaten der Volkszählung im nächsten Winter ersichtlich sein

Das 14-jährige Kind als Lehrling kann in das praktische Leben eintreten. Aber auch da genießt es, wo die Gelegenheit vorliegt, noch in 8 wöchentlichen Stunden im Laufe von 2 oder 3 Jahren eine obli-
gatorische Schulbildung, 7 Monate im Jahr, in den gewerblichen

Zahl der Volks- u. Bürgerschulen den 31. Oktober 1927.

Unterrichtssprache:																			
Land und Art	ŷ	c	d	p	r	m	rum.	h	ŷ	cd	cm	ŷ	cdm	dm	rc	rd	rrum	rm	Summe
a) Volksschulen:																			
B ö . . .	4.203		2.249	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	6.444
pr . . .	20		48	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	68
MS ö . . .	2.563		844	76	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3.483
pr . . .	24		39	11	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	74
SI ö . . .	2.684		105	—	102	692	—	—	19	27	2	2	—	—	—	—	—	—	3.633
pr . . .	8		1	—	—	1	—	—	—	2	—	—	—	—	—	—	—	—	12
K ö . . .	85		14	—	397	96	2	5	—	2	2	—	—	—	3	3	2	13	619
Summe. . .	9.587		3.289	87	499	789	2	5	19	31	2	2	2	2	3	3	2	13	14.333
ln % . . .	66,89		22,94	0,61	3,48	5,50	0,02	0,04	0,14	0,21	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08	0,09	0,09	100
b) Bürgerschulen:																			
B ö . . .	746		277	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1.023
pr . . .	12		15	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	27
MS ö . . .	418		126	3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	547
pr . . .	10		15	7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	32
SI ö . . .	109		2	—	1	14	—	—	2	4	—	3	—	—	—	—	—	—	135
pr . . .	—		1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
K ö . . .	1		—	—	7	—	—	—	—	—	—	—	—	—	5	—	—	3	16
Summe. . .	1.296		436	10	8	14	—	—	2	4	—	—	—	3	5	—	—	3	1.781
ln % . . .	72,76		24,49	0,56	0,45	0,79	—	—	0,11	0,22	—	0,17	0,28	0,17	0,28	—	—	0,17	100

Fortbildungsschulen. Es ist die Absicht der Schulbehörden den obligatorischen Fortbildungsunterricht auf die gesamte Jugend, die keine andere Schule mehr besucht, auszudehnen und durchwegs auf 2 Jahre zu 10 Monaten zu regeln.

Die Zahl und Nationalität der Schüler den 31. Oktober 1927.

Unter- richts- sprache	Nationalität:								
	č	d	p	r	m	rum	h	a	Summe
a) Volksschulen:									
č . . .	934.053	5.950	616	5.272	3.943	16	9.163	1.137	960.150
d . . .	2.009	301.456	565	52	483	1	1.184	136	305.886
p . . .	3	6	9.734	—	—	—	—	—	9.743
r . . .	239	322	31	55.260	1.021	—	5.748	43	62.664
m . . .	882	51	2	162	87.352	—	3.162	361	91.972
rum . .	—	—	—	—	—	254	41	—	295
h . . .	—	—	—	—	—	—	393	—	393
čd . .	3248	2046	17	22	194	—	107	7	5.641
čm . .	2341	153	3	25	3.914	2	230	78	6.746
rč . .	86	22	—	396	32	—	147	2	685
rd . .	—	293	—	80	3	—	35	1	412
rm . .	10	14	5	1639	1975	2	1.099	—	4.644
rrum .	—	—	—	1	5	481	258	—	745
dm . .	1	639	—	1	266	—	—	—	907
čdm . .	369	195	—	2	185	—	—	2	753
Summe.	943.241	311.147	10.973	62.912	99.273	756	21.567	1.767	1.451.636
In %	64,98	21,44	0,75	4,33	6,84	0,05	1,49	0,12	100
b) Bürgerschulen:									
č . . .	202.834	3.337	55	68	940	6	1.512	88	208.840
d . . .	1.605	56.371	295	1	80	—	208	9	58.569
p . . .	—	—	1.476	—	—	—	—	—	1.476
r . . .	52	44	2	875	150	—	409	—	1.532
m . . .	75	28	—	—	1.556	1	141	1	1.762
čd . .	406	546	1	1	84	—	37	2	1.077
čm . .	541	18	—	—	537	—	55	3	1.177
rč . .	51	8	—	349	112	3	300	—	823
rm . .	22	29	2	349	672	—	608	—	1.727
dm . .	18	198	—	1	168	—	196	—	581
Summe.	205.564	60.579	1.831	1.689	4.299	10	3.466	103	277.541
In %	74,07	21,82	0,66	0,61	1,54	0,01	1,25	0,04	100

Durchschnittliche Zahl der Schüler im Schuljahr 1928/9 in
einer Klasse mit der

	č	d	p	r	m	rum	h	einigen	Durchschnitt überhaupt
Unterrichtssprache(n)									
Volkssch. .	39,4	38,1	37,6	63,5	56,5	61,2	30,8	49,7	40,5
Bürgersch. .	32,5	31,6	34,—	32,6	35,2			35,9	32,3

Die absolvierte Bürgerschule berechtigt, gewöhnlich nach einer Aufnahmeprüfung, zum Besuche von Fachschulen zum Beispiel von Gewerbeschulen, Handelsschulen, Pädagogien (d.i. Lehrerbildungsanstalten), Musikschulen etz. Auch kann der Schüler einer Bürgerschule auf Grund einer Aufnahmeprüfung in die betreffende Mittelschulklasse übertreten.

Die Mittelschule im engeren Sinne, d. h. Schule, die den Schülern eine allgemeine Bildung und die Vorbereitung für die Hochschule bietet, ist in der Čechoslovakischen Republik durch folgende Typen vertreten:

- 1) Das Gymnasium, 8-klassig, mit Latein und Griechisch,
- 2) Das Realgymnasium, 8-klassig, mit Latein und modernen Sprachen,
- 3) Das höhere Realgymnasium des Tetschner Typus, 8-klassig mit einer Trifurkation auf der höheren Stufe,
- 4) Das Reformrealgymnasium, mit Latein von der 5. Klasse,
- 5) Die Realschule, 7-klassig,
- 6) Mädchenlyceen, 6-klassig, die sich aber nicht bewährten und darum in Reformrealgymnasien umgestaltet wurden.

In die ersten Klassen dieser Schulen werden Kinder aufgenommen, die wenigstens das 10. Lebensjahr überschritten haben.

Die ersten Jahre nach dem Kriege zeichneten sich durch das Bestreben aus, neue Schulen für die slavische Bevölkerung, welche das frühere Regime zuviel vernachlässigt hatte, zu gründen. Die alten Ungerechtigkeiten aber sind bis jetzt noch nicht ganz abgeschafft, wie es des Vergleich der durchschnittlichen Schülerzahl in einer Klasse beweist. Die späteren Jahre charakterisiert die Umformung extremer Typen, d.i. mancher Gymnasien und mancher Realschulen, in Realgymnasien, die sich am meisten einer angestrebten Einheitsmittelschule nähern, und die den Absolventen die grössten Möglichkeiten in der Wahl des weiteren Studiums bieten. In den nachste-

henden Tabellen werden wir der Kürze halber wieder folgende Abkürzungen gebrauchen: B = Böhmen, M = Mähren, S = Schlesien, Sl = Slowakei, K = Karpathorussland, c = tschechoslowakisch, tschechoslowakische Unterrichtsspr. etc., d = deutsch etc., p = polnisch etc., r = russisch etc., m = magyarisch etc. G = Gymnasium (-en), RG = Realgymnasium, RRG = Reformrealgymnasium, HG = Höheres Realgymnasium, R = Realschule, L = Lyzeum.

Die Zahl der Mittelschulen und Pädagogien im Schuljahre 1918/9 vor dem Umsturz auf dem Boden der heutigen Tschechoslowakischen Republik:

A) Mittelsch.	B		M		S			Sl			K			Im Ganzen					Summe
	č	d	č	d	č	d	p	č	d	m	č	r	m	č	d	p	r	m	
G	22	23	15	12	1	3	—	—	—	32	—	—	3	38	38	—	—	35	111
RG.	25	10	10	3	1	1	1	—	—	—	—	—	—	36	14	1	—	—	51
HG	—	2	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	2	—	—	—	2
RRG	—	1	—	—	—	2	—	—	—	—	—	—	—	—	3	—	—	—	3
L	8	8	1	5	1	1	—	—	—	5	—	—	—	10	14	—	—	5	29
R	30	15	13	16	—	2	—	—	—	6	—	—	—	43	33	—	—	6	82
Im Ganzen . .	85	59	39	36	3	9	1	—	—	43	—	—	3	127	104	1	—	46	278
In %														45,7	37,4	0,4	—	16,5	100
B) Pädag. . .	20	14	7	6	1	2	—	—	—	15	—	—	3	28	22	—	—	18	68
Fachpädag.	4	4	2	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	6	5	—	—	—	11
Im Ganzen . .	24	18	9	6	1	3	—	—	—	15	—	—	3	34	27	—	—	18	79
In %														43,0	34,2	—	—	22,8	100
Beide Schulen	109	77	48	42	4	12	1	—	—	58	—	—	6	161	131	1	—	64	357
In %														45,1	36,7	0,3	—	17,9	100
Nach d. Länd. .	186		90		17			58			6			357					

Von den Mittelschulen befinden sich $\frac{2}{3}$ in kleinen Städten am Lande isoliert, so dass auch die Landbevölkerung sie gut gebrauchen kann. In der Hauptstadt der Republik Prag gibt es 41 verschiedene Mittelschulen.

Eine Eigentümlichkeit sind 2 Gymnasien für die russischen und 1 für die Ukrainischen Emigranten, in Prag und einem Städtchen im Osten Böhmens, weiter ein französisches und ein englisches Gymnasium in Prag, hauptsächlich für Ausländer.

Bei den meisten Pädagogien sind spezielle Abiturientenkurse errichtet, in welche Abiturienten der Mittelschulen im engeren Sinne

Die Zahl der Mittelschulen und Pädagogien im Schuljahre
1927/8 in der Čechoslovakei.

A) Mittelsch.	B		M		S			Sl				K			Im Ganzen					Summe
	č	d	č	d	č	d	p	č	d	m	r	č	r	m	č	d	p	r	m	
... ..	13	11	4	2	—	1	—	2	—	1	—	—	—	—	19	14	—	—	1	34
G.	38	14	22	6	3	1	1	24	2	5	—	2	4	1	89	23	1	4	6	123
IG	—	3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	3	—	—	—	3
RG	20	11	11	6	3	3	—	10	1	1	—	1	—	—	45	21	—	—	1	67
... ..	32	10	15	7	—	2	—	3	—	—	—	—	—	—	50	19	—	—	—	69
Im Ganzen . .	103	49	52	21	6	7	1	39	3	7	—	3	4	1	203	80	1	4	8	296
In %															68,6	27,0	0,3	1,4	2,7	100
B) Pädag. . .	22	8	8	1	2	1	1	13	—	2	1	—	3	—	45	10	1	4	2	62
Fachpädag.	7	4	4	1	1	1	—	1	—	—	—	—	—	—	13	6	—	—	—	19
Im Ganzen . .	29	12	12	2	3	2	1	14	—	2	1	—	3	—	58	16	1	4	2	81
In %															71,7	19,2	1,2	4,9	2,4	100
Beide Schulen	132	61	64	23	9	9	2	53	3	9	1	3	7	1	261	96	2	8	10	377
In %															69,2	25,5	0,8	2,1	2,7	
Nach d. Länd. .	193		87		20			66				11			100					

Die Zahl der Schüler und Schülerinnen auf Mittelschulen und
Pädagogien im Schuljahre 1927/8.

Unterrichtssprache:

Land	č	d	p	r	m	Im Ganzen
B.	35.280	13.156	—	—	—	48.436
In % . . .	72,84	27,16				100
M	18.283	5.669	—	—	—	23.958
In % . . .	76,32	23,68				100
S.	1.917	2.973	423	—	—	4.676
In % . . .	40,99	49,96	9,05			100
Sl	14.224	1.175	—	137	2.973	18.509
In % . . .	76,85	6,35		0,74	16,06	100
K.	475	—	—	1.765	459	2.699
In % . . .	17,59			65,80	17,01	100
Im Ganzen	70.179	22.336	423	1.902	3.432	98.272
In % . . .	71,41	22,72	0,43	1,95	3,49	100

**Durchschnittszahl der Schüler und Schülerinnen auf eine Klasse
der eigentlichen Mittelschulen.**

Unterrichtssprache:

Land	č	d	p	r	m
B. . . .	31	27	—	—	—
M. . . .	34	30	—	—	—
S. . . .	29	30	37	—	—
Sl. . . .	33	33	—	—	38
K. . . .	29	—	—	32	41

**Nationalität der Schüler auf den Mittelschulen und Pädagogien
im Schuljahre 1927/8.**

Nation	Unterrichtssprache der Schule						In ‰
	č	d	p	r	m	Im Ganzen	
č. . . .	67.839	228	—	97	28	68.192	69,39
d. . . .	653	21.256	—	39	24	21.970	22,36
p. . . .	23	30	423	1.438	—	478	0,48
r. . . .	88	12	—	—	—	1.538	1,56
jugoslav. .	25	7	—	2	—	34	0,03
m. . . .	793	228	—	191	3.226	4.438	4,52
israelit. .	731	554	—	131	153	1.569	1,59
franz. . .	5	1	—	—	—	6	0,07
engl. . .	4	5	—	—	1	10	
ital. . .	6	8	—	—	—	14	
andere . .	12	7	—	4	—	23	
Im Ganzen	70.179	22.336	423	1.902	3.432	98.272	100

eintreten können um nach Ablegen einer Prüfung, die hauptsächlich die Methodik und Didaktik der Volksschule und ähnliche Disziplinen betrifft, die Qualifikation für Volksschullehrer zu erreichen.

Die sogenannten Fachpädagogien waren vor dem Umsturz nur Kurse an den weiblichen Pädagogien, und zwar einjährige für Lehrerinnen der Handarbeiten und zweijährige für Lehrerinnen der Kindergärten, die knapp vor dem Krieg in selbstständige Anstalten umgewandelt wurden. Dasselbe tat man nach dem Kriege mit den Kursen für Handarbeiten, die man dann Schulen für Hausarbeiten nannte.

Die Fachschulen, die von Schülern mit vollendetem 14. Lebensjahr besucht werden, sind die folgenden:

1) Verschiedene Landwirtschaftsschulen, 1-jährig bis zu 4-jährig, dann Schulen für spezielle landwirtschaftliche Fächer, wie Weinbau, Obstbau, Gärtnerei, Milchindustrie etc.

Die meisten sind natürlich c und d, einige aber auch mit p, r oder m Unterrichtssprache. Dazu reihen sich die sog. Hausfrauenschulen für verschiedene Fächer der Hausarbeiten, weiter 2- bis 4-jährige Schulen für Forstwesen. Die Unterrichtssprachen sind wie bei den oben genannten.

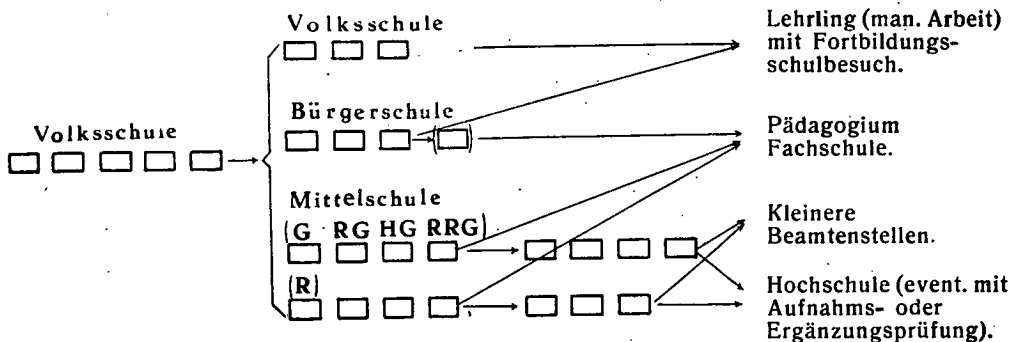
2) Handelsschulen von 1-jährigen Kursen bis zu 4-jährigen Handelsakademien, an denen auch Abiturientenkurse ähnlich wie bei den Pädagogien errichtet sind.

3) Verschiedene Industrie- und Gewerbeschulen, von 1-jährigen Kursen bis zu 4-jährigen Schulen. Auch die sind natürlich oft spezialisiert nach den verschiedenen Industrie- und Gewerbefächern. Die Unterrichtssprachen sind wie oben. Nur die Kunstgewerbeschule ist eine einzige, mit c Unterrichtssprache.

4) Verschiedene andere Fachschulen, wie z. b. Musikkonservatorien, ein Gymnasium für zukünftige Missionäre, höhere Töchterschulen, Hebammenschulen etc.

Das Bild aller dieser Fachschulen ist zu kompliziert und würde den Rahmen dieses Artikels weitaus überschreiten. Ich werde mich darum im weiteren nur auf die Mittelschulen im engeren Sinne begrenzen, und höchstens kurze Bemerkungen über Pädagogien beifügen.

Das Schema unseres Schulwesens ist also folgend:



Schuleintritt in die Volksschule nicht vor dem absolvierten 6., in die Mittelschule nicht vor dem absolvierten 10. Lebensjahr,

Schulpflicht von dem Schuljahranfang nach dem beendeten 6. bis zum beendeten 14. Lebensjahr, Dispenzen nur höchst ausnahmsweise.

§ 2. *Aufnahmsprüfungen.*

In die I. Klasse der Mittelschulen im engeren Sinne wurden die Kinder auf Grund einer schriftlichen und mündlichen Aufnahmsprüfung aus der Unterrichtssprache und Rechnen aufgenommen. Aber im Schuljahre 1927/8 wurde versuchsweise in der Hauptstadt und den 10. April 1930 definitiv in der ganzen Republik eine neue Prüfungsordnung eingeführt. Am Ende des Schuljahres sendet die Volksschule der bezüglichen Mittelschule das Frequentationszeugnis mit den Noten in der Unterrichtssprache und Rechnen, sowie einen ausführlichen Personalausweis vom paedopsychologischen Standpunkte (Gesundheitszustand, Begabung, Charakterzüge, besondere Neigungen etc.) des zukünftigen Schülers. Dieser macht dann nur eine kurze (etwa 5 Min. dauernde) Informationsprüfung in der Form eines freien Gespräches über verschiedene Fragen des Alltagslebens, in der er die Stufe seiner Intelligenz bezeugen und die Urteile des Personalausweises bestätigen soll. Nur wenn die Noten der eingesendeten Zeugnisse schlecht sind oder andere Bedenken entstehen, wird eine schriftliche und mündliche Fachprüfung in der Unterrichtssprache und Rechnen unternommen.

In höhere Klassen der Mittelschulen im engeren Sinne werden die Schüler, auf Grund einer Prüfung aus allen Gegenständen aufgenommen. Beim Übertritt von einer Mittelschule anderen Typus beschränkt sich die Prüfung nur auf die Unterschiede, beim Übertritt von einer Mittelschule desselben Typus entfällt sie überhaupt.

An den Mittelschulen im engeren Sinne gibt es keinen Numerus clausus. Wenn die Schülerzahl in den ersten zwei Klassen 60, in den weiteren zwei 55, in den höheren 50 überschreitet, werden Parallelklassen errichtet.

In den I. Jahrgang der Pädagogien wird eine Aufnahmsprüfung aus der Unterrichtssprache und Rechnen gemacht und der Gesundheitszustand und das musikalische Gehör untersucht. Hier ist ein Numerus clausus eingeführt.

Auf manche Fachschulen werden die Absolventen der 4. Klasse der Mittelschulen oder des 4. Jahrganges der Bürgerschulen ohne Prüfung aufgenommen.

	Klassen								Summe
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	
Reformrealgymn.:									
Gesammtzahl der									
Wochenstunden .	30	30	30	32	30	30	32	32	246
Mathematik	4	3	3	4	3	3	3	2	25
Chemie	—	—	—	3	2	2	—	—	7
Physik	—	—	3	2	—	—	3	4	12
Darst. Geometrie u.									
Geom. Zeichnen . .	—	2	2	3	2	3	—	—	12

Höheres Realgymnasium:

	Klassen und Abteilungen															Summe				
	I	II	III	IV	V			VI			VII			VIII						
					g	rg	r	g	rg	r	g	rg	r	g	rg	r	g	rg	r	g
Gesamtzahl der Wochenstunden	30	30	30	30	30			32	30			32	32			32			245	249
Mathematik.	4	3	3	3	3	3	4	3	3	4	3	3	4	3	3	4	24	29		
Chemie	—	—	—	2	2	2	3	2	2	3	—	—	—	—	—	—	6	8		
Physik	—	—	2	2	—	—	—	—	—	—	3	3	4	4	4	4	11	12		
Darst. Geometrie u. Geom. Zeichnen .	—	—	2	2	—	—	2	—	—	3	—	2	2	—	2	3	4	8	14	

Realschule:

	Klassen							Summe
	I	II	III	IV	V	VI	VII	
Gesammtzahl der								
Wochenstunden	30	30	30	32	32	32	32	218
Mathematik.	4	3	3	4	4	4	5	27
Chemie	—	—	—	3	3	2	—	8
Physik	—	—	3	2	—	4	4	13
Darst. Geometrie u.								
Geom. Zeichnen .	—	2	2	3	3	3	2	15

Pädagogium:

	Jahrgänge				Summe
	I	II	III	IV	
Gesamtzahl d. Wochenstunden	32	32	34	34	132
Rechnen u. geom. Zeichn. . . .	4	3	3	2	12
Physik u. Chemie	3/2	3/2	2	2	7

In der Slowakei und in Karpathenrussland ist die Gesamtstundenzahl höher, da dort die Stundenzahl des Čechoslovakischen infolge der schlechten linguistischen Vorbildung zu Zeiten des alten Regimes grösser sein muss. Bis diese Lücken ausgefüllt sein werden, werden auch die Stundenschemas ganz unifiziert werden können.

Auf den weiblichen Pädagogien ist die Gesamtzahl der Stunden etwas kleiner. Die Unterschiede sind in den der Landwirtschaft, Musik und Handarbeiten gewidmeten Stunden.

Es wäre zu ausführlich und würde über die Maszen dieses Artikels wachsen, wenn wir die vorgeschriebenen Lehrpläne in den uns interessierenden Fächern wörtlich übersetzen wollten. Wir werden sie darum hier nur im Auszuge anführen.

Wenden wir uns zuerst zu den Mittelschulen im engeren Sinne.

Das Ziel des mathematischen Unterrichtes in den 3 ersten Klassen ist die Vorbildung in der Zahlenlehre bis zu den Elementen des Rechnens mit allgemeinen Grössen inclusive als Gesamtausdruck der Rechengesetze; die Vorbildung in der Geometrie unter dauernder Verbindung der planimetrischen Vorstellungen und Aufgaben mit den einfachsten stereometrischen und der Gebrauch und die Durcharbeitung von Raumvorstellungen, die in den anderen Lehrgegenständen und dem Alltagsleben vorkommen; Gewöhnung an den richtigen und sicheren Gebrauch der arithmetischen und geometrischen Fachsprache ohne ein vorzeitiges Dringen zu formalen Definitionen. Den Hauptinhalt des math. Unterrichtsstoffes der I. Klasse bilden die vier Grundoperationen mit ganzen Zahlen und Dezimalbrüchen, die als benannte Zahlen aufgefasst werden. Dazu reihen sich die römischen Zahlzeichen, das dezimale Masz. u. Gewichtssystem und das einfachste Rechnen mit gewöhnlichen Brüchen ohne Memorieren von Regeln. Das Kopf- u. Schlussrechnen ist besonders zu pflegen. In der Geometrie befasst

man sich mit dem vorläufigen Üben in der Anschauung einfacher Körperformen, an denen man die einfachsten geometrischen Begriffe kennen lernt, einfache Flächen- u. Volumenberechnungen, ebene Symmetrie und Übung mit den Zeicheninstrumenten miteinbegriffen. Die Arithmetik in der II. Klasse ist zwei wichtigen Partien gewidmet, der Bruchlehre, der die vorbereitenden Elemente aus der Zahlenlehre vorgeschickt werden, und der Schlussrechnung samt Regel de tri, einfacher Zinsrechnung und den Proportionen, wobei die direkte und indirekte Proportionalität als Anlass zum funktionalen Denken dient. In der Geometrie ergänzt die Raumsymmetrie, das Erkennen genügender bestimmender Konstruktionselemente und das eingehendere Befassen mit einfachen geometrischen Formen den Lehrstoff der I. Klasse. In der III. Klasse werden die Schüler nach dem abgekürzten Rechnen und dem Rechnen mit unvollständigen Zahlen in die einfachsten Elemente der allgemeinen Arithmetik eingeführt, wobei einfache lineare Gleichungen gelöst werden und wobei eine stete Verbindung mit der Geometrie, wo man Flächenvergleichung, Flächen- u. Volumenberechnung und den Pythagoreischen Lehrsatz durchnimmt, zur Schätzung des Präzisionsgrades führt. Die Beobachtung der Abhängigkeit der Resultate von der Veränderung der gegebenen Grössen führt zum funktionalen Denken.

Mit der IV. Klasse beginnt in der Mathematik die Oberstufe. Ihr Ziel ist die sogenannte elementare Mathematik mit den leichten Anfängen der Infinitesimalrechnung, wobei es sich um das Begreifen und den Gebrauch des Funktionsbegriffes handelt und später auch der philosophische Standpunkt hervorgehoben wird, um die Stelle der Mathematik unter den anderen Fächern ersichtlich zu machen. Auf der Realschule wird der letzte Semester, auf den anderen Typen die VIII. Klasse einer systematischen Wiederholung und Vertiefung des Lehrstoffes mit Beleuchtung von historischen und philosophischen Standpunkten gewidmet. Wir werden hier kurz nur die Lehrpläne der Realschule anführen. Auf den anderen Typen verursacht die verschiedene Stundeneinteilung nur eine kleine Verschiebung des Lehrstoffes, wobei die logarithmischen und Exponentialgleichungen, die sphärische Trigonometrie und die Integralrechnung wegfallen und der andere Lehrstoff ein bischen in den Details gekürzt wird. In der 4. Klasse der Realschule werden die Elemente der allgemeinen Arithmetik gründlicher als auf der Unterstufe und auf schwereren Aufgaben, systematisch die linearen Gleichungen

und die reinen quadratischen Gleichungen, die graphische Darstellung der linearen Funktion und ihr Gebrauch und das planimetrische System bis inklusive die Kongruenz mit der Erklärung der Euklidischen Art von Definitionen und Beweisen auf charakteristischen Beispielen durchgenommen. Die V. Klasse ist den Potenzen und Wurzeln, quadratischen Gleichungen mit einer und mehreren Unbekannten und höheren Gleichungen, soweit sie auf quadratische überführbar sind, wie auch der graphischen Darstellung der quadratischen Funktion, den irrationalen und komplexen Zahlen und den Logarithmen gewidmet. In der Geometrie wird die Planimetrie beendet und die Stereometrie durchgenommen. Einfache logarithmische und Exponentialgleichungen, Reihen und Zinsrechnung mit politisch-arithmetischen Aufgaben, ebene und sphaerische Trigonometrie ist der Stoff der VI. Klasse. Mit der Kombinatorik, dem binomischen Lehrsatz für positive ganzzahlige Exponenten, der Wahrscheinlichkeits und Versicherungsrechnung endet in der VII. Klasse der arithmetische, mit der analytischen Geometrie und mit den auf ihr begründeten Elementen der Differenzial- u. Integralrechnung der geometrische Lehrstoff der Realschule. In allen Klassen werden in jedem Semester 3 Schularbeiten und von Stunde zu Stunde kleine Hausarbeiten aufgelegt.

Im geometrischen Zeichnen werden einfache geometrische Ornamente und an den Lehrstoff sich anschliessende Konstruktionen durchgeführt.

Die darstellende Geometrie bildet bei uns einen besonderen Gegenstand. Sein Ziel ist die Gewandtheit im Reisszeichnen, die Kenntnis der wichtigsten Gesetze der orthogonalen Projektion und der Grundbegriffe der schiefen Projektion und der Perspektive, sowie ihr Gebrauch auf die Darstellung einfacher technischer Objekte. An den verschiedenen Gymnasialtypen, soweit sie diesen Gegenstand im Lehrplan haben, ist der Stoff gemäss der verringerten Stundenzahl reduziert. In der IV. Kl. der Realschule werden die Kegelschnitte auf Grund der Fokaleigenschaften, die Elemente der Orthogonalprojektion samt Umdrehungen, Seitenrissen und Schregrissen einfacher ebenflächiger Körper, Schnitte mit Projektionsebenen, Netze und einfache Beleuchtungen dieser Körper durchgenommen. In der V. Klasse wird dieser Stoff in ein System gebracht und erweitert, insbesondere um kompliziertere Aufgaben in allgemeiner Lage und Durchdringungen. Die VI. Klasse befasst

sich mit der Darstellung des Kreises, der Zylinder und Kegel und der Kugel, eine besondere Aufmerksamkeit wird den ebenen Schnitten von Rotationskegeln gewidmet. Die Abbildung von Rotationsflächen, mit senkrechter Achse zur Projektionsebene, ihre Tangentialebenen und Schnitte, die Grundbegriffe der Perspektive und die perspektivische Abbildung ebenflächiger Körper, sowie Wiederholung und Vertiefung des ganzen Lehrstoffes sind der VII. Klasse vorbehalten. Von der IV. Klasse machen die Schüler kleine Hausarbeiten, in der Schule werden Reisszeichnungen ausgeführt.

Das Ziel des chemischen Unterrichtes ist das Verständnis der chemischen Prozesse und ihrer Gesetzmässigkeit, soweit man es durch Experimente erreichen kann. Auf der Unterstufe werden die Grundelemente den Schülern beigebracht, auf der Oberstufe dann werden die Kenntnisse systematisch erweitert und vertieft, zuerst in der anorganischen, dann in der organischen Chemie.

In der Physik wird auf der Unterstufe auf Grund der Beobachtungen und Versuche die Kenntniss der einfachsten Naturerscheinungen erworben, auf der Oberstufe systematisch die einzelnen physikalischen Disziplinen durchgenommen, wobei die allgemeinen Gesichtspunkte und der energetische Standpunkt hervorgehoben wird.

Auf den Pädagogien ist der Stoff im Verhältnis zur Mittelschule stark reduziert, z.B. keine Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung, keine analytische Geometrie, geschweige denn die Infinitesimalrechnung. Dafür wird spezielle Methodik getrieben.

§ 4. *Aufsicht und Erhaltung der Mittelschulen.*

Alle Mittelschulen, auch die privaten, unterliegen in pädagogischer Hinsicht, den Staatsschulbehörden. Die höchste Instanz ist die II. Sektion des Ministeriums für Schulwesen und Volkskultur in Prag, das die Agenda des ehemaligen Ministeriums für Kultus und Unterricht in Wien übernahm. Die Aufsichtsbehörden in den historischen Ländern sind die Landesschulräte in Prag und Brünn. An der Spitze des Prager Landesschulrates steht der Vicepräsident und das Gremium besteht aus 7 Landesschulinspektoren für die tschechischen Mittelschulen und Pädagogien, 3 für die deutschen Mittelschulen und Pädagogien, dann die Landesschulinspektoren für das Volksschulwesen, Vertreter der Lehrerschaft, unter ihnen auch der Mittelschulprofessoren, der Kirchen und verschiedener anderer

Körperschaften. Ähnlich ist auch der Landesschulrat in Brünn zusammengestellt, 4 Landesschulinspektoren für die tschechischen und polnischen und 7 für die deutschen Mittelschulen und Pädagogen. In der Slowakei und in Karpathenrussland vertreten den Landesschulrat selbstständige Referate des Ministeriums in den Hauptstädten dieser Länder. Doch das sind nur provisorische Übergangseinrichtungen. Mit der Zeit werden wahrscheinlich auch dort, bis die einheitliche Schulorganisation durchgeführt sein wird, Landesschulräte errichtet werden. Die eigentliche Schulaufsicht liegt den Landesschulinspektoren ob, die von Zeit zu Zeit in den Unterrichtsstunden hospitieren, den Maturitätsprüfungen vorsitzen, auf die Qualifikation der Mittelschullehrer den grössten Einfluss haben, die nicht definitiven Lehrer auf die einzelnen Schulen zuteilen, bei Besetzung der definitiven Mittelschullehrerposten dem Ministerium massgebende Vorschläge machen. Für Zeichnen und Turnen gibt es besondere Fachinspektoren.

Vor dem Kriege waren die Mittelschulen in den historischen Ländern meistens Staats-, Landes- oder Stadtschulen, die Mädchenlyzeen auch von Privatvereinen erhalten, doch von den genannten öffentlichen Korporationen stark subventioniert. In der ungarischen Hälfte der ehemaligen Monarchie waren sie meistens privat, aber den grössten Teil des Kostenaufwandes trug der Staat. Nach dem Kriege herrscht die Tendenz die Mittelschulen womöglich zu verstaatlichen. So wurden gänzlich 40 Mittelschulen auf den Staat überführt, an 24 weiteren übernahm der Staat den Lehrkörper, so dass jetzt nur 22 Mittelschulen im engeren Sinne, 16 Pädagogen und 10 Fachpädagogien gänzlich von anderen Korporationen erhalten werden. Von den Mittelschulen im engeren Sinn sind aber 10 Landes- oder Stadtschulen, um deren Verstaatlichung es sich noch handeln wird, und eine Vereinsschule. Die 9 anderen sind von den Kirchen erhalten, meistens aber mit Staatssubventionen. Von den Fachpädagogien sind 3 städtisch und 1 von einem Verein unterhalten, die übrigen 6 und 16 Pädagogen erhalten die Kirchen.

An den Mittelschulen zahlt man ein Schulgeld von 200 Kč für das Semester, aber die armen Schüler, die wenigstens einen genügenden Studienerfolg ausweisen, können von der Hälfte oder vom ganzen Schulgelde befreit werden.

Der Kostenaufwand auf das ganze Mittelschulwesen in der Tschechoslovakischen Republik machte im Jahre 1928 203,179.760 Kč

aus. Im Jahre 1926 betrug der durchschnittliche Kostenaufwand auf einen Schüler:

Unterrichtssprache der Anstalt	Mittelschulen im engeren Sinne Kč	Pädagogien Kč
č	1.835	2.935 ¹
d	2.458	4.697
p	1.479	3.378
r	1.601	2.318
m	1.435	1.186
Im ganzen Staate .	1.959	3.131

Nach dem Jahre 1926 stieg noch dieser durchschnittliche Kostenaufwand, da die Gehälter der Staatsbeamten und also auch der Mittelschullehrer aufgebessert wurden.

§ 5. *Die Vorbereitung der Lehramtskandidaten und die Lehrberechtigung.*

Um an einer Mittelschule als Lehrer angestellt werden zu können, muss man die Lehramtsprüfung ablegen und eine Probepraxis durchmachen.

Die Lehramtsprüfung besteht aus einer philosophisch-pädagogischen Vorprüfung, zu der man sich nach dem absolviertem VI. Semester des Universitätsstudiums melden kann, der Ausarbeitung von Wissenschaftlichen Hausarbeiten, um deren Themen man nach dem absolviertem VII. Semester und natürlich nach Ablegung der Vorprüfung einreichen kann und einer wissenschaftlichen Prüfung, die man nicht vor dem absolvierten VIII. Semester und natürlich nur nach Approbation der Hausarbeiten ablegen kann. Als Mitglieder der wissenschaftlichen Lehramtsprüfungskommissionen (č in Prag, Brünn und Bratislava, d in Prag und Prüfungskommissionen für Zeichnen, Turnen und Stenographie) werden vom Minister für Schulwesen und Volkskultur Hochschulprofessoren der bezüglichen Fächer sowie eventuell auch einzelne andere hervorragende Fachmänner, ernannt.

Jeder Lehramtskandidat muss je eine vierstündige Vorlesung über Philosophie und Pädagogik, namentlich über ihre Geschichte vom 16. Jahrhundert, womöglich auch Vorlesungen über die Methodik

seiner Fächer, dann Vorlesungen über die Schulhygiene und körperliche Erziehung hören.

Den Kandidaten für das Lehrfach der Mathematik mit darstellender Geometrie oder Physik können zwei Studienjahre, denen für Chemie drei Studienjahre, die sie als ordentliche Hörer an irgend einer technischen Hochschule verbracht haben, ins Universitätsstudium eingerechnet werden. An der Karlsuniversität in Prag (d.i. der č. Universität) gibt es Lektorate für Didaktik und Methodik der Mathematik mit darstellender Geometrie, der Chemie und der Naturwissenschaften, so dass wenigstens auf dieser Universität für die anempfohlenen Vorlesungen dieser Fächer gesorgt ist.

Die Kandidaten der Mathematik als Hauptfach müssen sich wenigstens zwei Semester an den praktischen Übungen beteiligen oder wenigstens durch drei Semester das Proseminar und Seminar frequentieren, sowie einige Fertigkeit im geometrischen Zeichnen entweder an der technischen Hochschule oder in zu diesem Zwecke eingeführten Universitätskursen erreichen. Die Kandidaten der Physik als Hauptfach müssen wenigstens je ein Semester Vorlesungen über Astronomie, kosmische Physik und mathematische Geographie hören, mindestens drei Semester in physikalischen und mindesten ein Semester in chemischen Laboratorium arbeiten. Die Kandidaten der darstellenden Geometrie als Hauptfach oder des geometrischen Zeichnens als Nebenfach müssen an einer inländischen technischen Hochschule erfolgreich die allgemeine Jahresvorlesung über darstellende Geometrie samt den zugehörigen konstruktiven Übungen absolvieren und die Kandidaten der darstellenden Geometrie als Hauptfach ausserdem noch ein Jahr spezielle Vorlesungen über darstellende Geometrie an einer technischen Hochschule samt den konstruktiven Übungen absolvieren. Die Kandidaten der Chemie müssen mindestens 6 Semester erfolgreich praktisch-chemisch arbeiten.

Die Vorprüfung bezieht sich auf die Hauptbegriffe und Hauptsätze der Erziehungs- und Unterrichtslehre und ihre theoretischen Grundlagen in der Psychologie und Logik; sowie auf einen Überblick über die Hauptansichten der Pädagogik und der Hapterscheinungen in der Entwicklung des höheren Schulwesens vom 16. Jahrhundert. Diese mündliche Vorprüfung dauert etwa eine halbe Stunde.

Jeder Kandidat muss bei der Schlussprüfung auch eine Prüfung

aus der Unterrichtssprache ablegen, wobei er nachweisen soll, dass er die Unterrichtssprache korrekt gebrauchen kann und die Hauptwerke ihrer schönen Literatur kennt. Diese Prüfung besteht aus einer 2-stündigen Klausurarbeit, bei welcher der Kandidat entweder ein auf sein Fach sich beziehendes Thema behandelt oder, wenn er einer anderen lebenden Sprache mächtig ist, eine Stelle aus fremdsprachigen, seine Fächer betreffenden Werken in die Unterrichtssprache übersetzt, und einer mündlichen Prüfung. Die Klausurarbeit wird gewöhnlich dem Kandidaten erlassen, wenn er die Mittelschule in derselben Sprache als die Unterrichtssprache besucht hat, wenn in derselben Sprache die Lehramtsprüfung abgelegt wird und wenn auf Grund derselben Prüfung kein Bedenken besteht, dass er diese Sprache völlig beherrscht.

Von den zulässigen Gruppen interessieren uns die folgenden:

- d) Mathematik und Physik als Hauptfächer.
- e) Mathematik und darstellende Geometrie als Hauptfächer.
- f) Naturgeschichte als Hauptfach, Geographie und Physik als Nebenfächer.
- γ) Naturgeschichte als Hauptfach und Mathematik und Physik als Nebenfächer.
- δ) Naturgeschichte als Hauptfach, Mathematik und geometrisches Zeichnen als Nebenfach.
- g) Chemie und Naturgeschichte als Hauptfächer.
- β) Chemie als Hauptfach und Mathematik und Physik als Nebenfächer.
- h) Philosophische Propädeutik und Mathematik als Hauptfächer und Physik als Nebenfach.

Dabei berechtigt die Lehramtsprüfung aus einem Hauptfach zum Unterrichten in allen Klassen einer Mittelschule, aus einem Nebenfach nur in den Klassen der Unterstufe einer Mittelschule.

Dem Kandidaten steht es frei schon bei der Prüfung oder nachher eine Erweiterungsprüfung abzulegen, indem er entweder seine Approbation für ein Nebenfach zu einem Hauptfach, oder um ein neues Haupt- oder Nebenfach erweitert. Nur der Erweiterung aus darstellender Geometrie als Hauptfach muss die Approbation aus Mathematik als Hauptfach vorangehen, der Erweiterung aus Physik als Hauptfach entweder die Approbation aus Mathematik als Hauptfach, oder aus Chemie als Hauptfach und Mathematik als Nebenfach.

Die Forderungen in unseren Disziplinen als Hauptfächer sind die folgenden.

In der Mathematik: Kenntnis der allgemeinen Arithmetik, der Grundbegriffe der höheren Algebra und Zahlentheorie und ihrer Bedeutung für die Elementarmathematik. Kenntnis der elementaren Geometrie, ferner der synthetischen und analytischen Geometrie der Ebene und des Raumes. Grundzüge der darstellenden Geometrie. Kenntnis der Differential- und Integralrechnung und deren Anwendung auf Geometrie, ferner der Elemente der Variationsrechnung. Vertrautheit mit den Grundzügen der neueren Funktionentheorie. Bekanntschaft mit den Hauptergebnissen der Forschungen über die Grundlagen der Mathematik.

In der Physik: Kenntnis der wichtigsten Tatsachen und Methoden der experimentellen Physik. Kenntnis der Grundlehren der analytischen Mechanik und Verständnis der wichtigsten Prinzipien der mathematischen Physik bis zum Ausmasse, dass einfachere Aufgaben dieses Gebietes gelöst werden können. Kenntnis der Grundlehren der Chemie und der kosmischen Physik, ferner Kenntnis der Elemente der allgemeinen und speziellen Mineralogie in dem durch den Lehrplan für die Unterklassen der Gymnasien und Realgymnasien bestimmten Umfange. Eingehendere Kenntnis des Gebrauchs und der Konservierung der Apparate und der besten Methoden der Demonstration. Die Prüfung aus der Chemie kann schon nach dem IV. Semester abgelegt werden. Die Prüfung aus der kosmischen Physik und Mineralogie kann erlassen werden auf Grund eines besonders zu diesem Zwecke erreichten Kolloquiumzeugnisses.

In der darstellenden Geometrie: Gründliche Kenntnis der orthogonalen, schiefen und zentralen Abbildungsarten mit Einschluss der Axonometrie. Kenntnis der Reliefperspektive, der wichtigsten Kartenprojektionen, insbesondere der stereographischen Projektion, und der Zyklographie, Vertrautheit mit den Konstruktionen, welche die krummen Linien (zumal Kurven zweiter Ordnung, Raumkurven dritter und vierter Ordnung, Schraublinien) und krummen Flächen (zumal Flächen zweiter Ordnung, Dreh-, Schraub-, Regel- und Hüllflächen), insbesondere deren Beleuchtungskonstruktionen betreffen. Bekanntschaft mit einigen Anwendungen der darstellenden Geometrie (wie Konstruktionen von Sonnenuhren, Dachausmittlung, Steinschnitt). Kenntnis der projektiven und Infinitesimal-Geometrie, soweit sie in der darstellenden

Geometrie zur Anwendung kommen. Sicherheit und Gewandtheit im konstruktiven Zeichnen.

In der Chemie: In der praktischen (Klausur-) Prüfung ist Vertrautheit mit der Durchführung analytischer Operationen anorganischer und organischer Natur, mit den wichtigsten Operationen physikalisch-chemischer Art, mit der Darstellung einfacher chemischer Präparate und der Ausführung von Schulversuchen nachzuweisen. Zu diesem Zwecke sind auszuführen: 1) eine qualitative Analyse, 2) eine Gewichtsanalyse, 3) eine Maszanalyse, 4) einige Schulversuche und einfache physikalisch-chemische Operationen. Bei der mündlichen Prüfung ist nachzuweisen gründliche Kenntnis der physikalischen, anorganischen und organischen Chemie, Kenntnis der wichtigsten Methoden der quantitativen und qualitativen Analyse einschliesslich chemisch-technischer Untersuchungsmethoden sowie der Grundzüge der chemischen Technologie. Durch Kolloquienzeugnisse soll die Kenntnis der Elemente der Mineralogie nachgewiesen werden.

Die Hausarbeiten, aus jedem Hauptfach eine, aus einem der Nebenfächer nur dann auch eine, wenn diese nur mit einem Hauptfach verbunden sind, haben die speziellen Gegenstände der Prüfung in der Art zu umfassen, dass dem Kandidaten Anlass geboten wird, die Befähigung zur wissenschaftlichen Arbeit seines Themas zu beweisen. Für jede Hausarbeit wird ein Zeitraum von drei Monaten gewährt. Für eine der Hausarbeiten kann eine mit dem Gesuche um Zulassung zur Prüfung vorgelegte wissenschaftliche Arbeit angenommen werden.

Die Schlussprüfung kann man in zwei nach einander folgenden Prüfungsterminen geteilt ablegen, doch so, dass jede Teilprüfung einen ganzen Prüfungsgegenstand umfasst. Die Schlussprüfung besteht aus vier 4-stündigen Klausurarbeiten (zwei aus jedem Hauptfach, eine aus jedem Nebenfach) und der mündlichen Prüfung, die bei einem Hauptfach durchschnittlich eine Stunde, bei einem Nebenfach eine halbe Stunde dauert. An Stelle der Klausurarbeit aus der Physik und Chemie kann eine praktische Untersuchung, Messung oder Analyse im Institut oder Laboratorium treten, die regelmässig die gleiche Zeit wie eine Klausurarbeit dauert, bei der Chemie aber auch bis auf zwei Tage mit acht Arbeitsstunden ausgedehnt werden kann. Landesschulinspektoren im Amtsorte der Prüfungskommission sind berechtigt den mündlichen Prüfungen beizuwohnen.

Jeder provisorische Professor, wie der den Dienst antretende Mittelschullehrer genannt wird, ist im ersten Dienstjahre in das Lehramt einzuführen. Der provisorische Professor wird darum einem erfahrenen Kollegen seines Faches zugewiesen und es wird ihm das Minimum, d.i. in unseren Fächern 17 wöchentliche Unterrichtsstunden zugeteilt. Dafür muss er im ersten Semester in 6 Stunden wöchentlich bei dem einführenden Professor und eventuell auch bei anderen erfahrenen Professoren hospitieren, im zweiten Semester wenigstens in zwei Stunden, in den anderen 4 dann dem Direktor in der Amtsagenda behilflich sein, um diese kennen zu lernen. Auch der einführende Professor muss bei dem jungen provisorischen Professor fleissig hospitieren und ihn mit allen Schulfragen, den didaktischen und administrativen, bekannt machen, ihm mit Rat an die Hand gehen, in jeder Konferenzperiode dann den Direktor über die Lehrtätigkeit des eingeführten prov. Professors einen mündlichen Bericht erstatten.

§ 6. *Reformbewegungen.*

Die letzte grosse Reform in unserem Mittelschulwesen wurde noch im ehemaligen Österreich, im Jahre 1908, durchgeführt. Als man im Jahre 1917 fühlte, dass die österreichische Regierung eine gegen die slavischen Nationen gerichtete Schulreform im Sinne habe, da bildete sich aus den tschechischen offiziellen Schulrepresentanten eine Enquete, deren öffentlicher Charakter natürlich gebot, sich in den Diskussionen mehr an allgemeine Züge zu halten und das Problem im Rahmen der Monarchie zu lösen. Zugleich aber bildete sich in der „Jednota českých matematiků a fysiků (Vereinigung der tschechischen Mathematiker und Physiker), einem der ersten und grössten tschechischen Fachvereine, eine Schulreformkommission, die einen detaillierten Reformvorschlag ohne Rücksicht auf die österreichischen Verhältnisse ausarbeitete. Nach dem Friedensschluss wurde dieser Vorschlag zum Ausgangspunkt einer grossen Reformbewegung, in der viele Richtungen für und gegen arbeiteten und sich kreuzten. Die Diskussionen mit Wort und Feder, auf Enquetten, in Kommissionen, in Fachzeitschriften und Tageszeitungen sind noch nicht geschlossen. Die Literatur über die Mittelschulreform, ja über die Schulreform überhaupt, könnte schon dicke Bände füllen, doch sind die Ansichten noch nicht ganz geklärt und ausgekämpft. Von dem Ministerium für Schulwesen und Volkskultur wurde zuerst eine

grosse schriftliche Enquete, deren Frageliste ein ganzes Buch füllte, unter den Mittelschullehrern und verschiedenen Korporationen veranstaltet, dann eine aus Fachmännern bestehende Kommission errichtet, die ein Reformprojekt ausgearbeitet und einige begrenzte Enquetten zusammengerufen hat, die letzte im Jahre 1929. Schliesslich wurde beim Ministerium eine eigene Studiumabteilung organisiert, der besonders die Reformfragen zugeteilt wurden und ausserdem eine neue Schulreformkommission eingesetzt, die an der Frage weiter arbeiten soll.

Die Lehrerschaft ist in ihren Ansichten nicht einig. Die ersten Reformvorschläge nach dem Kriege waren recht revolutionär und verlangten manchmal eine sofortige Umformung in den vorgeschlagenen Typus. Jetzt denkt man mehr an eine langsame Annäherung der erwünschten Ideale.

Der Hauptstreit dreht sich um die Vereinheitlichung der Unterstufe des Mittelschulwesens, da man eingesehen hat, dass eine Vereinheitlichung der Oberstufe nicht möglich sei, womit die Frage der Einschränkung der klassischen Sprachen zusammenhängt. Hier treten zwei Tendenzen in den Vordergrund: die kulturpolitische und die didaktischwirtschaftliche. Der ersten handelt es sich mehr um die Verlängerung der gemeinschaftlichen Erziehung aller Volksklassen und die Vereinheitlichung der Unterstufe der Mittelschultypen ist ihr eine Vorstufe zur Vereinheitlichung der Jugenderziehung auch der 10- bis 14-jährigen. Da es bei uns nur sehr wenige private Volksschulen gibt und diese keinen Klassencharakter, sondern nur einen kirchlichen haben, kommen in der Volksschule die reichsten Kinder mit den ärmsten zusammen. Auch die Mittelschule ist bei uns allen Klassen zugänglich, doch ist es manchmal schwer ein Kind trotz verschiedenen sozialen Einrichtungen in der langen Studienzeit zu ernähren, besonders wenn die Schule nicht im Wohnorte der Eltern liegt. Dass bei dieser Tendenz auch die Zergliederung der politischen Parteien Rolle spielt, ist selbstverständlich. Es ist gewiss nicht Zufall, dass diese Tendenz in den Vordergrund tritt, wenn an der Spitze des Ministeriums für Schulw. u. Volkskultur ein sozialistischer Minister steht, wie vor einigen Jahren und heute. Die zweite Tendenz strebt eine Vereinheitlichung der Unterstufe der Mittelstufe an, nicht aber eine völlige Vereinheitlichung mit der Bürgerschule, die für das praktische Leben vorbereiten soll. Die Vertreter dieser Richtung sind überzeugt, dass ein 10-jähriges

Kind zwar die Begabung eher fürs Studium oder eher fürs praktische Leben zeigen kann, nicht aber schon die differenzierte Begabung für die mehr philologische oder mehr realistische Studienrichtung. Die wirtschaftliche Seite des Problems ist dann die, dass die isolierten Mittelschulen in kleinen Landstädten, die zwei Drittel unserer Mittelschulen ausmachen, durch ihre Richtung die Studienrichtung ihres ganzen Umkreises beeinflussen und die Eltern gezwungen sind für ihr Kind aus wirtschaftlichen Gründen die nächste Mittelschule und nicht den der Begabung des Kindes entsprechenden Typus zu wählen. Diese Tendenz herrschte auch in den Reformvorschlägen der „Jednota“ vor.

Gegen die Vereinheitlichung stellten sich hauptsächlich begreiflicherweise die klassischen Philologen, dann die Vertreter mancher Berufe und Fächer, die sich nicht vorstellen konnten, dass ihr Nachwuchs mit verringerten Kenntnissen der klassischen Sprachen auf die Universität kommen sollte.

Aus diesen verschiedenen Strömungen tauchte schliesslich die Meinung hervor, es sei das beste die alten bewährten Typen zu erhalten und in ihrem Rahmen Reformbewegungen zur Geltung zu bringen. Dazu gesellte sich die Ansicht, es sei wichtiger — im Gegensatz zu den ersten radikalen Vorschlägen eines gänzlichen Umbaus der Schulorganisation — den Geist und die Methoden des Mittelschulunterrichts zu reformieren, besonders die Schule mit der beliebten sokratischen Unterrichtsmethode womöglich in einen Arbeitsunterricht zu verändern, den Stoff allen unnötigen Balastes zu entledigen, jede Schülerüberbürdung zu verhindern und den Übergang von der Bürgerschule auf die Mittelschule Begabten zu erleichtern.

Den Vertretern der Vereinheitlichung der Schulerziehung der Jugend zwischen dem 10. und 14. Lebensjahre ist die Gelegenheit geboten zu zeigen, wie sich ihre Idee bewährt, in dem man einige „Differenzierte Reformschulen“ als Probe errichtete, wo die Kinder auf Grund ihrer Begabung, die durch verschiedene psychologische Methoden festgestellt wird, in einzelne Abteilungen verteilt werden und wo verschiedene moderne Einrichtungen eingeführt werden.

Was insbesondere die Mathematiklehrer in der Schulreform anstreben, ersieht man aus den detaillierten Lehrplan des Reformvorschlages der „Jednota“. Die Hauptgedanken sind die folgenden: Die nötige Zweistufigkeit im mathematischen Unterrichte soll so

verstanden werden, dass man auf der Oberstufe nur zusammenfassend wiederholt und vertieft, nicht aber von neuem weitläufig erklärt, was man schon auf der Unterstufe durchgenommen hat. Im Gymnasiallehrstoff soll die analytische Geometrie wegfallen, auf dem mathematisch-technischen Zweige aber, der heutigen auf 8 Klassen erweiterten Realschule, soll dafür zum heutigen Stoff noch das numerische und graphische Auflösen von Gleichungen höheren Grades und eine Vertiefung der analytischen Geometrie der Kegelschnitte treten. In der darstellenden Geometrie soll der Lehrstoff auf diesem Zweige um die Elemente der projektiven Geometrie der Kegelschnitte, den Pascal- u. Brianchonsatz mit ihren Anwendungen und die Vertiefung des früher durchgenommenen Lehrstoffes mit wechselndem Gebrauch von passenden Projektionsmethoden erweitert werden. Dabei stellte sich die „Jednota“ aber entschieden gegen die Bestrebungen, die aus den Reihen der Vertreter der technischen Hochschulen manchmal geäußert wurde, einen Teil des theoretischen Lehrstoffes dieser Schulen auf die Mittelschule zu übernehmen, da die „Jednota“ das Hauptziel jeder Mittelschule in ihrer allgemein bildenden und nicht fachlich vorbereitenden Tätigkeit sieht.

§ 7. *Reifeprüfung und Zulassung zum Hochschulstudium.*

Die Mittelschule endet mit einer Reifeprüfung, also einem Abiturientenexamen, das an der Mittelschule selbst abgelegt wird. Die Examinatoren sind die Lehrer der letzten Klasse, also die Lehrer, die den Examinanden einige Jahre unterrichtet haben und kennen. Diese Einrichtung ist dazu geeignet, die ungünstigen Prüfungserfolge durch eine augenblickliche Depression oder Indisposition des Schülers auszuschneiden. Die Objektivität verbürgt der Kommissionsvorsitzende, der Landesschulinspektor oder sein Vertreter, den das Ministerium auf Antrag des Landesschulrates aus den bewährten Mittelschuldirektoren oder auch Hoch- u. Mittelschulprofessoren oder schliesslich aus den dem Landesschulrat zugeteilten Professoren delegiert. Zur Reifeprüfung kann sich als Externist auch ein Kandidat melden, der eine Mittelschule nicht absolviert hat, wenn er wenigstens 18 Jahre alt ist und aus allen Gegenständen der Mittelschule mit Erfolg Vorprüfungen abgelegt hat.

Die Reifeprüfung besteht aus 3 schriftlichen Klausurarbeiten und einer mündlichen Prüfung. Die drei Klausurarbeiten sind philologi-

scher Art, wobei aber bei der 5-stündigen Arbeit aus der Unterrichtssprache 3 Themen aus verschiedenen Fächern zur freien Bearbeitung den Abiturienten vorgelegt werden, von denen sich der Kandidat ein Thema wählt. Unter diesen Themen sind gewöhnlich auch Themen aus den Naturwissenschaften oder den exakten Wissenschaften.

An der Realschule ist eine der Klausurarbeiten eine 5-stündige Arbeit aus der darstellenden Geometrie. Die Kandidaten müssen eine Gruppe von 3 Aufgaben ausarbeiten. Der Examinator schlägt 3 solche Gruppen vor, aus denen der Landesschulinspektor eine wählt. Als Beispiel der Aufgaben seien hier die Fragen aus zwei Realschulen im Sommertermin 1929 angeführt:

A) Man soll abbilden: 1) Rechtwinklige Dreiecke, deren Abszissen in den Ebenen $(-8, 8, 6)$ und $(6, 3, 8)$ und deren Hypotenuse in der Geraden MQ [$M(-6, 3, 6)$, $Q(3, 4\frac{1}{2}, 3)$] liegen.

2) Einen schiefen Kreiskegel, dessen Gipfel $V(-2, 7\frac{1}{2}, 9)$ ist und dessen Basis in der Grundrissebene liegt und den eine gegebene Ebene $(3, 5, 5)$ in einer Parabel schneidet, welche durch die Punkte $M(-3, ?, 0)$ und $N(2, ?, 0)$ geht. Es ist der Kegel und die Parabel abzubilden.

3) Einen einflächigen Rotationshyperboloidstumpf, dessen Achse auf der Grundrissebene senkrecht steht, dessen Mittelpunkt $S(-3\frac{1}{2}, 6\frac{1}{4}, 6\frac{1}{4})$ und die Meridianhalbachsen $2\frac{1}{4}$ und $3\frac{1}{2}$ sind, der eine durch den Mittelpunkt mit der x -Achse parallelgehende Ebene (y der Grundrisspur ist $1\frac{1}{4}$) begrenzt und der unter der üblichen Richtung von Parallelstrahlen beleuchtet ist.

B) 1) In orthogonaler Projektion soll man ein Rotationsparaboloid konstruieren, dessen Achse auf der Grundrissebene senkrecht steht $(0, 5)$ wenn auf seiner Oberfläche zwei Punkte $A(-3, 8, 2)$ und $B(2, 7, 5)$ gegeben sind; durch die Punkte A, B soll man eine die Basis berührende Ellipse legen.

2) In Zentralprojektion soll man ein Turmmodell abbilden. Das Turmmauerwerk bildet einen Quader in der Frontlage mit der Basis in der Grundrissebene und den Dimensionen $6, 6, 4\frac{1}{2}$. Das Dach bildet die Durchdringung einer regelmässigen vierseitigen Pyramide $ABCD$ und einer regelmässigen achtseitigen Pyramide, deren Basis in die obere Basis des Quaders eingeschrieben ist. Die Pyramidenhöhen sind 5 und 12 , $A(-5\frac{1}{2}, 0, 4\frac{1}{2})$, $B(3\frac{1}{2}, 0, 4\frac{1}{2})$, $C(3\frac{1}{2}, -9, 4\frac{1}{2})$, $O(5\frac{1}{2}, 36, 0)$, $d/3 = 12$.

3) In klinogonaler Projektion ($u = 135^\circ$, $q = \frac{3}{4}$) soll man einen gleichseitigen Kegel mit der Basis in der Grundrissebene $[S(5, 5, 0)$, $r = 5]$ und seinen elliptischen Schnitt, dessen Mittelpunkt $U(4, 6, 4)$ ist, abbilden.

Bei der Klausurarbeit soll man auch eine genügende Korrektheit im Reisszeichnen kundgeben. An Pädagogen machen die Externisten noch eine Klausurarbeit aus der Mathematik im Ausmasse einer gewöhnlichen Schularbeit im IV. Jahrgang.

Auf den Mittelschulen im engeren Sinne wird jeder Examinand bei der mündlichen Prüfung aus der Unterrichtssprache, der Vaterlandskunde und der Mathematik geprüft. Ausserdem wird er auf den Gymnasialtypen noch aus einer Sprache, auf der Realschule entweder aus der lebenden Sprache oder Physik geprüft und zwar aus dem Gegenstande, in dem er eine schlechtere Durchschnittsnote in den zwei letzten Jahren bekommen hatte. Aus der darstellenden Geometrie nur dann, wenn die Klausurarbeit ungenügend war.

Die Forderungen in den uns interessierenden Fächern sind die folgenden:

In der Mathematik: Der Abiturient soll eine Übersicht des Lehrstoffes der Oberstufe und eine Kenntnis der bezüglichen Methoden kundgeben, indem er wie abstrakte so praktische Beispiele aus anderen Fächern und dem Leben zu lösen versteht. Aufgaben, welche eine Gewandtheit in algebraischen Transformationen und geometrischen Konstruktionen, die man nur durch besondere Übung erreichen kann, oder solche Aufgaben, welche eine nur durch das Gedächtnis erhaltbare und namentlich praktisch bedeutungslose Kenntnis der Einzelheiten und Formeln verlangen, sind auszuscheiden. Weiter ist eine Gewandtheit im numerischen Rechnen und im Gebrauche der Logarithmentafeln, insbesondere weil man dieselben Tafeln mit Vorteil anstatt langwieriger Rechnungen gebrauchen kann, zu verlangen.

In der Physik verlangt man die Kenntnis der Grunderscheinungen sowie der Grundgesetze und in den Lehrstoffgrenzen ein Begreifen der wichtigsten gegenseitigen Beziehungen, weiter ein Verständnis der Naturerscheinungen um uns herum, die in das Gebiet der Physik fallen, namentlich der Alltagerscheinungen, ein Verständnis der wichtigsten technischen Einrichtungen (ohne konstruktive Einzelheiten) und schliesslich eine gewisse Gewandtheit im Lösen

physikalischer Aufgaben, die keine besonderen mathematischen Schwierigkeiten bieten.

An den Pädagogien wird der Examinand aus allen den Gegenständen geprüft, in welchen er nicht als durchschnittliche der letzten zwei Jahrgänge „lobenswert“ erreicht hat, doch wenigstens aus zwei Gegenständen.

Das Reifeprüfungszeugnis an den Mittelschulen im engeren Sinne trägt nur eine Gesamtnote des Prüfungserfolges, an den Pädagogien dagegen werden Noten aus allen Gegenständen eingetragen.

Das Reifeprüfungszeugnis berechtigt den Abiturienten zum Hochschulbesuch und zwar den Gymnasiasten auf allen Hochschulen, nur auf gewissen Abteilungen der technischen Hochschulen muss er eine Prüfung aus der darstellenden Geometrie und Zeichnen ablegen, den Realgymnasiasten ebenfalls auf allen Hochschulen, nur auf gewissen Universitätsfakultäten, eventuell Fächern der philosophischen Fakultät muss er Ergänzungsprüfungen aus dem Griechischen ablegen, den Realschüler auf der technischen Hochschule und der naturwissenschaftlichen Fakultät, auf den anderen Universitätsfakultäten nach einer Ergänzungsprüfung aus den klassischen Sprachen.

§ 8. *Mädchenstudium.*

Im ehemaligen Österreich konnten die Mädchen nur an Lyzeen oder den sehr wenigen Mädchengymnasien öffentliche Schülerinnen sein, an Knabenmittelschulen durften sie nur als Privatistinnen studieren, wo sie während des Jahres nicht geprüft sein durften, sondern nur Semestralprüfungen aus allen Gegenständen ablegen mussten. Nach dem Jahre 1918 wurden sie auf alle Schulen gleichberechtigt zugelassen, nur mit einer gewissen Einschränkung zu gunsten der bestehenden Mädchenschulen. Aber auch diese Einschränkung wurde abgeschafft.

Doch heute ist die Majorität der Fachkreise nicht mehr so für die Koinstruktion eingenommen wie früher, und zwar aus didaktischen Gründen, indem mehr und mehr die Meinung Oberhand nimmt, dass zwar die Mädchen im ganzen und grossen das gleiche Lehrstoffpensum wie die Knaben durchnehmen können, doch dass die Methode den Entwicklungsstadien und der Begriffsfähigkeit entsprechend anders an den Knabenschulen und anders an den Mädchenschulen dem Schülermaterial angepasst werden soll. Es wird

darum als besser angesehen, wo es möglich ist, eigene Mädchenschulen einzelner Typen zu errichten, oder wenigstens Mädchenparallelklassen, und nur dort, wo es nicht möglich ist, die Koinstruktion einzuführen.

Von den Mädchenmittelschulen sind 6 č Realgymnasien, 13 č und 11 d Reformrealgymnasien, 1 č Realschule und 11 č, 2 d, 1 m und 1 r Pädagogium. Von den Pädagogien haben manche aber nicht alle Jahrgänge. Im ganzen waren im Schuljahre 1927—8 an den Mittelschulen (sammt den Pädagogien) 26.795 Schülerinnen also 27,28% aller Schüler.

An Mädchenschulen unterrichten auch Männer und an Knabenschulen auch Frauen.

§ 9. *Literaturverzeichnis.*

Ročenka československých profesorů, I—VIII, 1921—1929.

F. Bloch: Die Mittelschulen (Seipels Gesetzsammlung des Tschechoslovakischen Staates), 1923.

Školy v Republice československé ve školním roce 1927/8 (Československá statistika, 57) 1929.

M. Šmok: Organisation de l'enseignement en Tschécoslovaquie, 1924.

R. Neuhöfer: Střední školství v prvních deseti letech Československé republiky po stránce organizační, 1928.

Die Tschechoslovakische Republik, Jahrbuch 1928.

Exposé ministra školství a národní osvěty PhDr. Ant. Štefánka, 1929.

Anketa ministerstva školství a národní osvěty o školské reformě 1929.

Prag, Karlsuniversität, Mai 1930.

DE TANGENSREGEL IN DE TRIGONOMETRIE

DOOR

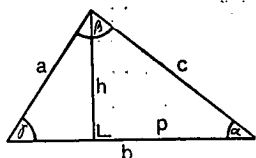
B. L. VAN DER WAERDEN.

Wanneer van een driehoek gegeven zijn 2 zijden a , b en de ingesloten hoek γ , dan kan men de overige hoeken en de derde zijde als volgt berekenen:

Zij h de hoogtelijn op b , en p de projectie van c op b . Dan is blijkbaar

$$\left. \begin{aligned} h &= a \sin \gamma \\ p &= b - a \cos \gamma \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{h}{p} \\ c &= \frac{h}{\sin \alpha} \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

Hiermee is de gestelde opgave opgelost. De oplossing is



eenvoudig en zij ligt voor de hand; men behoeft er geen één formule voor uit het hoofd te kennen: de definities van tangens, sinus en cosinus zijn voldoende.

Wáárom, zo vraag ik, gebruikt men in de schoolboeken, in plaats van deze simpele oplosmethode, de zoveel moeilijker tangensregel:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{a - b}{a + b} \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha + \beta), \quad (II)$$

die dan voor de berekening van c nog aangevuld moet worden hetzij met de sinusregel

$$c = \frac{a \sin \gamma}{\sin \alpha} \quad (IIa)$$

of wel volgens de regelen der kunst met een der „formules van MOLLWEIDE”, bv.:

$$c = \frac{(a + b) \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)} = \frac{(a + b) \sin \frac{1}{2}\gamma}{\cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)} \quad (IIb)$$

Het enige antwoord, dat men op deze gewetensvraag kan

verkrijgen, is: De formules (I) zijn „niet logarithmies”. Men moet nl. tijdens de bewerking één logarithme, nl. $\log(a \cos \gamma)$, „terug zoeken”, om $a \cos \gamma$ van b af te kunnen trekken. Deze tegenwerping (de *enige*, die men tegen het gebruik der formules (I) kan maken) berust op een onnadenkendheid, zooals ik hier zal aantonen.

Ik zal de berekeningswijze volgens de formules (I) aanduiden door: „Methode I”, evenzo die met II en IIa door: Methode IIa, en die met II en IIb door: Methode IIb.

Bij Methode I heeft men, dit geef ik toe, één log. meer „terug te zoeken” dan bij de beide andere methoden. Hier staat echter tegenover, dat men bij de methoden IIa en IIb beide een aantal andere operaties (optellen, aftrekken en halveren) méér heeft uit te voeren, en dat men bij IIa bovendien nog een log meer op te zoeken heeft. Het volgende rekenschema zal dit onmiddellijk duidelijk maken:

*Methode I*¹⁾.

$$\begin{array}{rcl}
 \log a & = & \dots \quad o \\
 \log \cos \gamma & = & \dots \quad o \\
 \log(a \cos \gamma) & = & \dots \\
 a \cos \gamma & = & \dots \quad t \\
 b & = & \dots \\
 p = b - a \cos \gamma & = & \dots \\
 \log a & = & \dots \\
 \log \sin \gamma & = & \dots \quad o \\
 \log h & = & \dots \\
 \log p & = & \dots \quad o \\
 \log \operatorname{tg} a & = & \dots \\
 a & = & \dots \quad t \\
 \log h & = & \dots \\
 \log \sin a & = & \dots \quad o \\
 \log c & = & \dots \\
 c & = & \dots \quad t
 \end{array}$$

[o = opzoeken van log, etc.
 t = terugzoeken].

5 × optellen of aftrekken

5 × log. opzoeken

3 × log. terugzoeken

*Methode II*¹⁾.

$$\begin{array}{rcl}
 180^\circ & & \\
 \gamma & = & \dots \\
 a + \beta & = & \dots \\
 \frac{1}{2}(a + \beta) & = & \dots \\
 a & = & \dots \\
 b & = & \dots \\
 a + b & = & \dots \\
 a - b & = & \dots \\
 \log \operatorname{tg} \frac{1}{2}(a + \beta) & = & \dots \quad o \\
 \log(a - b) & = & \dots \quad o \\
 & & \dots \\
 \log(a + b) & = & \dots \quad o \\
 \log \operatorname{tg} \frac{1}{2}(a - \beta) & = & \dots \\
 \frac{1}{2}(a - \beta) & = & \dots \quad t \\
 \frac{1}{2}(a + \beta) & = & \dots \\
 a & = & \dots
 \end{array}$$

Nu gaat het verder volgens één der beide volgende methoden IIa en b:

¹⁾ De berekening van de derde hoek $\beta = 180^\circ - \gamma - a$ is bij beide methoden buiten beschouwing gelaten.

Methode IIa.

$$\log a = \dots o$$

$$\log \sin \gamma = \dots o$$

$$\log \sin a = \dots o$$

$$\log c = \dots$$

$$c = \dots t$$

9 × optellen, aftrekken of
halveren

6 × log. opzoeken

2 × terugzoeken.

Methode IIb.

$$\log (a + b) = \dots$$

$$\log \cos \frac{1}{2} (a + \beta) = \dots o$$

$$\log \cos \frac{1}{2} (a - \beta) = \dots o$$

$$\log c = \dots$$

$$c = \dots t$$

9 × optellen, aftrekken of
halveren

5 × log. opzoeken

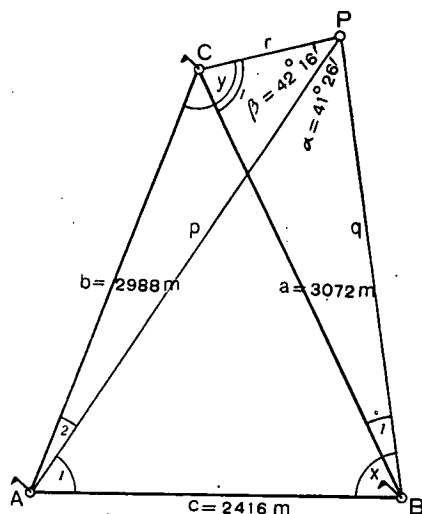
2 × log. terugzoeken.

Zoals men ziet, wordt de éne logarithme, die men bij I meer terug te zoeken heeft, door de meerdere aftrekkingen en halveringen bij IIa en IIb ruimschoots opgewogen, terwijl bij IIa zelfs nog een log. meer opgezocht moet worden. Hiermede is naar mijn mening de opinie, dat Methode I niet logarithmies zou zijn, afdoende weerlegd. Zuiver rekentechnies is Methode I minstens gelijkwaardig met IIb en duidelijk beter dan IIa.

Ik wil hier niet uitweiden over de meerdere aanschouwelijkheid der Methode I, die immers vanzelf in 't oog springt; ook niet over het principiële voordeel, dat rekenen door denken vervangen wordt. Immers het pleit wordt reeds boven alle twijfel ten gunste van Methode I beslecht door de overweging, dat bij toepassing van deze methode niet minder dan *drie* ingewikkelde en moeilijk te onthouden formules (nl. de tangensregel en de beide „formules van MOLLWEIDE”) in het trigonometrie-onderwijs *geheel overbodig* worden. Nu men allerwege naar beperking der leerstof streeft, behoeft dit voordeel wel geen nader betoog.

DE TAFEL DER GONIOMETRISCHE VERHOUDINGEN.

De volgende oplossing van het vraagstuk van Snellius lijkt mij voor leerlingen eenvoudiger dan de gewone, waarbij een hulphoek wordt uitgevoerd.



In nevenstaande figuur zijn de elementen van $\triangle ABC$ gegeven en de hoeken, waaronder AB en AC van P uit worden gezien; men vraagt naar de afstanden PA, PB en PC.

Het begin van de oplossing is dezelfde als op de gewone manier; p behoort tot $\triangle PAB$ en tot $\triangle PAC$, zoodat men p in den sinusregel brengt in beide driehoeken.

$$\left. \begin{array}{l} \sin x : p = \sin \alpha : c \\ \sin y : p = \sin \beta : b \end{array} \right\} \text{ dus } \frac{\sin x}{\sin y} : 1 = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} : \frac{c}{b},$$

waaruit volgt $\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{b \sin \alpha}{c \sin \beta}$; noem deze verhouding t .

De som $\angle x + \angle y$ is bekend, nl. $360^\circ - \angle A - \alpha - \beta$, zeg s ; we hebben dan $\frac{\sin(s-y)}{\sin y} = t$ of $\frac{\sin s \cos y - \cos s \sin y}{\sin y} = t$ of $\sin s \cotg y = t + \cos s$; hieruit volgt:

$$\cotg y = \frac{t + \cos s}{\sin s} = \frac{t}{\sin s} + \cotg s.$$

De berekening is als volgt: voor $\angle BAC$ vinden we $68^\circ 20' 40''$; $\angle x + \angle y = 360^\circ - \angle BAC - \alpha - \beta = 207^\circ 57' 20''$.

$$\frac{t}{\sin s} = \frac{2988 \sin 41^\circ 26'}{2416 \sin 42^\circ 16' \times \sin 27^\circ 57' 20''}$$

$\log 2988 = 3,47538$	$\log 2416 = 3,38310$
$\log \sin 41^\circ 26' = 9,82069 - 10$	$\log \sin 42^\circ 16' = 9,82775 - 10$
$\frac{3,29607}{2,88183}$	$\log \sin 27^\circ 57' 20'' = 9,67098 - 10$
$\frac{2,88183}{0,41424}$	$\frac{2,88183}{2,88183}$

$$\frac{t}{\sin s} = -2,5956$$

$$\cotg s = 1,88425 \text{ (Tafel D of Tafel H)}$$

$\cotg y = -0,7114$; y ligt in het tweede kwadrant;

$\tg (y - 90^\circ) = 0,7114$; dus $y - 90^\circ = 35^\circ 25' 40''$;

$y = 125^\circ 25' 40''$ en $x = 82^\circ 31' 40''$.

Hiermee is de theorie en het grootste deel der bewerking af; heeft men y en x , dan vindt men dadelijk de afstanden p , q en r met den sinusregel.

Deze oplossing, die wel zeer voor de hand ligt, heb ik gegeven in deel II van de Wiskunde voor Zeevaartscholen; zij wint het m.i. van die, waarbij alles logaritmisch wordt gemaakt. Is er dan, vraag ik met Prof. Van der Waerden, wat tegen om in de driehoeksmeting ook andere getallen dan logarithmen op te tellen en af te trekken? Want dat zal ook hier als het eenige bezwaar tegen de oplossing kunnen worden aangevoerd; alsof het een bezwaar was! De geheele oplossing is m.i. veel eenvoudiger en veel natuurlijker en dus voor het onderwijs veel beter. Men kan den term $\cotg s$ natuurlijk via $\log \cotg s$ berekenen, maar doet beter om die in de tafel op te zoeken; men vindt die waarden met interpolatietafels in Versluys Tafel H, zonder in Gonggrijps Tafel D, beide uitstekend bruikbaar. Wie zich geregeld tot die tafels wendt, die ondervindt steeds meer, van hoe onberekenbaar nut de tafels der goniometrische verhoudingen zijn. Een welsprekend betoog heeft Dr. Gonggrijp gehouden in het voorbericht van Tafel D; L i W e N a G e L heeft de wenschelijkheid geuit van het gebruik dier tafels, de commissie Beth en Dijksterhuis heeft hetzelfde gedaan . . . en toch houden zich nog velen afzijdig van het gebruik; de omweg en de rompslomp der logarithmen is hun te dierbaar, het breken met sleur te moeilijk, het berijden van een asfaltweg te gemakkelijk, gewend als ze zijn aan het horten en stooten op den keiweg. Wel verre van mij om het onberekenbare nut van de

logarithmen weg te cijferen, maar ontoelaatbaar is het gebruik er van, als ze er bij gesleept worden, zooals bv. bij de volgende opgaven:

1. $\cos x = 0,41421$; tafel D geeft op blz. 195 $x = 65^\circ 31' 49''$; tafel H op blz. 86, wit, hetzelfde.

Met logarithmen aldus: $\log 0,41421 = 9,61722 - 10$; hierbij vindt men $x = 65^\circ 31' 49''$. Men moet nu twee keer opzoeken; nog daargelaten, dat dit precies het dubbele werk is, zoo heeft men nog het nadeel, dat daardoor de nauwkeurigheid (indien door het vraagstuk geboden) schade lijdt. Ik kort af: $\frac{1}{2}$ eenheid der laatste decimaal, dus $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^5} = h$, en nauwkeurig als nk.; alle getallen in de tafel der goniometrische verhoudingen zoowel als in de logarithmensinustafel zijn nk. op h ;

0,41421 ligt in Tafel D en Tafel H tusschen 0,41443 en 0,41416; het verschil met elk van deze is nk. op $2h$, daar elk der termen nk. is op h ; het verschil is $0,41443 - 0,41421 = 0,00022$; maar de uiterste waarden zijn 0,00021 en 0,00023; het aantal seconden is minimaal $\frac{21}{27,5} \times 60$ en maximaal $\frac{23}{26,5} \times 60$, immers dat verschil van 27 is ook weer een getal nk. op h ; het aantal seconden is dus gelegen tusschen 46 en 52.

Als we den hoek berekenen via de Briggsche logarithmen, dan moeten we bedenken, dat 0,41421 op h nauwkeurig is en tot uiterste waarden heeft 0,414205 en 0,414215

$$\log 0,41420 = 0,61721 - 1 \text{ nk. op } h$$

..... 5 geeft ... 55 te rekenen als nauwkeurig

minimaal dus 0,61721 - 1

$$\log 0,41420 = 0,61721 - 1 \text{ nk. op } h$$

1 11
5 55 } te rekenen als nk.

maximaal dus 0,61723, eigenlijk nog iets meer.

Bij de minimale waarde $9,61721 - 10$ en bij de maximale $9,61723 - 10$ zoeken we nu de hoeken op; de tafel geeft $\log \cos 65^\circ 31' = 9,61745 - 10$; de minimale waarde is 24 edld minder; omdat de getallen in de log. sinustafel ook nauwkeurig zijn op h , nemen we $24\frac{1}{2}$ edld minder; de maximale waarde is 21 edld minder; nu is de differentie 28 edld nk. op h ; dus krijgen we maximaal

$\frac{24^{1/2}}{27^{1/2}} \times 60''$ en minimaal $\frac{21^{1/2}}{28^{1/2}} \times 60''$ dus opv. $53''$ en $45''$, een grooter verschil natuurlijk dan bij het gebruik van de tafel der goniometrische verhoudingen. Toch wordt meestal gewoon opgezocht $49''$; aldus:

$\log 0,41421 = 9,61722 - 10$; $x = 65^\circ 31' 49''$; nog zoo kwaad niet, daar het niet doenlijk is met leerlingen de afwijking na te gaan; toch dunkt het mij nuttig, zoo nu en dan eens een heel eenvoudig voorbeeld te behandelen. En wat is hier, waar al een fout van 6 à $8''$ optreedt, nu al met al nog slechts opgezocht, vergeleken bij al het gereken bij de gewone logarithmische behandeling van het probleem van Snellius en bij zooveel andere vraagstukken? De zeevaartkundige berekeningen eischen terecht geen meerdere nauwkeurigheid dan in tienden van minuten en de interpolatietafels in de onvolprezen Tafels van Haverkamp zijn daarop ingericht; onnoodig te zeggen, dat deze nauwkeurigheid ook maar zelden bereikt wordt. Toch zal men m.i. goed doen op de H. B. S. en op het Gymnasium de gebruikelijke manier te bestendigen; maar men moet ieder middel tot vermindering van het werk bij meerdere nauwkeurigheid met beide handen aangrijpen en dan komt men van zelf tot het gebruik van de tafels der goniometrische verhoudingen, zooals Gonggrijps Tafels C en D en Versluys Tafel H die geven.

2. Ik zie in een boek $\cotg x = 3$; wat is er nu toch tegen om (blz. 186 van Tafel D, blz. 74 wit van tafel H) op te zoeken tusschen $\cotg 18^\circ 26' = 3,00028$ en $\cotg 18^\circ 27' = 2,99738$? Men vindt er nog $6''$ bij; éénmaal opzoeken in plaats van tweemaal!

3. Van $\triangle ABC$ is $\angle A = 51^\circ 35'$ en $c = 24$; de hoogtelijn BD is $24 \sin 51^\circ 35'$; $\sin 51^\circ 35' = 0,78351$; zonder weglating van eenige decimaal komt er 18,80424; deze uitkomst is nauwkeurig op $24h$; de uiterste waarden zijn 18,80412 en 18,80436, zoodat 18,804 nk. is op $\frac{1}{2}$ duizendste te klein. Dit kan iedere leerling onmiddellijk inzien. Met logarithmen aldus:

$$\begin{array}{rcl} \log 24 = 1,38021 & \dots\dots\dots & \text{nk op } h \\ \log 51^\circ 35' = 9,89405 - 10 & \dots\dots\dots & \text{" " } h \\ \hline & & 1,27426 \dots\dots\dots \text{nk op } h \end{array}$$

Nu ziet men maar al te veel terugzoeken: 18,8043, dus nog een zesde cijfer ook; de uiterste waarden der logarithme zijn echter 1,27425 en 1,27427; bij de eerste moet de zijrij 9 opleveren, wat een 4 geeft als 5e cijfer van de uitkomst, bij de tweede 11 en daarbij

behoort 5; nu hebben we niet eens rekening gehouden met het feit, dat de gegevens en de differenties in de log sinustafel alle nk. zijn op h . In elk geval is het ongelijk veel moeilijker om met leerlingen de fout in het antwoord na te gaan dan met de tafel der goniometrische verhoudingen. Natuurlijk werpt men mij tegen, dat het niet zoo eenvoudig gaat, als de zijde bv. 35,623 is; immers $35,623 \times 0,78351$ rekent men niet uit met gewone vermenigvuldiging; neen, wel met verkorte en dat gaat best, maar het is ongelijk veel meer werk dan met logarithmen, nog maar gezwogen van de theorie, die aan de verkorte vermenigvuldiging moet voorafgaan. We nemen dus

$$\log 35,623 = 1,55173$$

$$\log \sin 51^\circ 35' = 9,89405 - 10$$

$$\log c = 1,44578, \quad c = 27,911.$$

Hoe maken we nu uit of deze cijfers betrouwbaar zijn? Wel, het eenvoudigst door ons te wenden tot $35,623 \sin A$; $\sin A$ is immers nk. op h , dus is de fout in het product kleiner dan $36 h = 18$ edld; de eenheden der laatste decimaal zijn $\frac{1}{10^5}$ deelen; de uiterste waarden verschillen $\frac{36}{10^5}$, dus minder dan $\frac{1}{10^3}$; de uitkomst is dus nauwkeurig op $\frac{1}{2}$ duizendste; in geen geval is te verantwoorden 27,9112 of 27,9113; als de leerlingen enkel met logarithmen werken, voelen ze de fout in de uitkomst niet en als ze die al aanwezig weten, dan kost het vrij wat moeite de grootte te berekenen.

4. Ik geef nog een voorbeeld van het gebruik der tafels van de goniometrische verhoudingen en wel dit:

$$\text{Bereken } x \text{ uit: } \sin(x + 41^\circ 23') = 3 \sin x$$

$$\sin x \cos 41^\circ 23' + \cos x \sin 41^\circ 23' = 3 \sin x$$

$$\sin x (3 - \cos 41^\circ 23') = \cos x \sin 41^\circ 23'$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin 41^\circ 23'}{3 - \cos 41^\circ 23'} = \frac{0,66109}{2,24970};$$

verder liefst met logarithmen. Deze oplossing heeft op de gewone voor, dat zij niet geleerd behoeft te worden; bovendien is zij wel zoo kort.

Er zijn nog tientallen voorbeelden te geven van het gebruik dier tafels, waarbij dit gemak oplevert, of beter inzicht verschaft of nauwkeuriger uitkomsten geeft of alle drie samen; vooral komt dit uit bij het probleem van Snellius, waar de voor leerlingen nog al

gezochte oplossing met logaritmen onnoodige moeite en omslachtig werk eischt toch zal nog vele jaren lang elke hoogste klas er mee gekweld worden; de voor de hand liggende oplossing is immers zoo eenvoudig en optellen en aftrekken, behalve dan van logaritmen, is immers uit den booze? Waarom, wie zegt dat, wie eischt dat? Mej. Sleur en geen ander; in geen geval ditmaal Gemakzucht.

Het gaat er mee als met het gebruik der rentetafels bij de behandeling der samengestelde intrestrekening; een kind begrijpt de inrichting; men behandelt dezelfde stof in het derde deel van den tijd, spaart $\frac{2}{3}$ van het werk uit, $\frac{7}{8}$ van de verveling feiten, die samen precies voldoende zijn om ze niet te gebruiken en dus met Mej. Sleur op goeden voet te blijven.

De schoolwiskunde heeft menige vooze plek. P. W.

HET EERSTE HOOFDSTUK DER STEREOMETRIE

DOOR

Dr. H. J. E. BETH, *Deventer*.

Wanneer men, b.v. in de 4e klasse der h.b.s., een begin moet maken met de stereometrie, dan kan men op het gebied van strengheid reeds iets van de leerlingen eischen. Onder de vakgenooten schijnt hieromtrent wel eenstemmigheid te bestaan, getuige het feit, dat de gebruikelijke leerboeken van het genoemde beginsel uitgaan. Bij die handelwijze zal men echter wel algemeen met mij de moeilijkheden gevoeld hebben, die hierdoor ontstaan, dat men moet aansluiten bij het uiteraard met een bescheiden mate van exactheid gegeven planimetrie-onderwijs in de lagere klassen, meer in het bijzonder in de eerste klasse. De bedoelde leerboeken nu leeren deze moeilijkheden niet of niet voldoende overwinnen. Op natuurlijke wijze zouden zij uit den weg geruimd worden, als men de eerste hoofdstukken der vlakke meetkunde opnieuw aan de orde stelde alvorens met de behandeling der stereometrie een begin te maken. Daarbij zou het mooie nieuwe leerboek der planimetrie van Schogt goede diensten kunnen bewijzen. Bij de tegenwoordige regeling van het onderwijs ontbreekt hiervoor stellig de benodigde tijd, en men zal zich op minder tijd-roovende wijze moeten weten te behelpen om de vormende waarde, die de bedoelde leerstof in zoo hooge mate bezit, eenigszins tot haar recht te doen komen.

Om de vakgenooten te laten zien op welke wijze ik mijzelf in deze behelp, laat ik hier volgen *in schets* een eerste hoofdstuk van een leerboek der stereometrie, dat voortbouwt op de eenvoudige in de lagere klassen gelegde grondslagen. Ter vermijding van mogelijk misverstand merk ik nog op, dat het dus thans geenszins mijn bedoeling is, axiomatica te bedrijven; zij is slechts: een didactisch te verwezenlijken axiomatische behandeling te geven van het begin der stereometrie. Ik streef dus niet naar volledigheid

in den axiomatischen opbouw, doch zoek slechts aanpassing aan de onderwijspractijk. Het zal wel geen toelichting behoeven, dat, indien ergens bij het wiskunde-onderwijs, dan hier de plaats is voor een historische uiteenzetting, waardoor alles, dat hier zoo sober mogelijk is neergeschreven en zoo dood lijkt, levend wordt en voor de leerlingen ongemeen boeiend. Ik behoef hierop niet nader in te gaan, nu de belangstellende in de reeds verschenen deelen van de „Historische Bibliotheek voor de exacte wetenschappen” gelegenheid te over heeft om zich te oriënteren.

Nog slechts een enkele opmerking vooraf. De schets is niet geïllustreerd. Voor zoover de figuren in één vlak gelegen zijn, heb ik tegen de gebruikelijke teekeningen uit den aard der zaak geen bezwaar, en ik geloof niet, dat deze zonder schade gemist kunnen worden. Wel verschil ik wellicht met de groote meerderheid der vakgenooten in waardeering van de zoogenaamde stereometrische teekeningen, althans in dit eerste hoofdstuk. Ik zou niet op grond van het feit, dat bij den axiomatischen opzet de aanschouwing geen rol mag spelen, aan de leerlingen een nuttig hulpmiddel willen onthouden. Evenmin zou ik, indien de didactiek ze eischt, het gebruik maken van teekeningen afkeuren op grond van de overweging, dat de teekenmethode nog niet theoretisch behandeld kon worden. Maar ik heb me reeds lang afgevraagd of de figuren, die men geeft bij de in deze schets bewezen stellingen inderdaad voor het meerendeel der leerlingen verhelderend werken, en of niet juist die teekeningen voor vele leerlingen moeilijkheden scheppen, die men kan vermijden. Men moet hierbij bedenken, dat vele der bedoelde teekeningen slechts dienen kunnen om het geheugen te hulp te komen, *niet* de voorstelling.

Voor de volgende hoofdstukken zou ik die stereometrische teekeningen niet gaarne willen missen; integendeel, ik ken ze daar een voorname rol toe, nadat de teekenmethode behoorlijk is toegelicht. Wanneer men op het in deze schets behandelde de noodzakelijke stellingen laat volgen, die op de ligging van: lijnen en vlakken (ook van 3 vlakken) betrekking hebben, dan heeft men genoeg om de beginselen der scheeve parallel-projectie uiteen te zetten, hetgeen slechts weinig tijd en moeite kost; leerzaam hierbij is, dat voortdurend gewezen wordt op het verschil van deze teekenmethode en die der perspectief, welke beginselen de leerlingen in de teekenles hebben leeren kennen. Alvorens tot den

loodrechten stand over te gaan behandel ik prisma's en pyramiden om door het teekenen van doorsneden in dat stereometrische teekenen eenige oefening te geven, waardoor de leerlingen de dan volgende figuren reeds veel gemakkelijker lezen en zelf ontwerpen. Na de behandeling van den loodrechten stand komt de loodrechte projectie op twee onderling loodrechte vlakken van zelf aan de orde.

Dat ik mij niet bepaald heb tot hetgeen aan de stereometrie voorafgaat, maar ook het eerste van den onderlingen stand van lijnen en vlakken in de ruimte behandeld heb, moge zijn rechtvaardiging vinden in mijn bedoeling 1°. om duidelijk te doen zien, dat een aantal van deze stellingen het *bestaan* van een te definieeren begrip uitspreken; dat bestaan wordt dan bewezen door de uitvoering van de constructie van den bedoelden ruimtevorm; deze gewichtige omstandigheid komt in de leerboeken, zoo ver ik ze ken, niet voldoende tot haar recht; en 2°. om sommige *onnoodige* onnauwkeurigheden aan te duiden, welke men in die boeken aantreft.

SCHETS.

Bij onze eerste kennismaking met de meetkunde bleek reeds eenigszins het streven om de verschillende uitspraken, die samen den inhoud der meetkunde vormen, op een bepaalde wijze tot een geheel te vereenigen, nl. zoo, dat, als eenmaal een aantal niet bewezen beweringen als axiomata waren opgesteld en zekere niet gedefinieerde begrippen waren aanvaard, de andere beweringen daaruit konden worden afgeleid. Die andere beweringen behoorden te worden afgeleid uit de axiomata door redeneering, en uitsluitend door redeneering. Dit beteekent, dat men bijvoorbeeld geen gebruik mag maken van wat het oog reeds zonder bewijs geneigd is als vaststaand te erkennen.

Het aantal niet gedefinieerde begrippen was wel heel groot. Zoo kan als definitie van rechte lijn gegeven zijn, dat het de lijn is, die een punt beschrijft, dat voortdurend in dezelfde richting beweegt. In deze definitie wordt echter gebruik gemaakt van de begrippen: punt, lijn, richting, bewegen, van welke misschien de beide eerste wel (maar dan weder met behulp van andere niet gedefinieerde begrippen), de beide laatste echter niet gedefinieerd zijn. Bij een onberispelijken opbouw van het meetkundige stelsel moet het aantal niet gedefinieerde begrippen zoo klein mogelijk zijn.

Een tweede leemte is hierin gelegen, dat we niet steeds het bestaan hebben aangetoond van de dingen, die we gedefinieerd hebben. We moeten hier het woord „bestaan” in een anderen zin opvatten als bijvoorbeeld in de natuurkunde, als we daar zeggen, dat er gassen zijn. In de wiskunde bestaat alles wat denkbaar is. Aan wat men denken kan, is echter een beperking opgelegd: men kan geen dingen denken, die met elkaar in strijd zijn. Een nieuw axioma mag niet iets uitspreken, dat in zichzelf strijdig is, of dat met andere axiomata strijdt; ook een definitie mag niet in zichzelf strijdig zijn.

Het, aldus opgevatte, bestaan der gedefinieerde dingen eischt een bewijs. In het algemeen levert men het bewijs van het bestaan eener figuur door de uitvoering van de constructie, die de figuur doet ontstaan. Is een bestaansbewijs niet mogelijk, en wil men toch het gedefinieerde begrip gebruiken, dan moet het bestaan der figuur als axioma worden uitgesproken.

Door dit laatste na te laten hebben we bij herhaling van axiomata gebruik gemaakt zonder ze te hebben uitgesproken. Wanneer we woorden als „binnen”, „buiten”, „tusschen,” gebruikten, dan werkten we weder met begrippen, die niet gedefinieerd zijn en met axiomata, die niet waren uitgesproken, maar we steunden op wat het oog geacht wordt ons te leeren, hetgeen echter volgens afspraak niet geoorloofd is.

We gaan nu, op grond van de genoemde bezwaren, de eerste beginselen der meetkunde opnieuw opstellen, maar moeten er dadelijk op wijzen, dat we daarmede de bezwaren niet zullen wegnemen; zij zullen blijven bestaan, maar in verminderde mate.

We aanvaarden het begrip *punt* als niet gedefinieerd begrip; evenzoo het begrip *lijn* als verzameling harer punten.

Als *definitie van rechte lijn* geven we, dat het een lijn is, die onbegrensd is en door twee willekeurige harer punten geheel bepaald.

Het bestaan van zulk een lijn wordt als axioma uitgesproken (*eerste axioma der rechte lijn*).

Voorts spreken we als *axioma* uit, dat er van 3 punten eener rechte lijn steeds een en slechts een is, dat *tusschen* de beide andere ligt (*axioma der rangschikking*).

Nemen we nu twee vaste punten A en B der rechte lijn aan, dan kunnen we op grond van het laatste axioma van elk punt der rechte uitmaken of het tusschen A en B ligt of niet. Het geheel der tusschen

A en B gelegen punten der rechte wordt het *lijnstuk* AB of BA genoemd; A en B heeten de eindpunten van het lijnstuk.

Nemen we nogmaals twee vaste punten A en B der rechte lijn aan, dan kunnen we van elk punt C uitmaken, of A tusschen B en C ligt of niet. Het geheel van de punten C der rechte, die voldoen aan de voorwaarde, dat A tusschen B en C ligt, wordt *halve lijn* genoemd; A is eindpunt der halve lijn. De rechte lijn bestaat uit twee halve lijnen, die beide A als eindpunt hebben; B behoort tot de tweede halve lijn.

Als *axioma* stellen we vast: er bestaan 3 punten, die niet op een rechte lijn gelegen zijn. Uit het axioma volgt nu, dat er behalve de punten, die op een rechte lijn liggen, nog een punt is, dat niet op de rechte ligt.

Hierop laten we volgen het axioma: door elke twee punten gaat een rechte lijn (*tweede axioma van de rechte lijn*).

We aanvaarden het begrip *vlak* als ongedefinieerd begrip en geven als *definitie van het platte vlak*, dat het vlak is, dat de eigenschap bezit, dat elke rechte lijn, die er twee punten mee gemeen heeft, er geheel in ligt.

Als axioma stellen we vast, dat zulk een vlak bestaat (*eerste axioma van het platte vlak*).

Vervolgens aanvaarden we als axioma, dat elke rechte lijn de punten van het platte vlak, behalve de punten der rechte zelf, in twee groepen A en B verdeelt, zoodat een lijnstuk, dat twee punten van groep A of van groep B verbindt, geen punt met die rechte gemeen heeft, doch een lijnstuk, dat een punt van groep A met een punt van groep B verbindt, steeds een punt met die rechte gemeen heeft (*tweede axioma van het platte vlak*). Men drukt dit uit door te zeggen, dat de rechte lijn het platte vlak verdeelt in twee deelen, die aan verschillende zijden van die rechte gelegen zijn..

We kunnen nu gemakkelijk een 3-tal stellingen bewijzen.

1°. Liggen in een plat vlak de punten P en Q aan dezelfde zijde van een rechte l en ook P en R aan dezelfde zijde van l , dan liggen ook Q en R aan dezelfde zijde van l . Volgens het zooeven genoemde axioma worden nl. de punten van het vlak, behalve die van l zelf, in twee groepen A en B verdeeld. P en Q liggen aan één zijde van l , behooren dus beide tot een van de beide groepen; laat dit A zijn. P en R liggen ook aan één zijde van l , behooren dus beide tot A of

beide tot B; daar P tot A behoort, behoort R ook tot A. Q en R behooren dus beide tot A en liggen dus aan één zijde van l .

2°. Liggen P en Q aan verschillende zijden van l , en P en R ook aan de verschillende zijden van l , dan liggen Q en R aan dezelfde zijde van l . Volgens het gegeven kan P tot de groep A behooren, Q tot de groep B; daar P en R aan verschillende zijden liggen, en P tot A behoort, behoort R tot B. Daar Q en R beide tot B behooren, liggen zij aan dezelfde zijde van l .

3°. Liggen P en Q aan dezelfde zijde van l , P en R aan verschillende zijden van l , dan liggen Q en R aan verschillende zijden van l . Volgens het gegeven kunnen P en Q tot groep A behooren; daar Q en R aan verschillende zijden van l liggen en Q tot A behoort, behoort R tot B. Daar nu A tot P behoort, R tot B, liggen P en R aan verschillende zijden van l .

We aanvaardden als ongedefinieerd begrip het begrip van *beweging van het vlak in zichzelf*.

Als axioma stellen we vast, dat een plat vlak zich op zoodanige wijze in zichzelf kan bewegen, dat een gegeven rechte lijn in zichzelf overgaat (*axioma der verschuiving of translatie*). Dit axioma stelt ons in staat, op de reeds vroeger aangeduide wijze op een zelfde rechte lijn *lengten* van lijnstukken met elkaar te vergelijken (hierbij verleent weder het axioma van rangschikking zijn diensten) en, na het aannemen van een bepaald lijnstuk dier rechte als lengteenheid, lengten op die rechte te meten.

Als *definitie van hoek* geven we, dat het de figuur is, gevormd door twee halve lijnen, die het eindpunt gemeen hebben.

Als axioma stellen we vast, dat een plat vlak zich op zoodanige wijze in zichzelf kan bewegen, dat een gegeven punt op zijn plaats blijft (*axioma der draaiing of rotatie*). Dit axioma stelt ons in staat, hoeken, die hetzelfde hoekpunt hebben, naar hun *grootte* te vergelijken en, na het aannemen van een bepaalden hoek als eenheid, te meten.

Met gebruikmaking van de beide laatstgenoemde axiomata kunnen we aantoonen, dat we een vlak op zoodanige wijze in zichzelf kunnen laten bewegen, dat een halve lijn l met eindpunt P samenvalt met de vroegere ligging van een halve lijn m met eindpunt Q. Daartoe trekken we de rechte PQ en verschuiven het vlak zoo in zichzelf, dat PQ in zichzelf overgaat en wel zoolang totdat P ligt, waar Q gelegen heeft. De mogelijkheid bestaat nu, dat l de plaats inneemt,

die m heeft ingenomen. Is dit het geval, dan is het bewijs reeds geleverd. Is het niet het geval, dan kunnen we door rotatie van het vlak om P het doel bereiken. Door middel van de thans bewezen stelling kunnen we ook de lengten van lijnstukken op verschillende dragers en de grootten van hoeken met verschillende hoekpunten met elkaar vergelijken. Hierdoor is het meten van lijnstukken en hoeken over het geheele vlak mogelijk geworden.

Behalve de mogelijkheid der genoemde bewegingen van het platte vlak in zichzelf hebben we nog de *mogelijkheid van de omlegging* van het vlak om een gegeven rechte op zichzelf als *axioma* uit te spreken. Hierbij blijft de gegeven rechte op haar plaats en gaat, evenals bij de beweging van het vlak in zichzelf, iedere figuur over in een andere, die in zoodanig verband met de eerste staat, dat de lijnstukken van de eene figuur gelijke lengte hebben als die der overeenkomstige lijnstukken der andere figuur; desgelijks de hoeken van beide figuren. Echter bestaat er verschil: bij de beweging blijft de volgorde, als we een gesloten kring van elementen doorloopen, dezelfde; bij de omlegging wordt die volgorde omgekeerd.

Twee figuren kunnen nu op twee verschillende manieren *congruent* zijn. Men noemt twee figuren *direct congruent*, als door een beweging van het vlak in zichzelf de eene figuur met de andere in haar vorige ligging tot bedekking te brengen is; *indirect congruent*, als na omlegging van het vlak om een rechte een beweging die bedekking ten gevolge kan hebben.

Uit het gezegde volgt, dat van twee direct of indirect congruente figuren de overeenkomstige elementen gelijk zijn; bij directe congruentie hebben de overeenkomstige elementen dezelfde volgorde, bij indirecte congruentie tegengestelde volgorde. Twee figuren kunnen tegelijkertijd direct en indirect congruent zijn; dit gebeurt, indien de figuren de eigenschap hebben door omlegging om een bepaalde rechte lijn, haar as van symmetrie, in zich zelf over te gaan.

We gaan thans over tot de *congruentie van driehoeken* en zouden de bewijzen kunnen geven van de stellingen, die de 5 gevallen van congruentie uitspreken. Daarbij moeten we, telkens afzonderlijk beschouwen de gevallen, waarin de volgorde van de elementen, van welke de gelijkheid ondersteld wordt, in beide figuren gelijk, of tegengesteld is. Het is daarbij onverschillig welk der beide gevallen men het eerst behandelt; het tweede geval kan daarna door een omlegging uit het eerste worden afgeleid.

Twee rechte lijnen kunnen elkaar *snijden*, dat wil zeggen: zij kunnen een punt gemeen hebben. Dat dit mogelijk is, is uit het voorgaande reeds bekend. Meer dan één punt kunnen zij niet gemeen hebben zonder geheel samen te vallen, krachtens het eerste axioma der rechte lijn. We beweren, dat nog een andere stand mogelijk is en bewijzen daartoe de volgende

Stelling. Door een punt P buiten een rechte AB kan men een rechte lijn trekken, die met AB geen enkel punt gemeen heeft.

Bewijs. We verbinden P met een punt Q van AB en trekken door P de rechte RS zoo, dat $\angle SPQ + \angle PQB = 180^\circ$ is; de halve lijnen QB en PS liggen aan dezelfde zijde van PQ. Dat nu de rechte RS inderdaad aan den gestelden eisch voldoet, ziet men als volgt. Men verplaatst het vlak zoo, dat de halve lijn QB komt te liggen op de halve lijn PR. Dan komt het lijnstuk PQ wegens de gegeven betrekking tusschen de grootte van hoeken op QP te liggen en PS op QA. De halve lijnen PS en AQ kunnen geen punt gemeen hebben, omdat ze aan verschillende zijde van PQ liggen, evenmin de halve lijnen RP en QB. Hadden nu de halve lijnen PS en QB een punt gemeen, dan moesten wegens de mogelijkheid der bedekking van de figuren SPQB en AQPR ook QA en PR een punt gemeen hebben. Maar deze punten zouden aan verschillende zijde van PQ liggen, dus volgens het tweede axioma van het platte vlak verschillende punten zijn, en dan zouden volgens het eerste axioma van de rechte lijn de rechten RS en AB geheel samenvallen, terwijl toch het punt P wel op RS ligt, en niet op AB.

Bepaling. Twee, in een plat vlak gelegen, rechten worden *evenwijdig* genoemd, indien ze geen punt gemeen hebben.

De andere voorwaarden, voldoende voor evenwijdigheid (gelijkheid van overeenkomstige hoeken, van verwisselende binnenhoeken, enz.) worden op de bekende wijze uit de zooeven bewezen stelling afgeleid.

We hebben aangetoond, dat men door een punt, buiten een rechte gelegen, steeds een lijn kan trekken, evenwijdig met de eerste. Dat er nog niet een tweede rechte is door P, evenwijdig met AB, kan niet worden aangetoond. Men spreekt het uit door middel van een nieuw axioma, het *evenwijdigheidsaxioma*, dat derhalve zegt, dat iedere rechte door P, uitgezonderd RS, dus elke rechte R'S' door P, waarvoor $\angle S'PQ + \angle PQB \geq 180^\circ$ is, de rechte AB zal snijden;

de snijding heeft op QB plaats, als het $<$ teeken, op QA, als het $>$ teeken geldt.

Hieruit kan nu bewezen worden dat een rechte van een vlak, die een van twee evenwijdige lijnen in dat vlak snijdt, ook de andere snijdt, dat als twee evenwijdige lijnen door een derde lijn gesneden worden, de som der binnenhoeken aan dezelfde zijde der snijlijn gelijk aan 180° is, dat bij die snijding gelijke overeenkomstige hoeken, gelijke verwisselende binnenhoeken gevormd worden, enz.

We spreken nu uit het *axioma*: niet alle punten liggen in hetzelfde platte vlak. We aanvaarden het niet gedefinieerde begrip *ruimte* als geheel van alle punten.

Vervolgens het *axioma*: door elke drie, niet in een rechte lijn gelegen, punten kan een plat vlak gebracht worden.

Uit het feit, dat het bestaan van punten buiten een rechte lijn is aangenomen, volgt, dat ook door drie punten, op een rechte gelegen, een vlak gaat. Daar buiten dit vlak nog punten liggen en men door de gegeven rechte en een van deze punten ook een vlak kan brengen, dat een ander vlak is als het eerste, omdat immers het laatstgenoemde punt wel tot het laatste, maar niet tot het eerste vlak behoort, gaat door drie, op een rechte lijn gelegen punten, meer dan één vlak.

We bewijzen nu de

Stelling. Twee platte vlakken, die drie, niet in een rechte lijn gelegen, punten gemeen hebben, vallen geheel samen.

Bewijs. Laat A, B en C de drie niet in een rechte lijn gelegen punten van de vlakken U en V zijn. Is nu P een, niet met A, B of C samenvallend punt van U, dan moeten we aantoonen, dat P ook in V ligt. Ligt P op een der zijden van driehoek ABC, bijvoorbeeld op AB, dan ligt P op een rechte, die twee punten met vlak V gemeen heeft, nl. de punten AB, en die dus geheel in V ligt, zoodat ook P in V ligt. Ligt P niet op een der zijden van driehoek ABC, dan trekken we door P in vlak U een rechte, die de lijnen AB en AC opvolgend in de punten R en S snijdt. Elk der punten R en S ligt nu weder op een rechte, die twee punten met het vlak V gemeen heeft, en dus geheel in V ligt, zoodat ook de rechte RS geheel in V ligt, en dus ook het punt P.

We kunnen de stelling ook aldus uitspreken: door 3, niet in een rechte lijn gelegen, punten, gaat slechts één plat vlak; of: door 3, niet in een rechte gelegen, punten is een plat vlak geheel bepaald.

We kunnen vervolgens aantoonen, dat een plat vlak mede bepaald is door: een rechte lijn en een daarbuiten gelegen punt, door twee snijdende lijnen, door twee evenwijdige lijnen.

We spreken thans uit het volgende:

Axioma. Het platte vlak verdeelt de ruimte in twee deelen, d.w.z. de punten der ruimte, die niet tot het vlak zelf behooren, worden verdeeld in twee groepen A en B zoo, dat een lijnstuk, welks uiteinden beide tot één der groepen behooren, geen punt met het vlak gemeen heeft, terwijl een lijnstuk, welks uiteinden tot verschillende groepen behooren, wel een punt met het vlak gemeen heeft.

Door dit axioma kunnen we spreken van twee punten, die aan verschillende zijden van een plat vlak gelegen zijn en van twee punten, die aan dezelfde zijde van het vlak liggen. Uit het axioma volgen 3 stellingen, gelijkkluidend met die, welke volgden op het 2de axioma van het platte vlak, als we daarin „lijn” door „vlak” vervangen, en „vlak” door „ruimte”.

Stelling. Een stand van rechte lijn en plat vlak is mogelijk, waarbij zij een en niet meer dan dat eene punt gemeen hebben.

Bewijs. Zij U een plat vlak, P een punt buiten het vlak U, Q een punt van het vlak U. De rechte lijn PQ heeft nu met het platte vlak U het punt Q gemeen en ze kan er geen tweede punt mee gemeen hebben, omdat zij in dat geval geheel in U zou liggen (definitie v. h. platte vlak), terwijl we toch een punt P der rechte kunnen aanwijzen, dat niet tot het vlak behoort.

Bepaling. Men zegt, dat een rechte lijn en een plat vlak elkaar *snijden*, indien zij een en niet meer dan een punt gemeen hebben.

Bepaling. Wanneer een rechte lijn en een plat vlak elkaar snijden, dan noemt men het gemeenschappelijke punt het *snijpunt* van lijn en vlak.

Stelling. Een stand van twee vlakken is mogelijk, waarbij die vlakken de punten eener rechte lijn, en geen ander punt, gemeen hebben.

Bewijs. Zij U een plat vlak, A en B twee punten van U, C een punt buiten U. Breng een vlak V door A, B en C. De vlakken U en V hebben nu de punten A en B, dus (definitie v. h. platte vlak) alle punten der rechte AB gemeen. Zij hebben echter geen punt buiten AB gemeen, omdat zij anders zouden samenvallen (volgens bewezen stelling), terwijl we toch een punt C kunnen aanwijzen, dat wel tot V, maar niet tot U behoort.

Bepaling. Men zegt, dat twee platte vlakken elkaar *snijden*, indien zij de punten eener rechte en geen punt daarbuiten gemeen hebben.

Bepaling. Wanneer twee platte vlakken elkaar snijden, dan noemt men de rechte, die zij gemeen hebben, de *snijlijn* dier vlakken.

Stelling. Twee platte vlakken, die een punt gemeen hebben en niet geheel samenvallen, hebben de punten eener rechte gemeen, welke door dat punt gaat en geen punt daarbuiten.

Bewijs. U en V zijn de beide vlakken; zij hebben het punt P gemeen. We trekken door P een rechte l , die in U ligt; mocht zij ook in V liggen, dan zou het bestaan van de rechte, die aan U en V gemeen is, reeds aangetoond zijn; in dat geval zou een tweede rechte door P in U niet óók in V liggen, omdat anders U en V zouden samenvallen. Ligt l niet in V, dan nemen we op l een punt A aan de eene zijde van V gelegen en een punt B aan de andere zijde van V. Voorts trekken we in U uit P een halve rechte, die niet tot l behoort en niet in V ligt, doch aan dezelfde zijde van V als het punt A. Op deze halve rechte nemen we een punt C, dat niet met P samenvalt. De punten C en B liggen nu aan verschillende zijden van V, dus heeft het lijnstuk CB met V een punt Q gemeen. Dit punt kan niet met P samenvallen, omdat anders de rechten CB en l twee punten gemeen zouden hebben, nl. P en B, en dus geheel zouden samenvallen, terwijl toch het punt C wel op CB, doch volgens constructie niet op l ligt. De vlakken U en V hebben twee verschillende punten P en Q gemeen, dus ook de rechte lijn PQ. Zij hebben niet nog een punt buiten die rechte gemeen, omdat zij anders geheel zouden samenvallen, hetgeen met de onderstelling in strijd is.

Stelling. Een stand van twee rechte lijnen is mogelijk, waarbij er geen vlak bestaat, dat de beide rechten tegelijk bevat.

Bewijs. Zij U een plat vlak. We kiezen in vlak U een rechte l en een punt P; P wordt niet op l gekozen. Vervolgens trekken we door P een rechte m , die vlak U snijdt. Er bestaat nu geen vlak V, dat l en m tegelijkertijd bevat; immers zou zulk een vlak met vlak U moeten samenvallen, omdat de vlakken een rechte en een daarbuiten gelegen punt (l en P) gemeen hebben; echter vallen de vlakken niet samen, want m ligt wel in V, doch niet in U.

Bepaling. Men noemt twee rechten *kruisend*, als er geen plat vlak bestaat, dat beide bevat.

Stelling. Door een punt buiten een rechte lijn gaat steeds een en slechts een rechte lijn, die met de eerste evenwijdig is.

Bewijs. Zij l de gegeven rechte, P het gegeven punt. We brengen het vlak U door l en P en trekken door P in U l' evenwijdig met l .

Dat l' de eenige lijn is, die aan de vraag voldoet, toont men aldus aan: volgens definitie zijn twee evenwijdige lijnen in een plat vlak gelegen; dit vlak is echter door de rechte l en het punt P geheel bepaald, nl. het vlak U . We hebben dus slechts in U te zoeken, en volgens het evenwijdigheidsaxioma is er in het platte vlak door P slechts één rechte evenwijdig met l .

Stelling. Een stand van lijn en vlak is mogelijk, waarbij zij geen enkel punt gemeen hebben.

Bewijs. Zij U een plat vlak, l een rechte in U , P een punt buiten U . We trekken door P l' evenwijdig met l en zullen nu aantoonen, dat l' met U geen punt gemeen heeft. Daartoe brengen we het vlak V door l' en l . De vlakken U en V hebben nu geen andere punten gemeen dan die hunner snijlijn l . Een gemeenschappelijk punt van l' en U zou gemeen zijn aan U en V , dus tot l moeten behooren, maar l' en l hebben geen punt gemeen.

Bepaling. Men noemt een rechte evenwijdig met een plat vlak, wanneer ze geen punt met het vlak gemeen heeft.

Stelling. Een stand van twee vlakken is mogelijk, waarbij die vlakken geen enkel punt gemeen hebben.

Bewijs. Zij U een plat vlak, l en m twee snijdende rechten in U en P haar snijpunt. Zij voorts Q een punt buiten U . We trekken door P de rechten l' en m' evenwijdig opvolgend met de rechten l en m en brengen een vlak U' door l' en m' . We zullen nu aantoonen, dat U en U' geen punt gemeen hebben. Indien U en U' een punt gemeen hadden, dan zouden ze een rechte lijn n gemeen hebben. Deze rechte n is in U' gelegen en zou ten minste één der lijnen l' en m' snijden; laat het l' zijn. Dan had l' met n , dus ook met vlak U een punt gemeen, hetgeen volgens de vorige stelling in strijd is met het feit, dat l' door een punt buiten U evenwijdig met een lijn van U getrokken is.

Bepaling. Twee vlakken worden *evenwijdig* genoemd, als zij geen punt gemeen hebben.

Wij hebben dus aangetoond de volgende mogelijke standen van lijnen en vlakken:

- Twee vlakken:*
- A. géén punt gemeen (evenwijdigheid).
 - B. één rechte gemeen zonder meer, waartoe reeds kan besloten worden als de vlakken één punt gemeen hebben (snijding).
 - C. alle punten en rechten gemeen, waartoe o.a. reeds kan besloten worden, als zij één rechte en één punt daarbuiten gemeen hebben (bedekking).

- Twee rechten:*
- A. niet in één vlak gelegen, dus ook geen punt gemeen (kruising).
 - B. wel in één vlak gelegen.
 - B₁. geen punt gemeen (evenwijdigheid).
 - B₂. een punt gemeen zonder meer (snijding).
 - B₃. alle punten gemeen, waartoe reeds kan besloten worden zoodra zij 2 punten gemeen hebben (bedekking).

- Rechte en vlak:*
- A. geen punt gemeen (evenwijdigheid).
 - B. een punt gemeen zonder meer (snijding).
 - C. alle punten der rechte in het vlak, waartoe reeds kan besloten worden, zoodra zij 2 punten gemeen hebben (incidentie).
-

VOOR HET LAATST TWEE VRAAGSTUKKEN?

Tot en met 1916 gaf men voor het vak Algebra voor het eind-examen H.B.S. met vijfjarigen cursus drie vraagstukken te maken in 3 uur; van 1917—1923 één in 1 uur, als we voor de beide vraagstukken over Driehoeksmeting ook elk 1 uur rekenen; sinds dien zijn de vakken weer gescheiden en sinds geeft men twee algebra-sommen, te maken in 2 à $2\frac{1}{2}$ uur; we kunnen dus gerust zeggen, dat men per vraagstuk een vol uur rekent. Uiteraard vraagt men slechts naar zaken, waarvan men vrij zeker is, dat de stof behandeld is, hetgeen voor een schoolexamen natuurlijk niet anders kan. Het ligt dus in de reden, dat men naar meer dan twee zaken een onderzoek instelt; immers men kan slecht enkelvoudige vraagstukken geven, waaraan een uur werk zit, tenzij deze veel cijferwerk eischen. Onder deze laatste kunnen we alleen de vraagstukken over samengestelden intrest rangschikken, zoolang men zich stelt op het verouderde standpunt, dat deze niet mogen worden opgelost op de eenvoudigste en de beste wijze, nl. met behulp van rentetafels.

Men zal dus ontwaren, dat de andere vraagstukken eigenlijk verbindingen zijn van meerdere vraagpunten. We nemen als voorbeeld het eerste vraagstuk van 1916.

1916 (nr. 1) Van de vierkantsvergelijking

$$A(\sqrt{3} - \sqrt{2})x^2 + \frac{B}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}x + C = 0$$

is gegeven:

$$A = \sqrt[3]{49 + 20\sqrt{6}},$$

B = de som der oneindig voortlopende meetkundige reeks

$$8\sqrt{3} + (8\sqrt{6}) \times 3^{-1/2} + 16 \times 3^{-1/2} + \dots \text{ enz.}$$

Het verschil der wortels is

$$(6\sqrt{6})^{\log 10 - 2\log \sqrt{5} + \log \sqrt{\log 18 + \log 72}},$$

waarbij als grondtal van het logarithmenstelsel 6 is aan te nemen.

Gevraagd de waarde van C te berekenen.

Men onderzoekt hierin:

1. wortelvormen, aan het begin, in het tweede punt en in het laatste punt; van het goede een beetje te veel;
2. bekendheid met de formule $s = \frac{a}{1-r}$ van een convergente meetkundige reeks;
3. eigenschappen van logaritmen;
4. eigenschappen van de wortels van een vierkantsvergelijking;
5. oplossing van een vierkantsvergelijking.

De vragen 1—4 moeten alle goed zijn opgelost, anders mislukt nr. 5.

Tegen zoo'n aaneenrijging van vraagpunten in één opgave bestaan m.i. ernstige bezwaren; het gevaar is lang niet denkbeeldig, dat een leerling niet op al te goeden voet staat met vormen als

$$(6\sqrt{6})^{\log 10 - 2\log \sqrt{5} + \log \sqrt{\log 18 + \log 72}},$$

(ik zou het hem bijna als een deugd aanrekenen), en alleen daarom zich niet waagt aan het vraagstuk, hoewel hij vier van de vijf onderdeelen wel aandurft; hij werpt zich op het andere vraagstuk. Stel, dat hij dat maakt en nog wat maakt van de vijf vragen in nr. 1 vervat, dan zal zijn werk (het bevat altijd wat tarra) met 5, hoogstens 6, worden betaald. Beteekent dat nu, dat hij maar amper aan voldoende is? Zeker niet; als het eerste vraagstuk gesplitst was in vijf enkelvoudige vragen, die elk op zich zelf beoordeeld werden, dan had hij er daarvan 4 goed gemaakt, zeker 3. Nu mist hij de helft, omdat hij in $\frac{1}{6}$ van één der opgaven niet thuis is. Gewoonlijk is het tweede vraagstuk ook een samenstelling van meerdere vragen; als het gaat over samengestelden intrest, een geliefd onderwerp, dan beteekent dit, dat men van hem eischt, dat hij weet:

$$1) \quad s_n = a \frac{r^n - 1}{r - 1};$$

- 2) dat hij een lineaire vergelijking kan oplossen, bv.

$$x \times 1,05^6 \frac{1,05^{10} - 1}{0,05} = 1000 \times \frac{1,05^6 - 1}{0,05};$$

- 3) dat hij den eindvorm met logaritmen kan uitrekenen, bv.

$$x = \frac{1000(1,05^6 - 1)}{1,05^6(1,05^{10} - 1)}; \text{ alweer drie vragen dus.}$$

Geeft men dus een vraagstuk als op blz. 263 is afgedrukt en een over samengestelden intrest, dan wordt onderzocht: 1) wortelvormen;

- 2) $s = \frac{a}{1-r}$; 3) eigenschappen van logaritmen; 4) eigenschappen van de wortels van een vierkantsvergelijking; 5) de oplossing daarvan; 6) $s_n = a \frac{r^n - 1}{r - 1}$; 7) oplossing van een lineaire vergelijking; 8) het cijferen met logaritmen.

Deze alle acht kunnen en mögen worden gevraagd, daarop zijn de leerlingen afgericht en ook op de keus en de zwaarte van elk afzonderlijk valt niet de minste aanmerking te maken. De leerlingen, die 6 van deze 8 vragen goed beantwoorden, hebben recht op een goed cijfer; volgens de tegenwoordige regeling is het echter mogelijk, dat hij ze alle 8 kent, zich echter in een onderdeel van elk der twee sommen vergist en geen van beide sommen goed maakt en een onvoldoende krijgt. Stel, dat hij zet $\sqrt[4]{49 + 20\sqrt{6}} = \sqrt[4]{49 + 2\sqrt{600}} = \sqrt{\sqrt{25} + \sqrt{24}} = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} = \sqrt{5} + 1$, in plaats van $\sqrt{3} + \sqrt{2}$; een foutje, dat nogal voorkomt; $\sqrt{6} + 2\sqrt{5}$ en $\sqrt{5} + 2\sqrt{6}$ kennen ze beide zoo goed, dat ze de uitkomst er dadelijk achterschrijven; dat foutje mag niet voorkomen, zeker niet, maar het komt voor. Voor het maken van het vijfledige vraagstuk heeft deze fout tot gevolg, dat hij in elk geval $\frac{2}{5}$ van de som mist, want de uitkomst moet nog eens worden gebruikt. Gaat een leerling pas de som in het net schrijven, als hij deze op het klad goed uitgekregen heeft, dan komt er niets op het papier, dat hij inlevert; nog wat tarra in de tweede som en zijn leeraar moet hem een 4 geven en deze zegt: „daar begrijp ik niets van; hij had toch zeker werk voor een 7 of een 8 kunnen maken”, en de leeraar geeft den steller van de vraagstukken en den raadgevers van de inspecteurs de schuld; terecht.

Er is alles tegen, bij mijn weten niets voor, om samengestelde sommen te geven, elk te maken in een uur; ik zie geen enkel voordeel; het nadeel heb ik aangegeven en ik hoop, dat men voortaan breekt met de vraagstukken op te geven, als thans gebruikelijk is. Het euvel dateert al van jaren terug, maar het neemt steeds scherpere vormen aan; in Gerrits Eindexamenopgaven ziet men al meerdere vraagpunten in de opgaven uit de vorige eeuw; over het geheel steken deze echter gunstig af bij die van de laatste 25 jaar; vooral na 1900 beginnen de leelijke sommen met veel cijferwerk en meerdere onderdeelen; het algebra-werk werd logger, lomper en tot op

heden is er weinig verandering ten goede te bespeuren; heel veel vraagstukken zijn typische voorbeelden van „hoe het niet moet”; neem bv. 1904 (nr. 3). Los x en y op uit:

$$\left(\frac{6x}{2x+y}\right)^{\log 5} + \left(\frac{6x}{2x+y}\right)^{-\log 5} = \log 625$$

en $\log \log (x^2 + xy + y^2) = \log 25^{2 \log 2} + \log (\log 4 - \log 2)$.

Het grondtal van het logaritmenstelsel is 25.

1906 (nr. 1). Bereken met behulp van logarithmen:

$$x = (-2,1475)^5 \sqrt[17]{(-0,87614)^4} + \sqrt[17]{1,8792^3 - \frac{\sqrt{0,25107}}{0,10763}}^{11}.$$

1906 (nr. 2). Welke is in hare eenvoudigste gedaante de vierkantsvergelijking, die tot wortels heeft:

$$\frac{3 \sqrt[17]{(5 + 2\sqrt{5}) + \sqrt{(5 - 2\sqrt{5})}}}{\sqrt[17]{6 + 4\sqrt{5} - \sqrt{(36 - 16\sqrt{5})}}} \text{ en } \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt[17]{(97 - 56\sqrt{3})}}?$$

1911 (nr. 2). Bepaal de waarden van x , die voldoen aan de vergelijking:

$$x^{\log(x)^2} + x^{\log x} - 84 = \log 60 - \log 24 + \log 4 - \frac{5 \log 5}{\log 0,01} \times \frac{10^{\log 4}}{\log 25}.$$

1914 (nr. 1). Van een evenredigheid is de eerste term $4a$, waarin a de limiet is van de oneindig voortlopende reeks:

$$\frac{7}{5} + \frac{17}{200} + \frac{7}{500} + \frac{17}{20\,000} + \frac{7}{50\,000} + \frac{17}{2\,000\,000} + \dots$$

De tweede term is gelijk aan $125^5 \log 2 + 3^9 \log 16$.

De derde term is de positieve wortel van de vergelijking:

$16x^2 - 56x + p = 0$, waarvan gegeven is, dat het verschil van de vierkanten der wortels = 14 is.

Welke is de vierde term?

1929 (nr. 1). Bereken p , q en r als gegeven is, dat:

a. p is gelijk aan den zesden term van de rekenkundige reeks, waarvoor $S_n = \frac{1}{3}n(n+1)$; hierin stelt S_n voor de som van de eerste n termen dezer rekenkundige reeks:

b. $q = {}^5\log \frac{1}{25} - {}^7\log 81 \times {}^3\log 7 - {}^2\log 0,01$, waarin $g = \sqrt[17]{0,1}$ is;

c. r gevonden wordt uit de vierkantsvergelijking $16x^2 + 3x + r = 0$, als men weet, dat de wortels van deze vergelijking elkaars omgekeerden zijn.

Substitueer daarna de gevonden waarden voor p , q en r in de vergelijking $px^2 + qx + r = 0$. Als x_1 en x_2 de wortels zijn van de

vergelijking, die door deze substitutie ontstaat, stel dan een nieuwe vierkantsvergelijking samen, waarvan de beide wortels respectievelijk gelijk zijn aan $x_1^3 + 2$ en aan $x_2^3 + 2$ zonder daartoe x_1 en x_2 te berekenen.

Ik heb er maar een stuk of wat uitgenomen; de rest is niet veel beter; vooral die laatste som van 1929 doet de deur dicht. Men vraagt naar:

- a. het begrip s_n van een rekenkundige reeks;
- b. het begrip logaritmie;
- c. de eigenschappen van de wortels van een vierkantsvergelijking;
- d. de transformatie van een vierkantsvergelijking.

Een leerling, die enkel weet $l = a + (n-1)v$ en $s = \frac{1}{2}n(a+l)$, waarom zich in verouderde boeken de heele behandeling beweegt, zit radeloos verlegen met de eerste vraag . . . het examen, een tocht met hindernissen, begint er al met een, waar hij niet overheen komt; natuurlijk heeft dit op den armen jongen een allerslechtsten invloed; „verder, ja, b , c , d zijn gemakkelijk”. Een ander, die niet is afgericht op ${}^a\log b \times {}^b\log c = {}^a\log c$ (dressuur alleen leidt hier tot het doel), omdat zijn leeraar dat volstrekt onnoodig acht gezien uit den ooghoek van het aanbrengen van wiskundige begrippen, wel, die ziet tegen b op. Een derde vergist zich bij het uitwerken van b , enz. enz. Om in de helft van het werk te falen, is het al voldoende, dat de leerling een kwart mist van de vereischte kennis of vaardigheid of handigheid voor die helft noodig, tot groote schade van den candidaat, maar tot . . . , ja, tot wiens voordeel eigenlijk? Dat wou ik wel eens hooren. Ik betwijfel of daar een voldoende antwoord op komt.

Wat is er nu tegen om deze eindexamensom aldus op te geven:

1. Van een rekenkundige reeks is gegeven, dat $s_n = \frac{1}{3}n(n+1)$ is; onder s_n wordt verstaan de som van de eerste n termen der reeks; bereken den zesden term.
2. Bereken ${}^5\log \frac{1}{25} - {}^7\log 81 \times {}^3\log 7 - \sqrt[3]{0.1} \log 0.01$.
3. Van de vierkantsvergelijking $16x^2 + 3x + r = 0$ zijn de wortels elkaars omgekeerde; bereken r .
4. Gegeven de vergelijking $3x^2 + 5x + 1 = 0$, gevraagd de vierkantsvergelijking, waarvan de wortels zijn $y_1 = x_1^3 + 2$ en $y_2 = x_2^3 + 2$, zoo mogelijk zonder de wortels uit te rekenen.

Men zou dan allicht vraag 3 door een andere vervangen; het

vraagstuk 1916 nr. 1 blz. 263, zit vol met wortelvormen; zoo iets kon dan niet voorkomen.

In 1930 luidde het eerste algebra-vraagstuk:

1930 (nr. 1). Elimineer x , y en z uit de vergelijkingen:

$$3x + z = 10$$

$$2x - y - 2z = a$$

$$x + y + z - u = 6$$

$$x + y + z^2 = b;$$

stel daarna de betrekking op, die tusschen a en b moet bestaan, opdat het product van de wortels der vergelijking in u , die door eliminatie van x , y en z ontstaan is, gelijk aan 1 zij.

Het blijkt, dat men wenschte te onderzoeken of de leerling weet, hoe hij moet oplossen 3 lineaire vergelijkingen met 3 onbekenden, nl.:

$$\begin{cases} 3x + z = 10 \\ 2x - y - 2z = a \\ x + y + z = 6 + u; \end{cases}$$

verder (de substitutie van de uitkomsten in $x + y + z^2 = b$ is cijferwerk, meer niet), of hij weet, dat het product van de wortels van de vierkantsvergelijking $mx^2 + nx + l = 0$ gelijk is aan l/m ; samen twee vragen met wat cijferwerk. Of ik tegen deze opgave ook bezwaar heb? Niet veel, maar toch dit, dat de tweede vraag enkel goed kan worden beantwoord, als de eerste goed is en . . . al heb ik geen stuk werk gezien, ik vermoed, dat vele leerlingen x , y en z hebben opgelost uit

$$\begin{cases} 3x + z = 10 \\ 2x - y - 2z = a \\ x + y + z^2 = b, \end{cases}$$

om daarna de uitkomsten in $x + y + z - u = 6$ te substitueeren. Maar ze zijn waarschijnlijk bijna allen vastgelopen bij deze pogingen; ze krijgen voor z twee wortelvormen; deze gezet in $x + y + z - u = 6$ eischt dan het rationaal maken van de betrekking. Hindert niet, dat vastloopen, neen, als men de resultaten maar niet voor een tweede vraag noodig had; ergo, de helft van de eerste som mis, gevolg: de helft van het heele werk mis.

Ik neem nu de tweede som:

1930 (nr. 2). „In een meetkundige reeks van n positieve termen, waarvan de laatste term 1 is, schrijft men tusschen elk tweetal opeenvolgende termen twee nieuwe getallen, die met deze twee

termen een rekenkundige reeks vormen. De som van al de op deze wijze aan de oorspronkelijke reeks toegevoegde nieuwe getallen is 129 kleiner dan 2 maal de som van de oorspronkelijke reeks. Laat zien, dat uit de gegevens volgt, dat de oorspronkelijke reeks een afdalende is.

Als nog gegeven is, dat de grenswaarde der som van die reeks bij toenemende waarde van het aantal termen 256 is, vraagt men haar reden te bepalen. Hoeveel termen moet men van deze voortdurend voortlopende reeks minstens nemen om een som te verkrijgen, die minder dan 0,000001 van de gegeven grenswaarde verschilt?"

In deze lange, lange som (ook dat is verkeerd) wordt onderzoek gedaan naar:

a. s_n van de meetkundige reeks;

b. als p , q , r en s een rekenkundige reeks vormen, of ze dan weten, dat $p + s = q + r$ is;

c. bekendheid met $s = \frac{a}{1-r}$;

d. oplossing van een ongelijkheid.

Ik geef de oplossing van het eindexamenvraagstuk als volgt:

Stel de reeks

$$r^{n-1} + r^{n-2} + \dots + r^2 + r + 1 \dots \dots \quad (\text{I});$$

de som noemen we s_n ; inlassching tusschen elk tweetal termen van twee termen, bedoeld in de opgave; geeft:

$$r^{n-1} + a_{n-1} + b_{n-1} + r^{n-2} + a_{n-2} + b_{n-2} + r^{n-1} + \dots + r + a_1 + b_1 + 1 \dots (\text{II});$$

nu is

$$a_{n-1} + b_{n-1} = r^{n-1} + r^{n-2}$$

$$a_{n-2} + b_{n-2} = r^{n-2} + r^{n-3}$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$a_2 + b_2 = r^2 + r$$

$$a_1 + b_1 = r + 1.$$

De som der ingelaschte termen is $2s_n - (r^{n-1} + 1)$; deze is volgens het gegeven 129 kleiner dan $2s_n$; we hebben dus $r^{n-1} + 1 = 129$ en $r^{n-1} = 128$; n is een natuurlijk getal en minstens 2; $r = \sqrt[n-1]{128}$; elke wortel uit een getal grooter dan 1 is grooter dan 1; dus is $r > 1$; de reeks (I) is van achter af opklimmend, van voren af dus afdalend.

En nu: „als nog gegeven is, dat de grenswaarde der som van die reeks bij toenemende waarde van het aantal termen 256 is, vraagt

men haar reden te bepalen". Hier zit ik vast en menige candidaat zat ook vast; *die* is een aanwijzend voornaamwoord; wordt (I), wordt (II) aangewezen? Dat is niet gegeven; neem (I); dat is een veelterm, zoodat de zin daarop niet slaat; evenmin op (II).

Uit de bewoordingen: „grenswaarde” en „toenemende waarde van het aantal termen”, moet men opmaken, dat de steller der opgave en zij, die met zorg keuze deden uit alle voorgestelde vraagstukken, noch (I), noch (II) bedoelden, maar $r^{n-1} + r^{n-2} + \dots + r + 1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \dots + \frac{1}{r^p} \dots$ (III), waarin p steeds toeneemt. Volstrekt ongeoorloofd vind ik het om examenvraagstukken op te geven, waarin dergelijke slordigheden voorkomen.

We lossen nu verder op in de onderstelling, dat de reeks (III) bedoeld zal zijn. $s = \lim_{p \rightarrow \infty} s_p = \frac{r^{n-1}}{1-r} = 256$; de teller is 128, de noemer dus $\frac{1}{2}$ en $r = \frac{1}{2}$; de reeks (I) is dus $128 + 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 255$.

We komen nu tot de derde vraag, niet te beantwoorden door hen, die met een van beide vorige geen weg wist. „Hoeveel termen moet men van deze voortdurend voortlopende reeks minstens nemen om een som te krijgen, die minder dan 0,000001 van de gegeven grenswaarde verschilt?”

In de opgave is het woord *deze* duidelijk, als het woord *die* in de vorige vraag duidelijk was; laten we maar doorgaan. Van de reeks (III) is de limiet van $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ gelijk aan 1 en het is nu de vraag, waar we moeten afbreken, opdat de som der volgende termen minder dan $\frac{1}{10^6}$ zal zijn. Noem den eersten dier volgende

termen $\frac{1}{2^{x+1}}$, dan hebben we op te lossen

$$\frac{\frac{1}{2}^{x+1}}{1 - \frac{1}{2}} < \frac{1}{10^6} \text{ of } \frac{1}{2^x} < \frac{1}{10^6} \text{ of } 2^x > 10^6;$$

$$x \log 2 > 6;$$

$$x > \frac{6}{0,301};$$

x is het natuurlijke getal, dat volgt op 19,, dus is het 20. We breken af bij $\frac{1}{2^{20}}$, zoodat het heele aantal termen van reeks (III) gelijk is aan $8 + 20 = 28$.

In dit tweede vraagstuk zijn, zooals reeds werd opgemerkt, weer drie vraagpunten en weer vraag ik: wat is er tegen om in plaats daarvan op te geven drie sommetjes als deze:

1. De eerste vraag onveranderd, dus tot het bewijs, dat de reeks afdalend is.

2. Van een convergente meetkundige reeks is $r = \dots$, $s = \dots$; bepaal die reeks.

3. Gegeven de reeks $128 + 64 + 32 + \dots$; als men de som der eerste k termen voorstelt door s_k , voor welke waarden van k is dan $s - s_k < \frac{1}{10^6}$?

Elk der vragen kan wat meer werk eischen, dan in de opgave van het eindexamen gevraagd werd. En men zou, er is al meer op gewezen, geen drie vragen stellen over hetzelfde hoofdstuk; ook dat is voor hen, die daarin niet al te best thuis zijn, een bezwaar, hoewel niet zoo groot als het feit, dat de uitkomst van a gebruikt moet worden voor b en deze beide voor c . Door splitsing worden beide bezwaren geheel ondervangen. Indien men wil onderzoeken of een leerling van 6 onderwerpen op de hoogte is, geef hem dan 6 vragen. Laat niet het ontbreken of de foute beantwoording van één vraag oorzaak zijn, dat twee of meer andere niet bewerkt worden, zoodat het niet kennen van $\frac{1}{6}$ e deel gewroken wordt met het falen voor de helft; ik zeg niet: zich wreekt met het missen van de helft. Hier ligt de schuld in haar geheel bij den steller der vragen en niet bij den leerling. Ieder weet dit, al jaren, tientallen jaren, ouderen onder ons; de leeraren spreken er over met hun leerlingen, met elkaar, velen mopperen, weinigen hoorbaar. Ik maak mij nu de spreektrumpet van de velen en verzoek den inspecteurs van het M.O. het daarheen te leiden, dat 1930 het laatste jaar is geweest, waarin men 6 à 8 vraagstukjes kon opgeven in twee sommen, waarbij de antwoorden van de eerste als gegevens voor de volgende optreden. Laat men opgeven voor 2 uur 6 à 8 enkelvoudige vraagstukjes met behoorlijke afwisseling. Daarmee wordt tevens de weg geopend voor de hoognoodige ontwikkeling van het vak; geeft men een nieuw vraagstuk als nr. 6, dan wordt de kans van slagen niet te zeer verkleind; er blijven er nog altijd 5 over; men doet dit wel, indien men handelt als in 1929 met de eerste vraag van de eerste som, waarover ongetwijfeld velen gestruikeld zijn. In plaats van een examen als in 1930 zou men dan bv. het volgende stel kunnen opgeven, dat ik voor het

gemak, kies uit de algemeene herhaling van het derde deel der Nieuwe Schoolalgebra.

1. Van een reeks is $S_n = 3n^2 - 5n$; wat is dat voor een reeks? Hoeveel termen moet men tusschen elk tweetal inlasschen, opdat er in de nieuwe reeks een term nul voorkome?

2. Welke waarde moet men in de vergelijking $2x^2 - (2m+1)x + m^2 - 9m + 39 = 0$ aan m geven, opdat de eene wortel het dubbele zij van de andere? Voor de gevonden waarde de vergelijking op te lossen.

3. Verdeel $\sqrt{20 + 8\sqrt{5}}$ in de uiterste en middelste reden.

4. Bereken x uit: $x^{\sqrt{3}} = \frac{0,00245}{\sqrt[3]{0,00425}}$.

5. Iemand, die een schuld van f 6000, rentende 4% 's jaars, samengestelde intrest, te betalen heeft, wil kapitaal en intrest afdoen in twaalf gelijke halfjaarlijksche termijnen; hoeveel moet hij telkens betalen?

6. Welke geheele positieve waarden kan men aan x geven, opdat $\frac{3x+11}{5}$, $\frac{7x-13}{6}$ en $\frac{9x+10}{7}$ tegelijk geheele getallen worden?

Zie, deze zes moet ieder kunnen maken; de leerstof is behandeld.

Voeg er nu als nr. 7 nog bij een van de volgende, ook uit de algemeene herhaling van de Nieuwe Schoolalgebra, deel III:

7a. Voor welke waarden van x is $f(x) = \frac{x^2 + a^2}{x - a}$ gelijk aan $f(b)$?

7b. Op een rechte liggen 5 punten A, B, C, D en E; $AB = \log pq$; $BC = \log qr$; $CD = \log rt$; $DE = \log tp$; als F het midden is van AE, hoe lang is dan AF?

7b. Gegeven $2x + 3y = 5$; gevraagd de minimumwaarde van $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2$; eveneens de maximumwaarde van $2x^2 - 7y^2$.

7c. $f(x, y, z)$ is een homogene symmetrische functie van den tweeden graad in x , y en z ; bereken deze, als $f(0, 1, 1) = 5$ en $f(0, 0, 1) = 6$ is.

7d. Aan welke betrekking moeten de coëfficiënten van $px + qy + r = 0$ en $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ voldoen, als deze vergelijkingen bij oplossing twee gelijke waarden voor x geven? Zijn de waarden voor y dan ook gelijk? Wat beteekent dit vraagstuk grafisch?

7e. Als $f(x) \equiv \frac{1}{2}(3^x + 3^{-x})$ is, druk dan $f(2x)$ uit in $f(x)$.

7f. Onder welke voorwaarde zal $y = mx + c$ de parabool $y^2 = 4ax$ raken? ($a \neq 0$).

7g. Gegeven is, dat $(x + y + z)^3 = \Sigma x^3 + a \Sigma x^2y + bxyz$ is; bereken a en b zonder op de gewone wijze $x + y + z$ tot de derdemacht te verheffen. Neem bijzondere getallenwaarden voor x , y en z .

7h. Op een halve rechte OP neem ik de punten $A_1, A_2, A_3, \dots$ met abscissen van O af gemeten opv. $a_1, a_2, a_3, \dots$; deze voldoen aan de voorwaarde $a_k = 4a_{k-1} - 3a_{k-2}$ te beginnen met $k = 3$. Vormen de lijnstukken $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots$ een reeks? Druk $A_{n-1} A_n$ uit in a_1 en a_2 .

7i. De rechten $ax - by = 3$ en $3x + 7y = 1$ loopen evenwijdig; welke betrekking bestaat er tusschen a en b ?

De rechten $(p + 1)x - (2 + q)y = 3$ en $(3 + 2p)x - (2q - 5)y = 7$ loopen evenwijdig; men vraagt p en q uit te drukken in een zelfde veranderlijke.

7j. Onder welke voorwaarde gaan de grafieken van $x = ay + c$, $y = ax + b$ en $cx + by = 1$ door één punt? Onderstel $a \neq 1$.

7k. ABC is een rechthoekige driehoek; $\angle C = 90^\circ$; $AC = 10$ cm, $BC = 8$ cm; gevraagd op de hypotenusa een punt X, zoodanig gelegen, dat $\frac{1}{3}AX^2 + \frac{1}{2}BX^2$ zoo klein mogelijk is.

7l. Maak een grafiek van deze gegevens, bij waarnemingen verkregen:

x	0	1	2	3	4	5
y	0,7	1,4	2,7	4,6	7,5	10

Welke daarvan zal wel op een foute waarneming berusten? Ik onderstel, dat y tennaastebij door de vergelijking $y = ax^2 + bx + c$ met x is verbonden. Bereken a , b en c in tienden nauwkeurig.

7m. Voor welke waarde van k is $9x^2 - 3xy + ky^2 + 15x - 16y - 14$ het product van twee lineaire functies in x en y ?

7n. De grafiek van $y = a + bx + cx^2$ gaat door de punten (0,2), en (1,6) en de maximumwaarde treedt op voor $x = 2\frac{1}{2}$; bereken a , b en c .

7o. Kan men door geschikte keuze van x zorgen, dat de eerste term van $f(x) \equiv (x + b + c)(x + c + a)(x + a + b) + abc$ gelijk wordt aan $(-a)(-b)(-c)$? Los nu op de vergelijking $f(x) = 0$.

7p. Als $f(x) = 3x^2 - 5x + 4$ is, bereken dan $f(x - 2) + f(x) - 2f(x + 2)$ en los verder nog op de vergelijking $f(x) = f(x - 1)$.

7q. Volgt uit $x(1-x) = y(1-y) \dots (1)$, dat $x = y$ is? Wat is de meetkundige plaats der punten (x, y) die aan de voorwaarde (1) voldoen?

7r. Gegeven is, dat t recht evenredig is met $p \cdot v^{3/2}$; als $t = 224$ is voor $p = 28$ en $v = 16$, wat wordt t dan, als men neemt $p = 32$ en $v = 25$?

7s. De som van de eerste n termen van de reeks $1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, \dots$ is $(an^2 + bn)^2$, waarin a en b constanten zijn. Bepaal a en b . Daarna te berekenen: a) $\sum_{k=1}^{10} k^3$; b) $\sum_{k=10}^{30} k^3$.

7t. Als $f(x) = a + \frac{\log \log x}{\log b}$ is, dan is $f(x^b) = 1 + f(x)$. Bewijs.

7u. Voor welke waarde van x is $1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}$ een minimum?

Als men vast blijft houden en dat zal wel, aan hetzelfde schriftelijke examen voor het heele land, dan is dat de eenige manier, die de hoognoodige ontwikkeling mogelijk maakt, zoodat langzaam maar zeker afgestuurd wordt op het afsnijden van opgaven als de eerste twee sommen van 1906 (zie blz. 266), als die van 1914 nr. 1 (zie blz. 266) en zooveel andere in latere jaren opgegeven. En dat men, liefst eenigzins voortvarend, de vernieuwing bevordert, door 6 oude en 1 nieuwe gaandeweg te vervangen door 5 en 2, door 4 en 3, door 3 en 4; niet verder; daar kan men gerust tien jaar over doen; dan is er in tien jaar al meer voortgang dan in de laatste vijftig jaar.

Het bezit van het bewijs, dat men met vrucht de H. B. S. met vijfjarigen cursus heeft doorlopen, opent de poorten van de instellingen voor Hooger Onderwijs; dat doen ook de einddiploma's van Gymnasium en Lyceum en een goed afgelegd Staatsexamen, alles in het algemeen gesproken. De algebra-opgaven van Gymnasium en Lyceum en vooral die van het Staatsexamen steken over het geheel gunstig af bij de eindexamens H. B. S. met 5-jarigen cursus. Hoewel ook daar drie à vier opgaven regel is, zoo beperken deze zich elk tot hoogstens twee vraagpunten; vele opgaven zijn enkelvoudig. De vrijheid door het niet gebonden zijn aan het centrale examen, heeft tot gevolg gehad, dat de wiskunde zich op het Gymnasium en Lyceum heeft kunnen ontwikkelen; op de H.B.S. is dat vrijwel uitgesloten; de opgaven van 1900, zelfs van 1870, zullen in

1931, in 1960 nog het peil van het onderwijs aangeven. Men is in 62 jaar nog maar heel weinig afgeweken; als er afwijking is, is die niet ten goede. Het onderwijs is op vele scholen versteend en de leeraren, die o zoo graag eens ontlast zouden worden van sommen als (voorbeeld van wansmaak!): „Van de vergelijking $x^5 - 17x^3 +$

$$ax^2 + 52x + b = 0 \text{ is een der wortels } \lim \frac{x^2 - 8x + 15}{4(\sqrt{2x-6} - \sqrt{x-1})}$$

voor $x = 5$; een tweede wortel is

$$\lim \{ \sqrt[5]{5^4} \log 5 + (\sqrt[5]{5^4} \log 5)^2 + (\sqrt[5]{5^4} \log 5)^3 + \dots \},$$

als het aantal termen oneindig is.

Bepaal a en b en daarna de drie andere wortels van de vergelijking", wel die kunnen om te voldoen aan het centrale examen niet veel anders doen dan steeds hetzelfde weggetje gaan; zoo hier en daar een distel plukkend om daarmee hun leerlingen te lijf te gaan op het eindexamen.

Men kan een dubbel voordeel bereiken, als men volgende eind-examens in de algebra inricht aldus:

1. 6 à 8 enkelvoudige vraagstukken; geen van alle bewerkelijk; bij vraagstukken over samengestelden intrest is het gebruik van rentetafels toegestaan;

2. aan het slot 1 of 2, waarbij het enkel op een goed begrip aankomt; de onderwerpen vallen buiten de gewone schoolstof, zooals die nu nog wordt onderwezen; ze worden met een * in de opgaven gemerkt;

3. het goed oplossen van elk der vraagstukken met een sterretje verhoogt het cijfer met een punt of zoo iets; er moet vooreerst eenige aandrang worden gebezigd, opdat ze niet ongelezen blijven; de nieuwe moeten de minst bewerkelijke zijn; het idee moet er uit, dat algebra-cijferen algebra is.

Zooals het nu nog is, moet het gebeuren, dat een leerling allerlei fragmenten van een som goed heeft, geen van de twee goed en toch nog een voldoende cijfer haalt; het zonderlinge, dat daarin zit vooral voor buitenstaanders, wordt tevens opgeheven. Een enkelvoudige vraag is goed of fout opgelost; natuurlijk wordt elk geval afzonderlijk bekeken en zal een schrijffout, waarop voorgewerkt wordt, geen nul tot gevolg hebben; zulke overwegingen gelden thans in veel sterkere mate; daarover behoeven we niet te praten.

Aan het slot geef ik vraagstukken, die in andere landen recht geven om de Hooge School binnen te gaan; zonder eenig commentaar; het moet hiermee genoeg zijn.

31

1929.)

(DRIE UUR.

DEPARTEMENT VAN OPENBARE ONDERWYS.

KAAP DIE GOEIE HOOP.

Eksaminator :

Mnr. S. MASON,
M.A.

Moderator :

Professor A. BROWN,
M.A., B.Sc.

Skryf bo-aan op die eerste bladsy van u antwoordeboek, teenoor die woord "Eksamenvak". —

SEN. SERT. WISKUNDE (DEEL I).

Skryf bo elke antwoord die *nommer* oor van die vraag op die eksamenpapier.

1. (a) Teken met dieselfde asse, en 'n skaal van 'n halfduim as eenheid, die grafiese voorstelling van $4y = 10 - 3x - 3x^2$ van $x = -4$ tot $x = +3$ en van $7y - 5x = 9$.
 (b) Vind naasteby van die grafiese voorstelling, met 'n kort verklaring van u metode, (i) die numerieke waarde van y wat gelyke wortels gee vir die vergelyking $10 - 3x - 3x^2 = 4y$, (ii) die waardes van x wat $10 - 3x - 3x^2 = -24$ maak.
 (c) Vir watter reeks van waardes van x is
$$\frac{5x + 9}{7} > \frac{10 - 3x - 3x^2}{4} ?$$
2. (a) Vind die faktore van $abx^2 - (a^2 - ab - b^2)x - (ab - b^2)$ en van $(p - q)^3 - 2(p - q)^2 - 3(p - q)$.
 (b) Die Grootste Gemene Deler van twee algebraïese uitdrukkinge van die derde graad is $x^2 - 3x + 2$ en die Kleinste Gemene Veelvoud is $x^4 - 7x^3 + 9x^2 + 7x - 10$. Vind die twee uitdrukkinge in faktore.
3. (a) As dieselfde waardes van x en y die vergelykinge $mx + ky = 1$ en $nx + k = y$ voldoen, en ook $m + ny = x$, bewijs dat
$$k^2 + m^2 + n^2 = 1 - 2kmn.$$

 (b) Los, die gelyktydige vergelykinge op $x^2 + 3xy - y^2 = 3$ en $3x^2 - 2xy + 2y^2 = 7$. (Oplossings mag in 'n wortelvorm gegee word.)

4. (a) Gee, sonder bewys, die respektiewe voorwaardes opdat die wortels van die vergelyking $kx^2 + lx + m = 0$ (i) *eg*, (ii) *gelyk*, (iii) *omgekeerd*, (iv) *numeriek gelyk maar van teengestelde tekens* sal wees.
- (b) Los vir x die vergelyking op $\frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 - 2x + 1} = k$, en vind vir watter waardes van k die oplossinge *eg* is. Lei op dat, as x *eg* is, die breuk $\frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 - 2x + 1}$ nooit minder is as 'n sekere waarde en gee hierdie waarde.
- (c) As die wortels van die vergelyking $x^2 + rx + s = 0$ p en q is, en van $x^2 + bx + c = 0$ $p + 2$ en $q + 2$ is, bewys dat $r - b = 4$ en $s - c = r + b$.
5. (a) Vind die waarde van $(\sqrt[n]{a^m} \times \sqrt[m]{a^n})^{mn}$, en vind x as $x^{-3/5} = 16^{3/4}$.
- (b) Vereenvoudig $\left(\frac{p^{-1} - q^{-1}}{p^{-1} + q^{-1}} + \frac{p^{-1} + q^{-1}}{p^{-1} - q^{-1}}\right) \div \left(\frac{q}{p} + \frac{p}{q}\right)$.
- (c) Los die gelyktydige vergelykings op $x^{2/3} - y^{2/3} = 3$; $x^{1/3} y^{1/3} = 2$, met weglating van onegte oplossings.
6. (a) Met 10 as die grondtal, bewys dat $\log \frac{m^2}{n} = 2 \log m - n$.
- (b) Los die gelyktydige vergelykinge op $\log x - \log y = .6435$; $\log xy = 2.0414$.
- (c) Vind die waarde, as $a = 2.527$ en $b = .9456$, van $\sqrt[3]{(a^{-2} + 4)} \div b^3$.
7. (a) Wat moet by elkeen van die hoeveelhede a , b , en c bygevoeg word sodat die drie totale 'n gedurige eweredigheid sal vorm?
- (b) Die kante van 'n reghoekige liggaam is in die verhouding $l : m : n$, en die diagonaal deur die liggaam van hoek na hoek is c duime. Bewys dat die volume van die liggaam in kubieke duime is $\frac{lmnc^3}{(l^2 + m^2 + n^2)^{3/2}}$.
8. (a) As $x + y$ konstant bly, bewys dat xy 'n maksimum is as $x = y$.
- (b) As $x + \frac{1}{x} = y$, bepaal $x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}$ en $x^3 + 2 + \frac{1}{x^3}$ in terme van y , en vind dus hulle faktore.
- (c) Als $px^2 + qx + r = lx^2 + mx + n$ as $x = a$ of b of c , bewys dat $p = l$, $q = m$, $r = n$.

BROWN UNIVERSITY¹⁾

Examination for Admission

Elementary Algebra I and II

SEPTEMBER 17, 1928.

(Omit one question.)

1. (a) Simplify

$$\frac{\frac{1}{1+x}}{1 - \frac{1}{1+x}} + \frac{\frac{1}{1-x}}{\frac{x}{1+x}}$$

- (b) Combine and simplify without approximating roots:

$$\sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{8}} + \sqrt{12\frac{1}{2}} - \sqrt{1\frac{1}{8}}$$

2. Factor

(a) $(1 - x^3) - (3x - 3x^2)$.

(b) $20p^2 - 9qp^2 - 20p^2q^2$.

3. A certain sum of money is invested at 5% and another sum at 6%. The annual return from both investments is \$ 56. If both sums had been invested at 5½% the annual return would have been \$ 1. less. What are the two sums of money?

4. Given that $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, plot a graph showing how V varies with r if $\pi = \frac{22}{7}$ and $h = 2$. Read from the graph the values of r when $V = 7$.

5. In the expansion of $\left(\frac{2^{-1}}{x^{-1}} - \frac{x^{-1/2}}{3}\right)^7$ find the term which when simplified contains $x^{5/2}$.

6. A merchant has a cask full of wine. He draws out 8 gallons and fills the cask with water. Again he draws out 8 gallons and fills the cask with water. There are now 49 gallons of pure wine in the cask. How many gallons does the cask hold?

7. Solve: $\frac{x}{1+y} = \frac{3}{8}$; $\frac{y}{2+z} = \frac{4}{27}$; $\frac{z}{3+x} = \frac{1}{14}$.

8. Evaluate by means of logarithms

$$\sqrt[8]{\frac{38.42 \tan 62^\circ 14'}{.6733 \cos 51^\circ 56'}}$$

¹⁾ De Brown University zetelt in Providence (R. I.) U. S. A.

BROWN UNIVERSITY

Examination for Admission

Advanced Algebra

SEPTEMBER 19, 1925.

(Omit One)

1. How many different passenger tickets will a railway company need for use on a division on which there are 25 stations?

2. Determine m so that one root of

$$x^3 + 3x^2 + mx - 9 = 0$$

shall be the negative of another and solve the resulting equation for x .

3. Compute by Horner's Method to three decimal places the root between 2 and 3 of $x^3 + 2x - 20 = 0$.

4. Solve by determinants the equations

$$2x = y + z - 5$$

$$z = x - y$$

$$x + 2y + z + 1 = 0.$$

5. Express $\frac{z+1}{z^2+z+1}$ in the form $a+bi$ when $z=1+2i$.

6. In how many ways may nine books be arranged on a shelf so that (a) four of the books are always together; (b) two of the books are never together.

7. Show that the equation

$$x^3 + px + q = 0$$

where p and q are positive has but one real root and that root is negative.

C. ZIESEL

Practische Handelskennis

voor handelsscholen, cursussen en zelfonderricht

Prijs f 2.75, gebonden f 3.25

Als „Practische Handelskennis” wordt dit boek op den omslag aangeduid. En o. i. met recht. Hier is een man aan het woord, die gevoeld heeft wat aan sommige boeken ontbreekt, om den leerling den gewonen gang van zaken duidelijk te maken. Het is dan ook aan te bevelen, vooral voor hen, die door zelfstudie zich van deze stof willen meester maken.

Voor handelsscholen is het ook wel geschikt.

(Het M.U.L.O. Orgaan).

De schrijver van dit werk zegt in zijn voorwoord, dat hij in de bestaande leerboeken steeds een leemte heeft gevonden, n.l. het ontbreken van een duidelijk in het licht stellen van den gang van zaken van die verschillende handelingen, die dagelijks op een handelskantoor voorkomen. Hij heeft gemeend dit hiaat, al is het niet geheel, met dit werk aan te vullen. Wij gelooven, dat hij hierin uitstekend geslaagd is, want in deze beknopte uitgave worden alle voorkomende handelingen op een handelskantoor in den meest uitgebreiden zin van het woord behandeld.

De verschillende modellen bij het werk gevoegd, als vrachtbrieven, wicht-nota's enz. zullen de studie zeer vergemakkelijken.

(Het Centrum).

Zoo juist verscheen:

Over Stelsels Diophantische Ongelijkheden

door Dr. J. F. KOKSMA

Prijs. f 3.90

UITGAVEN VAN P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

ZOO JUIST VERSCHEEN :

OPGAVEN OVER THEORIE DER REKENKUNDE

(MET AANTEKENINGEN)

ten dienste van Kweekscholen en Cursussen
voor de hoofdacte

Verzameld en toegelicht door P. JANSEN

Derde druk - Prijs geb. f 2.75

Zoo juist verscheen:

P. WIJDENES en Dr. H. J. E. BETH

NIEUWE SCHOOL-ALGEBRA

DEEL III, 3e druk, geb. f 2.25

DEEL II, 4e druk, geb. f 2.25

Zoo juist verscheen:

P. WIJDENES

BEKNOPT MEETKUNDE

1e deel, 6e druk, met Gradenboog en Overzicht
gecartonneerd f 1.70

2e deel, 5e druk, met Gradenboog en Overzicht
gecartonneerd f 1.70

Oplossingen van de vraagstukken uit de Bkn.
Meetkunde, 2e druk f 1.00
Gratis voor docenten, die de boekjes gebruiken

Zoo juist verscheen:

HANDELSREKENEN

door A. A. D. BOUWHOF en J. C. LAGERWERFF

DEEL II, 3e druk f 2.90, geb. . . f 3.30

DEEL IV, 2e druk f 4.25, geb. . . f 5.00

UITGAVEN VAN P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN