EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN

J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

6e JAARGANG 1929/30, Nr. 1

P. NOORDHOFF — GRONINGEN

Prijs per Jg. van 18 vel f 6.—. Voor inteekenaars op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde en Christiaan Huygens f 5.—.

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken, verschijnt in zes tweemaandelijksche afleveringen, samen 18 vel druks. Prijs per jaargang *f* 6.—. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6.—) of op „Christiaan Huygens" (*f* 10.—) zijn ingeteekend, betalen *f* 5.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans-van-Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Het honorarium voor geplaatste artikelen bedraagt *f* 20.— per vel.

De prijs per 25 overdrukken of gedeelten van 25 overdrukken bedraagt *f* 3,50 per vel druks *in het vel gedrukt.* Gedeelten van een vel worden als een geheel vel berekend. Worden de overdrukken buiten het vel verlangd, dan wordt voor het afzonderlijk drukken bovendien *f* 6.— per vel druks in rekening gebracht.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

INHOUD.

De redactie heeft het genoegen in deze aflevering het portret te geven van Prof. G. MANNOURY; zij hoopt de portretten van al onze hoogleeraren den inteekenaars achtereenvolgens te kunnen aanbieden.

MATHEMATICS AND SCIENCE IN SECONDARY SCHOOLS OF ENGLAND AND WALES,

INCLUDING A BRIEF SURVEY OF THE TEACHING METHODS ADOPTED, AND THE MEANS BY WHICH BOYS MAY PROCEED FROM THE ELEMENTARY SCHOOL VIA THE SECONDARY SCHOOL TO THE UNIVERSITY.

BY

WILLIAM B. WYATT B.Sc, (LOND.), A. C. P.

The aim of this paper is to indicate, as fully as the space at my disposal permits, the fundamental features of the teaching of mathematics and science in British secondary schools, and to give an outline of the channels by which boys showing marked ability in these subjects may proceed from the elementary school to the University.

Before dealing directly with the subject, it is essential to point out as briefly as possible the relationship which exists between the elementary, central and secondary schools. This consideration necessitates a short historical review of the methods employed in establishing the present system of State aided education in the British tales.

At the beginning of the 19th century there was no state control of elementary education, the education at that time being administered by two voluntary societies — The National Society for Promoting the Education of the Poor in the Principles of the Established Church (founded 1811), and The British and Foreign School Society (1814).

The Reform Bill of 1832 raised the question of education, and in 1833 a sum of £ 20,000 was voted by Parliament for educational purposes to be administered by the above societies; but investigations after a few years disclosed a very unsatisfactory state of affairs. In 1862 as a result of Lowe's Revised Code, money grants were made by the State to schools, and the salaries of the staff depended upon the results of an individual examination of the pupils.

This examination consisted of specific tests in reading, writing and arithmetic in six gradations of difficulty. This system of "payment by results" seriously affected the progress of elementary education for many years, for the efforts of the teachers were thereby merely directed to bringing their pupils to a certain standard of attainment in these subjects alone. The dull scholars were urged on, whilst the clever ones were retarded, and the whole process became one of monotony and dead uniformity.

By this time it was realised that the administration of these educational societies was very inefficient, and in 1870 under Gladstone's first ministry the great Education Act[1]) was passed. This act empowered local authorities to levy an education rate and to elect their own School Boards which were to administer this rate for purposes of education in various districts.

Under the regime of the School Boards, the curriculum expanded, largely because of the writings of Herbert Spencer and Huxley. Special grants were made for pupils who passed in two of the following subjects: Geography, grammar, algebra, geometry, natural philosophy, physical geography, the natural sciences, political economy and languages. This special grant marked an important stage in the development of science teaching.

Uu to this time, owing to the varying ages and degrees of ability of the elementary school pupil, systematic science teaching had been practically an impossibility. It had resolved itself into a course of elementary instruction in Physical Science, consisting mainly of what were known as 'Object Lessons', which served as an introduction to the science examination then held by the Science and Art Department of South Kensington (London). Certain of these Board Schools with a science bias developed into a group called Organised Science Schools, which included not only 'higher grade' elementary schools but also many private and grammar schools attracted by the generous grant then available.

---

[1]) Hansard, CXCIX, p. 445; CCII, p. 280.

In 1884 The School Board for London adopted a plan by which specially qualified teachers visited various schools in a district in turn. It was on this plan that the teaching of Mechanics was commenced the following year in twenty schools in London. The science demonstrator gave a lesson once a fortnight to the boys in the higher classes, the lessons being illustrated experimentally by means of specimens and apparatus carried from school to school.

Hitherto no practical work was done by the pupils themselves, but a committee of the British Association, in a report dealing with the methods of teaching science in schools, emphasized the importance of practical work by the pupils themselves to such an extent that teachers and authorities began to realise that teaching by demonstration only was of little value.

About this time (1885) considerable instruction in science was being given in Evening Continuation Schools and it became necessary to define clearly where the elementary day school curriculum should end and that of the evening school commence. This period was marked also by a great trade depression which, coupled with the rise in foreign competition, created a growing feeling of alarm at the inadequacy of the Technical eduction in this country. Thereupon a Royal Commission appointed to enquire into the matter recommended an extension of manual, technical and scientific instruction in elementary and secondary schools.

By means of the Local Taxation (Customs and Excise) Act of 1890, large sums of money were granted to local authorities for the purposes of technical education, and this marked the beginning of a lavish expenditure on the equipment and maintenance of schools for technical instruction.

From this time onwards science became the focus of attention and state grants were made to secondary schools, university colleges and other institutions towards the cost of the teaching of not only science but art, modern languages, commercial and manual subjects.

The jurisdiction, however, of the local councils began to overlap that of the School Boards, thus preparing the way for the Education Acts of 1900 and 1902, when the local authorities took over the whole education — technical, secondary and elementary. It is on this system that state aided education is administered in the British Isles today.

The foregoing remarks are intended to serve as a summary of the main stepping stones by which we have arrived at the present system of primary and secondary education in this country, and it is needless to point out that such a subject with its many aspects, upon which countless committees have published innumerable reports, can only just be touched upon in this brief introduction.

Broadly speaking we may consider the schools of Britain to be established on the following plan:

ELEMENTARY	Infants.	Ages 5—7 years	1) See Hadow Report.
	Junior.	„ 7—11 „	
	Senior	„ 11+—14 „	
CENTRAL	Commercial bias Technical bias	Ages 12—16 years	
SECONDARY	Junior Technical Junior Commercial	Ages 12—16 of 17 years	
	Secondary	Ordinary Course. Ages 12—16 years	
		Advanced Course. Ages 16—18 or 19	
UNIVERSITIES.			

[Note. In addition to the above there are the private preparatory schools, art schools, Public schools (Eton, Harrow, Rugby etc.), evening technical and commercial institutes and various institutions recognised as schools of a particular university, but the consideration of these is beyond the scope of this paper.

Grant earning secondary schools in England are required by the Board of Education to provide free tuition for pupils from elementary schools to the extent of at least 25 % of their accommodation.

---

1) As a result of the recommendation of a special committee apointed in May 1924, a Report (know as the Hadow Report) was published in 1926, which suggested that elementary schools should be classified into Junior and Senior Elementary Schools.

The London County Council this year (1929) is acting on these suggestions and is dividing districts into groups of junior and senior schools.

Thus the junior schools will provide instruction for children up to the age of 11 years, and the senior elementary schools will cater for pupils aged 11 to 14 years, who have not otherwise proceeded to a central secondary school.

Some secondary schools are entirely non fee-paying and admission is decided by a competitive examination held yearly for the elementary schools in the locality. Sheffield Central Secondary School is one of this type.

Thus, as a general rule, pupils attending an elementary school reaching the age of 11 years enter for the "Scholarship" examination. The successful candidates proceed to the secondary school free from paying the usual fees, whilst the unsuccessful candidates are graded according to their results and classified into groups A, A I, B, and B I. This plan, adopted by London, allows the headmaster to choose and interview limited number of pupils from the contributory schools for admission to his Central School.

The scholarship examination consists of a written paper in Arithmetic, Composition and Dictation, followed in some cases, by an oral test in general knowledge.

Central schools vary a great deal throughout the country, the curriculum being mainly determined by the locality and its particular industrial demand. It would be irrelevant to dwell upon the needs of the various manufacturing, agricultural and commercial districts of the British Isles and the variety of the curricula introduced into the corresponding central schools to satisfy the local demands, my purpose, in this rather lengthy introduction, being merely to indicate the relationship between the elementary, central and secondary school, and to show how boys proceed from one to either of the others.

At the time of writing however, central schools are being rapidly modified and are becoming Junior Technical and Commercial Schools.

It is now possible at this stage to consider in some detail the courses in mathematics and science pursued in the British elementary and secondary schools.

The mathematics taught in the former type of school consists essentially of arithmetic with a possible addition of the elements of algebra (meaning of symbols; simple addition, subtraction, multiplication and division of simple terms; simple equations).

In favourable circumstances some elementary schools may be able to proceed as far as simultaneous and quadratic equations, but these schools are few and far between.

A recent report submitted to the Board of Education on the Education of the Adolescent by a consultative committee [1]), states that there seems to be general agreement that the subject of arithmetic as taught today in primary and other types of schools, is in need of considerable improvement in regard to both choice of material and the use made of it. Arithmetic has long been dominated by the traditional utilitarian value of the subject. In its presentation in schools, it has been added to and overlaid by matter which is often without meaning to the child and is seldom of value to him in after life.

On the other hand our modern industrial system with its complex ramifications, and the part played by science in the modern civilised community make greater demands upon the mathematical knowledge of the ordinary citizen. It is desirable, therefore, that much of the traditional arithmetic of our schools should be replaced by new material which will provide a wider mathematical training for the child, and that there should be included in the mathematical training of all normal children suitable parts of mensuration, algebra, geometry and trigonometry, especially such as are necessary for the intelligent comprehension of some of the problems of everyday life.

There is little doubt that the mechanical, lifeless and abstract treatment of arithmetic which has been so common in the past has produced for many a distaste for the subject which has persisted through life. If mathematical teaching is to be satisfactory there must be recognition of the two aspects of mathematical truths. On the one hand are the abstract relations which these truths have between themselves and on the other are relations to realities outside themselves.

The history of mathematical progress is a record of development of these two aspects in close association with each other, and the view that they can exist as distinct forms of intellectual activily has exerted a harmful influence upon mathematical teaching. Every course therefore should aim at developing in the pupil an appreciation of the meaning and teaching of a coherent system of mathe-

---

[1]) Report of the Consultative Committee on the education of the Adolescent. (Board of Education Report 1926), p. 214.

matical ideas and the realisation of the subject as an instrument of scientific, industrial and social progress.

It is suggested that complicated fractions, recurring decimals, complicated work in practice in H.C.F. [1]) and L.C.M. [1]) and cube roots, may be profitably discarded as being unnecessary for the development of mathematical ability in after life. This would make possible a freer treatment of arithmetic; the subject can be utilised to form a basis for other branches of mathematics which will be treated as logical developments of it. Algebra will be introduced naturally when, after suitable practical work on the area of a rectangle, a pupil generalises his results, makes deductions, and employs symbols for the first time to express a formula.

As his work in arithmetic and mensuration grows, so his formulae become more complex; necessity arises for their transformation and manipulation, and out of this necessity the pupil learns how to solve an equation and how to transform his formulae to make them easier for use; thus he is led to simple factorisation, easy operations, algebraical fractions and other developments. Indices are introduced as convenient abbreviations; their laws are thus readily observed and ultimately lead to logarithms, which most pupils regard later on as one of the really useful things they learn in mathematics.

Geometry is suitably introduced when the pupil deals with the areas of squares, rectangles and triangles. Generally there is little formal deductive work, save from experiments, and the course generally follows the lines of experimental geometry, such as is now to be found in good modern test books. It is important to realise that geometry should be utilised, as far as is possible, within the limits imposed by circumstances, as a means of training in deductive processes and logical thinking.

Practical work forms a valuable part of the mathematical course, for not only does it supply a concrete and experimental basis upon which the child may proceed to abstract reasoning, but it vitalises the work of the pupil and stimulates his interest in it. It also leads to co-ordination with other subjects in the curriculum, especially hand--work, geography and elementary science.

---

[1]) Highest Common Factor [H.C.F.].
[2]) Least Common Multiple [L.C.M.].

The following syllabus is suggested as a comprehensive course of arithmetic based on the principles stated above, suitable for a four-year course in a modern senior elementary or central school, though modifications would often be made necessary by local conditions and special difficulties:

Numbers. Growth of number system.

Elementary operations with numbers.

Our money system with the usual applications.

The meaning of a fraction. Simple operations with fractions.

Decimals.

The measurement of length, area, volume, weight, capacity and time with appropriate tables.

The metric system.

Areas of rectangles, squares, triangles, surfaces of prisms etc. Appropriate geometrical work.

Volumes of prisms.

Generalisation of results in above work on areas etc.

Introduction of symbols. Construction of elementary formulae. Use and manipulation of formulae.

Easy equations. Transformation of formulae for purposes of computation. Easy factors.

Use of squared paper. Construction, meaning and use of graphs. Drawing to scale.

Meaning and use of averages.

Factors; Common factors; H.C.F. and L.C.M.

Simple algebraical examples.

Further work on fractions.

Decimalisation of money. Calculation of cost.

Ratio; constant ratios. Ratios connected with angles. Sine, cosine and tangent of an angle.

The right angled triangle.

Surveying problems and other practical application.

Square root.

Equal ratios; proportion; proportional quantities.

Proportional division. Similar figures.

Mensuration of the circle, cylinder, pyramid, cone and sphere with appropriate geometry.

Percentages with applications to interest, insurances etc. Compound Interest.

Indices. Logarithms.

Investments. Foreign currencies and methods of exchange.

SECONDARY SCHOOLS.

The secondary school course covers a period of four years instruction, for pupils from the age of 12 to 16 years, in the usual school subjects, at the end of which they enter for what is generally known as the First Examination. [1] An advanced course is also provided for those pupils successful in obtaining Matriculation Exemption at this examination. This comprises a more or less specialised course of instruction in Arts or Science for pupils aged 16 to 18 years, on the completion of which they take the Second Examination, [2] which in certain circumstances corresponds to the Intermediate Examination for a degree at the university.

The curriculum of the secondary school is thus largely determined by the requirements of its First (or School Leaving) Examination.

In 1917, at the suggestion of the Right Hon. H. A. L. Fisher, then Minister of Education, the examination bodies of Universities appointed representatives to an Examination Council to consider and report upon (1) The Co-ordination of School Examinations, (2) the Relationship between School Examinations and University Entrance Examinations. As a result, the Board of Education issued in 1918 a list of examinations recognised for the award of First and Second (or School and Higher) Certificates.

The examinations are now conducted by eight approved universities or other authority in England and Wales, and candidates must select subjects from each of three or four groups, one of which includes science.

For the First Examination, no specialisation is made in any one subject or group of subjects either literary or scientific, as the aim of the examination is that it should represent the contents of a general education up to sixteen years of age and should include English subjects, languages other than English, mathematics and science, together with drawing, music, handwork and related subjects. No more than eight and no less than five subjects may be

---

[1] Sometimes known as (*a*) First school leaving examination or
(*b*) General school leaving examination.

[2] Sometimes known as the Higher School leaving examination.

taken by candidates at this (First) examination, but three of which must be the English Language, Mathematics and a modern Foreign Language.

At least 40 % of the maximum marks must be obtained in each subject for the award of the certificate, a failure in any *one* of the essential five subjects constituting a failure for the whole examination. In certain circumstances candidates obtaining over 50 % of the allotted marks in the three obligatory subjects and above 40 % in two of the remaining ones, are granted what is known as the Matriculation Exemption which allows the pupil to remain at the school for the Advanced Course to prepare for the Second Examination with a view to obtaining the Intermediate Degree of the University.

At a time when secondary schools were greatly isolated and when organised inspection was inadequate or practically non-existent, these examinations performed a very valuable service in defining curricula and setting up standards by which the schools could measure their achievements.

Nevertheless certain defects are inherent in a universal system of external examinations and the improvement in secondary schools which the English system has done so much to foster, has itself brought these defects into prominence and occasioned a wide demand for their removal. The fundamental trouble is that an external examination intended to be taken in a large number of schools, almost necessarily contravenes the basic principle that examinations should *follow* and be adapted to the teaching given and not *dictate* its form and range. It tends to 'cramp the style' of schools in which circumstances favour good and original teaching and it encourages a wasteful misdirection of effort where conditions are difficult.

Further discussion of these defects cannot here be attempted, suffice it to say that the universities and those responsible for the administration of the secondary schools are co-operating to the best of their ability in seeking the necessary remedies, in order that the work of the schools is indeed improved and not adversely affected by the requirements of their examinations.

Three papers in mathematics are set at the First Examination of the London University viz:

One paper in arithmetic (2 hrs); one paper in arithmetic and algebra (3 hrs), and one paper in geometry (3 hrs).

The two hour paper in arithmetic is set to test the candidates knowledge of the usual arithmetical processes for solving problems, and the syllabus includes the main portion of that quoted previously for senior elementary schools, (omitting the geometry and trigonometry), together with contracted methods of multiplication and division, stocks and shares and approximations.

The combined Arithmetic and Algebra paper contains problems which may be solved either by arithmetical or algebraical methods and questions on the following: logarithms involving a change of base; simple surds and indices; ratio, proportion and variation; graphs of linear and simple quadratic functions; and algebra up to and including quadratic equations.

The Geometry syllabus, both Theoretical and Practical, is based upon the contents of the first four books of Euclid, but it should be clearly understood that the old Euclidian order of theorems and proofs is not used today, as the test books on Geometry adopt a modern rearrangement with a system of references to the propositions and proofs contained in the original books of Euclid. These references are necessary, in order to indicate the nature of the proposition and its position in the logical order of proof. The teaching of this subject is generally dictated by the course of carefully graded examples in theoretical and practical geometry set out in most of the best test books in use in secondary schools.

The mathematics examination (First) of the Northern Universities [1]) differs somewhat from that of the London University, inasmuch as the former set a separate paper on Practical Geometry (3 hrs) and demand a knowledge of Trigonometry up to and including the Solution of Triangles.

The normal secondary school course is one of four years duration (ages 12—16), each 'year' consisting of about 38 weeks of actual instruction. Approximately 27½ hours a week, made up of five days of 5½ hours each, are devoted to instruction in all

---

[1]) Universities of Manchester, Liverpool, Leeds, Sheffield and Birmingham, combined as a joint board for these school leaving examinations.

the subjects of the school curriculum. The apportionment of time for each subject naturally varies in different schools but a fair estimate of the number of hours devoted to mathematics and science can be obtained by quoting those of a large secondary school (600 boys) in the South of England.

Each "year" is divided into four "Forms", A, B, C and D; the A forms containing the boys showing the greatest ability and the D forms those with the least ability in the school subjects. A Preparatory Form is also established for boys between the ages 11 and 12 years and for others who are rather backward.

Usually three school examinations are held yearly (at Christmas, Easter and Midsummer), and the boys are placed in their appropriate forms chiefly according to the results they obtain in these examinations. A form generally contains from 30 to 35 boys. Thus a four year syllabus is drawn up and carefully graded with modifications to suit the ability of the boys in each form of each year. Each lesson is of 45 minutes duration (known as a 'period'), and the whole form is taught collectively in mathematics and theoretical physics and chemistry, but is divided into two sections for practical work in the science laboratories.

In this particular school, in Years I and II five or six periods are allocated to mathematics and from six to eight periods to science (Physics and Chemistry). In Years III and IV the times are extended to seven periods for mathematics and four periods each for physics and chemistry (2 periods theory and 2 periods practical).

It is a matter of some difficulty to give a detailed syllabus of the mathematics as this depends to a large extent on the text books used, but the following may serve to give an idea of the broad outlines of a graded course in this subject in a tyhical secondary school preparing for its First or School Leaving Examination.

FORM I.		Fractions. Decimals. First four rules and simple equations in Algebra Simple practical Geometry.
1st YEAR.		
Forms 2a. 2b.	*Arithmetic.*	Mental. Decimals. Metric system. Mensuration. Square roots.

2c.		Cube roots by factors. Graphs.
		Ratio and proportion.
		Percentages and logarithms.
	Algebra.	Linear equations with two or more variables.
		Problems. Simple factors and fractions.
		Remainder and factor theorem.
		Harder substitution.
	Geometry.	Practical work including similar figures and definitions of sine, cosine and tangent. Use of tables.
		Angles at a point. Congruent triangles. Parallels. Angles in a circle. Parallelograms. Areas. Theorem of Pythagoras. Riders. Numerical exercises in two and three dimensions. Graphs.
2nd YEAR.		
	Arithmetic.	Logarithms. Commercial arithmetic.
Forms 3a.	*Algebra.*	Quadratics. Problems. Harder fractions.
3b.		Graphs.
3c.		
3d.	*Geometry.*	Circle. More careful treatment of theory including inequalities.
		Method of limits.
3rd YEAR.		
Forms 4a.	*Arithmetic.*	Approximations. Miscellaneons.
4b.	*Algebra.*	Progressions. Problems.
4c.		Theory of quadratics.
4d.		Harder equations. Indices. Surds. Graphs.
	Geometry.	Algebraical identities. Theorems derived from Pythagoras'. Theorem.
		Similar figures. Simple solid geometry.
	Trigonometry.	Ratios. Graphs. Solution of triangles with the use of logarithms.

4th YEAR.

Forms 5b. 5c. 5d.	*Arithmetic.*	Metric weights and measures. Decimal coinage. Mensuration. Approximations. Commercial and other applications.
	Algebra.	Factors. Fractions. Square root. Quadratic equations. Graphs. Progressions. Problems.
	Geometry.	Revision.
Form 5a.	*Algebra.*	As for 5b, 5c and 5d, together with Indices. Logarithms. Binomial Theorem for a positive integral index.
	Geometry.	Revision.
	Trigonometry.	Revision.
	Co--ordinate geometry.	Straight line and circle.
Forms 5a. 5b. 5c. 5d.	*Mechanics.*	Parallelogram of forces. Parallel forces. Moments. Centre of mass. Equilibrium of one or more bodies. Friction. Simple machines. Displacement. Velocity. Acceleration. Rectilinear motion with uniform acceleration. Mass. Momentum. Force. Work. Power. Laws of motion. Pressure of liquids on plane areas and on solids, partly or wholly immersed. Determination of densities. Barometer. Boyle's Law.

The plan adopted by most secondary schools is to arrange the first four years of instruction with a view to maintaining an equilibrium between the science and literary sides, so that on passing the First School Leaving Examination with Matriculation Exemption, a boy may choose an Advanced Course either in Arts or Science. It is at this stage that he begins to specialise to a certain extent by taking Mathematics and Languages with perhaps subsidiary History or Geography for his Intermediate Arts Degree, or Mathematics and Science for his Intermediate Science Degree.

The Advanced Course (ages 16 to 18 or 19) in Mathematics briefly comprises the following:

Algebra.

Revision and extension of previous work. Up to and including the Binomial Theorem. Indices. Logarithms. Graphs. Exponential and Logarithmic Series.

Geometry.

Plane and Solid.

Plane Trigonometry.

Solution of Triangles. General solution of Equations. Properties of triangles and quadrilaterals.

Analytical Geometry and Calculus.

Straight line, circle and conic sections. Differentiation and Integration. Maxima and minima. Tangents and normals. Curve tracing. Lengths, areas, volumes, centres of mass, moments of inertia, centres of pressure. Mean values. Easy differential equations from Mechanics and Physics.

Statics and Dynamics.

Friction. Equilibrium of coplanar forces. Work and energy. Projectiles. Impact. Uniform circular motion. Simple harmonic motion. Simple pendulum.

Hydrostatics.

Pressure of liquids. Centres of pressure.

Science Teaching in Schools.

Elementary.

The Board of Education although always having insisted upon the teaching of Science in elementary schools, does not prescribe a set syllabus of instruction. A general educational course is advocated avoiding as far as possible the usual classification of the subject matter into chemistry, botany, heat, light, sound and electricity.

This system has resulted in the development within recent years of very effective methods for the teaching of science to children whose school life is so short. By means of such a course, boys (and girls) in elementary schools acquire a sound elementary working knowledge of a wide scope of phenomena connected with their daily experiences. The scheme of correlating the science with other subjects, particularly mathematics and manual work has achieved considerable success in many elementary schools.

In many cases the science master gives a course of demonstration lessons covering a range of topics in simple chemistry, physics and hygiene, and the boys go through a course of model making which involues practical mathematics and the applications of the principles learnt in the theoretical lessons. Each boy works at his own particular problem; so that many different activities are in progress at the same time. The various courses naturally depent upon the locality of the school, its equipment and the ability and enthusiasm of the teachers responsible.

Central.

In the central schools, particularly those of the London County Council, as much as five hours per week are allotted to the teaching of science. Model instrument making is taken in addition to simple laboratory work in elementary physics and chemistry. The practical work includes exercises in weighing and measuring and simple manipulations in mechanics, heat, chemistry and electricity.

The choice of subject matter for the teaching of science needs careful selection and it is impossible to form a correct estimate of the nature of science teaching from a mere perusal of the schemes of work in use, as its value depends to such a great extent on the individuality of the teacher and hence on his selection of topics for special emphasis.

The schemes in use in elementary and central schools are naturally open to much criticism and it is a matter of opinion whether the adoption of a scheme in which the work would be complete in itself is more valuable than one which gives a smattering of science on the conventional lines usually of little value to boys leaving school at the age of fourteen.

Secondary.

Within the last decade so many committees have been appointed to enquire into the methods of teaching science in secondary schools and so many voluminous reports have been published thereon, that it is a difficult matter to give even a concise summary of the results obtained and opinions expressed, in the short space at my command.

However, the most important committee was that appointed by the Prime Minister in 1916, which published a Report [1]) in 1918 based on information obtained in answers to questionnaires addressed to secondary schools, universities and industrial firms.

The Committee thought it specially important to ascertain the views of the Mathematical Association and the Science Masters Association as to the relations between the teaching of mathematics and science, and special enquiries were made of a number of leading firms engaged in engineering and the chemical industry.

The reader will no doubt appreciate the difficulty of adequately summarising the conclusions arrived at, and will understand that the following account contains what I consider to be the essential features of the report which are relevant to the object of this paper.

It was established that science occupies a position in the secondary school in no way inferior to that of any other subject, and so far as work beyond the age of 16 is concerned, there are more grant-earning schools providing organised instruction of the advanced kind in Science and Mathematics than in Classics and Modern Studies. It must not, however, be assumed that the conditions of science teaching in grant-earning schools are wholly satisfactory. Many schools admit boys up to the ages of 13 or 14, in some cases unsuitably or ill prepared, with the result that their progress in school subjects is adversely affected, and harm is done to those with whom they are classified. It is even more serious that large numbers leave the school before completing the course required to carry them up to the stage marked by a First School Examination.

The large proportion of boys leaving at an early age is due to (1) the parents inability or reluctance to forego the wages which boys of 14 can earn; (2) the want of appreciation of the value of secon-

[1]) Report of the Committee Appointed by the Prime Minister to enquire into the Position of Natural Science in the Educational System of Great Britain, London, 1918, p.p. 75—78.

dary education, even from the point of view of success in after life; (3) the desire of the boys themselves to escape from the restraints of school life.

The amount of time allotted to science is not specified in the Regulations of the Board of Education, but must come up to the minimum which the Board, having regard to the circumstances of the school, are prepared to accept. Though in some schools the time actually given to science in the third and fourth years amounts to one fifth of the whole time spent in school, in a considerable number of schools it might be as little as four three-quarter-hour periods a week, or even less. Again, the scope of the work is often too restricted, even within the two main subjects to which it is almost universally confined. Thus important branches of physics, such as light or electricity, may wholly or in part be omitted; and in some cases physics up to the age of 16 means little more than practical measurements and heat, while in chemistry the theoretical foundations of the subject are often neglected. Further, in spite of the fact that the majority of boys leave at or before the age of 16, the schemes of work are often only the initial stages of a plan which will never be completed. They are, in fact, influenced indirectly by the requirements of university entrance scholarship examinations, which are designed for those boys who have specialised in science.

The Report points out that so much attention has been paid to the importance of laboratory exercises since the heuristic method was preached towards the close of the 19th century, that there is danger in overestimating its importance and that in many cases the time spent in such work is more than the results justify. Though the spirit of enquiry should permeate the whole science course, yet it is ridiculous to suppose that a boy can re-discover in his school hours all that he may be fairly be expected to know. It is suggested therefore that the demonstration lesson has its place, and that the time often spent in in the repetition of laboratory exercises may be employed to some extent in the giving of definite informational lessons which shall bring home to the pupil some of the important applications of science in everyday life.

It is further suggested that by means of supplementary lessons and discussions, every boy should be given the opportunity of knowing something of the lives and work of such men as Galileo and Newton, Faraday and Kelvin, Pasteur and Lister, Darwin and Mendel and many other pioneers of science.

Acting on the suggestions contained in this Report, the secondary schools of today endeavour to arrange the course of science teaching to suit as many of its requirements as possible. The chief difficulty is to arrange such a course as will aim at providing

(a) a general training in observation and inference in the main scientific subjects (biology, physics and chemistry), such a course to be as complete as possible in itself, and

(b) a suitable scientific foundation for those boys who intend to proceed to the University with a view to obtaining a Science Degree.

The methods by which such an object can be attained have been under constant discussion by the Board of Education, universities, secondary school authorities and the leading scientific associations during recent years, and in the opinion of the writer, the most valuable contribution to these discussions is the Report of a Committee of the British Association for the Advancement of Science on "Science in School Certificate Examinations" published in 1928.

In this Report, the chairman, Sir Richard Gregory, says:

"The chief reason for the narrow character of most science courses in schools is the small amount of time available and the demands made upon it in recent years by laboratory work. The substance of instruction has suffered from the concentration upon method, and the right adjustment of the conflicting claims of the two in a truly educational course has yet to be found . . . .

"Let a broad, general course of science be followed independently of the intensive laboratory work in particular branches, designed solely to create and foster the spirit of experimental inquiry by which all scientific progress is secured. In this way it should be possible, even with the present limitations of time, to provide training in method, as well as wide knowledge. Before any reform of this character is possible, however, schools and examining bodies must revise their syllabuses so that the school course can be complete in itself and not, as seems generally to be assumed, merely preliminary work for pupils who intend to proceed to science degrees in universities."

Again in his Presidential address to the Educational Section at the Hull Meeting in 1922 he said "The science to be taught should be science for all, and not for embryonic engineers, chemists or even biologists; it should be science as a part of a general education — unspecialised, therefore, and without reference to prospective occupation or profession, or direct connection with possible university courses to follow.

Less than three per cent of the pupils from our State aided secondary schools proceed to universities, yet most of the science courses in these schools are based upon syllabuses of the type of university entrance examinations — syllabuses of sections of physics or chemistry, botany, zoology, and so forth — suitable enough as preliminary studies of a professional type to be extended later, but in no sense representing in scope or substance what should be placed before young and receptive minds as the scientific portion of their general education."

This "Science for all" question was readily taken up by the Science Masters" Association, who, in response to the growing demand for a wider knowledge of science, drew up a course in General Science. [1]) Although not adopted generally throughout the secondary schools of this country, the teaching of general science has progressed considerably since the Oxford and Cambridge Joint Board introduced the subject as such into their School Certificates Examinations, which fact affords another example of the influence of external examinations on the school curriculum. Papers in General Science are now also set in Army Entrance Examinations.

On paper the syllabus in detail appears as a list of topics covering a very wide range, which requires a skilful teacher to give the unity that is required, at the same time not forgetting that the pupils response is the other essential factor in the educational process.

The Association emphasizes the importance of realising that the essence of the General Science scheme lies not in the syllabus but in its interpretation.

---

[1]) Published in 1920 in the School Science Review. Vol. II. No. 6, pp. 197—213.

The details of the syllabus would fill many pages and it is only possible to give a broad outline of the suggested course, the main headings being grouped, *for convenience only,* under conventional 'subjects'.

It is as follows:

The universe. Solar system. The earth. Igneous and sedimentary rocks. Volcanoes. Glaciers. Fossils. Coal.

The atmosphere. Life of a plant. Fermentation. Pasteur. Animal Kingdom. Balance of Nature. Darwin. Simple agriculture. Simple physiology and hygiene.

Natural resources of the Empire.

Mass. Weight. Density. Falling bodies (Galileo and Aristotle). Force and work. Liquid and gaseous pressure. Diffusion. Capillarity and surfacetension. Applications of the above.

Study of the atmosphere. Combustion. Respiration. Water. Limestone, sandstone and clay. Conservation of mass. Laws of combination introducing chemical theory. Flame. Hydrocarbons. Coal gas. Nitrogen, Sulphur, Chlorine, and their simple compounds. Acids, bases and salts. Properties and extraction of metals. Alloys. Iron and steel. Petroleum. Coal tar products. Oils, fats, soap, glycerine. Sugar.

Sources, effects and transference of heat. Thermometers. Investigation of heat quantity. Heat and temperature; thermometric scales.

Calorimetry. Change of state; vapour pressure. Heat values of fuels. Heat and work. Horse power. Mechanical equivalent of heat. Engines.

Rectilinear propagation of light. Photometry. Reflection and refraction. Mirrors and lenses. The eye. Telescopes and microscopes. Dispersion. Wave motion. The ear. Pitch, loudness and quality. The gramophone.

Magnets. Lines of force. Terrestrial magnetism. Cells. Electromagnets. Telegraphs. Conductors and insulators. The electroscope. Potential. Electro motive force. Effects of electric current. Resistance. Ohm's Law. Current induction. Microphone and telephone. Dynamo and motor. Electrical energy. Lamps. Heat and work. Units.

The adequate treatment of the work indicated above requires at least five hours in school and one hour's preparation at home per week for six terms. Practical work is essential throughout the course, as much as possible being done by the boys themselves. In parts however, illustrated lectures is found to be the best method of treatment.

It will be recognised that to criticise the scheme as outlined above would be grossly unfair, for, before any definite criticism and conclusions can be made, it is obviously desirable to study the scheme with its details and methods of procedure as put forth in the publication issued by the Science Master's Association.

In my own opinion, the good points of the syllabus are to be found in the use made of the practical applications of science and in the human interest which may be evoked by the consideration of the work of the great pioneers mentioned. On the other hand, I am inclined to agree with the critics who argue that in order to remedy the old defect of merely providing a limited course of instruction in chemistry and physics only, the general science scheme substitutes a still more limited amount of chemistry, physics, biology and geology.

Many schools have adopted the scheme practically in its entirety; some have modified it so as to incorporate with it alternative features found in a General Science Scheme suggested in a Report [1]) recently issued by the Board of Education dealing with the Education of the Adolescent; whilst others still adhere to the stereotyped teaching of mechanics, chemistry and physics according to the requirements and detailed syllabuses of the First Examination of the University.

Although biology appears largely in all the suggested courses of science, my own observations, as the result of enquiries from science teachers with whom I have come into contact on one or two occasions at Summer Vacation Courses for Teachers, lead me to infer that it is sadly neglected and is rarely taught otherwise than in an elementary and disjointed manner to lower forms in secondary schools.

Astronomy, as a subject of instruction, also seems to me to suffer in this respect, due possibly to the fact that it is no longer a com-

---

[1]) Board of Education Report on "The Education of the Adolescent" (1906). Page 222.

pulsory subject — as I believe it used to be years ago — in the mathematics requirements for teachers taking the Final B.A., or B.Sc., degrees, thereby severely limiting the number of masters capable of teaching the subject beyond its most elementary stages.

However, in some secondary schools, astronomy is taken to a fairly advanced stage [1]), but in the majority of schools it is more often than not relegated to the work of the master who teaches geography (with perhaps geology), and does not figure in the science syllabus at all. Nevertheless, at the time of writing, there are indications of a revival in the teaching of this subject, and several good text books with that object in view are being published which will doubtless cause astronomy to be taken up more generally and to be studied more fully than in the past.

Professor T. P. Nunn in his admirable address to the Mathematical Association in 1919, proposed a comprehensive course in astronomy, a course necessitating very little expensive optical apparatus beyond a good telescope and a pair of field glasses. Considerable help also has been given by the British Astronomical Society, which offers to loan to schools a series of excellent lantern slides illustrating the chief stars, constellations and apparent movements of the celestial bodies. Thus, in spite of the many obstacles, chief of which is the English weather, there is every possibility that astronomy will take its proper place in the school curriculum, when it becomes more generally realised that pupils find it a fascinating study, and that there exists such a variety of standard treatises as well as carefully planned text books dealing with the subject from a practical point of view.

The foregoing remarks have been intended to give the reader a skeleton outline of the main themes of discussion and the trend of present day thought with regard to the teaching of science to boys between the ages of 12 and 16 in secondary schools, and it should be readily appreciated that the arguments employed therewith do not apply to the discussion of the scientific training of those who stay at school for the following two or three years for the advanced

---

[1]) An interesting article by E. O. Tancock, B. A,, of Wellington College, appeared on "Elementary Astronomy", in the School Science Review. Vol. I. No. 2. Page 37.

course, as this consists essentially of more or less specialised instruction in the scientific subjects chosen for study.

The requirements for the Second or Higher School Leaving Certificate Examinations vary to a great extent amongst the different universities in respect to the choice of subjects, grouping and the number of papers set in each subject, although the standard to be attained is approximately the same for all. Hence it is only possible to give a brief summary of the conditions prevailing for obtaining the Higher Certificates awarded by the Northern Universities [1]) and the universities of London, Oxford and Cambridge.

London University.

The candidates for this Higher Certificate must satisfy the Examiners in any *one* of five groups of subjects. One or more subsidiary subjects may also be offered and one from a further group viz: Drawing, Music, Logic, General History (Ancient or Modern), Hebrew, Engineering Drawing and Design, Mathematics (Practical Applied).

Groups A, and B are concerned with Languages, History, Geography, Foreign languages and literary subjects. The Science groups C and D are as follow:

Group C. Pure Mathematics: Applied Mathematics.

Subsidiary Subjects. Two subjects (1) selected from the language groups A and B and (2) either Latin or Greek or a Physics Subject from group D.

Group D. Any *three* of the following subjects: Experimental Physics, [1]) Chemistry, [1]) Botany, [1]) Zoology, [1]) Geology, [1]) Biology, [1]) Pure and Applied Mathematics.

Subsidiary Subjects. One subject from Group A or B.

[1]) Includes a Practical Examination also. The groups C and D are chosen in the majority of secondary schools, although there is a group E which offers a choice of subjects from Pure Mathematics, Physics, Economics and a modern Foreign Language.

All candidates for this Higher Certificate must have previously

---

[1]) Conjoint board of the Universities of Manchester, Liverpool, Leeds, Sheffield and Birmingham.

passed the First School Leaving Examination with Matriculation Exemption and must have attended satisfactorily the Advanced Course at the school for at least two years.

Oxford and Cambridge Universities.

The school leaving examinations of these universities are conducted by what is known as the Joint Board and the Higher Certificates awarded by this body give exemption under certain condition from Responsions at Oxford (really Oxford's entrance or matriculation examination), the Previous Examination and the First M.B. Examination at Cambridge, the Matriculation Examinations of London and Bristol Universities, of the University of Wales, and of the Newcastle Division of the University of Durham, and from the Preliminary Examinations of the Scottish Universities; at Oxford, from the Matriculation Examination of certain Colleges, and at Cambridge, from the Entrance Examination of all Colleges; from certain Preliminary Professional Examinations and from the Examination for admission to a Teacher's Training College under the Board of Education.

The subjects for the Higher Certificate are divided into four groups (Groups I, II, III, IV) with an additional list of about twenty four subsidiary subjects.

Group I consists of classics, and Group II of History, Modern Languages and Literature.

Group III. Mathematics.

Group IV. Natural Science: Physics, Chemistry. Elementary Science, Zoology, Botany, Biology, Mathematics.

Subsidiary subjects. Latin, Greek, Greek History, Roman History, French, German, Italian, Spanish, Russian, English Literature, English History, Modern European History, Outlines of Colonial History, Mathematics, Physics, Chemistry, Botany, Biology, Physical Geography and Elementary Geology, Scripture, Geography, Music and Drawing.

To obtain the certificate candidates must satisfy the Examiners in *one* group and also in at least *one* subsidiary subject; no candidate may offer more than one group and the choice of subsidiary subjects is regulated by certain rules.

The fee for this examination is £ 3.

THE NORTHERN UNIVERSITIES
[UNIVERSITIES OF MANCHESTER, LIVERPOOL, LEEDS, SHEFFIELD AND BIRMINGHAM].

The Higher Certificate Examination is intended for candidates of about the age of eighteen, who have continued their studies for about two years after the stage marked by the First School Certificate. The subjects are divided into four groups. The first two groups contain the classical and literary subjects whilst groups III and IV are mathematical and scientific.

Group III. Pure Mathematics, Applied Mathematics, Pure and Applied Mathematics (combined paper), Physics, Chemistry, Botany, Zoology, Biology, Geography.

Group IV. Higher Mathematics, Pure Mathematics, Applied Mathematics.

Candidates must pass in *three* Principal subjects taken as a whole and in *one* Subsidiary subject (in the case of Group IV *either* in an additional Principal Subject *or* in two Subsidiary Subjects), but three out of the four subjects must be chosen from one group. Candidates who take Pure Mathematics or Applied Mathematics, may not take the combined subject Pure and Applied Mathematics, and those who take *either* Botany *or* Zoology may not take Biology. The fee is £ 3.

SCHOLARSHIP AWARDS.

Scholarships and Exhibitions are awarded by the Universities, local Education Authorities and Trustees of many private bequests, and although the nomenclature differs extensively with regard to the awards, yet they usually take the form of an annual sum of money ranging from £ 25 to £ 100 tenable for three or four and in some cases five years at a University. They are almost invariably offered as the result of an examination (competitive) in a particular subject or group of subjects.

In the case of Oxford and Cambridge, the separate Colleges of the University offer their own Scholarship. Thus a boy from a secondary school having passed the Second or Higher School Leaving Certificate Examination — with certain conditions — in Mathematics and Science, and who is desirous of proceeding to

Oxford or Cambridge usually enters for the Open or Close Scholarship examination held by a particular College offering the award in Mathematics or in the special scientific subjects chosen. A similar method applies to a certain though perhaps more limited extent in the London University and the Northern Universities.

An attempt to give even the merest summary of the various monetary awards and the conditions involved would be hopelessly impossible, as the amounts are so varied and the conditions so complicated, but broadly speaking the Scholarship at all Colleges of the Universities, especially Oxford and Cambridge, have both a titular and actual value; their actual as distinguished from their titular value depending in the case of Scholarships partly, and in the case of Exhibitions wholly, upon the financial circumstances of the candidate.

All Education Authorities offer financial aid to boys who, without some assistance could not continue their education at the University, the awards in most cases depending on the their success at the Higher School Examination or in obtaining a Scholarship awarded by the University. These "County" or "Borough" Scholarships generally provide free tuition at the University for part or whole time of the degree course there, or they may consist of supplementary grants of money intended to provide the Scholar or Exhibitioner with financial aid towards his maintenance and cost of living whilst in residence at the University. Many other valuable scholarships, offered with the idea of providing books and maintenance apart from the free tuition at the University, are given by the wealthy Great City Companies (numbering about 20), and by Councils of many Memorial Funds, the latter being available for the benefit of sons of officers and men and ex-officers and men of His Majesty's Forces.

Thus it is possible for a boy of eighteen years of age who has passed his Second or Higher School Certificate Examination by which he was granted the Intermediate Degree, to obtain, for example a Mathematics (or Science) Scholarship at Oxford University (by examination), supplemented by a maintenance award from the local Education Authority and further supplemented by a valuable award offered by one of the above Companies. In many cases, such a boy can thereby obtain a full University training and his

Degree, with practically little or no cost to himself or his parents, provided of course he is not extravagant whilst in residence at the University. Such a boy may have been in the first place an Elementary School boy, having won an Entrance Scholarship entitling him to free tuition at the local Secondary School which he leaves in the above circumstances for the University. This instance serves as a typical example of the methods by which boys may thus climb the educational ladder from the Elementary School to the University.

Actual statistics are not available, but it appears that a fairly even balance is maintained in the number and value of awards in Classics, Literature, Mathematics and Science, though possibly the Science candidates may be rather more favoured on account of the number of institutions and industrial societies existing which offer Scholarship in Technological Subjects (e.g. Royal School of Mines; City and Guilds Institute etc.).

London's expenditure on scholarship awards — numbering about 10,000 — including Junior, Intermediate and Senior Scholarships amounts to nearly £ 360,000 a year, £ 118,000 (approx) of which is devoted to Teaching Scholarships. Other counties and towns throughout the country also devote large sums of money for this purpose and it may be appropriate here to quote the methods employed by one of them as typical to a certain extent of the comprehensive scholarship schemes of the large towns of the Midlands and the North of England. Sheffield, in this respect furnishes a good example. Briefly it is administered as follows:

About 350 scholarship are awarded annually providing free tuition at the Secondary Schools, on the result of the General Entrance Examination, open to all boys between the ages 11—12 attending the Elementary Schools. Generous provision is also made to enable a boy to stay at the secondary school after the Matriculation stage (ages 16—19).

Sheffield University offers the following:

6 scholarships of £ 125 per annum in all faculties.
5 „ „ £ 50 „ „ „ „ „
2 „ „ fees and £ 40 per annum } in Engineering.
2 „ „ fees only. }

Sheffield Local Authority offers

15 scholarship of fees + possible maintenance allowance at the

University (Sheffield) of £ 40 per annum.
This is awarded on Higher Certificate Examination results.

1 scholarship of £ 50 per annum, tenable at Oxford, Cambridge, or Sheffield University, awarded by the Sheffield Town Trustees on the results of the Oxford and Cambridge Higher Certificate Examination.

Provision is further made by the Sheffield Local Authority of maintenance grants up to £ 75 per annum for boys going to Oxford and Cambridge with scholarships.

A FEW STATISTICS.

The following statistics, deemed to be applicable to the object of this paper, have been taken from the Board of Education Report [1]) for the School Year 1925—26, which was published in 1927, and which is I believe the latest available. The actual items have been selected from a number of Tables of Statistics covering the years 1919 to 1926, the selection dealing only with the mathematical and science subjects of the full list of school subjects, in order to give the reader some idea of the progress made, and of the numerical and percentage results obtained(in these particular subjects by the pupils attending secondary schools in England and Wales.

At the end of the year 1925 there were 1161 grant-earning Secondary Schools, the total number of free places being 117,171 representing 35 % of the total number of pupils. The proportion of these pupils attending over 16 years of age was above two thirds.

437 advanced courses were recognised in 309 schools. Of these courses 210 were in mathematics and Science, 179 in Modern Studies and only 37 in Classics.

Of 61,073 pupils who left grant-earning secondary schools in 1925, after reaching the age of 14, 2729 (1619 boys and 1110 girls) are known to have proceeded to Universities. Each year shows a steady increase in these numbers, statistics for 1928—9 not yet being available.

Tables I and II show the growth, between the years 1919 and

---

[1]) Board of Education Report [Cmd. 2866] on "Education in England and Wales". (1927). Pages 53—55, also page 161.

1926, in the number of candidates for the First and Second Examinations respectively.

Table I. **First Examination**

Year	Number of Candidates	Number who Obtained the Certificate	Percentage
1919–20	31,645	20,770	65·6
1926—27	53,564	34,277	64

Table II. **Second Examination**

Year	Number of Entrants	Number who Obtained the Certificate	Percentage
1920	3,183	2,224	69·9
1926	7,778	5,132	65·9

The figures for Chemistry and Physics show that a higher proportion of pupils than formerly are now offering these subjects.

Table III shows the number of entries and percentage of passes in Mathematics and Science subjects in the First Examination for the years 1919 and 1926.

Table III. First Examination

[INDIVIDUAL MATHEMATICAL AND SCIENCE SUBJECTS]

Subject	1919 Number of Entries	1919 Percentage of Entrants offering the Subject	1919 Percentage of Passes with Credit	1926 Number of Entries	1926 Percentage of Entrants offering the Subject	1926 Percentage of Passes with Credit
Mathematics . .	26,348	91·9	65·7	50,956	95·1	47·7
Higher Mathematics . . .	2,238	7·8	55·0	4,311	8·1	31·9
Botany	8,017	27·9	57·9	13,627	25·4	45·4
Chemistry . . .	9,110	31·7	49·6	21,527	40·2	47·3
Physics . . .	5,059	17·6	41·1	13,255	24·7	47·6
Elementary or Experimental Science . . .	1,055	3·7	42·8	3,042	5·7	38.4
General Science	513	1·8	38·4	1,340	2·5	46·9
Applied Science	281	1·0	42·7	238	0·4	60·9
Mechanics . . .	1,132	3·9	51·5	2,138	4·0	47·4
Heat, Light and Sound . . .	1,218	4·2	53·5	2,980	5·6	47·0
Electricity and Magnetism .	924	3·2	46·5	1,729	3·2	64·5
Biology . . .	—	—	—	86	0·2	58·1
Agricultural Science . . .	15	0·05	86·7	120	0·2	59·2

Table IV. Second Examination

[INDIVIDUAL MATHEMATICAL AND SCIENCE SUBJECTS]

Subject	1920 Number of Entries	1920 Percentage of Entrants offering the Subject	1920 Number obtaining a Pass	1920 Percentage obtaining a Pass	1926 Number of Entries	1926 Percentage of Entrants offering the Subject	1926 Number obtaining a Pass	1926 Percentage obtaining a Pass
Mathematics	1,289	40·4	853	66·2	3,117	40·1	2,199	70·6
Physics . .	1,006	31·5	620	61·6	2,301	29·6	1,628	70·8
Chemistry .	1,016	31·8	622	61·2	2,255	29·0	1,564	69·4
Physics with Chemistry.	33	1·0	24	72·7	53	0·7	30	56·6
Botany . .	172	5·4	141	82·0	394	5·0	258	65·5
Zoology . .	23	0·7	20	87·0	140	1·8	96	68·6
Biology. . .	3	—	3	100·0	56	0·7	36	64·3

Table V.

Pupils who left Secondary Schools on the Grant List and proceeded to a University.

	Total Number leaving at age 14 and over	Boys		Girls		Total	
		Number	Percentage of ex-Elementary School pupils	Number	Percentage of ex-Elementary School pupils	Number	Percentage of ex-Elementary School pupils
1920-21							
England .	49,299	1,541	61·3	1,160	60·3	2,701	60·9
Wales .	5,671	299	88·0	190	81·6	489	85·5
1924-25							
England .	61,073	1,619	59·2	1,110	55·9	2,729	57·9
Wales .	7,143	293	89·8	220	85·5	513	87·9

BOEKBESPREKINGEN.

Inleiding in de Niet-Euclidische Meetkunde op historischen grondslag. Door Dr. H. J. E. Beth. Historische Bibliotheek voor de Exacte Wetenschappen, Deel II. P. Noordhoff, Groningen. 1929.

Wie het doel van wetenschappelijke vorming niet uitsluitend zoekt in het aankweeken van het vermogen, de wetenschap met nieuwe vondsten vooruit te brengen, maar ook, ja wellicht voor alles, in de verrijking van eigen geest en gemoed, die van ernstige studie, ook zonder noemenswaarde productiviteit het gevolg kan zijn en die — wonderlijke eigenschap van den onstoffelijken rijkdom — noodzakelijk weer aan anderen ten goede komt en daardoor indirect toch weer kan bijdragen tot de verdere ontwikkeling van het menschelijk denken, zal niet kunnen nalaten, de beoefening van de geschiedenis der wis en natuurkundige vakken als onmisbaar bestanddeel van modern-wetenschappelijke vorming te erkennen.

Het is er nog ver vandaan, dat de in deze woorden zonder nadere motiveering uitgesproken overtuiging algemeen zou worden aanvaard; in veler oog staat historische studie nog steeds gelijk met een moedwillig verlaten van het kamp van hen, die, hoezeer ook ieder eigen wegen volgende, niettemin het gevoel hebben, samen te werken tot het naderen van een in woorden niet omschrijfbaar doel, welks onbereikbaarheid wezenlijk is, maar dat niettemin richting geeft aan ieders streven. Zij stellen den meest bescheiden arbeid, bij het doordringen is thans nog onbekende gebieden verricht, boven de meest diepgaande bestudeering van de wijze, waarop vroegere generaties te werk gingen bij de ontdekking van wat voor hen nieuw en gedurfd was en voor ons volkomen bekend en welhaast triviaal en ze kunnen in de resultaten van historische studie niet veel meer zien dan stof tot verstrooiïng en ontspanning in verloren oogenblikken.

Het zal hen, die de verhouding van actueel-wetenschappelijke en historische werkzaamheid zoo zien, wel eenigszins tot nadenken moeten stemmen, dat de schrijver van het hierboven aangekondigde werk na een jarenlangen met succes bekroonden productieven arbeid op mathematisch gebied, de behoefte heeft gevoeld, zijn weten te verruimen en te verdiepen door de behandeling van een historisch-wiskundig onderwerp en nog meer, dat hij, de resultaten van zijn studie in het licht gevend, in zijn voorbericht met nadruk gewaagt van het rijke geestelijke genot, dat de vervulling van de opgenomen taak hem gedurende enkele jaren heeft verschaft.

Deze twee feiten alleen vormen reeds een argument voor de waarde en het goede recht van de wetenschapsgeschiedenis; de inhoud van het boek en de wijze, waarop het bewerkt is, vullen dit argument aan tot een onweerlegbaar pleidooi. Wij zullen trachten in het volgende van beide een indruk te geven.

De schrijver heeft zijn boek voornamelijk bestemd voor docenten in wiskunde, een omschrijving, die practisch weliswaar zoo goed als alle mathematici omvat, maar waarbij, in overeenstemming met het hoofddoel van de Historische Bibliotheek (verbetering van het Gymnasiaal en Middelbaar Onderwijs in wis- en natuurkunde door verzorging van de historische ontwikkeling van de docenten), toch wel in de eerste plaats gedacht is aan docenten aan H. B. Scholen en Gymnasia en aan de studenten, die daartoe later zullen behooren. Dit doel is zeer juist gesteld: wie een vak goed wil doceeren, moet beginnen met de grondslagen van dat vak te beheerschen en hij moet hebben nagedacht over de principiëele vragen, die bij de beschouwing daarvan rijzen; reeds hierom echter is voor hen, die Euclidische meetkunde moeten onderwijzen, kennis van de niet-Euclidische een noodzakelijk vereischte. Onder de thans fungeerende docenten in wiskunde zullen er echter velen zijn, die studeerden in een tijd, toen de meetkunden van Lobatschefsky-Bolyai en Riemann-Klein nog werden beschouwd als eenigszins buitenissige onderwerpen, die buiten de gewone collegestof vielen; jongeren zullen er allicht in hun studietijd wel kennis mee hebben gemaakt, maar dan langs een anderen weg, dan waarlangs men oorspronkelijk tot haar gekomen is. Voor beide categorieën kan het boek van den heer Beth een middel zijn, om een volledig inzicht in het voor onzen tijd zoo actueele onderwerp te verkrijgen.

Men krijgt namelijk het volledig inzicht in wat de ontwikkeling van de niet-Euclidische meetkunde historisch te beteekenen heeft, men krijgt in het bijzonder de juiste waardeering van hare ontdekking niet, wanneer men haar leert kennen met behulp van een der vele moderne methoden, die tot haar behandeling ten dienste staan, wanneer men haar invoert met behulp van een projectieve maatbepaling, als meetkunde op een oppervlak van constante kromtemaat, als vrij-axiomatisch woordenbouwsel of als metriek van een bollenvariëteit. In al die gevallen behoudt zij door de wijze van haar invoering licht iets kunstmatigs, dat men op mathematische gronden gemakkelijk wegredeneert, maar dat haar, zooals de ervaring leert, voor menigeen toch altijd iets vaags en hersenschimmigs doet blijven naast de op grond van onze physische ervaring zoo natuurlijk lijkende Euclidische meetkunde; bovendien komt men er, als men haar langs een dier wegen leert kennen, ook al spoedig toe, zich tevreden te stellen met het inzicht in hare mogelijkheid en zich niet te bekommeren om haar feitelijken inhoud, wat de voorstelling van haar onwerkelijkheid nog weer versterkt. Aan beide bezwaren komt men tegemoet door na te gaan, hoe, tengevolge van twijfel aan het axiomatisch karakter van het vijfde postulaat van Euclides, althans de hyperbolische meetkunde als het ware uit de Euclidische is voortgekomen en hoe men er in geslaagd is, om met dezelfde methoden, waaraan deze haar klassieke grootheid te danken heeft gehad, ook gene tot een levende mathematische schepping te ontwikkelen.

Hierdoor is reeds in het kort de weg aangewezen, dien de heer Beth in zijn boek volgt: hij begint met een overzicht van de voorgeschiedenis van de niet-Euclidische meetkunde, waarin hij in het kort over de kritiek spreekt, die het parallelen-postulaat bij de Grieken heeft ondervonden en over de pogingen, die toen en later zijn gedaan, om er een bewijs voor te leveren, om daarna uitvoeriger stil te staan bij de tragische figuur van Saccheri, den ijverigen vernieler van eigen geniale schepping, bij den prophetischen Lambert en bij de scherpzinnige, maar nog essentieel Euclidische planimetrische beschouwingen van Legendre. Hoofdstuk II behandelt dan de drie groote grondleggers van de eerste niet-Euclidische meetkunde, de eersten, die haar ontwikkelen als een zelfstandig systeem en niet langer als een reusachtige reductio ad absurdum van de ontkenning van het Euclidische parallelen-postulaat; het is de elementair-geometrische methode, die men bij hen aantreft, met al haar onvolkomenheid en omslachtigheid, maar toegepast met die merkwaardige combinatie van het mathematische vernuft van de Grieken en den denkmoed van het 19e-eeuwsche West-Europa, die de namen van Gauss, Lobatschefsky en Bolyai voor goed zal verbinden aan de herinnering van de wellicht grootste bevrijding, die het menschelijk denken ooit heeft ondergaan: de vervanging van het bepaalde lidwoord voor het substantief meetkunde door het onbepaalde. De uiteenzetting, die de schrijver van het werk van deze drie pioniers geeft, is volkomen duidelijk; voorzoover het Lobatschefsky betreft, den uitmuntenden mathematischen paedagoog, die zijn denkbeelden in verschillende werken met groote helderheid heeft uiteengezet, wil ik dit niet als zijn bijzondere verdienste releveeren; wie echter ooit Bolyai's *Appendix* heeft bestudeerd, zal de helderheid en bevattelijkheid moeten bewonderen, waarmee de moeilijke, in uiterst gecondenseerde symboliek neergeschreven beschouwingen van dit werk worden weergegeven.

In Hoofdstuk III, getiteld De Analytische Ruimteleer, wordt eerst na een differentiaal-geometrische inleiding een overzicht gegeven van de onderzoekingen van Riemann over het algemeene begrip eener continue veelheid; de schrijver moet hier niet zelden refereerend te werk gaan; toch zal zijne uiteenzetting, waarin niet-bewezen resultaten althans aannemelijk worden gemaakt, zeker kunnen bijdragen tot verheldering van de beroemde, maar door hare groote beknoptheid moeilijk begrijpbare *Habilitationsvorlesung*. Daarna wordt de van Beltrami afkomstige interpretatie van de tweedimensionale hyperbolische meetkunde op oppervlakken van constante negatieve kromming in een Euclidische drie-dimensionale ruimte behandeld, waardoor de onweerlegbaarheid van de niet-Euclidische meetkunde aan die van de Euclidische wordt gekoppeld; hierop volgt een uitvoerige weergave van de onderzoekingen van Helmholtz ter motiveering van het uitgangspunt van Riemann en een korte beschouwing over de beteekenis, die de ontdekking van de niet-Euclidische meetkunde voor de ruimteleer van Kant heeft. Op dit grensgebied van mathesis en philosophie betracht de schrijver groote soberheid; het is voor alles zijn doel geweest, een inleiding te geven, waarvan hij hoopt, dat ze den lezer zal prikkelen tot dieper dringende bestudeering van het onderwerp met behulp van de oorspronkelijke verhandelingen, die hij citeert en waarvan hij de lectuur vergemakkelijkt. Men kan ditzelfde streven naar beperking opmerken, waar hij het zeer belangwekkende biographische gedeelte van de geschiedenis van de ontdekking van de niet-Euclidische meetkunde, in het bijzonder de romantische geschiedenis van de beide Bolyai's in hun verhouding onderling en ten opzichte van Gauss niet zonder leedwezen laat rusten.

Het vierde hoofdstuk wordt gekenmerkt door de namen van Cayley en Klein. Van Cayley wordt de *Sixth Memoir on Quantics* behandeld, waarna uitvoerig de door Klein gegeven fundeering van de niet-Euclidische meetkunden op grond van projectieve maatbepaling wordt geschetst. Een korte beschouwing van het werk van Lie besluit het hoofdstuk.

Na al deze triomphen der analyse keert het meetkundig denken in het einde van de 19e eeuw in beginsel terug tot de methode van Euclides, die thans echter in verbeterden vorm en op breedere en dieper gefundeerde axiomatische basis wordt toegepast. De schrijver wijst er op, dat deze dieper doordringende logische analyse van de Euclidische grondslagen reeds door Gauss noodig werd geacht, maar dat zij eerst omstreeks 1880 werkelijk tot een begin van uitvoering is gekomen. Aan den modernen axiomatischen opbouw van de niet-Euclidische meetkunden is het laatste deel van werk in hoofdzaak gewijd. Na de vermelding van het axioma-systeem van Hilbert wordt eerst over verschillende interpretaties van axioma-systemen gesproken; daarna keert de schrijver terug tot de hyperbolische meetkunde; zooals deze door Hilbert zonder continuïteitsbeschouwingen opnieuw axiomatisch is opgebouwd. Het laatste hoofdstuk behandelt volgens dezelfde methode de elliptische meetkunde, die uit den aard van haar ontstaan aanvankelijk alleen analytisch was behandeld. Het slot wordt gevormd door de bestudeering van de Cliffordsche parallelen. Om niet te uitvoerig te worden, heeft de schrijver zijn werk hier afgebroken; de beteekenis van de niet-Euclidische meetkunde voor de functietheorie en de physica komt niet meer ter sprake.

Aan het einde van mijn overzicht gekomen, zou ik mijn vreugde willen uitspreken over het tot stand komen van dit werk. Het is een helder geschreven, methodisch goed opgezette inleiding in een onderwerp, waarvan de kennis in onzen tijd voor mathematici, physici en philosophen onmisbaar mag heeten en dat daarom ook buiten den kring der docenten, waarvoor het in de eerste plaats bestemd is, veel nut zal kunnen stichten.

E. J. Dijksterhuis.

Électrons et Photons. Rapports et Discussions du cinquième Conseil de Physique tenu a Bruxelles du 24 au 29 Octobre 1927 sous les auspices de l'Institut International de Physique Solvay. Paris, Gauthier Villars. 1928.

De firma Gauthier Villars zendt ons de rapporten van den 5en Conseil de Physique van het Instituut-Solvay, in 1927 te Brussel onder leiding van wijlen Prof. Lorentz (met wiens portret en necrologie de bundel wordt geopend) gehouden en van welker besprekingen de titel Electrons et Photons den inhoud kort, maar voldoende duidelijk samenvat. Zooals wel vanzelf spreekt, vormen de gepubliceerde verhandelingen, bestemd als basis voor onderlinge gedachtenwisseling van de koryphaeën der mathematische physica geen bevattelijke inleiding in de ter sprake gebrachte onderwerpen. De bestudeering ervan is echter uit den aard der zaak aan ieder, die in de moderne opvattingen over den bouw der materie en het wezen der straling belangstelt, sterk aan te raden. De eerste twee mededeelingen, van W. L. Bragg en A. H. Compton, betreffen de experimenteele toetsing van de electromagnetische stralingstheorie. Bragg behandelt verschijnselen, waarin de theorie bevredigend kon worden toegepast, Compton andere, waarin zij in gebreke bleef. Hierna volgt een voordracht van L. de Broglie, waarin de ontwikkeling van de undulatorische opvatting van de mechanica wordt geschetst, een verhandeling over quantenmechanica van Born en Heisenberg en een van Schrödinger over golfmechanica, terwijl het slot wordt gevormd door een Fransche vertaling van een reeds vroeger in *Die Naturwissenschaften* verschenen artikel van Bohr, dat op zijn beurt een reproductie was van een bij de Volta-herdenking in 1927 te Como gehouden rede. E. J. Dijksterhuis.

Dr. E. J. Dijksterhuis. De Elementen van Euclides. Eerste deel. Deel I van de historische bibliotheek voor de exacte wetenschappen. Groningen, P. Noordhoff, 1929. 220 blz.

Dit eerste deel bestaat uit twee afdeelingen. De eerste is in hoofdzaak gewijd aan de geschiedenis der wiskunde vóór Euclides, uitsluitend wat betreft de onderwerpen welke in de Elementen ter sprake komen, terwijl de tweede afdeeling het eerste boek der Elementen behandelt. De schrijver hoopt in een volgend deel de overige boeken te bespreken.

Afdeeling I. Na afbakening van de opgave, die de schrijver zich stelt, volgt een systematisch overzicht der beschikbare bronnen (in hoofdzaak Pappos van Alexandria, Proklos, Eutokios, Plato, Aristoteles, Simplikios, Ploutarchos, Diogenes Laërtius en Suidas).

In de eerste plaats worden dan behandeld Pythagoras en de Pythagoraeërs. Tot voor korten tijd meende men aan Pythagoras en zijn naaste volgelingen vele belangrijke zaken verschuldigd te zijn, o.a. de ontdekking van irrationale getallen, de constructie der regelmatige veelvlakken en de bekende stelling van den rechthoekigen driehoek. De schrijver schetst de kritiek welke Junge, Vogt en Eva Sachs in de laatste kwarteeuw op deze meening hebben geleverd en die tot zekere hoogte door Tannery was ingeleid. Ook de opvattingen van Taylor en Zeuthen passeeren de revue. Zeer aannemelijk wordt de slotconclusie gemaakt, dat het vroeger algemeen aanvaarde beeld van de ontwikkeling der Grieksche wiskunde in het laatste deel der zesde en de vijfde eeuw voor onze jaartelling, doorloopend onbetrouwbaar en in menig opzicht bepaald onjuist is.

Na dit afbrekingsproces zet de schrijver zich tot herbouw, waarbij in de eerste plaats ter sprake komt een stuk uit den commentaar van Simplikios (zesde eeuw na Chr.) op de Physica van Aristoteles, namelijk een citaat uit de geschiedenis der wiskunde van Eudemos (vierde eeuw v. Chr.), waarin deze verslag doet over een mathematische verhandeling van Hippokrates van Chios (waarschijnlijk tweede helft der vijfde eeuw v. Chr.). Gedurende de laatste zestig jaar hebben verschillende onderzoekers getracht in dit belangrijke stuk te onderscheiden tusschen wijzigingen en toevoegingen afkomstig van Simplikios en hetgeen van Hippokrates is (onderscheiden tusschen Eudemos en Hippokrates lijkt een vrijwel hopelooze taak). Volkomen overeenstemming is hierbij niet bereikt, maar toch meent men tegenwoordig in groote trekken te weten, wat het aandeel van Hippokrates is. Het blijkt dan, dat hij bekend was met stellingen en constructies die het hoofdbestanddeel van de boeken I, II, III en (ten deele) VI van Euclides uitmaken. Nu weet men weliswaar niet hoe Hippokratus zijn stellingen bewees en zijn constructies uitvoerde, maar gedeeltelijk op grond van het feit, dat Euclides eerst ruim een eeuw later kwam en gedeeltelijk door tekstanalyse lukt het den Schrijver toch eenig idee te geven van wat in de tweede helft der vijfde eeuw waarschijnlijk was bereikt.

Het volgende hoofdstuk gaat in den tijd iets terug en wel naar Zeno van Elea ,geboren omstreeks 500 v. Chr.) De beroemde redeneeringen (waaronder de bekende paradoxen) van dezen wijsgeer, via Aristoteles en Simplikios tot ons gekomen, zijn door Tannery geïnterpreteerd als een resultaat van de denkmoeilijkheden die het continuum aan den menschelijken geest stelt. Ongetwijfeld hebben deze beschouwingen meegebracht het inzicht van de onuitputtelijkheid van het oneindige (men denke b.v. aan Achilles en de schildpad). Voor de eerste maal in dit werk ziet men hier, hoe na de wetenschappelijke geestesgesteldheid van onzen tijd aan die van de Grieken verwant is.

Ten einde in hare ontwikkeling een groote lijn te kunnen zien, stelt de Schrijver thans de hypothese op, dat de Grieksche wiskunde omstreeks 400 v. Chr. een tweevoudige crisis heeft doorgemaakt, veroorzaakt door de ontdekking van de algemeenheid van het verschijnsel der irrationaliteit en door het veldwinnende inzicht in de denkmoeilijkheden van de begrippen continuïteit en oneindigheid. Deze hypothese ontleent haar bestaansrecht aan het feit, dat hetgeen zij over de wiskunde der vierde eeuw onderstelt, op natuurlijke wijze aansluit aan hetgeen we van de voorgaande periode vermoeden en van de volgende weten. In dit verband worden uitvoerig besproken Theaitetos van Athene (± 415—369 v. Chr.), in hoofdzaak voor zijn bijdrage tot de theorie van het irrationale en Eudoxos van Knidos (408—355 v. Chr.) van wien de exhaustiemethode afkomstig moet zijn geweest.

Een afzonderlijk hoofdstuk behandelt een in 1923 door E. Frank gepubliceerde hypothese. Volgens deze zouden de berichten over de wiskundige ontdekkingen der Pythagoraeërs, waaraan men in de laatste kwarteeuw is gaan twijfelen, in eere worden hersteld, mits men onder Pythagoraeërs verstaat niet Pythagoras en zijn naaste volgelingen, maar een groep van Zuid-Italiaansche wiskundigen (waaronder Archutas van Taras de voornaamste is), die omstreeks 400 v. Chr. den grondslag zouden hebben gelegd voor de exacte beoefening der wiskunde, zooals men die aantreft bij Eudoxos en Theaitetos. Uitvoerig zet de Schrijver uiteen, waarom hij zich met de hypothese van Frank niet kan vereenigen.

De rol, die Plato in de ontwikkeling der wiskunde heeft gespeeld, berust niet op nieuwe vondsten, waarmee hij haar zou hebben verrijkt, maar uitsluitend op zijn opvatting van haar wezen en op zijn overtuiging van hare didaktische waarde. Zijn meeningen hieromtrent worden geschetst, deels op grond van zijn eigen uitlatingen, deels op grond van wat Aristoteles en Proklos daarover meedeelen.

Na behandeling van het tijdvak tusschen Plato en Euclides wordt de eerste afdeeling besloten met enkele mededeelingen over de persoon van Euclides en de wijze, waarop zijn werk tot ons gekomen is.

Afdeeling II. Deze begint met opsomming van het meerendeel der bepalingen uit Boek I der Elementen. Naast de Grieksche tekst vindt men een letterlijke vertaling. Om tot eenigszins juiste waardeering te komen worden hierna uiteengezet de kriteria, welke Aristoteles aan definities stelde en vervolgens worden eenige der bepalingen afzonderlijk besproken.

Hierop volgen alle postulaten en algemeene inzichten (axiomata) met naast de oorspronkelijke tekst weer een letterlijke vertaling. Zij worden in een uitvoerige bespreking getoetst aan de opvattingen der Ouden, terwijl ook meeningen van moderne onderzoekers worden vermeld. Lang wordt stilgestaan bij het wonderlijke vierde postulaat. Dit zegt dat alle rechte hoeken aan elkaar gelijk zijn. Deze bewering is op zichzelf natuurlijk niet zoo vreemd, maar zij komt zoo misplaatst voor, dat men er eigenlijk weinig raad mee weet. Het beroemde vijfde postulaat, dat volgens de moderne inzichten een der geniaalste vindingen van Euclides is geweest, komt ook later bij de parallelentheorie nog uitvoerig ter sprake.

De proposities van Boek I worden behandeld in drie gedeelten.

a. no. 1—26. Dit deel is onafhankelijk van het vijfde postulaat en bevat theorema's over gelijkheden en ongelijkheden van zijden en hoeken in een of meer driehoeken en over de hoeken, die bij de snijding van twee rechten onstaan; verder constructies voor het overbrengen en halveeren van hoeken en lijnstukken en voor het trekken van loodlijnen.

b. no. 27—32, waarin de parallelentheorie behandeld wordt.

c. no. 33—48, die handelen over de oppervlakken van drie- en vierhoeken en culmineeren in het theorema van Pythagoras.

De Grieksche tekst der proposities wordt volledig gegeven met een letterlijke vertaling terwijl de behandeling telkens òf slechts wordt geschetst òf in verkorte notatie weergegeven. De Schrijver voegt vaak uitgebreide besprekingen toe, maar ziet af van een voortdurend opmerkzaam maken op de leemten, die de moderne kritiek in het betoog van Euclides kan aanwijzen. Wel wordt herhaaldelijk gewezen op de groote verschillen die bestaan tusschen de methode van Euclides en die welke tegenwoordig hier te lande bij het elementaire onderwijs gangbaar is. Zoo is, om een treffend voorbeeld te noemen, in Boek I der Elementen nergens sprake van verhoudingen. De stelling van Pythagoras wordt niet afgeleid met behulp van gelijkvormigheid maar met de z.g. aequivalentietheorie, die berust op beschouwingen betreffende gelijkheid van oppervlakken (waarin echter het begrip „oppervlak van een figuur" niet voorkomt). Dit alles hangt ten nauwste samen met het beperkte getalbegrip der Ouden.

Het voorgaande geeft slechts een zeer onvolledig beeld van den bijzonder rijken inhoud van het werk van den Heer Dijksterhuis. Men weet niet wat het meest te bewonderen, de uitgebreide documentatie, de vernuftige synthese of den vlotten stijl. Wat het laatste betreft kan men zonder overdrijving zeggen, dat het boek zich laat lezen als een roman. Het gelukt den Schrijver op uitstekende wijze ons de ontwikkeling van een deel der Grieksche wiskunde als samenhangend geheel te doen zien. Mooi komt ook uit het in onzen tijd zoo gewilde streven naar exactheid, waarin de Ouden zich gunstig onderscheidden van vele mathematici der 17de en 18de eeuw (om van de 19de maar te zwijgen) die wel den bovenbouw enorm hebben uitgebreid, maar de fundeering veelal schromelijk hebben verwaarloosd.

Ten slotte nog een andere kwestie. In de moderne wiskunde zijn de onderwerpen der Elementen van Eucides zeer intensief bestudeerd en tot zekere hoogte uitgeput. Hierdoor wordt voor een hedendaagsch commentator het gevaar van „hineininterpretieren" groot. Bovendien zal een bewonderaar van de prestaties der Ouden onwillekeurig geneigd zijn hen zoo voordeelig mogelijk en daardoor misschien minder juist te belichten. In het algemeen is m. i. de Heer Dijksterhuis aan beide gevaren ontkomen. Zijn phenomenale belezenheid stelt hem in staat steeds verschillende inzichten te vermelden en als hij conclusies trekt, doet hij dit met de gereserveerdheid van den echt wetenschappelijken onderzoeker. Toch mogen mij een paar opmerkingen vergund zijn.

Bij het lezen van afdeeling I komt men sterk onder den indruk van het harmonische geheel, ik zou bijna zeggen de strakke lijn, van de ontwikkeling der wiskunde vóór Euclides. Bij afdeeling II krijgt men van Boek I der Elementen ook wel een dergelijken indruk, maar toch in mindere mate. Bedenkende dat de tweede afdeeling op veel exacter data berust dan de eerste en dus minder gelegenheid biedt voor het invoegen van hypothesen of andere retoucheering, kon ik niet aan het gevoel ontkomen dat vooral in de eerste helft van het boek nogal het een en ander van den Schrijver zelf verwerkt is. Dit is natuurlijk een vage persoonlijke indruk en mogelijk is niemand het met mij eens.

Iets meer concreet is het volgende. Op blz. 195 verdedigt de Schrijver Euclides tegen een aanmerking van Heath, die beweert dat in de Elementen het woord ἴσος eerst beteekent „congruent" en later, zonder waarschuwing, moet worden opgevat als „met gelijk oppervlak". Schrijver betoogt dat z. i. aan den tekst van Euclides geen bewijs kan worden ontleend dat „gelijkheid" vóór prop. 35 iets anders zou beteekenen dan in en na deze propositie. Uit de prop. 4 en 8 meent hij te kunnen besluiten dat „gelijkheid" ook vóór prop. 35 reeds iets anders beteekent dan „congruentie". Nu is het in de eerste plaats merkwaardig dat de Heer Dijksterhuis op blz. 121 bij de axiomata ἴσος vertaalt door „gelijk", maar in de bijzondere formuleering op blz. 193 hetzelfde woord door „aequivalent" aangeeft, wat er toch op wijst, dat hijzelf blijkbaar eenig verschil voelt. Aangenomen echter, dat hij in dien zin gelijk heeft, dat Euclides met de gelijkheid der driehoeken in prop. 4 en de gelijkheid der parallelogrammen in prop. 35 hetzelfde bedoeld heeft (en de eigenaardige redactie van prop. 4 pleit inderdaad voor deze opvatting), zoo wordt de kritiek van Heath slechts verplaatst. Dan namelijk zou Euclides in prop. 4 hetzelfde woord in twee beteekenissen hebben gebruikt, daar hij bij hoeken en lijnstukken toch ongetwijfeld aan congruentie heeft gedacht.

Men vergeve mij deze uitvoerigheid. Als excuus moge dienen dat genoemd betoog het eenige in het boek is, waartegen ik meende bezwaar te kunnen maken en men kan in een recensie toch niet uitsluitend prijzen.

Uit het voorgaande zal men wel begrepen hebben dat ik lezing van het werk ten sterkste aanbeveel. Daar oorspronkelijke citaten in den tekst steeds door een vertaling begeleid worden, behoeft de lezer niet klassiek gevormd te zijn en daar de wiskunde vrijwel tot het elementaire gebied beperkt blijft, is het boek ook de aandacht waard van niet-mathematisch ontwikkelde classici. B. P. H.

Spektraltheorie der unendlichen Matrizen. Von Aurel Winter. S. Hirzel, Leipzig (1929). 280 S.

Das Buch ist aus Vorträgen hervorgegangen, welche der Verfasser im Leipziger Seminar 1927/28 gehalten hat und will eine Einführung geben in die von Hilbert begründete, von Hellinger, Toeplitz und anderen ausgebaute Theorie der unendlichen quadratischen Matrizen. Der Stoff ist verteilt auf sechs Kapitel: I. Algebraische und formale Grundlagen. II. Analytische Hilfsmittel. III. Die beschränkten unendlichen Matrizen. IV. Theorie der Spektralmatrix. V. Spektraltheorie der beschränkten Matrizen. VI. Hermitesche nicht beschränkte Matrizen. — Dazu kommt ein Anhang: Skizze einer Spektraltheorie der fastperiodischen Funktionen.

Das Kapitel I bringt als Einleitung die Hauptsätze der Algebra endlicher quadratischer Matrizen $\mathfrak{A} = \| a_{ik} \|$ $(i, k = 1, 2, .., n)$ in einer Aufmachung, die in manchen Punkten von der sonst üblichen Darstellungsweise abweicht und für die Verallgemeinerung auf unendliche Matrizen zugeschnitten ist. Dabei nehmen, eben mit Rücksicht auf diese Verallgemeinerung, die Hermiteschen Matrizen $(a_{ik} = \bar{a}_{ki}$ $=$ konj. kompl. Grösse von $a_{ik})$ und deren unitär-invariante Eigenschaften eine centrale Stellung ein. Unitär-invariant heist invariant beim Uebergang von $\mathfrak{A}$ zu $\mathfrak{U}\ \mathfrak{A}\ \mathfrak{U}^{-1}$, wo $\mathfrak{U}$ eine unitäre Matrix $(\sum_{j=1}^{n} u_{ij}\, u_{kj} = \delta_{ik})$ vorstellt. Die n Wurzeln λ_i der Gleichung det $(\lambda \mathfrak{E} - \mathfrak{A}) = 0$, $\mathfrak{E} = \| \delta_{ik} \|$ = Einheitsmatrix, sind die Eigenwerte der Matrix $\mathfrak{A}$ und bilden in ihrer Gesamtheit das Spektrum von $\mathfrak{A}$. Bei

Hermiteschen $\mathfrak{A}$ sind dies n reelle Punkte auf der λ-Axe. Es existiert dann eine unitäre Matrix $\mathfrak{U} = \| u_{ik} \|$, wofür $\mathfrak{U}\ \mathfrak{A}\ \mathfrak{U}^{-1}$ eine Diagonalmatrix $\| \lambda_i\, \delta_{ik} \|$ wird. Mit Hilfe der u_{ik} von $\mathfrak{U}$ können n^2 Treppenfunktionen $\sigma_{ik}(\mu)$ einer reellen veränderlichen μ definiert werden, die ihre Sprungstellen in den Eigenwerten $\mu = \lambda_i$ haben und deren Gesamtheit die zu $\mathfrak{A}$ gehörige „Spektralmatrix" $\mathfrak{E} = \| \sigma_{ik}(\mu) \|$ bilden. Die Theorie dieser Spektralmatrizen ist besonders für die unendlichen Matrizen von Wichtigkeit und wird für diese im Kap. IV behandelt. Dabei spielen sogenannte Einzelmatrizen, für die $\mathfrak{S}^2 = \mathfrak{S}$ gilt, eine Hauptrolle, da sich beweisen lässt, dass die Spektralmatrix jeder beschränkten Hermiteschen Matrix eine spektrale Einzelmatrix ist.

Das Kapitel II bringt eine Zusammenstellung der wichtigsten analytischen Hilfsmittel, die in der Theorie des Spektrums unendlichen Matrizen benötigt werden. Wir heben hervor: Stieltjes'sche Integrale, Konvergenzsätze über Integralfolgen, die Umkehrformel von Stieltjes, den Hilbertschen Residuensatz, die Neumannsche Reihe, Hellingersche Operatoren etc.

Das Kapitel III behandelt den Hilbertschen Konvergenzsatz für beschränkte Matrizen sowie die, ebenfalls von Hilbert stammenden Faltungssätze (Produkte unendlicher Matrizen). Ferner das Reziprokenproblem ($\mathfrak{A}^{-1}$), die sich auf die Resolvente $(\lambda\mathfrak{E}-\mathfrak{A})^{-1}$ beziehenden Theoreme und die Tabelle von Töplitz bezüglich der Existenzmöglichkeiten von vorderen und hinteren Reziproken.

Das IV. Kapitel gibt, wie schon oben erwähnt, einen leider recht knapp gehaltenen Abriss der Theorie der Spektralmatrizen von beschränkten Hermiteschen Matrizen, die eine Verallgemeinerung der von Hilbert betrachteten Spektralformen bei beschränkten quadratischen Formen unendlichvieler Variabler darstellen (Vgl. Enzykl. der mathem. Wiss. 113, Heft 9, p. 1577).

Im V. Kapitel wird diese Theorie für beschränkte, im Kapitel VI auch für nicht beschränkte Hermitesche Matrizen weiter verfolgt. Bezüglich der Ausführungen über die Zerlegung des Spektrums, im Besonderen über das Streckenspektrum wäre an vielen Stellen ein breiterer Text erwünscht. Es befriedigt keineswegs wenn wiederholt auf die Dissertation von Hellinger verwiesen wird. Auch wäre es für eine „Einführung" sicher sehr am Platze gewesen, den engen Zusammenhang mit der klassischen Theorie der Integralgleichungen explizite dem Leser vor Augen zu führen. Auch ein (fehlendes) Namen- und Sachregister würde ein Sichzurechtfinden in den zahlreichen Benennungen sehr erleichtern. R. Weitzenböck.

Ergänzungshefte zu W. Lietzmann's mathematischem Unterrichtswerk. 5. Aus der neueren Mathematik, von Dr. W. Lietzmann. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1929, 78 blz., R.M. 2,40.

Vroeger heb ik in dit tijdschrift eenige aanvullingsdeelen bij het „Unterrichtswerk" van Dr. Lietzmann aangekondigd (zie Euclides IV, blz. 272 en V, blz. 133); onlangs is een vijfde deeltje verschenen, dat tot ondertitel draagt: Quellen zum Zahlbegriff und zur Gleichungslehre, zum Funktionsbegriff und zur Analysis. Hierin vindt men een achtentwintigtal korte aanhalingen over bovenstaande onderwerpen, van schrijvers als Euler, Gausz, Dedekind, Cauchy, Descartes, Leibniz, Klein en enkele anderen. Het is hoogst verrassend, op te merken hoe deze groote mannen somtijds over elementaire onderwerpen schreven. Ik kan mij niet weerhouden, eene alinea uit het eerste stukje over te schrijven; daar is Euler aan het woord, in zijne „Vollständige Anleitung zur Algebra" (1771) uitleggende, waarom $-a \times -b = +ab$ is. Hij heeft eerst beredeneerd dat $-a \times +b = -ab$, en vervolgt dan

„Nun ist also noch dieser Fall zu bestimmen übrig: nehmlich wann — mit — multiplicirt wird, oder $-a$ mit $-b$. Hierbey ist zuerst klar, dasz das Product in Ansehung der Buchstaben heiszen werde, ab; ob aber das Zeichen + oder — dafür zu setzen sey, ist noch ungewisz, so viel ist aber gewisz, dasz es entweder das eine, oder andere seyn musz. Nun aber, sage ich, kan es nicht das Zeichen — seyn. Dann $-a$ mit $+b$ mult. giebt $-ab$, und also $-a$ mit $-b$ mult. kann nicht eben das geben was $-a$ mit $+b$ giebt, sondern es musz das Gegentheil herauskommen, welches nehmlich heiszt, $+ab$. Hieraus entsteht diese Regul, — mit — multiplicirt giebt + eben so wohl als + mit +."

Als deze aanhaling Uw nieuwsgierigheid naar het werkje niet prikkelt, wat dan wel? J. H. S.

MECHANICA OPNIEUW EXAMENVAK.

Aan het feit, dat mechanica bij K.B. van 8 Juni 1929 weder als examenvak hersteld is, zou ik gaarne enkele beschouwingen willen vastknoopen. Men zal begrijpen, dat de voorzitter der Commissie, die destijds op verzoek van het College van Inspecteurs een leerplan en eindexamen-programma voor de H. B. S. heeft ontworpen, in deze herstelling nog niet een verwezenlijking van zijn liefste wenschen ziet, maar wel het nog nevelige begin van een beteren dag.

De mechanica wordt als examenvak nog niet geheel als vol beschouwd; zij moet zich met het schriftelijk gedeelte tevreden stellen. Dit is te betreuren, doch begrijpelijk; het mondeling examen zou bij de tegenwoordige regeling een nieuwen deskundige eischen; de deskundigen voor wiskunde, en die voor natuurkunde, scheikunde en plant- en dierkunde zijn reeds den geheelen dag bezet.

„Het werk voor mechanica wordt slechts opgezonden na aanvraag van een der deskundigen." De bedoeling hiervan is blijkbaar, dat de vaststelling van de cijfers voor dat vak plaats heeft op dezelfde wijze als waarop dat tot nu toe voor het handteekenen gebeurde; echter is in het reglement niet te zien, welke deskundige hiervoor is aangewezen. Vermoedelijk wordt het beschouwd als een zaak, die van zelf spreekt, dat de wiskundige zich hiermede belast.

De examen-cijfers voor mechanica en boekhouden zullen voorloopig nog wel met andere oogen worden beschouwd als die voor de andere vakken, omdat de facultatiefstelling nog niet is opgeheven. Voor een werkelijke verbetering van den toestand van het onderwijs in de hoogere klassen is deze opheffing een gebiedende eisch. Trouwens, de door het nieuwe K.B. geschapen toestand schijnt als een *voorloopige* bedoeld te zijn; ik hoop, dat een betere en meer definitieve niet al te lang op zich zal doen wachten.

Omtrent het eindexamen-programma voor mechanica merk ik in de eerste plaats op, dat het tot vier malen toe in de weinige regels het woord „eenvoudig" bevat. Dit feit lijkt mij kenmerkend voor het programma; blijkbaar zal, althans voorloopig, met het eindexamenvak mechanica met groote voorzichtigheid worden te werk gegaan. Men heeft gezegd, dat de ingewikkelde vraagstukken van vóór 1920, die een examen-dressuur in grooten stijl ten gevolge zouden gehad hebben, waardoor dat leervak niet steeds tot de ontwikkeling der leerlingen bijdroeg, het droevig einde van de mechanica hebben verhaast; ik verwacht, dat men nu die fout zal trachten te vermijden en niet zijn kracht zal willen zoeken in kunstmatig in elkaar gezette vraagstukken, doch een grooter aantal enkelvoudige vraagstukken zal geven, die dadelijk bij de theorie aansluiten; dat ook onderwerpen uit de theorie zullen gegeven worden, wordt in het programma duidelijk vermeld. Dit laatste is te meer noodzakelijk, nu een mondeling examen achterwege blijft.

Men zal ruimere keuze hebben van theorie-onderwerpen, wanneer eenmaal een eindexamen-programma, aansluitend aan een leerplan in den geest van onze Commissie, van kracht zal worden, maar het eenvoudiger programma van thans biedt toch reeds gelegenheid te over voor zulke opgaven uit de theorie. Ik wil dit verduidelijken door een aantal zulke vragen te noemen:

Welke zijn in het dynamische stelsel de grondeenheden en de afgeleide eenheden, die in de mechanica gebruikt worden? Geef van alle eenheden de definitie. Dezelfde vragen voor het statische stelsel van eenheden.

Beredeneer het verband, dat bestaat tusschen de eenheden van kracht in het dynamische en in het statische stelsel; leid het verband af, dat tusschen de eenheden van arbeid in beide stelsels bestaat.

Met hoeveel ergs zou de arbeidseenheid gelijk staan in het stelsel, dat als grondeenheden heeft: voor de lengte 1 km, voor den tijd 1 dag, voor de kracht 1000 kg. Is dit stelsel een absoluut stelsel? beredeneer het antwoord.

Leid de formule af voor de grootte der versnelling van een punt, dat zich eenparig in een cirkel beweegt.

Wat verstaat men onder het samenstellen van twee bewegingen? Toon aan, dat de resulteerende van een willekeurig aantal rechtlijnige bewegingen, waarvan een deel eenparig, een deel eenparig vertraagd, een deel eenparig versneld met of zonder beginsnelheid is, dezelfde is als die van één rechtlijnige eenparige en één rechtlijnige eenparig versnelde zonder beginsnelheid; beschrijf den weg, dien men volgen kan, om de snelheid der ééne eenparige en de versnelling der ééne eenparig versnelde beweging te vinden.

Geef een schetsteekening van den weg, dien een punt zal volgen, indien het, vrij vallend van gegeven hoogte, op de halve hoogte aangekomen een stoot ontvangt, die het bij de snelheid, die het reeds verkregen had, een horizontaal gerichte snelheid geeft van dezelfde grootte. Geef ook een schetsteekening van de beweging, die ontstaan zou zijn, indien op datzelfde punt op dezelfde plaats een kracht was gaan werken, gelijk aan het gewicht van het punt.

Onderzoek, welke de voorwaarde is, opdat de resulteerende van twee rechtlijnige eenparig vertraagde bewegingen weder een rechtlijnige beweging is.

Op een vast lichaam werken in verschillende punten, doch in hetzelfde vlak 2 krachten. Onderzoek of die krachten tot één kracht zijn samen te stellen, zoowel als het snijpunt der richtlijnen buiten het lichaam gelegen is, als wanneer het daarbinnen ligt. Waar kan men voor een geval, dat de vraag bevestigend kan worden beantwoord, het aangrijpingspunt der resultante kiezen? Op welke wijze bepaalt men het snijpunt van de richtlijn der resultante met de verbindingslijn der aangrijpingspunten?

Een stelsel van krachten, in één plat vlak werkende, is gelijkwaardig met een enkele kracht, met een koppel, of in evenwicht. Toon dit aan.

Bewijs, dat 3 krachten, op een vast lichaam werkende, in evenwicht zijn, indien voldaan is aan de volgende voorwaarden: 1°. de krachten werken in één vlak; 2°. haar richtlijnen gaan door één punt; 3°. het quotient van de grootte der kracht en den sinus van den hoek, door de beide andere ingesloten, is voor de 3 krachten gelijk.

Stel op eenvoudige wijze een koppel samen met een kracht, die met het koppel in één vlak ligt.

Toon aan, dat men een willekeurig stelsel van krachten en koppels, op een vast lichaam werkende, kan vervangen door één kracht en één koppel.

Toon aan, dat een stelsel van krachten, die voorgesteld worden door de zijden van een veelhoek, als men dezen in een bepaalde richting rondloopt, gelijkwaardig is met een koppel.

Wat verstaat men onder het middelpunt van een stelsel evenwijdige krachten? Toon de stelling aan, van welke men gebruik maakt om dat punt te bepalen.

Wat verstaat men onder het zwaartepunt van een lichaam? Toon door enkele eenvoudige voorbeelden aan, dat dit punt niet altijd te beschouwen is als het aangrijpingspunt van de op een lichaam werkende zwaartekracht.

Leid de algemeene formules af voor de plaats van het zwaartepunt van een lichaam en leid daaruit af, dat, als het lichaam een symmetrie-vlak bezit, het zwaartepunt in dat vlak gelegen is.

Bepaal door constructie het zwaartepunt van een vierhoek; ook van den omtrek van een vierhoek.

Wat verstaat men onder wrijvingscoëfficient, wat onder wrijvingshoek? leid het verband tusschen beide af. Als een lichaam van gegeven gewicht op een ruw horizontaal vlak is geplaatst, bepaal dan richting en grootte van de kleinste kracht, door welke het lichaam in beweging is te brengen.

Bepaal de grootste kracht K en de kleinste K^1, die een lichaam (stoffelijk punt) van gegeven gewicht op een ruw hellend vlak in evenwicht houdt.

Dezelfde vraag, als K en K^1 langs het vlak gericht zijn. Wat beteekent het, indien K^1 negatief blijkt te zijn? Beschrijf den aard der beweging van het stoffelijke punt, als het aanvankelijk een benedenwaartsche beweging langs de helling had, voor elk der volgende gevallen: de werkende kracht $> K$, $= K$, $< K$ en $> K^1$, $= K^1$, $< K^1$ (naar boven gericht langs de helling; K^1 is positief).

Enz.

Wat den *omvang* der examenstof betreft, deze schijnt mij te liggen *binnen* de in de meestal gebruikte boeken behandelde. Hoewel de leer der werktuigen nog wel zou kunnen geacht worden, binnen het programma te vallen (eenvoudige gevallen van evenwicht), schijnt mij dit toch niet de bedoeling te zijn, al geloof ik ook, dat de theorie van de balans stellig tot de examenstof moet gerekend worden; katrollen en takels (met wrijving) worden uitdrukkelijk buitengesloten. Bij de plaatsbepaling van het zwaartepunt wordt van zéér eenvoudige lichamen gesproken, zoodat men niet verder zal willen gaan dan het zwaartepunt van den inhoud van pyramide en kegel. Hoewel ook de botsing nog wel tot de examenstof zou kunnen gerekend worden, mag men toch uit het feit, dat zij niet afzonderlijk genoemd is, wel de gevolgtrekking maken, dat zij niet daartoe behoort.

Men komt aldus tot een vrij aanzienlijke beperking van de vroegere examenstof; mag men er nog op rekenen, dat de vraagstukken van eenvoudiger structuur zullen zijn, zoodat zij geen bijzondere voorbereiding van de leerlingen eischen, dan komt tijd voor een rustige behandeling der grondbegrippen vrij, en kan het onderwijs in de mechanica beter aan zijn doel beantwoorden dan vóórheen.

Wat nog de vraagstukken betreft: ik vermoed, dat de vraagstukken, die uit *n* van elkaar afhankelijke deelen bestaan, zoodat de leerling, die het eerste deel niet kan oplossen, ook van de andere deelen zoo goed als zeker niets kan terecht brengen, tot het verleden behooren. Men is met de vraagstukken bij het extranei-examen m.i. in het algemeen wel gelukkig geweest; hierbij moet bedacht worden, dat zij betrekking moesten hebben op de zeer beperkte leerstof der 4de klasse.

De *nauwkeurigheid* van behandeling der examenstof loopt in de verschillende leerboeken zeer sterk uiteen; het spreekt vanzelf, dat de examen-opgaven de docenten niet zullen dwingen, in een bepaalde richting te gaan, zoolang niet het leerplan, ook van de wiskunde, wijziging heeft ondergaan.

Deventer. H. J. E. BETH.