

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDAC-
TIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN
J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

MET MEDEWERKING VAN

Dr. H. J. E. BETH
DEVENTER

Dr. E. J. DIJKSTERHUIS
OISTERWIJK

Dr. G. C. GERRITS
AMSTERDAM

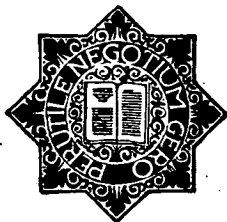
Dr. B. P. HAALMEIJER
AMSTERDAM

Dr. D. J. E. SCHREK
UTRECHT

Dr. P. DE VAERE
BRUSSEL

Dr. D. P. A. VERRIJF
ARNHEM

5e JAARGANG 1928/29, Nr. 6



P. NOORDHOFF — GRONINGEN

Prijs per Jg. van 18 vel f 6.—. Voor intekenaars op het
Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde en Christiaan Huygens f 5.—.

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken, verschijnt in zes tweemaandelijksche afleveringen, samen 18 vel druks. Prijs per jaargang *f* 6.—. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6.—) of op „Christiaan Huygens” (*f* 10.—) zijn ingeteekend, betalen *f* 5.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans-van-Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Het honorarium voor geplaatste artikelen bedraagt *f* 20.— per vel.

De prijs per 25 overdrukken of gedeelten van 25 overdrukken bedraagt *f* 3,50 per vel druks *in het vel gedrukt*. Gedeelten van een vel worden als één geheel vel berekend. Worden de overdrukken buiten het vel verlangd, dan wordt voor het afzonderlijk drukken bovendien *f* 6.— per vel druks in rekening gebracht.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

I N H O U D.

	Blz.
E. DE HAIRS, Geschiedenis der Wiskunde	229—236
A. C. DE KOCK, Over een belangrijk vraagstuk der Sterrenkunde	237—267
J. SCHELTENS, Natuurkunde en Wiskunde	268—269
H. J. E. BETH, De ontwikkeling van het getalbegrip bij het Middelbaar- en Voorbereidend Hooger Onderwijs	270—284
Boekbespreking	285—296
Ingekomen boeken	296
Inhoud	297—298

 De redactie heeft het genoegen in deze aflevering het portret te geven van Prof. Dr. W. VAN DER WOUDE; zij hoopt de portretten van al onze hoogleraren den inteekenaars achtereenvolgens te kunnen aanbieden.

GESCHIEDSCHRIJVERS DER WISKUNDE

DOOR

E. DE HAIRS (Antwerpen).

Pierre de la Ramée — Ramus — (1515—1572), behoorde tot de denkers, die de wijsbegeerte van Aristoteles bestreden en een rationeele wijsbegeerte opbouwden.

Niettegenstaande 't armoedige en ellendige leven, dat R. te Parijs doorbracht, studeerde hij met veel ijver Latijn en philosophie. Zijn proefschrift (1536) en zijn twee werken, uitgegeven in 1543 maakten aan de Sorbonne en het Collège de France geweldigen ophef. Van toen af was R.'s leven onrustig. Als gevolg van onverdraagzame godsdienstkwesties verliet hij Parijs en bezocht verschillende Duitsche steden, Heidelberg, Straatsburg, enz.

In 1570 vinden we hem terug in Parijs. In den St. Bartholomeusnacht (24 Oogst 1572) werd hij in zijn kamer verraderlijk vermoord.

Ramus maakte zich verdienstelijk voor de wijsbegeerte, de grammatica en de wiskunde (logica).

Ons interesseert meest „P. Rami prooemium mathematicum in tres libros distributum”, 1567, opgedragen aan koningin Katharina van Medicis. Het pas genoemd werk vormt de eerste drie boekdeelen van de *Scholae mathematicae* 1569. (31 bd.).

De geschiedenis der wiskunde is er in vier tijdvakken verdeeld:

1. 't Chaldeesche tijdvak van Adam tot Abraham.
2. 't Egyptische tijdvak.
3. 't Grieksche tijdvak van Thales tot Theon van Alexandrië.
4. de moderne wiskunde.

Ramus hoopte, dat een ander historicus 't vierde tijdvak zou behandelen.

Een andere beoefenaar der wiskunde was een leerling van Commandinus, den geleerden abt *Bernardino Baldi* geboren te Urbino 1553 en overleden in 1617; hij studeerde aan de hoogeschool van

Padua en verwierf roem als godgeleerde, mathematicus, geschiedschrijver en redenaar.

Hij schreef twee geschiedkundige werken, nl. de „Cronica de' Matematici, overo epitome delle vite loro" (1707), dat slechts een eenvoudige catalogus is, en de „Vite de' Matematici."

Het laatst genoemde werk was niet in druk verschenen; het handschrift berustte in de rijke bibliotheek van prins Boncompagni.

De jezuïet *Giuseppe Biancani* — *Blancanus* — leeraar in de wiskunde te Padua, schreef in 1615 een *Clarorum mathematicorum Chronologia*, bevattende 26 hoofdstukken.

„Een kenmerkende eigenschap van de wiskundigen, die Holland tot roem strekken, was hun bekendheid met de geschiedenis van het vak. Het is dan ook misschien geen toeval, dat het eerste uitvoerige werk over de geschiedenis der wiskunde afkomstig is van een Amsterdamsch geleerde.

Gerhard Johann Voss, meer algemeen bekend onder den naam *Vossius*, 1577—1649, was in 1600 reeds rektor te Dordrecht. In 1614 ging hij als hoogleeraar in de theologie naar Leiden en in 1631 werd hij hoogleeraar aan het nieuw opgerichte atheneum te Amsterdam. Hij was in de eerste plaats beoefenaar der klassieke talen. Op het gebied van mythologie, geschiedenis en spraakkunst leverde hij werk, dat als baanbrekend beschouwd wordt. In latere levensjaren schreef hij een werk over de geschiedenis der wiskunde. Nog voordat de druk voltooid was, overleed de schrijver. De afzonderlijke onderdeelen der wiskunde, meetkunde, logistika, muziek enz. worden achtereenvolgens behandeld in die geschiedenis. Telkens worden de voornaamste schrijvers in tijdsorde genoemd. Het boek telt 502 bladzijden kwarto-formaat. Ofschoon Vossius zelf geen wiskundige was en zeker dikwijls heeft geput uit schrijvers, die ook geen wiskundigen waren, is het werk toch zeer verdienstelijk. Het is alleen jammer, dat hij meestal zijn zegsmannen niet noemt. Wellicht moet aan den invloed van dit werk worden toegeschreven, dat men in het begin der 19de eeuw in verschillende uitvoerige Hollandsche leerboeken een inleiding over de geschiedenis van de meetkunde of van de wiskunde in 't algemeen aantreft," aldus J. Versluys op blz. 121 en 122 van zijn „Beknopte Geschiedenis der Wiskunde."

Enkele aanvullende noten zijn hier gewenscht:

Het lijvige werk, dat Vossius, geboren in een dorpje bij Heidelberg 1577, overleden te Amsterdam in 1649, schreef over de geschiedenis der wiskunde: „De universae mathesios natura et constitutione liber” werd uitgegeven te Amsterdam 1650.

Van zijn hand verschenen nog:

„De scientiis mathematicis”. 1650.

„De quatuor artibus popularibus, de philologia, et scientiis mathematicis, cui operi subjungitur, chronologica mathematicorum, libri tres.” Amstelaedami, J. Blaes, 1601, in — 4°.

„Gerardi Joan Vossii Opera in sex tomos divisa Quorum series post praefationem exhibetur.” Amstelodam, ex typographia P. et J. Blaes, 1695—1701; 6 vol., in fol., waarvan de „de Artium et scientiarum naturâ” uitmunt door juistheid, methode en uitvoerige literatuur.

Van 1633 af onderwees hij de geschiedenis te Amsterdam.

Naast Vossius plaatsen we *Van Roomen*,¹⁾ beter gekend onder den naam van *Adrianus Romanus*, niet omdat hij eigenlijk een geschiedenis der wiskunde geschreven heeft, maar omdat in zijn boeken en geschriften besprekingen voorkomen over vooraanstaande wiskundigen van zijn tijd.

Van Roomen (*Adrien Romain* of *Adrianus Romanus*) werd geboren te Leuven den 29 September 1561 en overleed te Mainz den 4 Mei 1615; hij studeerde geneeskunde, wijsbegeerte en wiskunde te Keulen, te Leuven en te Parijs. In 1586 werd hij hoogleeraar in de wiskunde te Leuven om Gemma Frisius (1508—1555) op te volgen.

Van toen af wijdde hij zich heelemaal aan wiskunde en sterrenkunde.

Zijn uitdaging voor 't oplossen van een speciale vergelijking van den 45sten graad en zijn polemieken met Vieta en Jozef Scaliger, hoogleeraar te Leiden, maakten grooten ophef.

Romanus' eerste werk: „*Idae mathematicae pars prima, sive methodus polygonorum*,”,²⁾ *Adr. Romano Iovaniensi*,

¹⁾ J. Versluys: „Beknopte geschiedenis der Wiskunde”. Amsterdam, A. Verluys 1902. (thans overgegaan in het fonds van den heer P. Noordhoff te Groningen). Op p. 97 en 98 van genoemd werk staan drie fouten. A. Van Roomen overleed in 1615 en niet in 1625; hij vond π tot in 16 decimalen (3,147.592.653.589.793 1) en niet tot in 17 decimalen; hij construeerde 't werkstuk van *Apollonius* met behulp van twee hyperbolen in plaats van met één hyperbool.

²⁾ Van de „*Idae mathematicae* . . .” berust een exemplaar in: de Koninklijke Bibliotheek te Brussel, het Observatorium van Ukkel, de

medico et mathematico; Leuven, 1590, in — 4°, bevat de methode der veelhoeken en de berekening van π tot in 16 decimalen.

Het „*Ideae mathematicae . . .*” opgedragen aan den Jezuiet P. Clavius, bevat een bericht, „*lectori philomathi*” waarin hij loffelijke bijzonderheden mededeelt omtrent Nederlandsche wiskundigen. De volgende wiskundigen worden opgenoemd. Christophe Clavius, Gui Ubaldo, Jean Antoon Magini, Jan Cornets Grotius, Ludolph van Collen, Michiel Cognet, Nicolaas Peetersen (Petrus Daven- triensis), Simon Stevens, Tycho Brahe, Valentin Otto, Georges Joachim Rheticus, Bernard Lordel, Jan van den Weeghe, Thomas Fienus, Corneille Opmeer. Hij roemt de degelijkheid van hun werk.

In 1590 verscheen van zijn hand: „*Ouranographia sive coeli descriptio*”, Leuven, in — 4°, een gewoon leerboek der cosmo- graphie, waarin we lezen, dat hij van plan was eenige brochuren over astronomie uit te geven, zooals hij reeds vroeger gedaan had voor de rekenkunde. We weten dus van hem zelf, dat hij *Arithmetica's*¹⁾ geschreven heeft.

Hoogst waarschijnlijk zijn die rekenboeken verloren gegaan.

Vieta (1540—1603), de meest beroemde Fransche wiskundige der zestiende eeuw, daagde van Roomen uit om het bekende „werkstuk van Apollonius”¹⁾ te construeeren. De Leuvensche hoogleeraar construeerde voor de oplossing van het werkstuk twee bepaalde

Stadsbibliotheek van Bergen (Mons) en in de Universiteit van Wurzburg. Kästner, A. G., heeft een flinke analyse van de „*Ideae . . .*” gegeven in deel I, pp. 457—469, 504—511; van zijn „*Geschichte der Mathematik*”, Göttingen, 1796—1800, 4 vol, in 8°.

Raadpleeg ook: „*Correspondance Mathématique*” van Quetelet, t. VIII, p. 327; H. Bosmans: „*Note sur trois ouvrages célèbres d'Adrien Romain*” (*Annales de la Soc. sc. de Bruxelles*, t. XXIX, 1905, pp. 77—79).

1) „*Arithmeticae quatuor instrumenta nova Methodo ac forma patente exhibita.*” Herbipoli 1603, in fol. (zeer zeldzaam).

2) Over het werkstuk van Apollonius bestaat een uitvoerige literatuur. Een merkwaardig boekje is: „*Apollonii de Tactionibus . . .*”, a Joanne Guilielmo Camerer”. Gothae, 1795, in 8°, 66 p., met drie uitslaande figuurplaten (er is geen inhoudstafel). Het eerste hoofdstuk luidt: *Historia Problematis Apolloniani* (pp. 1—14), het laatste: *Addenda ad Problematis historiam* (pp. 59—60). Van dat zeldzaam werkje bezitten de heer Paul Ver Eecke en ik elk een exemplaar.

„*Problema Apolloniacum . . .*”, jam verò per belgam Adrianum Romanum constructum. Wirceburgi, typis Georgii Fleischmanni. Anno MDXCVI; in 4°. (zeer zeldzaam; bibl. van 't Observatorium van Pulkowa (Rusland), van de Nationale bibl. te Parijs, de Astory Library te New-York, hertog. bibl. van Wolfenbüttel). Raadpleeg: *Ann. Soc. Sc. de Bruxelles*, t. XXIX, t. 1905, pp. 68—74).

hyperbolen die elkaar snijden. Vieta wees er op, dat zulk een oplossing niet voldoet aan den eisch, dat men alleen gebruik mag maken van passer en liniaal en gaf zelf een goede oplossing, waarbij hij gebruik maakte van gelijkvormigheidspunten. Om geloofskwestie verliet Romanus Leuven, en we vinden hem in 1593 als hoogleeraar in de geneeskunde aan de Universiteit van Wurzburg.

Voor de driehoeksmeting komt vooral in aanmerking Romanus': „Canon Triangulorum rectangulorum”¹⁾ (bevat geen datum; Leuven 1593(?)) en de „Canon Triangulorum sphericorum” (1609).

Van 1610—1611 verblijft hij aan het hof van den koning van Polen; zijn opvolger te Leuven was Jan Storms (Sturmius), 1559—1650, van Mechelen.

Een ander werk van Van Roomen, werk dat zeer zeldzaam is en niet opgeteekend staat in Quetelet's *Histoire des Sciences physiques et mathématiques chez les Belges*, getiteld: „In Mahumedis Algebram”²⁾ is een onafgewerkte Latijnsche vertaling van de algebra van Mahumed ben Muza Alchwarizmi, Arabisch sterrenkundige die onder den Kalief Al Mamum (814—833) te Bagdad leefde; Romanus leidt zijn vertaling in met een beknopte geschiedenis der wiskunde, waarin slechts drie rekenmeesters genoemd worden: *Gilles van der Hoecke*, *Simon Stevens* en *Nicolaas Peetersen*.

Romanus heeft ook beteekenis voor de geschiedenis der geneeskunde.³⁾

Bijzonder opvallend is het aandeel van de Italiaansche wiskundigen in de geschiedenis der wetenschappen.

¹⁾ *H. Bosmans*: „Note sur la Trigonométrie d'Adrien Romain” (*Bibliotheca Mathematica*, III F., B. 5, pp. 342—354).

²⁾ Een exemplaar berust in de Stadsbibliotheek te Doornik (België), opgeteekend als volgt c. 203. Vóór 1914 berustte een exemplaar in de Hoogeschool-bibliotheek van Leuven.

Zie *Bosmans'* verhandeling: „Le fragment du Commentaire d'Adrien Romain sur l'Algèbre de Mahumed ben Musa el-Chowârezmi.” (*Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, t. XXX, 1906, pp. 267—287).

³⁾ Wie meer biographische bijzonderheden verlangt raadplege: *A. Quetelet*: „Histoire des Sciences mathématiques et physiques chez les Belges” Brussel, 1871; pp. 132—138.

Philippe Gilbert: „Notice sur le mathématicien louvaniste Adrianus Romanus”, Leuven 1859, in 8°; en de *Biographie Nationale* aan 't woord Romain.

De Italiaansche letterkundige graaf *Mazzuchelli*, (*Jan Marie*), 1707—1765, vatte het plan op een biographisch woordenboek: „*Gli scrittori d'Italia*,” 1753/63, waarvan slechts zes vol. (A-B) verschenen, op te stellen. Het werk is nauwgezet in de biographische bijzonderheden, doch de beoordeeling der aangehaalde boeken en geschriften is oppervlakkig en onvolledig.

De „*Biografia degli Italiani illustri del secolo XVIII e dei contemporanei*,” Venezia, 1834—45, 10 vol. 8° van *E. de Tipaldo* is eigenlijk een gedeeltelijke aanvulling van het even gemelde woordenboek.

Warme aanbeveling verdient het bio-bibliographisch repertorium: „*Gli scienziati italiani dal Medio Evo ai nostri giorni*” van *A. Mieli*, hoofdopsteller van het tijdschrift: „*Archivio di storia della scienza*.”

In Italië had de geschiedenis der wiskunde een vruchtbaren bodem gevonden.

Vooraan staat *Libri* (*Carucci della Sommaja*), 1803—1869, die in 1830 te Pisa hoogleeraar was in de wiskunde. Wegens politieke redenen vluchtte hij naar Parijs. In 1833 werd Libri leeraar in de Analyse aan de Sorbonne.

Het meest beroemd is hij geworden door een geschiedkundig werk, dat in 1838 verscheen onder den titel: „*Histoire des sciences mathématiques en Italie jusqu'à la fin du 17e siècle*”, 1838—41, 4 vol in 8°. Dit boek vormde den grondslag voor een aantal later verschenen geschiedkundige verhandelingen. Libri beoefende met vrucht de hoogere Analyse en de Getallenleer.

Intusschen had ook prins *Boncompagni* (*Baldassarre Buoncompagni*), de geschiedenis der wetenschappen milddadig gesteund. Verder bevat de „*Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche*” door hem te Rome gepubliceerd vele oorspronkelijke verhandelingen, geïllustreerd met portretten en facsimile's. (1868—1882 : 15 vol.).

Omstreeks 1900 ontstond er in Italië een hoogere vlucht der projectieve meetkunde en een drang naar historische navorschingen. Sindsdien is er op dat gebied veel belangrijks verschenen. In de eerste plaats van de hand van *Gino Loria*, van *Ettore Bortolotti* en van *Federigo Enriques*, die met de medewerking van andere wiskundigen een reeks beknopte, doch sterk synthetische, historische studiën schrijft over de belangrijkste hoofd- en werkstukken van het

klassieke wiskunde-onderwijs. Van die reeks, getiteld: „Questions relatives aux Mathématiques élémentaires”¹⁾ is thans de fascicule I verschenen. In de voorrede is de bedoeling van Enriques' werk voldoende uitgedrukt: „... Du reste, la compréhension supérieure des questions élémentaires, que ce travail désire procurer, ne doit pas résulter seulement de la connaissance de leurs rapports mutuels, mais aussi de l'examen du point de vue historique qui peut seul fondre les plans et les caractères des doctrines diverses en l'unité organique et vivante d'un mouvement d'idées” (p. VII).

In deze reeks hebben wij, jonge wiskundigen, een middel om onze opleiding te volmaken en terug te gaan als denkers tot de grondslagen der wiskunde.

Gino Loria,²⁾ geboren te Mantua den 19 Mei 1862, promoveerde tot doctor in de wiskunde, in 1883, aan de Universiteit van Turijn. Hij studeerde aan de Hoogeschoolen van Mantua, Turijn en Pavia. Van 1884 tot 1886 werd hij assistent aan de Universiteit van Turijn; in 1886 privatdocent, alsmede professor aan de Krijgs-Academie. Vanaf 1886 was Loria hoogleeraar in de meetkunde aan de Hoogeschool van Genua. Hij stichtte in 1897 de „Bullettino di Bibliografia e storia delle scienze matematiche.” Verder schreef prof. Loria een groot aantal belangrijke verhandelingen in wiskundige tijdschriften.

Ettore Bortolotti,³⁾ geboren te Bologna den 6 Maart 1866, is

¹⁾ „Questions relatives aux Mathématiques élémentaires”, réunies et coordonnées par *Federigo Enriques*. Fascicule I: L'évolution des idées géométriques dans la pensée grecque. Point, ligne, surface, par *F. Enriques*. Parijs. Gauthiers—Villars, 1927.

²⁾ *Gino Loria*: Il passato e il presente delle principali teorie geometriche. Monografia storica. Torino 1887.

Gino Loria: Nicola Fergola e la scuola di matematici che lo ebbe a duce. Genova, 1892.

Gino Loria: Le scienze esatte nell' antica Grecia. — Libri 1 e 2. Modena 1893.

Gino Loria: Libro 5 (ultimo): L'aritmética dei Greci. Modena, 1902.

Gino Loria: Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte. Leipzig, 1910/11.

Gino Loria: Guida allo studio della storia delle matematiche. Milano, 1916.

Gino Loria: Pour une histoire de la géométrie analytique (3de int. Math. congres, 1904).

³⁾ *E. Bortolotti*: Gli involuppi di linee curve ed i primordi del metodo inverso delle tangenti. (Periodico di Mat., 1921).

E. Bortolotti: Le prime applicazioni del calcolo integrale alla determinazione del centro di gravità di figure geometriche. (Rendiconti Acc. di Bologna, 1922).

sinds 1920 hoogleeraar in de wiskunde te Bologna en schrijver van gewaardeerde historische studiën.

Federigo Enriques, ¹⁾ mathematicus en wijsgeer, werd te Livorno den 5 Januari 1871 geboren; hij promoveerde tot doctor in de wiskunde in 1891 aan de Universiteit van Pisa.

In 1896 werd hij hoogleeraar te Bologna; in 1923 hoogleeraar in de meetkunde te Rome.

Enriques is medestichter van het internationale tijdschrift „Scientia” en heeft opnieuw de leiding op zich genomen van de „Periodico di Matematiche.”

E. Bortolotti: „La scoperta e le successive generalizzazioni di un teorema fondamentale di calcolo integrale. (Archivio di storia della Scienza, 1924) enz.

¹⁾ *F. Enriques*: Probleme der Wissenschaften. Berlijn, 1910, 2 vol. Per la storia della logica: i principii e l'ordine della scienza, nel concetto dei pensatori matematici. Bologna, 1922. — Fransche vertaling, „L'évolution de la logique”, (door G. E. Monod-Herzen, Parijs 1926). — Duitsche vertaling: „Zur Geschichte der Logik”, door L. Bieberbach, Leipzig, 1927.

F. Enriques: Gli Elementi d' Euclide e la critica antica e moderna. Rome, 1925.

Vacantiecursussen Wiskunde KI en KV. 1929.

Dr. F. SCHUH en **Dr. J. G. RUTGERS**, Hoogleraren te Delft, zullen weder in een te 's Gravenhage te houden vacantiecursus eenige belangrijke onderwerpen betreffende de studie voor de Akten KI en KV behandelen. De stof zal verschillen van die van den vorigen cursus.

Duur van ieder der cursussen ongeveer 23 uur ($9\frac{1}{2}$ —12 en $1\frac{1}{2}$ — $3\frac{1}{2}$ uur).

KV: 23 Juli — 27 Juli, f45;

KI: 29 Juli — 2 Aug., f35;

aanvang op 23 Juli en 29 Juli te $9\frac{1}{2}$ uur, van Boetelaerlaan 28 (lijn 11, 10, 1 of 7).

Voor studeerenden voor KV; die dit jaar nog niet voor het examen opgaan, bestaat gelegenheid tot het volgen van den eersten cursus gedurende de eerste drie dagen tegen f 30.

Het cursusgeld kan eenige dagen voor den aanvang van den cursus per postwissel aan **Prof. SCHUH** worden toegezonden.

Inlichtingen en aangifte (lieft voor 18 Juli) bij Prof. Dr. F. Schuh, van Boetelaerlaan 28, den Haag; evenwel is ook latere toetreding mogelijk.

N. B.

Op den cursus KI zullen desgewenscht vragen van schriftelijke en mondelinge examens besproken worden (zie P. Wijdenes, schriftelijke opgaven KI; idem: Uitgewerkte mondelinge examens H. Algebra; Nieuw Tijdschr. voor Wisk. 2, 3e, 4e en volg. Jaarg.; Mondelinge examens wiskunde L. O., KI en KV, door Verkaart, Wijdenes en Schuh, uitgaven van P. Noordhoff). Wenschen dienaangaande liefst voor 22 Juli kenbaar te maken. Ook voor den cursus KV kunnen wenschen kenbaar gemaakt worden (zie Mondelinge examens wiskunde L. O., KI en KV en F. Schuh, Schriftelijke opgaven KV met volledige aanwijzingen ter oplossing, uitgaven van P. Noordhoff). Zoo veel mogelijk zal ook met later (desnoods op den cursus) kenbaar gemaakte wenschen rekening gehouden worden.

OVER EEN BELANGRIJK VRAAGSTUK DER STERRENKUNDE

DOOR
A. C. DE KOCK.

§ 1. Het vraagstuk om uit de waargenomen schijnbare baan-ellips de ware baanellips eener dubbelster te berekenen, heeft aanleiding gegeven tot een groot aantal interessante oplossingen, waarvan in dit artikel de voornaamste mogen besproken worden.

De door ons waargenomen schijnbare baanellips ontstaat door projectie der ware baanellips op de sfeer.

Feitelijk moeten wij beschouwen de absolute baanbeweging van beide componenten van het dubbelstelsel om het gemeenschappelijk zwaartepunt. De positie van dit zwaartepunt is echter afhankelijk van de verhouding der massa's der beide componenten. Daar wij helaas deze massa's, en dus ook de positie van het zwaartepunt van het dubbelstelsel, niet kennen, neemt men de helderste component van het paar als absoluut *vast* aan, en beschouwt de relatieve baan van de andere component om de eerste.

De waarnemingen geschieden daarom ook altijd zoo, dat men de positie van den begeleider op een aantal tijdstippen bepaalt ten opzichte van de hoofdster. Men vindt dan als resultaat dier waarnemingen een sommatie-ellips, die gelijkvormig is met ieder der beide ellipsen, die in werkelijkheid beschreven worden. De afmetingen der sommatie-ellips zijn $(:) m + m'$, indien die der beide afzonderlijke ellipsen $(:) m$ en $(:) m'$ zijn, waarin m en m' de massa's der beide componenten voorstellen.

De hoofdster staat steeds in het brandpunt der *ware* sommatie-ellips; echter niet in het brandpunt der *schijnbare* sommatie-ellips.

Zooals boven reeds gezegd werd, is deze laatste de projectie der *ware* ellips op de sfeer, of ook: op een vlak door de hoofdster aangebracht loodrecht op de gezichtslijn.

De snijlijn der vlakken, waarin de ware en schijnbare ellips liggen, is de zoogenaamde knoopenlijn (in de figuur = KK').

S is brandpunt der ware ellips, *niet* der schijnbare ellips.

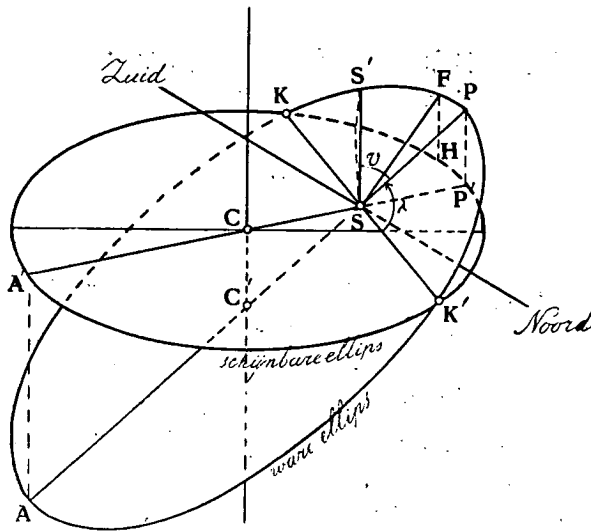


Fig. 1.

De hoek tusschen de lange as der ware baan en de knoopenlijn zij λ .

De hoek tusschen knoopenlijn en de lijn Noord-Zuid zij Ω .
De hoek der beide baanvlakken zij $FSH = i$.

Van de lijn Noord-Zuid uit worden ook de positiehoeken geteld.

De positiehoek is de hoek die tezamen met den schijnbaren afstand de positie van de zwakste component tenopzichte van de helderste component op een bepaald tijdstip aangeeft. De positiehoek is dus een hoek die in het vlak der schijnbare baan gemeten wordt.

Evenals de hoeken λ en Ω wordt zij geteld van het Noorden uit door het Oosten naar het Zuiden.

§ 2. De methode van Kowalsky¹⁾ om uit de schijnbare ellips de ware ellips af te leiden.

De schijnbare ellips heeft de verg.:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + 1 = 0, \quad (1)$$

waarin A, B, C, D en E bekende grootheden zijn.

¹⁾ Deze methode werd in 1873 gepubliceerd in „The proceedings of the Kasan Imperial University”, 1873.

Het brandpunt S der ware ellips ligt in de hoofdster. Deze is oorsprong van het assenstelsel X, Y, Z.

Dan is (1) de verg. van een cylinder, welks as de Z-as is van het coördinaten-stelsel. Deze Z-as valt samen met de gezichtslijn.

We transformeeren nu de coördinaten zoodanig, dat de nieuwe X'-as in de knoopenlijn KK' valt; dat de Y'-as loodrecht er op komt in het vlak der ware baan, en dat de Z'-as loodrecht op het vlak der ware baan komt.

S blijft oorsprong van het nieuwe assenkruis X', Y', Z'.

De hiertoe benoodigde transformatie-formules zijn:

$$\left. \begin{aligned} x &= x' \cos \Omega - y' \sin \Omega \cos i + z' \sin \Omega \sin i \\ y &= x' \sin \Omega + y' \cos \Omega \cos i - z' \cos \Omega \sin i \\ z &= y' \sin i + z' \cos i. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Deze waarden substitueeren wij in (1) en stellen tevens $z' = 0$. Wij krijgen daardoor de vergelijking der *ware* baan.

$$\begin{aligned} &A(x' \cos \Omega - y' \sin \Omega \cos i)^2 + 2B(x' \cos \Omega - y' \sin \Omega \cos i) \times \\ &\times (x' \sin \Omega + y' \cos \Omega \cos i) + C(x' \sin \Omega + y' \cos \Omega \cos i)^2 + \\ &+ 2D(x' \cos \Omega - y' \sin \Omega \cos i) + 2E(x' \sin \Omega + y' \cos \Omega \cos i) + \\ &+ 1 = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Ook is de vergelijking van de ware ellips t. o. van het brandpunt, d. i. de hoofdster, als oorsprong te schrijven als volgt:

$$\frac{(x'' + ae)^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1, \quad (4)$$

waarin de X''-as samenvalt met de groote as der ware ellips, en de Y''-as hier loodrecht op staat in het vlak der *ware* baan.

We gaan nu zóó transformeeren, dat de X''-as samenvalt met de X'-as of knoopenlijn. We moeten de X''-as daartoe over den hoek λ terugdraaien.

De benoodigde transformatie-formules luiden nu

$$\begin{aligned} x'' &= x' \cos \lambda + y' \sin \lambda \\ y'' &= -x' \sin \lambda + y' \cos \lambda \end{aligned}$$

waardoor (4) overgaat in:

$$\frac{(x' \cos \lambda + y' \sin \lambda + ae)^2}{a^2} + \frac{(-x' \sin \lambda + y' \cos \lambda)^2}{b^2} = 1. \quad (5)$$

Nu moeten de vergelijkingen (3) en (5), die beide vergelijkingen zijn van dezelfde ellips t. o. v. hetzelfde assenstelsel, identiek zijn.

De coëfficiënten der gelijknamige machten van x en y moeten dus evenredig zijn, zoodat we na weglating der accenten, en na eenige kleine herleidingen krijgen:

$$+ A \cos^2 \Omega + B \sin 2\Omega + C \sin^2 \Omega = f \left(\frac{\cos^2 \lambda}{a^2} + \frac{\sin^2 \lambda}{b^2} \right), \quad (6)$$

$$(A \sin^2 \Omega - B \sin 2\Omega + C \cos^2 \Omega) \cos^2 i = f \left(\frac{\sin^2 \lambda}{a^2} + \frac{\cos^2 \lambda}{b^2} \right), \quad (7)$$

$$(-A \sin 2\Omega + 2B \cos 2\Omega + C \sin 2\Omega) \cos i = f \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) \sin 2\lambda, \quad (8)$$

$$D \cos \Omega + E \sin \Omega = f \frac{e \cos \lambda}{a}, \quad (9)$$

$$(E \cos \Omega - D \sin \Omega) \cos i = f \frac{e \sin \lambda}{a}, \quad (10)$$

$$1 = f(e^2 - 1). \quad (11)$$

Met behulp van dit stelsel vergelijkingen moeten nu de geometrische elementen der ware baan in de bekende grootheden A, B, C, D en E uitgedrukt worden.

Deze geometrische elementen zijn: Ω, i, λ, p, e . Kent men deze, dan is de ligging en gedaante der baan geheel bepaald; immers, door Ω en i is het vlak der ware baan vastgelegd; door λ , in dat vlak, de ligging der groote as, door e en p de gedaante der ellips.

Uit (11) volgt:
$$f = -\frac{1}{1 - e^2} = -\frac{a}{p}$$

dus
$$a = \frac{p}{1 - e^2} = \text{halve groote as.} \quad (11a)$$

Uit (9) en (10) volgt nu:

$$\left. \begin{aligned} \frac{e \cos \lambda}{p} &= -(D \cos \Omega + E \sin \Omega) \\ \frac{e \sin \lambda}{p} &= \cos i (D \sin \Omega - E \cos \Omega) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Hieruit:

$$\frac{e^2}{p^2} \sin 2\lambda = \cos i (E^2 \sin 2\Omega + 2DE \cos 2\Omega - D^2 \sin 2\Omega). \quad (13)$$

Uit (8) volgt: daar $f = -\frac{a}{p}$ en $\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = \frac{b^2 - a^2}{a^2 b^2} = -\frac{a^2 e^2}{a^2 b^2} = -\frac{e^2}{b^2}$

dus:
$$f \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right) = \frac{a}{p} \cdot \frac{e^2}{b^2} = \frac{a}{p} \cdot \frac{e^2}{a^2(1 - e^2)} = \frac{e^2}{pa(1 - e^2)} = \frac{e^2}{p^2}.$$

Vandaar:

$$\frac{e^2}{p^2} \sin 2\lambda = \cos i (-A \sin 2\Omega + 2B \cos 2\Omega + C \sin 2\Omega). \quad (14)$$

Uit (13) en (14) volgt:

$$(E^2 + A - D^2 - C) \sin 2\Omega + 2(DE - B) \cos 2\Omega = 0.$$

$$\text{Dus } \operatorname{tg} 2\Omega = \frac{2(B - DE)}{E^2 - D^2 + A - C}.$$

Het verschil der kwadraten der vergelijkingen (12) geeft:

$$\frac{e^2}{p^2} \cos 2\lambda = (D \cos \Omega + E \sin \Omega)^2 - (D \sin \Omega - E \cos \Omega)^2 \cos^2 i. \quad (15)$$

We zagen reeds: $f\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) = \frac{e^2}{p^2}$. Uit (6) en (7) volgt nu:

$$\begin{aligned} \frac{e^2}{p^2} \cos 2\lambda &= (A \cos^2 \Omega + B \sin 2\Omega + C \sin^2 \Omega) - \\ &\quad - (A \sin^2 \Omega - B \sin 2\Omega + C \cos^2 \Omega) \cos^2 i. \end{aligned} \quad (16)$$

Uit (15) en (16):

$$\begin{aligned} \cos^2 i &= \frac{(D \cos \Omega + E \sin \Omega)^2 - (A \cos^2 \Omega + B \sin 2\Omega + C \sin^2 \Omega)}{(D \sin \Omega - E \cos \Omega)^2 - (A \sin^2 \Omega - B \sin 2\Omega + C \cos^2 \Omega)} \\ \cos^2 i &= \frac{(D^2 - A) \cos^2 \Omega + (E^2 - C) \sin^2 \Omega + (DE - B) \sin 2\Omega}{(D^2 - A) \sin^2 \Omega + (E^2 - C) \cos^2 \Omega - (DE - B) \sin 2\Omega} = \frac{T}{N}. \end{aligned} \quad (17)$$

$$\text{Daaruit: } \operatorname{tg}^2 i = \frac{N - T}{T} = \frac{N + T}{T} - 2 = \frac{D^2 + E^2 - (A + C)}{T} - 2.$$

Voor het rechterlid van (7) kunnen wij schrijven:

$$f\left(\frac{\sin^2 \lambda}{a^2} - \frac{\sin^2 \lambda}{b^2} + \frac{1}{b^2}\right) = \sin^2 \lambda \frac{e^2}{p^2} + \frac{f}{b^2}$$

$$\text{dus } \sin^2 \lambda \frac{e^2}{p^2} - \frac{1}{p^2} = (A \sin^2 \Omega - B \sin 2\Omega + C \cos^2 \Omega) \cos^2 i. \quad (18)$$

Uit (10) volgt door kwadrateren, wegens: $\frac{f^2}{a^2} = \frac{1}{p^2}$:

$$\sin^2 \lambda \frac{e^2}{p^2} = \cos^2 i (E^2 \cos^2 \Omega + D^2 \sin^2 \Omega - DE \sin 2\Omega) \quad (19)$$

en uit (18) en (19):

$$\frac{1}{p^2} = \cos^2 i [(E^2 - C) \cos^2 \Omega + (D^2 - A) \sin^2 \Omega + (B - DE) \sin 2\Omega] \quad (20)$$

en wegens (17):

$$\frac{1}{p^2} = (D^2 - A) \cos^2 \Omega + (E^2 - C) \sin^2 \Omega + (DE - B) \sin 2\Omega = T. \quad (20a)$$

Dus uit: $\operatorname{tg}^2 i = \frac{D^2 + E^2 - (A + C)}{T} - 2$ volgt:

$$\boxed{\frac{2}{p^2} + \frac{\operatorname{tg}^2 i}{p^2} = D^2 + E^2 - (A + C).} \quad (21)$$

Uit (20a) volgt:

$$\frac{2}{p^2} = D^2 + E^2 - (A + C) + (D^2 - E^2 + C - A) \cos 2\Omega + 2(DE - B) \sin 2\Omega$$

en dus:

$$\frac{\operatorname{tg}^2 i}{p^2} = 2(B - DE) \sin 2\Omega + (E^2 - D^2 + A - C) \cos 2\Omega. \quad (22)$$

Uit (22) en (14a) volgt:

$$\cos 2\Omega \frac{\operatorname{tg}^2 i}{p^2} = E^2 - D^2 + A - C \quad [= 22 \cdot \cos 2\Omega + 14^a \cdot \sin 2\Omega], \quad (23a)$$

$$\sin 2\Omega \frac{\operatorname{tg}^2 i}{p^2} = 2(B - DE) \quad [= 22 \cdot \sin 2\Omega - 14^a \cdot \cos 2\Omega]. \quad (23b)$$

De vergelijkingen 23^a ; 23^b ; 21; 12; en 11^a geven nu de gezochte geometrische baanelementen in bekende constanten A, B, C, D en E uitgedrukt.

§ 3. De methode Zwiers.

De schijnbare baan is de projectie der ware elliptische baan. Het middelpunt der schijnbare baan zij C.

In de ware baan staat de hoofdster in één der brandpunten. Dit is in de schijnbare baan in het algemeen niet zoo.

De middellijn der schijnbare ellips, die door de hoofdster S gaat, is echter de projectie der groote as der ware ellips. De hieraan geconjugeerde middellijn is de projectie der korte as. Indien voorts P het uiteinde is der middellijn SC, het dichtst bij S gelegen, dan zal P ook de projectie zijn van het periastron der ware baan, en dan is: $\frac{CS}{CP} = e$ de excentriciteit der baan, daar door projectie verhoudingen niet veranderen kunnen.

Dan is $k = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}$ de verhouding der lengten van groote as en kleine as der ware baan.

Vermenigvuldigt men alle koorden der ware ellips evenwijdig aan de korte as met $\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}$, dan ontstaat de cirkel van Kepler.

Dus, indien men in de *schijnbare* baan alle koorden, die geconjugueerd zijn aan de middellijn SC, vergroot in reden van $k = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}$, dan ontstaat een ellips, die de projectie is van van den cirkel van Kepler.

De groote as dezer hulpellips is gelijk aan de middellijn van den cirkel van Kepler, en dus gelijk aan de groote as der ware baan.

De knoopenlijn (dat is de snijlijn van het vlak der ware, en het vlak der schijnbare baan) gaat door S, en is hieraan evenwijdig. Zijn nu a en β opv. de halve groote en kleine as der hulpellips, dan is $\frac{\beta}{a} = \cos i$.

Deze assen der hulpellips kan men als volgt construeeren:

PDP'E zij de schijnbare ellips.

Als men alle koorden hiervan evenwijdig aan CD, vergroot in reden van $k = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}$ ontstaat de hulp-ellips van Zwiers

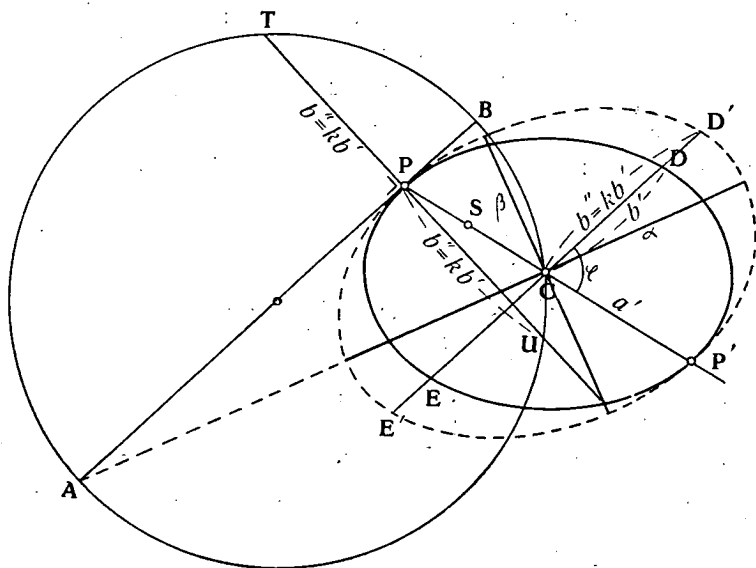


Fig. 2.

PD'P'E': PP' en ED zijn geconjugeerde middellijnen in de schijnbare ellips PDP'E, en dus ook zijn PP' en E'D' geconjugeerde middellijnen der hulp-ellips van Zwiers.

Trek in P de raaklijn AB aan de schijnbare ellips.

Construeer in P de loodlijn hierop. Pas aan weerszijden hierop af: $PT = PU = CD' = k \cdot b' = b''$.

Construeer den cirkel door T, U en C.

Deze snijdt de raaklijn door P in de punten A en B. Dan zijn CB en CA de richtingen der orthogonale assen β en a der hulp-ellips, die nu geconstrueerd zijn.

e , a' en b' zijn nu opv. de excentriciteit, en de geprojecteerde groote en kleine assen der *ware* baan.

Door berekening volgt nu:

$$\alpha^2 + \beta^2 = a'^2 + b'^2$$

$$\alpha\beta = a'b' \sin \varphi.$$

(Eerste en tweede theorema van Apollonius)

waaruit:

$$(\alpha + \beta)^2 = a'^2 + b'^2 + 2a'b' \sin \varphi$$

$$(\alpha - \beta)^2 = a'^2 + b'^2 - 2a'b' \sin \varphi,$$

waaruit α en β te vinden zijn.

§ 4. De methode Thiele.

De verg. der *ware* ellips is a. v. te geven:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v}.$$

Trekt men door het brandpunt dezer *ware* ellips een voerstraal, dan geldt:

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1 + e \cos v_1}{p}.$$

en voor het verlengde:

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1 + e \cos (v_1 + 180)}{p} = \frac{1 - e \cos v_1}{p}$$

zoodat:

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{2}{p}$$

wat dus beteekent, dat de parameter p harmonisch middenevenredig is tusschen twee in elkaars verlengde liggende voerstralen r_1 en r_2 .

Voert men dit uit voor ieder punt van den omtrek der *ware* ellips, dan verkrijgt men als meetkundige plaats een *cirkel* met het brandpunt der *ware* ellips als centrum en met straal p .

Wat wij *zien* is niet de *ware* ellips, maar de schijnbare ellips, d. i. de projectie der *ware* ellips op een vlak door de hoofdstel loodrecht op de gezichtslijn.

De cirkel van Thiele gaat daarbij over in een ellips met de hoofdstel als middelpunt, een groote as $2p$ en een kleine as $2p \cos i$.

Ook voor deze laatste ellips geldt nu, dat de voerstralen uit het middelpunt harmonisch middenevenredig zijn tusschen de voerstralen der schijnbare ellips uit de hoofdstel, die echter niet in het brandpunt der schijnbare ellips staat.

Op grond dezer eigenschap voert men de volgende constructie uit om de ellips van Thiele, punt voor punt, te construeeren.

Trek door S voerstralen in de schijnbare ellips, die in elkaars verlengde liggen. Construeer de voerstralen ST, die hiertusschen harmonisch middenevenredig zijn.

De meetkundige plaats der zoo gevonden punten T is een ellips, welker halve groote as gelijk is aan de parameter p der ware baan. De richting dezer as is die der knoopenlijn, welke door S gaat.

De verhouding der assen der ellips van Thiele is gelijk aan $\cos i$.

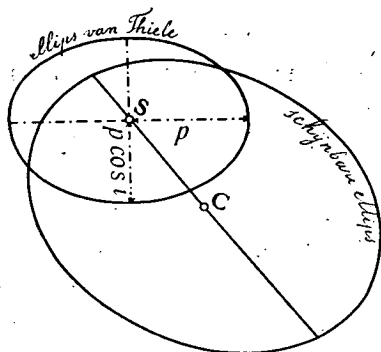


Fig. 3.

§ 5. Tot nu toe hebben we ondersteld, dat de vergelijking der schijnbare ellips bekend was.

Glaserapp heeft de volgende manier bedacht om deze vergelijking af te leiden:

De vergelijking der schijnbare ellips zij:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + 1 = 0,$$

waarin A, B, C, D en E bepaald moeten worden.

Stel $y = 0$:

$$Ax^2 + 2Dx + 1 = 0.$$

Metten we x_1 en x_2 , de abscissen der snijpunten der schijnbare ellips met de X-as, dan geldt:

$$2D = -A(x_1 + x_2) = -\frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}.$$

Stel $x = 0$:

$$Cy^2 + 2Ey + 1 = 0.$$

Metten we y_1 en y_2 , de ordinaten der snijpunten der schijnbare ellips met de Y-as, dan geldt:

$$2E = -C(y_1 + y_2) = -\frac{y_1 + y_2}{y_1 y_2}.$$

Ieder willekeurig 5^{de} punt der schijnbare ellips geeft:

$$B = -\frac{1 + Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey}{2xy}.$$

Men neemt voor B het gemiddelde van de waarden voor een aantal punten verkregen, welke punten bij voorkeur zoo gekozen moeten worden, dat het product xy zoo groot mogelijk zij.

Den omloopstijd, den tijd van peri-astron-passage en andere dynamische grootheden vindt men nu verder door middel van formules uit de Theoretische Sterrekunde, waarin ook de tijd als variabele voorkomt.

§ 6. In het bovenstaande zijn eenige manieren besproken volgens welke de geometrische baan-elementen bepaald kunnen worden. Met behulp van bekende formules der Theoretische Sterrekunde zijn nu de dynamische elementen te berekenen.

We zullen de voornaamste dier formules ontwikkelen, en beschouwen daartoe eerst een stelsel lichamen, dat uit de volgende componenten bestaat:

1^o. Een lichaam I (de zon b.v.) met massa A en zwaartepuntscoördinaten ξ, η, ζ .

2^o. Een lichaam II (een planeet, de aarde b.v.) met massa mA en zwaartepuntscoördinaten $x + \xi, y + \eta, z + \zeta$.

3^o. Een aantal lichamen III (de andere planeten) met massa's $m'A, m''A$, enz. en zwaartepuntscoördinaten $x' + \xi, y' + \eta, z' + \zeta, x'' + \xi, y'' + \eta, z'' + \zeta$ enz.

De massa's der lichamen II en III onderstellen we klein t.o.v. de massa I, zoodat de factoren m, m', m'' , enz. numeriek klein zijn.

Het lichaam I krijgt van II een versnelling waarvan de X-component bepaald wordt door: $\frac{mA x}{r^3}$, waarin r de afstand is van I en II.

Het lichaam I krijgt van de lichamen III een versnelling, waarvan de X-component luidt: $\sum \frac{m'Ax'}{r'^3}$.

De totale versnelling van het lichaam I in de X-richting bedraagt dus:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{mA x}{r^3} + \sum \frac{m'Ax'}{r'^3}. \quad (1)$$

II krijgt een versnelling van I, waarvan de X-component bepaald is door: $-\frac{Ax}{r^3}$.

II krijgt een versnelling van III, waarvan de X-component bepaald is door: $\sum \frac{m'A(x' - x)}{\varrho'^3}$.

Hierin stelt ϱ' den afstand voor van II tot de lichamen III.

De totale versnelling van II in de X-richting bedraagt dus:

$$\frac{d^2(x + \xi)}{dt^2} = \sum \frac{m'A(x' - x)}{\varrho'^3} - \frac{Ax}{r^3}. \quad (2)$$

Uit (1) en (2) volgt:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + A(1 + m) \frac{x}{r^3} = \sum \left\{ \frac{m'A(x' - x)}{\varrho'^3} - \frac{m'Ax'}{r'^3} \right\}. \quad (3)$$

De vergelijking (3) bepaalt de beweging van II t.o.v. I. De coördinaten van het lichaam I komen in deze vergelijking niet voor. De beweging van I heeft dus geen invloed op de beweging van II.

§ 7. De vergelijking (3) kan ook voor de Y- en Z-componenten der bewegingen opgeschreven worden. De rechterleden dier vergelijkingen (3) zijn de componenten der *storende kracht*.

Er blijkt nl. een functie Ω te bestaan, de storingsfunctie, die het karakter draagt eener potentiaalfunctie, welker partieele afgeleiden naar x , y en z de componenten leveren der storende kracht:

$$\Omega = \sum \frac{m'}{1 + m} \left(\frac{1}{\varrho'} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3} \right)$$

$$\text{met } \varrho'^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2;$$

vergelijking (3) gaat over in:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + A(1 + m) \frac{x}{r^3} = A(1 + m) \frac{\partial \Omega}{\partial x} \quad (4)$$

en analoge uitdrukkingen voor y en z .

Dit zijn de bewegingsvergelijkingen van een lichaam II (de aarde) t.o.v. lichaam I (de zon), waarbij in het rechterlid de werkingen der lichamen III (de overige planeten) verantwoord worden.

De storingen zijn in het zonnestelsel bijna steeds klein. De orde van grootte van Ω wordt bepaald door $\frac{m'}{1 + m}$; m' is het grootst voor Jupiter $\left(\pm \frac{1}{1047} \right)$.

Beschouwt men de ongestoorde beweging, dan krijgt men drie

bewegingsvergelijkingen van den vorm:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + A(1+m) \frac{x}{r^3} = 0.$$

Het blijkt in de practijk geriefelijk te zijn om de massa-eenheid zoo te kiezen dat de zonnemassa k^2 wordt (k is de gemiddelde snelheid van de aarde bij haar beweging om de zon).

De bewegingsvergelijkingen worden nu:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + k^2(1+m) \frac{x}{r^3} &= 0, & (a) \\ \frac{d^2y}{dt^2} + k^2(1+m) \frac{y}{r^3} &= 0, & (b) \\ \frac{d^2z}{dt^2} + k^2(1+m) \frac{z}{r^3} &= 0. & (c) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

De numerieke waarde van k is $\frac{2\pi}{365, 256 \sqrt{1+m}}$, waarin $m = \frac{\text{massa der aarde}}{\text{massa der zon}}$.

§ 8. $5^b \cdot x - 5^a \cdot y$ geeft: $x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2} = 0.$

Analoog: $x \frac{d^2z}{dt^2} - z \frac{d^2x}{dt^2} = 0$

en: $y \frac{d^2z}{dt^2} - z \frac{d^2y}{dt^2} = 0.$

Of, bij integratie:

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = c$$

$$x \frac{dz}{dt} - z \frac{dx}{dt} = c_1$$

$$y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} = c_{11}$$

waaruit volgt: $c_{11}x - c_1y + cz = 0.$

Dit is de vergelijking van een plat vlak door het middelpunt der zon als oorsprong. Neemt men dit vlak als X-Y-vlak dan is de vergelijking: $x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = c$ aequivalent met: $r^2 \frac{dv}{dt} = c$, zooals bij substitutie van $x = r \cos v$ en $y = r \sin v$ gemakkelijk blijkt.

Men schrijft dit wel aldus:

$$r^2 \frac{dv}{dt} = 2f = c.$$

Hierin is f de perksnelheid.

Dit is dus een analytische uitdrukking voor de *wet der perken*.

Daar de beweging plaats vindt in een plat vlak, kunnen wij volstaan met in 2 coördinaten te werken. Wij kiezen nu voor de beschrijving der beweging de vergelijkingen 5^a en 5^b .

Dan geeft $5^a \cdot \frac{dx}{dt} + 5^b \cdot \frac{dy}{dt}$:

$$\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k^2(1+m)}{r^3} \left\{ x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \right\} = 0,$$

of:

$$\frac{d}{dt} \left\{ \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right\} + \frac{k^2(1+m)}{r^3} \frac{d}{dt} \{x^2 + y^2\} = 0.$$

Nu blijkt bij substitutie van $x = r \cos v$ en $y = r \sin v$ dat:

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = r^2 \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dr}{dt} \right)^2;$$

wegens $x^2 + y^2 = r^2$ komt dan:

$$\frac{d}{dt} \left\{ r^2 \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right\} + \frac{k^2(1+m)}{r^3} \frac{dr^2}{dt} = 0,$$

dus

$$r^2 \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{2k^2(1+m)}{r} + c$$

wat men wel als volgt schrijft:

$$r^2 \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = v^2 = k^2(1+m) \left\{ \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right\}.$$

Het zal achteraf blijken, dat a de halve groote as der elliptische baan voorstelt.

§ 9. De vorige paragraaf heeft als resultaat opgeleverd de vergelijkingen:

$$r^2 \frac{dv}{dt} = 2f \quad (1)$$

en

$$r^2 \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = k^2(1+m) \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right). \quad (2)$$

Bij eliminatie van t krijgt men een betrekking tusschen r en v : de baanvergelijking.

Deze laat zich aldus schrijven:

$$\left\{ r^2 + \left(\frac{dr}{dv} \right)^2 \right\} \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 = k^2(1+m) \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

of

$$\left\{r^2 + \left(\frac{dr}{dv}\right)^2\right\} \cdot \frac{4f^2}{r^4} = k^2(1+m) \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right).$$

Substitueert men nu: $p = \frac{4f^2}{k^2(1+m)}$ en $t = \frac{1}{r}$ dan komt er:

$$\left\{t^2 + \left(\frac{dt}{dv}\right)^2\right\} \cdot p = 2t - \frac{1}{a}.$$

Men substitueert vervolgens: $a = \frac{p}{1-e^2}$ en krijgt:

$$(pt)^2 + \left\{\frac{d(pt)}{dv}\right\}^2 = 2pt - (1-e^2).$$

Neemt men nog: $pt = 1 + pu$, dan komt: $\frac{d(pu)}{\sqrt{e^2 - (pu)^2}} = dv$
 waaruit: $\text{Arc cos } \frac{pu}{e} = v - \omega$

of

$$\begin{aligned} pu &= e \cos(v - \omega) \\ pt &= 1 + e \cos(v - \omega), \end{aligned}$$

of

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(v - \omega)}. \quad (3)$$

Hierin is: $2f = k\sqrt{p(1+m)}$ en $p = a(1-e^2)$.

a is dus de halve grootte as!

(3) is de poolvergelijking eener kegelsnede, in welks focus de zon staat; p is de parameter der baan, e de excentriciteit.

De hoek ω geeft de ligging der grootte as der baan aan t. o. van de X-as, en heet perihelium-hoek.

Voor een elliptische baan geldt nu: $f = \frac{ab\pi}{T} = \frac{a^2 \sqrt{1-e^2} \cdot \pi}{T}$.

We zagen $2f = k\sqrt{p(1+m)}$ dus:

$$4f^2 T^2 = 4a^4 (1-e^2) \cdot \pi^2 = k^2 (1+m) \cdot a \cdot (1-e^2) T^2$$

(wegens $b^2 = a^2(1-e^2)$ en $p = a(1-e^2)$).

Hieruit:

$$\frac{a^3}{T^2(1+m)} = \frac{k^2}{4\pi^2}.$$

Dit is de derde of harmonische wet van Kepler.

In §§ 8 en 9 zijn nu de drie wetten van Kepler aangetoond.

§ 10. Rekent men v van het perihelium af, dan geldt:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v}. \quad (1)$$

Ook zagen we:

$$r^2 \frac{dv}{dt} = 2f = k\sqrt{p(1+m)} \quad (2)$$

zoodat volgt:

$$\frac{dv}{(1 + e \cos v)^2} = \frac{k\sqrt{p(1+m)}}{p^2} dt.$$

Substitueer nu:

$$z = \operatorname{tg} \frac{1}{2} v \quad (3)$$

dan komt er:

$$\frac{2dz(1+z^2)}{\{(1+z^2) + e(1-z^2)\}^2} = \frac{k\sqrt{p(1+m)}}{p^2} dt.$$

Neem vervolgens

$$\operatorname{tg} \varphi = z \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \quad (4)$$

dan komt er na eenige herleiding:

$$2d\varphi - 2e \cos 2\varphi \cdot d\varphi = \left(\sqrt{\frac{1-e^2}{p}} \right)^3 k\sqrt{1+m} dt = \frac{k\sqrt{1+m}}{a\sqrt{a}} dt$$

dus:

$$2\varphi - e \sin 2\varphi = \frac{k\sqrt{1+m}}{a\sqrt{a}} (t - T_0) \text{ of als } E = 2\varphi$$

$$E - e \sin E = \frac{k\sqrt{1+m}}{a\sqrt{a}} (t - T_0).$$

Stelt men nog $\mu = \frac{k\sqrt{1+m}}{a\sqrt{a}}$ dan:

$$E - e \sin E = M = \mu (t - T_0). \quad (5)$$

D. i. het zoogenaamde *Theorema van Kepler*.

Wegens: $\frac{a^3}{T^2(1+m)} = \frac{k^2}{4\pi^2}$ is $\mu T = 2\pi$, dus $\mu = \frac{2\pi}{T}$ = de gemiddelde dagelijksche beweging.

Bovendien geldt nog wegens (3): $\operatorname{tg} \frac{1}{2} v = z$,

$$(4): \operatorname{tg} \varphi = z \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$$

en $E = 2\varphi$:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} E = \operatorname{tg} \frac{1}{2} v \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$$

v heet de ware anomalie,

E „ de excentrische anomalie,

M „ de middelbare anomalie.

§ 11. In § 1 hebben we de volgende notatie ingevoerd:

KK' is de knooplijn.

De hoek van de lange as der ware baan en de knooplijn

zij λ , die van knoopenlijn en Noord-Zuid lijn zij Ω , de hoek der beide baanvlakken zij $i = \angle FSH$.

De begeleider wordt bepaald t. o. van de hoofdster door den schijnbaren afstand ϱ gemeten in seconden boogs, en den positiehoek Θ , d.i. de hoek, dien de verbindingslijn van hoofdster en

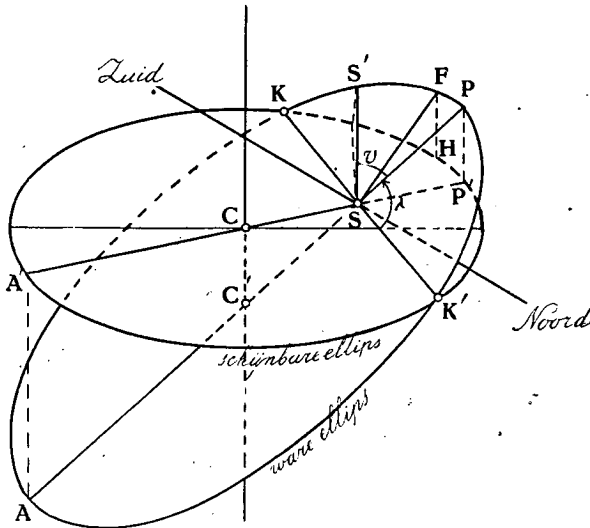


Fig. 1.

begeleider maakt met de lijn Noord-Zuid, gemeten in het vlak der schijnbare baan vanaf het Noorden naar het Oosten.

Dan geldt:

$$\cos i = \frac{\operatorname{tg}(\Theta - \Omega)}{\operatorname{tg}(\nu + \lambda)} \quad \text{of} \quad \operatorname{tg}(\nu + \lambda) = \frac{\operatorname{tg}(\Theta - \Omega)}{\cos i}.$$

Zijn de geometrische baanelementen bekend, dan vindt men bij zekere θ den hoek ν uit:

$$\operatorname{tg}(\nu + \lambda) = \frac{\operatorname{tg}(\Theta - \Omega)}{\cos i}$$

en vervolgens E uit:

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} E = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \nu,$$

en dan M volgens:

$$M = E - e \sin E.$$

Daar $M_2 - M_1 = \mu(t_2 - t_1)$ is, is

$$\mu = \frac{M_2 - M_1}{t_2 - t_1} \quad \text{en} \quad T = \frac{2\pi}{\mu} = 2\pi \frac{t_2 - t_1}{M_2 - M_1};$$

in de practijk bepaalt men steeds uit veel vergelijkingen van den vorm:

$$M = E - e \sin E = \frac{2\pi}{T} (t - T_0),$$

T en T_0 met behulp van de methode der kleinste kwadraten.

Hierin is T_0 het tijdstip van peri-astron-passage.

Aan de gevonden waarden der elementen kan men tenslotte nog correcties aanbrengen, berekend met behulp van de methode der kleinste kwadraten; wanneer tenminste het beschikbare waarnemingsmateriaal goed genoeg is om een onderzoek in te stellen naar de systematische fouten der waarnemingen.

§ 12. Wij hebben nu gezien, hoe de geometrische en dynamische elementen der beweging bepaald kunnen worden.

Uit de waarnemingen schijnt steeds te volgen, dat de schijnbare baan een ellips is, waarin de voerstraal perken beschrijft, die evenredig met den tijd zijn.

Daarom heeft men van den beginne af aan, aangenomen, dat de aantrekkende kracht in de dubbelsterstelsels dezelfde is als die in het zonnestelsel, dus de gravitatiewet van Newton, uitgedrukt door $f \frac{mm'}{r^2}$.

Alle methoden van baanberekening zijn dan ook op deze wet gebaseerd, doch hoewel de waarschijnlijkheid van haar geldigheid zeer groot is, moet men een exact bewijs geven, dat de waarnemingen uitsluitend op redelijke wijze verklaard kunnen worden door een attractie tusschen de hemellichamen, die gegeven wordt door de wet van Newton. Deze wet drukt uit, dat de aantrekkende kracht omgekeerd evenredig is met het kwadraat van den onderlingen afstand der lichamen en onafhankelijk van b. v. de anomalie.

Wil men zich niet begeven in een nevel van min of meer vage hypothesen, dan moet men steeds steunen op de waarnemingen. Deze leveren echter niet de *ware* baan, doch de projectie ervan op een vlak loodrecht op de gezichtslijn, d. i. de *schijnbare* baan.

De hoofdster, die we als absoluut vast attractiecentrum zullen beschouwen, bevindt zich in het algemeen *niet* in het brandpunt of middelpunt der schijnbare baan. Nu merkt *Aitken* op¹⁾:

¹⁾ In: *The Binary Stars* by R. G. Aitken, 1918, pag. 65.

„mathematical difficulties are encountered in establishing a law of force, which is independent of the angle θ , the orientation.

Newton did not prove the universality of the law of gravitation, but by a happy stroke of genius generalized a fact which he had found to be true in the case of the mutual attraction of the Moon and the Earth.”

In het zonnestelsel mag de wet van Newton volkomen bewezen geacht worden, mede door de storingen, en nergens en nooit is er eenige afhankelijkheid van eenige andere grootheid gevonden dan van den onderlingen afstand en van de massa's.

Aitken gaat nu verder: „when the law is arbitrarily assumed to be independent of the orientation as was found to be the case in the solar system, two possibilities arise namely, either that the force is in direct proportion to the distance r between the two stars or that the Newtonian law applies. It can be shown however, that when in the case of an elliptic orbit, the force is proportional to r , the primary star must be in the center of the ellipse. As this has never been found to be the case, the only alternative is the Newtonian law.”

De noodzaak om de algemeenheid der gravitatie-wet van Newton aan te toonen is echter van louter mathematischen aard. Een aannemelijke, physisch-geldige reden voor de afhankelijkheid van de aantrekkende centrale kracht van de anomalie is niet te vinden; en zoolang deze er niet is, mag men veilig bij de berekening der dubbelsterren de wet van Newton als geldig aannemen.

§ 13. De gravitatie-wet van Newton is in het zonnestelsel door de waarnemingen volkomen bevestigd, en speciaal door de storingen. Zooals we in § 12 zagen, zijn de methoden tot berekening der dubbelster-banen er op gebaseerd, dat deze wet ook voor andere sterrenstelsels in de wereldruimte geldig is. Binnen de waarnemingsfouten, die absoluut genomen klein zijn, maar relatief groot, klopt deze willekeurige onderstelling met de waarnemingen. Dit is echter geen voldoende criterium voor de juistheid der algemeen gevolgde manier van doen, reden waarom men gezocht heeft naar de meest algemeene gedaante der kracht, die een massadeeltje onder invloed der attractie van een ander massadeeltje een kegelsnede doet beschrijven.

De schijnbare banen zijn ellipsen met constante perksnelheid.

Dit leert de waarneming; opmerking verdient echter de omstandigheid, dat de relatief groote waarnemingsfouten allerlei hypothesen toelaten, van welke de ellips er één is. Zijn het echter ellipsen met constante perksnelheid, dan zijn de ware banen ook ellipsen met constante perksnelheid, aangenomen dan altijd dat de *ware* baan *vlak* is.

Darboux en *Halphen* hebben nu een oplossing gegeven van het volgende probleem:

Wanneer een stoffelijk punt onder invloed van een centrale kracht een kegelsnede beschrijft, vraagt men naar de algemeene uitdrukking dier kracht.

Zie hier de oplossing van *Darboux*: Stel de kracht zij K , de massa zij 1. De bewegingsvergelijkingen zijn:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -K \cdot \frac{x}{r} = -K \cdot \cos \varphi, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -K \cdot \frac{y}{r} = -K \cdot \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Hieruit volgt:

$$x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

en bij integratie:

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = c$$

Substitueer nu:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi & y &= r \sin \varphi, \\ \frac{dx}{dt} &= -r \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} + \cos \varphi \frac{dr}{dt}, \\ \frac{dy}{dt} &= r \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} + \sin \varphi \frac{dr}{dt}, \end{aligned}$$

na substitutie waarvan blijkt $r^2 \frac{d\varphi}{dt} = c = 2f$.

Stel nu $z = \frac{1}{r}$ dan geldt $x = \frac{\cos \varphi}{z}$ en

$$\frac{dx}{dt} = - \frac{z \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt} + \cos \varphi \frac{dz}{dt}}{z^2} = - \frac{z \sin \varphi + \cos \varphi \frac{dz}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt}}{z^2}$$

$$\frac{dx}{dt} = -2f \left(z \sin \varphi + \cos \varphi \frac{dz}{d\varphi} \right) \text{ en ook:}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -4f^2 z^2 \left(z \cos \varphi + \cos \varphi \frac{d^2z}{d\varphi^2} \right).$$

Ook gold: $\frac{d^2x}{dt^2} = -K \cos \varphi$, dus:

$$K = 4f^2 z^2 \left(z + \frac{d^2 z}{d\varphi^2} \right) = \frac{4f^2}{r^2} \left(z + \frac{d^2 z}{d\varphi^2} \right). \quad (2)$$

Is de vergelijking der baan bekend, dan kan men in verband met (2) de algemeene uitdrukking der kracht bepalen ¹⁾.

De doorloopen baan zij de kegelsnede:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2fy = g.$$

Bij substitutie van $x = r \cos \varphi$ } en $z = \frac{1}{r}$ komt er:
 $y = r \sin \varphi$ }

$$\frac{a \cos^2 \varphi}{z^2} + \frac{2b \sin \varphi \cos \varphi}{z^2} + \frac{c \sin^2 \varphi}{z^2} + \frac{2d \cos \varphi}{z} + \frac{2f \sin \varphi}{z} = g.$$

Dus

$$z = \frac{f \sin \varphi + d \cos \varphi}{g} \pm \frac{1}{g} \sqrt{(f^2 + cg) \sin^2 \varphi + 2(fd + bg) \sin \varphi \cos \varphi + (d^2 + ag) \cos^2 \varphi}.$$

Schrijft men:

$$A = \frac{f}{g}; \quad B = \frac{d}{g}; \quad C = \frac{fd + bg}{g^2};$$

$$D = \frac{d^2 + ag - f^2 - cg}{2g^2}; \quad H = \frac{d^2 + ag + f^2 + cg}{2g^2}$$

dan is:

$$z = A \sin \varphi + B \cos \varphi + \sqrt{C \sin 2\varphi + D \cos 2\varphi + H}, \quad (3)$$

daar het voldoende is den positieven wortel te beschouwen.

Uit (3) leidt men af:

$$z + \frac{d^2 z}{d\varphi^2} = \frac{H^2 - C^2 - D^2}{\{\sqrt{C \sin 2\varphi + D \cos 2\varphi + H}\}^3}$$

en dus

$$K = \frac{4f^2}{r^2} \cdot \frac{H^2 - C^2 - D^2}{\left(\frac{1}{r} - A \sin \varphi - B \cos \varphi \right)^3}. \quad (4)$$

Dit is de algemeene uitdrukking voor de kracht K, hoe ook de gedaante der kegelsnede zij.

§ 14. De discussie der verg. (4) van § 13 geeft het volgende:

I. Als de gegeven kegelsnede een ellips is met den oorsprong

¹⁾ Zie T. J. J. See, Researches on the evolution of the stellar systems 1895, pag. 22 en volgende.

als middelpunt, dan is haar vergelijking te schrijven als:

$$ax^2 + cy^2 = ac.$$

Nu is $b=0, d=0, f=0, g=ac,$

dus $A=0, B=0, C=0, D=\frac{a-c}{2ac}, H=\frac{a+c}{2ac}$

$$\text{dus: } K = \frac{4f^2}{r^2} \frac{\frac{a^2 + 2ac + c^2}{4a^2c^2} - \frac{a^2 - 2ac + c^2}{4a^2c^2}}{\left(\frac{1}{r}\right)^3} = \frac{4f^2r}{ac}.$$

De kracht verandert nu dus recht-evenredig met den afstand r .

II. Ligt het attractie-centrum op de X-as tusschen middelpunt en brandpunt, op een afstand l van het middelpunt, dan is de vergelijking der kegelsnede te herleiden tot:

$$ax^2 + 2lax + cy^2 = a(c - l^2),$$

$$b=0, d=0, f=0, g=a(c - l^2),$$

$$A=0, B=\frac{al}{a(c - l^2)} = \frac{l}{c - l^2}, C=0;$$

$$D=\frac{c(a - c + l^2)}{2a(c - l^2)^2}; H=\frac{c(a + c - l^2)}{2a(c - l^2)^2}$$

en

$$K = \frac{4f^2c^2r}{[c - l^2 - rl \cos \theta]^3};$$

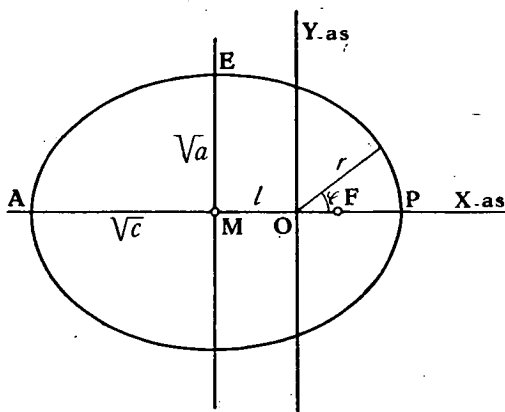


Fig. 4.

dit is te herleiden tot:

$$K = \frac{4f^2}{r^2} \frac{\sqrt{ac}}{\sqrt{\{(a - c + l^2) \cos^2 \varphi + c - l^2\}^3}}.$$

Daar $a - c + l^2$ steeds negatief is, wanneer O tusschen M en

F ligt, volgt nu, dat $K_{\varphi=0} > K_{\varphi=\frac{\pi}{2}} > K_{\varphi=\pi}$ is; immers:

$$K_{\varphi=0} : K_{\varphi=\frac{\pi}{2}} : K_{\varphi=\pi} = (\sqrt{c} + l)^2 : \frac{c\sqrt{a}}{\sqrt{c-l^2}} : (\sqrt{c} - l)^2,$$

waaruit na eenig rekenen volgt: $K_{\varphi=0} > K_{\varphi=\frac{\pi}{2}} > K_{\varphi=\pi}$.

III. Valt de oorsprong in een der brandpunten, dan kan men afleiden:

$$K = \frac{4f^2}{r^2} \frac{\sqrt{c}}{a};$$

dit is de wet van Newton.

IV. Valt de oorsprong of attractie centrum in de x -as tusschen brandpunt en uiteinde der groote as op een afstand l van het middelpunt M , dan volgt $K = 4f^2 \frac{c^2}{a} \frac{r}{(c - l^2 - lr \cos \varphi)^3}$, hetgeen te herleiden is tot: $K = \frac{4f^2}{r^2} \frac{\sqrt{ac}}{\{ \sqrt{(a-c+l^2) \cos^2 \varphi + c - l^2} \}^3}$.

Daar $a - c + l^2$ steeds positief is, is k maximum, als $\varphi = \frac{\pi}{2}$ en $\frac{3\pi}{2}$, en minimum voor $\varphi = 0$ en π .

V. Als het attractie-centrum op de korte as valt op een afstand l van het middelpunt, dan vindt men:

$$K = \frac{4f^2}{r^2} \frac{\sqrt{ac}}{\{ \sqrt{(a-c-l^2) \cos^2 \varphi + c} \}^3},$$

$a - c - l^2$ is steeds neg., dus K heeft de maximale waarde voor $\varphi = 0$ en de minimale, als $\varphi = \frac{\pi}{2}$ is.

VI. Bevindt zich het attractiecentrum binnen den omtrek der ellips, op een afstand m van de korte as, en een afstand n van de groote as, dan vindt men voor K :

$$K = \frac{4f^2 a^2 c^2 r}{(ac - cn^2 - am^2 - amx - cny)^3},$$

hetgeen te herleiden is tot:

$$K = \frac{4f^2}{r^2} \frac{\sqrt{ac}}{\{ \sqrt{2mn \sin \varphi \cos \varphi + (a + m^2 - c - n^2) \cos^2 \varphi + c - m^2} \}^3}.$$

Door specialisatie der waarden van m en n zijn de vorige gevallen hieruit te verkrijgen.

§ 15. De oplossing van HALPHEN luidt met een kleine wijziging als volgt:

Indien de kracht K op de massa-eenheid werkt, zijn de bewegingsvergelijkingen:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + K \frac{x}{r} = 0$$

$$\text{en } \frac{d^2y}{dt^2} + K \frac{y}{r} = 0.$$

De vergelijking der beschreven kegelsnede zij:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Fx + 2Gy + H = 0, \quad (1)$$

waarin, daar een kegelsnede in het algemeen door 5 onafhankelijke gegevens bepaald is, 5 constanten willekeurig gekozen mogen worden.

Beschouwen we x als onafhankelijke variabele, dan krijgt men, wanneer men 5 keer achtereenvolgens differentieert naar x :

$$Ax + B(y + xy') + Cyy' + F + Gy' = 0 \quad (2)$$

$$A + B(2y' + xy'') + C(yy'' + y'^2) + Gy'' = 0 \quad (3)$$

$$B(3y'' + xy''') + C(yy''' + 3y'y'') + Gy''' = 0 \quad (4)$$

$$B(4y''' + xy^{iv}) + C(yy^{iv} + 4y'y''' + 3y''^2) + Gy^{iv} = 0 \quad (5)$$

$$B(5y^{iv} + xy^v) + C(yy^v + 5y'y^{iv} + 10y''y''') + Gy^v = 0. \quad (6)$$

Uit deze 5 vergelijkingen moeten de constanten A , B , C , F en G geëlimineerd worden. De vergelijkingen (4), (5) en (6) zijn lineair homogeen in de grootheden B , C en G , zoodat moet voldaan zijn aan:

$$\begin{vmatrix} 3y'' + xy''' & yy''' + 3y'y'' & y''' \\ 4y''' + xy^{iv} & yy^{iv} + 4y'y''' + 3y''^2 & y^{iv} \\ 5y^{iv} + xy^v & yy^v + 5y'y^{iv} + 10y''y''' & y^v \end{vmatrix} = 0.$$

$$\text{of, na vereenvoudiging: } \begin{vmatrix} 3y'' & 0 & y''' \\ 4y''' & 3y'' & y^{iv} \\ 5y^{iv} & 10y''' & y^v \end{vmatrix} = 0,$$

$$\text{of, uitgeschreven: } 9y''^2y^v - 45y''y'''y^{iv} + 40y'''^3 = 0,$$

$$\text{of: } 9 \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^5 \frac{d^5y}{dx^5} - 45 \frac{d^2y}{dx^2} \frac{d^3y}{dx^3} \frac{d^4y}{dx^4} + 40 \left(\frac{d^3y}{dx^3} \right)^3 = 0. \quad (7)$$

Dit is de algemeene differentiaalvergelijking van MONGE voor een kegelsnede.

Nu volgt uit verg. (1):

$$y = -\frac{1}{C} (Bx + G) \pm \frac{1}{C} \sqrt{(B^2 - AC)x^2 + 2(BG - FC)x + (G^2 - HC)}$$

$$\text{dus: } \frac{dy^2}{dx^2} = \pm \frac{1}{C} \frac{d^2}{dx^2} \sqrt{(B^2 - AC)x^2 + 2(BG - FC)x + (G^2 - HC)}.$$

$$\begin{aligned} \text{of: } \frac{d^2y}{dx^2} &= \pm \frac{1}{C} \frac{(B^2 - AC)(G^2 - HC) - (BG - FC)^2}{\sqrt{(B^2 - AC)x^2 + 2(BG - FC)x + (G^2 - HC)^3}} = \\ &= \pm \frac{T}{\sqrt{(B^2 - AC)x^2 + 2(BG - FC)x + (G^2 - HC)^3}}, \end{aligned}$$

$$\text{waarin } T = \frac{1}{C} [(B^2 - AC)(G^2 - HC) - (BG - FC)^2],$$

$$\text{dus: } \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{-2/3} = \pm T^{-2/3} [(B^2 - AC)x^2 + 2(BG - FC)x + (G^2 - HC)]$$

$$\text{en dus: } \frac{d^3}{dx^3} \left\{ \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^{-2/3} \right\} = 0 \quad (8)$$

en geheel analoog:

$$\frac{d^3}{dy^3} \left\{ \left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^{-2/3} \right\} = 0. \quad (9)$$

$$\text{Uit: } \frac{d^2x}{dt^2} + K \frac{x}{r} = 0 \text{ en } \frac{d^2y}{dt^2} + K \frac{y}{r} = 0 \text{ volgt:}$$

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = \text{constant} = H.$$

$$\text{Voorts geldt: } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \text{ dus: } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2} \frac{dx}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2} \frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3},$$

$$\text{waaruit volgt: } \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{KH}{r} \left(\frac{dx}{dt}\right)^{-3}, \text{ waardoor de vergelijkingen (8)}$$

en (9) overgaan in:

$$\frac{d^3}{dx^3} \left[\left(\frac{KH}{r}\right)^{-2/3} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \right] = 0 \text{ of } \frac{d^3}{dx^3} \left[\left(\frac{1}{u} \frac{dx}{dt}\right)^2 \right] = 0 \quad (10)$$

en:

$$\frac{d^3}{dy^3} \left[\left(\frac{1}{u} \frac{dy}{dt}\right)^2 \right] = 0, \quad (11)$$

$$\text{als men } \left(\frac{KH}{r}\right)^{1/3} = u \text{ stelt.}$$

De oplossing van (10) is een functie f die x in geen hooger

graad dan 2 bevat, de oplossing van (11) is een functie g die y in geen hooger graden dan 2 bevat.

Nu geldt dus:

$$\frac{1}{u} \frac{dx}{dt} = V\bar{f} \quad (12)$$

en

$$\frac{1}{u} \frac{dy}{dt} = V\bar{g}. \quad (13)$$

$$(13) \times x - (12) \times y \text{ geeft: } u = \frac{x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}}{xV\bar{g} - yV\bar{f}} = \frac{H}{xV\bar{g} - yV\bar{f}}$$

$$\text{en wegens } u = \left(\frac{KH}{r}\right)^{1/3} \text{ geldt dus: } K = \frac{H^2 \cdot r}{(xV\bar{g} - yV\bar{f})^3}.$$

Ook volgt uit (12) en (13): $V\bar{g}dx - V\bar{f}dy = 0$, terwijl bovendien geldt: $(Ax + By + F)dx + (Cy + Bx + G)dy = 0$.

$$\text{Hieruit volgt: } \frac{dy}{dx} = \frac{V\bar{g}}{V\bar{f}} = -\frac{Ax + By + F}{Cy + Bx + G}, \text{ dus } \frac{xV\bar{g} - yV\bar{f}}{V\bar{f}} = -\frac{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Fx + Gy}{Cy + Bx + G} = \frac{Fx + Gy + H}{Cy + Bx + G}.$$

Dus:

$$K = \frac{H^2 \cdot r}{(Fx + Gy + H)^3} \frac{(Cy + Bx + G)^3}{(V\bar{f})^3}$$

$$K = -\frac{H^2 r}{(Fx + Gy + H)^3} \cdot \frac{(Ax + By + F)^3}{(V\bar{g})^3} \quad (14)$$

Een particuliere oplossing der differentiaalvergelijking:

$$\frac{V\bar{g}}{V\bar{f}} = -\frac{Ax + By + F}{Cy + Bx + G} \text{ luidt: } \frac{V\bar{g}}{V\bar{f}} = \lambda \frac{Ax + By + F}{Cy + Bx + G}$$

waarin λ een willekeurige constante is.

Nu geldt dus:

$$K = \frac{H^2 r \lambda^3}{(Fx + Gy + H)^3} \quad (15)$$

Ook geldt:

$(Fx + Gy + H)^2 = [(F^2 - HA)x^2 + (G^2 - HC)y^2 + 2(FG - HB)xy]$ zooals uit (1) gemakkelijk volgt; zoodat wij twee algemeene uitdrukkingen voor K hebben:

$$K_1 = \frac{H^2 r \lambda^3}{(Fx + Gy + H)^3} \quad (15a)$$

en

$$K_2 = \frac{H^2 r \lambda^3}{[(F^2 - HA)x^2 + (G^2 - HC)y^2 + 2(FG - HB)xy]^{3/2}} \quad (15b)$$

Onderstelt men dat de kracht enkel afhankelijk is van r dan moet men in (15a) $F = G = 0$ stellen en dan komt:

$$K_1 = \frac{H^2 r \lambda^3}{H^3} = \frac{\lambda^3}{H} r.$$

Deze uitkomst is echter in strijd met de waarnemingen.

In (15b) moet men onderstellen:

$$F^2 - HA = G^2 - HC \quad \text{en:} \quad FG - HB = 0,$$

zoodat men krijgt:

$$K_2 = \frac{H^2 r \lambda^3}{(F^2 - HA) r^3} = \frac{H^2 \lambda^3}{(F^2 - HA)} \cdot \frac{1}{r^2}$$

en dit is de attractie-wet van Newton.

§ 16. Hoewel men op goede gronden aan mocht nemen, dat de attractie-wet van Newton een algemeene natuurwet uitdrukt, en daarom ook in het geheele Heelal moet gelden, heeft men getracht te bewijzen, dat *slechts* de wet van Newton de waargenomen bewegingen in dubbelster-stelsels kan verklaren.

Darboux en Halphen zijn er in geslaagd een bewijs te construeeren, waarbij echter eenige onderstellingen gemaakt moesten worden, die wel is waar vanzelfsprekend zijn, maar toch niet streng bewezen zijn. In § 14 is het bewijs van Darboux gegeven, zoo als dat te vinden is in T. J. J. See: *Researches on the evolution of the Stellar systems*.

De niet streng bewezen onderstellingen zijn: 1^o. de beweging in een kegelsnede, ellips, immers de ellips was één van een aantal mogelijke hypothesen en 2^o. het werken eener centrale kracht. Deze onderstelling mag men maken zoodra men uit de waarnemingen kan afleiden, dat de radius-vector perken beschrijft, die evenredig met den tijd zijn, en 3^o. de beweging vindt plaats in een plat vlak. See meent, dat men uit een schijnbare rechtlijnige beweging bij 42 Comae Berenices, generaliseerend besluiten mag dat *alle* bewegingen, dus ook die, waarin de bewegingen *niet* plaats vinden in een vlak door de gezichtslijn, geschieden in een plat vlak.

Neemt men dus aan dat de beweging geschiedt in een plat vlak, en dat de kracht centraal is, en kan men aantoonen, dat de hoofdstel staat in het brandpunt der *ware* baan, dan kunnen de waarnemingen ook de algemeenheid der gravitatie-wet van Newton leeren.

De hoofdster moet zich in het brandpunt der ware baan bevinden, indien de helling en knoopenlijn, die men aan de hand der gravitatie-wet van Newton berekent, op hun beurt aanleiding geven tot een snelheid van beweging in de richting der gezichtslijn, die precies overeenkomt met wat de spectroscopische waarneming, indien mogelijk, daaromtrent leert.

De spectroscopische waarneming van een dubbelster, waarvan door visueele waarneming, met behulp der wet van Newton een stelsel elementen berekend is, kan dus de bevestiging der wet van Newton geven. Onderstel nu, dat de waargenomen beweging in de gezichtslijn eveneens in overeenstemming is met een andere kracht dan die van Newton, welke kracht in het algemeen ook een andere helling en een andere knoopenlijn als resultaat van een eventueele berekening zou geven. Legt men aan de berekening de wet van Newton te gronde, dan vindt men, uit de hodograaf der beweging, in het beschouwde punt der baan voor de snelheidscomponent in de richting der gezichtslijn: $v = \rho \sin i \sin \omega$, waarin ρ is de voerstraal in het bijbehorende punt der hodograaf, ω de hoek, dien deze voerstraal maakt met de richting der klimmende knoop en i de hoek, dien de normaal op het ware baanvlak maakt met de gezichtslijn; i is een der elementen der dubbelsterbaan; ω en ρ kunnen berekend worden (zie § 17).

Legt men aan de berekening de andere krachtenwet ten grondslag, dan vindt men analoog:

$$v = \rho' \sin (i + a) \sin (\omega + b).$$

Volgens onderstelling geldt nu:

$$\rho' \sin (i + a) \sin (\omega + b) = \rho \sin i \sin \omega.$$

De hoek ω is variabel en afhankelijk van de positie van den begeleider in de baan. $\omega = 0$ geeft: $\rho' \sin (i + a) \sin b = 0$; wat eischt: $b = 0$ daar ρ' niet 0 kan zijn, en $i + a = 0$ of $= \pi$ in strijd met de waarneming is. De knoopenlijn valt nu dus samen met die, welke volgt uit de gravitatie-wet van Newton. Onze betrekking gaat nu over in:

$$\rho = \rho' (\cos a + \sin a \cotg i) = \rho' \cdot c,$$

waarin c een constante is.

Indien dus de helling het bedrag a verschilt van het bedrag, dat geëischt wordt door de wet van Newton, dan moeten wij in

ieder punt der ware baan een snelheid waarnemen die gelijk is aan de berekende snelheid, vermenigvuldigd met een constante.

Een verandering der helling is echter van *geen invloed* op de lengte van den voerstraal, die juist in de knoopenlijn valt, en daarom is ook de snelheid in de punten, die de uiteinden der knoopenlijn vormen, onafhankelijk van de grootte der helling. Maar dan moet ook in alle punten der baan de waargenomen snelheid gelijk zijn aan de berekende en dus $c = 1$,

$$\text{of: } \cos a + \sin a \cotg i = 1 \quad \text{of} \quad a = 0.$$

En dus is de helling, bij beide onderstellingen omtrent de krachtenwet, dezelfde. Er is dus slechts één krachtenwet, die de berekende snelheid in de gezichtslijn met de waargenomen snelheid doet overeenstemmen, en deze is de attractie-wet van Newton.

§ 17. In de vorige paragraaf is gebruik gemaakt van een eigenschap van de hodograaf der ellips. De verklaring moge hier volgen.

Zijn x en y de coördinaten van een punt der ellips, dan worden de coördinaten x' en y' van het corresponderend punt der hodograaf gegeven door:

$$x' = \frac{dx}{dt} \quad y' = \frac{dy}{dt}.$$

Bevindt zich in het brandpunt der ellips een attractie-centrum met de massa m , dan luiden de bewegingsvergelijkingen:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{m \cos \varphi}{r^2} \quad \text{en} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{m \sin \varphi}{r^2}.$$

Nu was $r^2 \frac{d\varphi}{dt} = 2f$ de dubbele perksnelheid, dus:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{2f} \frac{d\varphi}{dt}$$

en dus:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{m}{2f} \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{en} \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{m}{2f} \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt}.$$

Bij integratie komt:

$$\frac{dx}{dt} + a = -\frac{m}{2f} \sin \varphi; \quad \frac{dy}{dt} + b = \frac{m}{2f} \cos \varphi,$$

waarin a en b willekeurige integratie-constanten zijn.

Dit is te herleiden tot:

$$\frac{dx}{dt} + a = -\frac{m}{2f} \frac{y}{r}; \quad \frac{dy}{dt} + b = \frac{m}{2f} \frac{x}{r}$$

of:

$$\left. \begin{aligned} x' + a &= -\frac{m}{2f} \frac{y}{r} \\ y' + b &= \frac{m}{2f} \frac{x}{r} \end{aligned} \right\}$$

en dus:

$$(x' + a)^2 + (y' + b)^2 = \frac{m^2}{4f^2}$$

De hodograaf der ellips is dus een cirkel met straal $\frac{m}{2f}$.

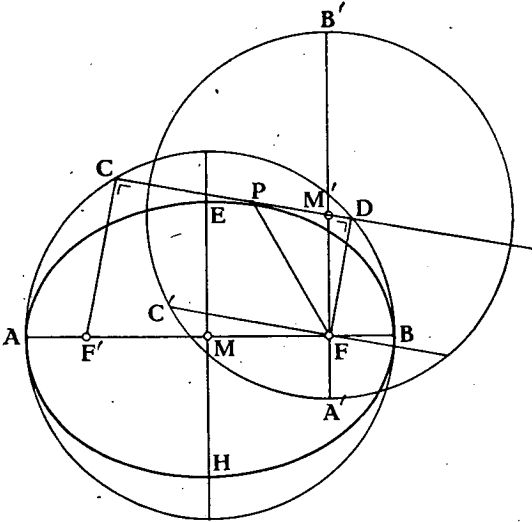


Fig. 5.

ABHE zij de gegeven ellips, F en F' zijn de brandpunten. De voerstraal van een punt der hodograaf is evenwijdig aan de raaklijn CD in het corresponderend punt P der ellips en de lengte ervan is (:) met de snelheid in dat punt.

Het is gemakkelijk aan te toonen, dat de snelheid in een punt P omgekeerd evenredig is met de lengte der loodlijn FD en recht evenredig met de lengte der loodlijn F'C. De meetkundige plaats der punten C en D is de cirkel op de groote as als middellijn beschreven. De hodograaf is ook een cirkel. De voerstraal in de hodograaf heeft een lengte evenredig met de

snelheid in het corresponderende punt der ellips. Ook $F'C$ was evenredig met de snelheid. Men neemt daarom vaak de middellijn der hodograaf gelijk aan AB ; dan is, als men $A'F = AF'$ en $A'M' = AM$ maakt: $FC' = F'C$. C' is het punt der hodograaf, dat met P correspondeert en $FC' \parallel CD$. Bij een gegeven ellips is dus de hodograaf onmiddellijk te construeeren. Is in één willekeurig punt der ellips de snelheid in absolute maat gegeven, dan is die in een ander punt onmiddellijk met behulp der hodograaf te vinden, wanneer we bedenken, dat de snelheid steeds evenredig met de lengte der voerstraal in de hodograaf is.

De snelheid van beweging in de richting der gezichtslijn (de radiale snelheid) is nu gelijk aan $v = \rho \sin \omega \sin i$, mits ρ kan uitgedrukt worden in absolute maat.

ω en ρ kunnen nu, zooals boven (§ 16) gezegd is, berekend worden. $AHBE$ zij de ware baan. $\Omega\Theta$ zij de knoopenlijn. Ω zij de klimmende knoop; AB zij $= 2a$.

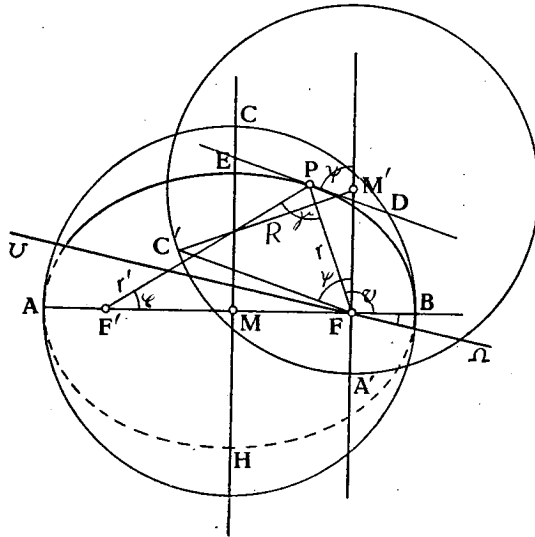


Fig. 6.

Men begint met volgens de hierboven ontwikkelde theorie de v (ware anomalie) en r voor een bepaald tijdstip te berekenen. Daar de elementen der baan bekend zijn, volgt nu ook: $r' = 2a - r$.

Uit $\triangle PFF'$ volgt nu: $\sin \varphi = \frac{r}{r'} \sin v$. De hoek γ der voerstraal r en r' is nu $v - \varphi$, $\gamma = v - \varphi$.

Daar de normaal den hoek der voerstralen halveert is:

$$\psi = \nu - \frac{1}{2} \gamma \quad \text{en eindelijk:} \quad \omega = \lambda + 90 + \psi,$$

Zij de straal der hodograaf in absolute maat $= R$, dan is, daar de lineaire excentriciteit der ellips Re is: $R^2 = \rho^2 + a^2 e^2 - 2\rho ae \cos \psi$ ($\triangle M'C'F$) en dus $\rho = R(e \cos \psi + \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \psi})$

De spectrografische waarneming leert: $\rho = \frac{\nu}{\sin \omega \sin i}$. Het rechterlid is in zijn geheel bekend.

De schaal der hodograaf is nu bekend, immers: $\rho = R(e \cos \psi + \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \psi})$. Hierin zijn e en ψ bekend, dus

$$R = \frac{\rho}{e \cos \psi + \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \psi}}.$$

Het is nu mogelijk geworden ν voor ieder willekeurig tijdstip te berekenen. In de practijk geschiedt de waarneming van ν op het tijdstip, dat de snelheid in de gezichtslijn maximaal is. Een fout in de waarneming van ν heeft dan minimalen invloed op R .

NATUURKUNDE EN WISKUNDE.

DOOR

J. SCHELTENS.

De Heer van Dantzig zegt in zijn artikel „Woord en Werktuig”, dat er geen principieel verschil bestaat tusschen physika en mathesis. Dit artikel dient om dat principiële verschil aan te toonen.

De overeenkomst, die er tusschen beide wetenschappen zou bestaan, wordt uitgedrukt in stelling B: Mathesis en physika komen hierin overeen, dat zij beiden het verkrijgen van een grooteren rijkdom aan ervaringen ten doel hebben door formaliseering van de taal, waarin deze worden samengevat. Dit nu is zoo algemeen gezegd, dat het toegepast kan worden op elke wetenschap en dus niets zegt voor een bijzondere overeenstemming tusschen physika en mathesis. Elke wetenschap heeft tot doel het verkrijgen van een grooteren rijkdom aan ervaringen. (beter is te spreken van: het verkrijgen van een meer volledige en minder relatieve kennis). In elke wetenschap wordt formaliseering van de taal toegepast om tot het doel te komen; formaliseering beteekent immers niets anders dan woordverscherping en woordafbakening, het wegnemen van het emotioneele karakter van het woord. Zonder dit lijkt me wetenschap in het geheel niet mogelijk.

Dit formaliseeren van de taal is echter slechts middel om tot het doel te komen. En hierin onderscheiden zich nu juist de verschillende wetenschappen van elkaar, dat elke wetenschap zich een ander doel stelt; iedere wetenschap onderzoekt een bepaald deel of liever een bepaalde zijde van de wereld. Het doel van de natuurkunde is nu: onderzoek van de eigenschappen van de stof; voor de wiskunde is het: onderzoek naar de eigenschappen van de getallen. Dit verschil is, dunkt mij groot genoeg om principieel genoemd te mogen worden. En ik geloof toch ook, dat we, ondanks de successen van de theoretische natuurkunde, nog niet zoo gefascineerd zijn door het getal, dat we in de stof niets anders dan een bepaalde groepeerings van getallen zien. Omgekeerd kunnen

de begrippen elkaar ook niet dekken, daar we ook buiten de stof om van getallen gebruik maken; men kan drie stukken ijzer hebben, maar ook drie oordeelen, drie herinneringen, enz. Het doel van de physika is inderdaad het wezen der verschijnselen — op haar gebied — te begrijpen, zooals het het doel van elke speciale wetenschap is. Voor de metaphysika blijft over, wat iedere bijzondere wetenschap niet kan doen: het onderzoek van dat, wat alle wetenschappen gemeenschappelijk hebben, nl. de wetten van het denken, wat is kennis enz.

Ook al wordt in de natuurkunde van de wiskunde gebruik gemaakt, dan vermindert daardoor het principiële verschil tusschen beide wetenschappen niet; immers de formaliseering moet weer ongedaan gemaakt worden; de doode woorden moeten weer gerealiseerd worden tot levende werkelijkheid. Dat wil in de natuurkunde zeggen, dat we weer terugkeeren tot de stof; de wiskunde is voor de natuurkunde slechts hulpmiddel geweest.

Wat nu de mechanika en de geometrie betreft, deze behoort ongetwijfeld tot de wiskunde, terwijl gene bij de physika behoort. In de mechanika is het om eigenschappen van de stof te doen; in de meetkunde om eigenschappen van getallen. Dat men in de meetkunde gebruik maakt van physische lichamen is niet principiël, want dan zou de meetkunde dichter bij de natuurkunde staan en principiël verschillen van de algebra.

Het doel, dat de physika zich stelt — het verkrijgen van kennis van de materie — stempelt haar nu juist tot een experimenteele, in ieder geval empirische wetenschap. De taalformaliseering is grondslag voor de physika, maar is het voor elke wetenschap. De waarneming van de verschijnselen is inhaerent aan de physika; al is het zintuigelijke element niet scherp te scheiden van het formalistisch-logische, de zintuigelijke waarneming kan niet gemist worden. Telkens keert de physikus weer terug tot het experiment, tot het waarnemen van de verschijnselen. Het gaat hier niet om het afwegen tegenover elkaar, wat meer gebruikt wordt, het zintuigelijke of het formalistisch-logische element; het laatste is voor elke wetenschap noodig; de physika wordt bovendien beheerscht door het zintuigelijke element; vandaar, dat door de physici daarop de nadruk wordt gelegd.

DE ONTWIKKELING VAN HET GETALBEGRIP BIJ HET MIDDELBAAR EN VOORBEREIDEND HOOGER ONDERWIJS.¹⁾

DOOR

H. J. E. BETH

Van de onderdeelen der wiskunde, die behandeld worden in het concept-leerplan voor het onderwijs in Wiskunde, Mechanica en Kosmographie op de H. B.-Scholen met vijfjarigen cursus, opgesteld door de Commissie, die zich op verzoek van het College van Inspecteurs bij het M. O. heeft belast met een onderzoek naar den toestand van het wiskunde-onderwijs op die scholen, is geen enkel zoozeer blootgesteld geweest aan kritiek als de rekenkunde, voorgesteld voor de eerste klasse. Voor een deel hangen die bezwaren samen met het feit, dat sommigen den aard van het H.B.S.-onderwijs in zijn geheel anders zien dan de ontwerpers van bedoeld leerplan het wenschen te zien en dat zij in het bijzonder eene andere meening zijn toegedaan omtrent het doel van het wiskunde-onderwijs op onze scholen. Voor een ander deel echter schijnen mij de bezwaren een gevolg te zijn van de omstandigheid, dat de bedoelde commissie (die er in het geheel niet op voorbereid was, dat juist *dit* punt het meest de gemoederen in beweging zou brengen) hier in haar toelichting toch te beknopt is geweest. Ik ben dan ook het Bestuur zeer dankbaar voor hare uitnoodiging, een voordracht te komen houden over de ontwikkeling van het getalbegrip, omdat zij mij gelegenheid geeft een poging te wagen om bestaand, misschien eenigszins verbreid, misverstand uit den weg te ruimen. Dit schijnt mij vooral van belang dáárom, dat de voorstellen voor de hogere klassen, zooals vanzelf spreekt, steunen op die voor het aanvankelijk onderwijs, en men aan de laatste niet raken kan zonder het geheel in gevaar te brengen.

Vóór dat ik tot het eigenlijke onderwerp overga, deel ik enkele

¹⁾ Voordracht, gehouden in de derde bijeenkomst van Wiskunde-leeraren te Utrecht, 24 Mrt. 1928.

overwegingen van algemeenen aard mede, die voor mij het punt van uitgang vormen. Men kan het met deze eens zijn of ook niet; in het laatste geval echter zullen mijne beschouwingen weinig anders kunnen geven dan stof tot ergernis.

Voor mij is het voornaamste doel van het H.B.S.-onderwijs: de algemeene vorming van den geest. De ruime plaats, die aan de wiskunde is toebedeeld, zie ik als een erkenning van haar hooge vormende waarde. Ik behoef op dit onderwerp, waarover ook in den laatsten tijd weder veel geschreven en gesproken is, hier niet nader in te gaan, en kan volstaan met een verwijzing (voor het meerendeel der aanwezigen overbodig) naar de voordracht van Dr. Dijksterhuis, die voorkomt in de Handelingen van het XXe Nederlandsch Natuur- en Geneeskundig Congres, of naar zijn Gidsartikel (1925, No. 10). Men zal het met mij eens zijn, dat, indien den leerlingen slechts kennis der wiskunde behoefde te worden bijgebracht als hulpmiddel bij het onderwijs in natuurkunde, mechanica en kosmographie, wij wiskunde-onderwijs in geheel anderen vorm zouden kunnen geven, dat véél minder van de leerlingen *eischte* (en hun dus ook naar evenredigheid minder *gaf*) en waarvoor wij met een veel kleiner aantal lesuren zouden kunnen volstaan.

Zal de vormende waarde van het wiskunde-onderwijs tot haar volle recht komen, dan moet met ernst gestreefd worden naar den *bereikbaren* graad van exactheid. Wat „*bereikbaar*” is, is niet in het algemeen te zeggen; het hangt èn van de vermogens èn van de ontwikkeling van de leerlingen af.

Voor het volgen van het onderwijs hebben de leerlingen de beschikking noodig over bepaalde, hier niet te definieeren eigenschappen; het geheel van die eigenschappen zal ik korthedshalve door de benaming „leervermogen” aanduiden. De wel eens uitgesproken meening, dat „de school er is voor de kinderen” is niet voor weerlegging vatbaar, maar men is niet gerechtigd tot de gevolgtrekking, dat de ouders te beslissen hebben, welke school hun kinderen zullen bezoeken. Immers heeft elke school een bepaalde taak te vervullen, en zij moet in de vervulling van die taak te kort schieten, indien zij niet een bepaald minimum van leervermogen, voor elk schooltype karakteristiek, mag vóóronderstellen bij haar leerlingen.

Ter voorkoming van misverstand merk ik hierbij op, dat ik voor de leerlingen onzer scholen niet eisch een speciaal leervermogen voor wiskunde. Ik ben niet in de gelegenheid geweest de gegrondheid te ervaren van het vermoeden (dat voor velen blijkbaar de gewisheid heeft van een natuurwet), dat er een bijzonder leervermogen voor de wiskunde en evenzeer een voor de talen zou zijn, en dat deze in het algemeen gescheiden voorkomen.

Evenmin echter heb ik uit mijn ervaringen de gevolgtrekking kunnen maken, dat er bij de verandering van het leervermogen met den leeftijd in zéér veel gevallen een discontinuïteit zou optreden in den overgangsleeftijd; sommigen zijn hiervan zoozeer overtuigd, dat zij dit verschijnsel als grondslag voor ons onderwijsstelsel zouden willen aanvaard zien. Veel meer heb ik den indruk ontvangen, dat de natuur hier den weg der geleidelijkheid niet verlaat. Hieruit zou dan echter volgen, dat ook het wiskunde-onderwijs van de eerste klasse af in een bepaalden geest kan worden gegeven, en dat de geleidelijke geestelijke groei der leerlingen slechts doet vragen om een geleidelijke verzwaring der leerstof en een geleidelijke opvoering der exactheid.

Ten slotte heb ik noodig de onderstelling, dat de leerlingen, zooals de lagere school ons die aflevert, de techniek van het rekenen met geheele getallen, gewone en decimale breuken beheerschen.

Ik heb deze overwegingen vooropgesteld om te voorkomen, dat een eventueele discussie over mijne beschouwingen zal ontaarden in opmerkingen als de volgende: „er is niet gedacht aan de meer letterkundig begaafde leerlingen”, anders gezegd: „er is uitsluitend rekening gehouden met de leerlingen, die bestemd zijn voor Delft”; of „het lijkt mij beter de kinderen eerst het cijferen terdege te leeren”; of „men moet met de theoretische behandeling wachten todat, enz. . . .”. Al deze opmerkingen hoop ik te hebben voorkomen door mijn punt van uitgang eenigszins nauwkeurig aan te geven.

Wij zullen nu, om tot het eigenlijke onderwerp te kunnen komen, de vraag moeten beantwoorden wat de leerling van de lagere school medebrengt. Het is, zooals reeds gezegd is, de techniek van het rekenen met geheele getallen, met gewone en decimale breuken. Hij past de rekenregels volkomen werktuigelijk toe, hetgeen zeer

natuurlijk en zeer gelukkig is. Maar hij brengt méér mede dan die techniek, en het is van belang, dat we dit uitdrukkelijk vaststellen: wanneer we zijn aandacht erop concentreeren, dan blijkt het, dat hij de bewerkingen, die hij uitvoert, en de eigenschappen, die hij toepast, volkomen doorziet, althans, wanneer we ons beperken tot de geheele getallen. Dat $10 \times 4 = 4 \times 10$ is, is hem volkomen duidelijk; hij heeft geleerd, hoe hij de pooten van 10 koeien op verschillende wijzen kan tellen, en dat hij het eerste product verkrijgt, indien hij telt per koe; doch het tweede product, als hij de rechtervoorpooten, de linkervoorpooten enz. telt; dat bij het tellen van de eenheden eener hoeveelheid steeds hetzelfde resultaat gevonden wordt, is voor hem aan geen twijfel onderhevig.

De bewerkingen met breuken doorziet hij veel minder goed, hoewel ook deze zaken hem zoo goed mogelijk verduidelijkt zijn door de breuken in te voeren als verzamelingen van kleinere eenheden.

Wanneer we echter uit het feit, dat de leerlingen, zooals ze bij ons komen, de eigenschappen van de bewerkingen met geheele en gebroken getallen reeds kennen, de gevolgtrekking zouden maken, dat alle theoretische rekenkunde in de lagere klassen overdaad is, dan zouden we een zeer ernstige fout maken, die bij het verdere onderwijs nooit ophouden zal, zich te wreken. We zouden dan nl. vergeten, dat de leerling bij al zijn kennis één ding mist: hij heeft geen systeem in zijn kennis. Ook dit gemis is volkomen natuurlijk en mag de lagere school niet als tekortkoming aangerekend worden: het is het gevolg van de empirische methode, volgens welke de leerling zijn kennis verkregen heeft. Op deze kennis kunnen we niet volgens de methode der redeneering voortbouwen, wanneer we haar niet eerst hebben gesystematiseerd.

Het in systeem brengen van de op de lagere school verworven kennis der rekenkunde is de eerste taak van het wiskunde-onderwijs bij het middelbaar en voorbereidend hooger onderwijs. Wanneer we het met deze taak niet zéér ernstig nemen, dan zijn wij, en wij alléén, de schuldigen, indien er een kloof gaapt tusschen het L.O. en het M.O.

Dat de leerling geen systeem in zijn kennis heeft, maakt eenzijdig, dat hij van de verschillende waarheden niet de draagwijdte

ziet, en herhaaldelijk aarzelt ze toe te passen, waar zulk een aarzeling misplaatst is; anderzijds heeft het echter ten gevolge, dat hij ze op de meest bedenkelijke wijze misbruikt. Wanneer hij in de 2de klasse er maar niet mede ophouden wil, te schrijven, dat $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ is, wanneer hij in de 3de klasse met hardnekkigheid volhoudt, dat $\log(a+b) = \log a + \log b$ moet zijn; wanneer hij in de 5de klasse zich niet schaamt voor de bewering,

dat $\frac{4}{2+3} = \frac{4}{2} + \frac{4}{3}$ is, dan kunnen we er niet mede volstaan, dit als *schrijffouten* aan te duiden. Inderdaad zijn het *denkfouten*; hij heeft de distributieve eigenschap der vermenigvuldiging ten opzichte van optelling en aftrekking voorzien, maar wil die distributie algenreener toepassen.

Dat men tot een verruiming van het getalgebied niet straffeloos kan overgaan, indien niet eerst de theorie van de bewerkingen met de natuurlijke getallen het eigendom der leerlingen is, schijnt, hoe vreemd het ook lijken moge, niet door ons allen te worden ingezien. En dat ook die verruiming van het getalgebied een onderwerp is, dat met de grootste zorg moet worden behandeld, is blijkbaar niet voor allen een uitgemaakte zaak.

Ik kan om mijn bedoeling omtrent het laatstgenoemde punt te verduidelijken, geen beter voorbeeld kiezen als de behandeling van het getal nul. De zinsnede in het concept-leerplan, die op het getal nul betrekking heeft, heeft, als ik me niet vergist heb, den tegenzin van velen opgewekt; toch is de zorgvuldige invoering van nul als een getal heel noodzakelijk om niet een belangrijk gedeelte van het wiskunde-onderwijs vooraf tot onvruchtbaarheid te veroordeelen.

Men zal toch wel niet willen ontkennen, dat de leerlingen met het getal nul op de zonderlingste wijze plegen om te gaan. Het wegschrijven van een factor nul in een product is een gewoonte, die zij moeilijk kunnen afleeren. De twijfel of de breuk $\frac{0}{7}$ gelijk is aan nul dan wel oneindig groot is, komt telkens weer bij hen boven. Toch zijn deze moeilijkheden, hoe vreemd zij op het eerste gezicht ook mogen schijnen, volkomen verklaarbaar, als het rekenen met het getal nul niet uitdrukkelijk met hen besproken is.

Immers brengen de leerlingen nul van de lagere school mede op één manier, nl. als teeken, dat door het positie-stelsel, dat wij volgen bij het schrijven van getallen, noodig gemaakt wordt. In het

Romeinsche stelsel van getallen schrijven komt het teeken nul niet voor. Voor de leerlingen beteekent dus het teeken 0 niets anders dan een open plaats in de rij van cijfers, die samen het symbool van het getal vormen. Bewerkingen met nul pasten zij op de lagere school nooit toe. Immers ook b.v. bij het optellen van getallen, wordt de nul eenvoudig overgeslagen. Ook bij het aftrekken; en dat zij bij het aftrekken van twee gelijke getallen (zooals aan het slot eener opgaande deeling altijd voorkomt) niet evenveel nullen schrijven als er cijfers staan in elk getal, beteekent alleen, dat zij dit geleerd hebben als verkorte wijze van schrijven. Men kan niet eens met zekerheid zeggen, dat zij nul kennen als het verschil van twee gelijke getallen.

Indien de leerling dus niet goed weet om te gaan met uitdrukkingen als 7×0 en 0×7 , dan mogen we ons niet verbazen. Bij het product 7×0 kan hij zich nog denken 7 nullen, onder elkaar geplaatst, en hij zal geen bēzwaar hebben, nogmaals een nul te schrijven onder de somstreep, hoewel deze optelling voor hem geen zin heeft, en hoewel nul voor hem nog nooit het resultaat eener optelling is geweest. Veel erger is 0×7 ; behalve de zooeven bedoelde optelling moet hij nog de commutatieve eigenschap der vermenigvuldiging toepassen om nul als uitkomst te kunnen erkennen; die eigenschap heeft voor hem alleen zin bij de vermenigvuldiging van twee natuurlijke getallen (zie boven); althans voor de producten 0×7 en 7×0 is ze voor hem zinloos.

Nu is het waar, dat de leerlingen over een zeker aanvullend vermogen beschikken, en dat zij vaak zonder onze tusschenkomst tot een juist inzicht komen; niet alles behoeft geleerd te worden. Toch mag men hierop niet te veel rekenen; een misrekening onzerzijds kan voor hen zeer ernstige gevolgen hebben.

De historie wijst uit, dat de erkenning van nul als getal niet zoo heel vlot verlopen is. ¹⁾ Reeds in de 2de eeuw vóór Chr. gebruikten de Grieksche astronomen de letter o-mikron (wellicht als beginletter van het woord *οὐδέν*) om de afwezigheid van een cijfer uit te drukken in de voorstelling van een getal (zij gebruikten het van de Babyloniërs overgenomen 60-tallig stelsel). Dat de Grieken

¹⁾ Voor enkele historische bijzonderheden kan ik verwijzen b.v. naar het werkje van *Wieleitner*: *Der Begriff der Zahl*. (Math.-physiol. Bibl. Bd. 2; Teubner).

echter de nul *niet* als getal beschouwen blijkt b.v. hieruit, dat Diophantos (4de eeuw nà Chr.) nul niet als wortel eener vergelijking erkende. Deze opvatting vinden we nog in de middeleeuwen (de Indiërs waren, zooals bekend is, veel verder). Het duurde tot in het midden der 16de eeuw, voordat nul als getal werd beschouwd (door Tartaglia en Cardano). Maar eerst in het midden der 17de eeuw (Girard, Descartes, Hudde) werd het juiste inzicht verworven, tevens in het wezen der negatieve getallen.

Hieruit volgt m.i. duidelijk, dat nul als getal en bewerkingen met het getal nul niet zóózeer vanzelfsprekende zaken zijn, dat wij goed zouden doen, ze in ons onderwijs over te slaan. Bij het onderwijs, zooals het tegenwoordig blijkbaar vrij algemeen gegeven wordt, vergt men in dit opzicht van het aanvullend vermogen van de leerlingen veel meer dan men verantwoorden kan. En toch gaat men in zijn eischen, aan de leerlingen gesteld, ten aanzien van het getal nul, nog veel verder. Dit komt uit bij de pogingen om in de 3de klasse den leerlingen het limietbegrip bij te brengen; het is weer het getal nul, dat maakt, dat het voor de leerlingen veel „te moeilijk wordt”. Indien het waar is, dat de leerlingen, op dezen trap van ontwikkeling gekomen, niet kunnen doorzien, wat het beteekent, als men zegt, dat $\lim 0, \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ is, dan zou, wat wij hen leeren van oppervlakte-, inhouds-, zwaartepuntsbepalingen, vrijwel zinloos zijn, en ons onderwijs zich niet verheffen boven dat aan leerlingen van burgeravondschool en ambachtsschool. Gelukkig echter is het *niet* waar; de leerlingen kunnen het volkomen doorzien, indien slechts het onderwijs in de lagere klassen met de noodige grondigheid gegeven wordt.

Dat nul als getal niet ingevoerd wordt, is mede oorzaak van het feit, dat de leerlingen met het begrip van het oneindige, zooals zij dat noodig hebben, niet vertrouwd kunnen raken, en dat zij slechts wartaal kunnen spreken, als zij het begrip ontmoeten. Ook dit is niet noodig; men kan over de dingen, die hiermede verband houden, de volle waarheid zeggen, ook zonder dat het onderwijs „te moeilijk” wordt.

Een-enkel voorbeeld in zake het „oneindige”. In de 3de klasse blijkt, dat $\operatorname{tg} 90^\circ = +\infty$ of $-\infty$. De beteekenis hiervan kan de leerlingen volkomen duidelijk gemaakt worden, indien men zegt, dat *niet* kan gesproken worden van $\operatorname{tg} 90^\circ$ zelf, wel over de grens-

waarde van $\operatorname{tg} \alpha$, als α van de eene of de andere zijde tot 90° nadert. Dat de tangens elk gegeven getal, hoe groot ook genomen, kan overtreffen, als we den hoek slechts voldoende weinig van 90° laten verschillen, is een zaak, die volstrekt niet boven het bevattingsvermogen der leerlingen gaat; en dat een functie voor een gegeven waarde van de veranderlijke wel twee verschillende grenswaarden kan hebben, kan met behulp van een graphiek gemakkelijk worden toegelicht. Dat $\operatorname{tg} 90^\circ$ zelf geen zin heeft, zonder nadere afspraak, zullen de leerlingen toegeven, als zij zich herinneren, dat de tangens van een hoek gedefinieerd is als een quotient, maar dat een quotient alleen beteekenis heeft, indien de deeler van nul verschilt.

Uit het laatste voorbeeld ziet men duidelijk, hoe noodig het is, dat de invoering van het getal nul en de definitie van de bewerkingen, waarbij het getal nul betrokken is, met zorg worden behandeld.

Ik zal trachten, een schets te geven van de ontwikkeling van het getalbegrip, zooals ik me die voorstel. In de eerste les worden de natuurlijke getallen ingevoerd; zij ontstaan als resultaten van tellingen van de eenheden, waaruit hoeveelheden zijn samengesteld. Het zal na het vorige wel onnoodig zijn te betoogen, dat men bij de volgende uiteenzettingen steeds weer de reeds aanwezige begrippen als uitgangspunt zal nemen, maar er voortdurend op bedacht zal zijn, die begrippen tot een systeem te vereenigen. Men zal in den beginne slechts langzaam kunnen voortgaan, daar het veel moeite en tijd kost, den leerlingen te gewennen aan eenigszins exact woordgebruik. De hiervoor gebruijkte tijd is echter wèlbested.

Na de invoering van de reeks der natuurlijke getallen kan onmiddellijk de optelling der natuurlijke getallen behandeld worden. Van de optelling is tweeërlei opvatting mogelijk: 1°. de vereeniging van de elementen van twee verzamelingen, die geen element gemeen hebben, 2°. het, van één natuurlijk getal uitgaande, verder tellen in de reeks der natuurlijke getallen. Nu komt het begrip optelling, dat de leerlingen medebrengen, op het onder 1°. genoemde neer; het begrip, dat wij voor het verder werken noodig hebben, komt neer op het onder 2° genoemde. Het kost echter niet veel moeite van de eerste opvatting tot de 2de over te gaan; we behoeven slechts de tweede verzameling bij de eerste te voegen op zoodanige wijze, dat wij telkens een element toevoegen; dit wordt afgebeeld in de rij der natuurlijke getallen door telkens een plaats verder te gaan, dus her-

haaldelijk de elementaire bewerking toe te passen. De waarheden, die men als eigenschap der onbeperkte uitvoerbaarheid, als commutatieve en associatieve eigenschap der optelling uitdrukt, en die de leerlingen reeds bekend zijn, gaat men behoorlijk formuleeren, uitgaande van de hun bekende voorstelling, doch daarna gebruik makende van de reeks der natuurlijke getallen.

Later definieert men de aftrekking als omkeering der optelling en laat in de reeks natuurlijke getallen zien, dat zij niet onbeperkt uitvoerbaar is. Bij de verdere behandeling der aftrekking laat men bij voortduring die beperkte uitvoerbaarheid (ook in de formuleering en bij het bewijzen der eigenschappen) duidelijk uitkomen om daardoor des te beter de noodzakelijkheid te doen gevoelen van de uitbreiding van het getalgebied.

Voor de uitbreiding van het getalgebied met nul en de negatieve getallen zou ik wederom bij de aanschouwing willen aansluiten door te beginnen met de afbeelding van de natuurlijke getallen op equidistante punten eener rechte lijn. De geschiedenis zelf wijst ons dezen weg, daar het immers de analytische meetkunde is geweest, die ten slotte tot het juiste begrip der negatieve getallen geleid heeft.

Nadat de natuurlijke getallen op de getallenrechte zijn afgebeeld, wordt in die afbeelding de beteekenis der optelling en der aftrekking aangewezen; nogmaals wordt gewezen op de onbeperkte uitvoerbaarheid der optelling, op de onbeperkte uitvoerbaarheid der aftrekking. De leerlingen zien echter, dat de verplaatsing van het lijnstuk, dat we als eenheid hebben genomen, niet alleen naar rechts, doch ook naar links onbeperkt mogelijk is, waardoor op de getallenrechte punten worden bepaald, die *niet* met getallen overeenkomen. Zij zien tevens, dat, als we overeenkomen, ook met die punten „getallen” te laten corresponderen, de bewerking van de aftrekking van natuurlijke getallen onbeperkt uitvoerbaar wordt. Met nadruk moet er op gewezen worden, dat die nieuwe getallen iets heel anders zouden zijn als de natuurlijke getallen; immers zijn zij niet ontstaan door telling der eenheden eener hoeveelheid; dat dus ook de eigenschappen, die we van de optelling en aftrekking geleerd hebben, niet zonder meer voor de bewerkingen met die getallen geldig kunnen worden verklaard; dat we zelfs nog niet eens hebben afgesproken, wat we onder optelling en aftrekking van die getallen hebben te verstaan. We zullen dit echter gaan afspreken, en zijn

nog geheel vrij in het maken van die afspraken; we zullen de afspraken zoo practisch mogelijk maken.

Eerst thans zijn we zoo ver, dat we tot de formeele invoering van nul en de negatieve getallen kunnen overgaan. De rij der natuurlijke getallen wordt uitgebreid naar links met nul en de negatieve geheele getallen (misschien is het verstandig, niet dadelijk te schrijven b.v. -7 , omdat het $-$ teeken reeds een zekere betekenis heeft, maar b.v. aanvankelijk dat getal b.v. door $*7$ of $\bar{7}$ aan te duiden); afgesproken wordt, dat, evenals in de rij der natuurlijke getallen, een getal kleiner zal worden genoemd als een ander, als het meer naar links staat, enz. Hierna komen de definities van optelling en aftrekking van de geheele getallen, de motiveering van de schrijfwijze -7 , en de *toelichting* van een en ander op de getallenrechte. Ten slotte het bewijs, dat de *grondeigenschappen* en *dus* alle eigenschappen van optelling en aftrekking in het verruimde getalgebied geldig zijn.

Na de behandeling der vermenigvuldiging, der machtsverheffing en der deeling, eerst met natuurlijke, daarna met geheele getallen (bij de deeling wordt uitdrukkelijk vastgesteld, dat de deeler niet nul mag zijn) komt de invoering der breuken. Deze is veel moeilijker dan de invoering van nul en de negatieve getallen als een gevolg van de omstandigheid, dat de leerlingen op de lagere school reeds enkele jaren met breuken hebben gewerkt. Toch kost blijkbaar de verkrijging van het inzicht, dat breuken als getallen mogen worden beschouwd, minder moeite dan de verkrijging van dat inzicht voor de negatieve getallen. Immers, zooeven zagen we, dat eerst in het midden der 17de eeuw het negatieve getal gemeengoed voor de wiskundigen werd; we vinden echter de breuken reeds in de vroegste ontwikkeling der wiskunde. Dit laatste wordt begrijpelijk, als we bedenken, dat reeds een eenvoudige verdeling eener hoeveelheid en ook de meting tot de behoefte aan gebroken getallen voeren.

Ik zou hier willen voorop stellen, dat we gebroken getallen invoeren om de deeling van natuurlijke getallen (ik onderstel, dat de scheiding tusschen rekenkunde en algebra reeds heeft plaats gehad en we dus verder alleen positieve getallen beschouwen) tot een altijd uitvoerbare bewerking te maken, waarbij we in herinnering brengen, dat nul en de negatieve getallen op dezelfde wijze werden ingevoerd om de aftrekking van natuurlijke getallen tot een onbe-

perkt uitvoerbare bewerking te verheffen. We spreken dus af, dat het teeken $\frac{a}{b}$, waarin a en b natuurlijke getallen zijn, steeds een „getal” zal voorstellen, óók als a geen veelvoud is van b . We kunnen nu aanknoopen bij de reeds aanwezige kennis van gebroken getallen, als we gaan „afspreken”, wanneer twee breuken gelijk zullen heeten, maken duidelijk, dat in die afspraak alleen natuurlijke getallen mogen voorkomen, en laten door voorbeelden zien dat onze afspraak: twee breuken $\frac{a}{b}$ en $\frac{c}{d}$ heeten gelijk, indien $ad = bc$ is, geheel overeenkomt met het begrip, dat zij reeds van de gelijkheid van breuken hadden. Uit de definitie kan gemakkelijk de stelling bewezen worden, die we nodig hebben om breuken te kunnen vereenvoudigen en om meerdere breuken gelijknamig te kunnen maken. Zoodra dit laatste gebeurd is, wordt een vergelijking tusschen breuken onderling en tusschen breuken en natuurlijke getallen mogelijk; men zal niet nalaten, hierna op de getallenrechte de punten aan te wijzen, die gebroken getallen voorstellen, want hierop moet later verder worden gewerkt.

Nu de breuken zijn ingevoerd, zal men de optelling en vermenigvuldiging van gebroken getallen definieeren en de grondeigenschappen der bewerkingen met die getallen bewijzen.

De bespreking van tiendeelige breuken en de herleiding van tiendeelige breuken voert vanzelf tot de poging om een gewone breuk in een decimale om te zetten, dus tot de repeteerende breuken. Ik zou dit, hoewel we pas in de eerste klasse zijn, *niet* willen vermijden, maar toch niet willen spreken over het oneindige rekenproces, dat door het symbool $0,4$ wordt aangeduid, omdat ik het oogenblik voor bespreking van het limietbegrip nog niet gekomen acht. Voor mij beteekent dus $0,4$ alleen: dat de breuk $\frac{4}{9}$ *niet* tot een 10-deelige breuk is te herleiden, en dat, als we zouden gaan deelen als in de gevallen, waarin die deeling tot een resultaat leidt, we telkens weer het cijfer 4 zien terugkomen. We geven aan het symbool den naam van repeteerende breuk, hoewel het in het geheel geen breuk en zelfs geen getal is; maar zullen later op deze zaak terugkomen en dan met het symbool zoodanige beteekenis verbinden, dat het óók als getal is te beschouwen en dat het mogelijk is het getal te vergelijken met de natuurlijke getallen en de breuken, en dat dan dat „getal” zal blijken *gelijk* te zijn aan $\frac{4}{9}$. Ik zie er geen bezwaar in, hierna met

repeteerende breuken op de gebruikelijke wijze te laten rekenen.

Iets dergelijks moeten we noodzakelijk in de 2de klasse doen b.v. ten aanzien van de worteltrekking. Ik zou nl. met de verdere ontwikkeling van het getalbegrip willen wachten tot de 4de klasse, omdat voor een behoorlijke invoering van het irrationale getal de leerlingen in de 2de klasse niet rijp zijn. Toch behoeft dat m.i. niet te verhinderen, dat we met irrationale getallen *rekenen* (de meetkunde *dwingt* ertoe; indien we nl. de leerlingen niet aan nog grooter moeilijkheden willen blootstellen), mits we erop wijzen, dat we hierbij vooruit loopen op dingen, die pas veel later aan de orde komen. Zonder er dus nader op in te gaan, hoe we $\sqrt{2}$ als een getal kunnen beschouwen, wil ik wel de vraag stellen, wat $\sqrt{2}$ kan beteekenen en aantoonen, dat er onder de thans reeds ingevoerde getallen géén is, dat voldoet aan den eisch, dat zijn vierkant 2 is, en dat dus het symbool nóg niet de beteekenis heeft van een getal. Later zal blijken, dat het mogelijk is, aan $\sqrt{2}$ de beteekenis van een getal te geven en dat we dan ook dit getal met de geheele en de gebroken getallen kunnen vergelijken en het door een punt op de getallenrechte aanduiden, dat we rekenregels voor die getallen kunnen geven enz., en nu voorloopig maar doen, alsof dit alles reeds gebeurd is. Alleen om de verbeelding te hulp te komen zou ik op de getallenrechte willen aanwijzen de punten, voorstellende de getallen 1; 1,4; 1,41 enz., wier vierkant kleiner is dan 2, en de getallen 2; 1,5; 1,42 enz., wier vierkant grooter is dan 2.

Aan het einde der 2de klasse zijn we dus niet verder gekomen dan het gebied der rationale getallen. Nu moet in de derde klasse het limietbegrip aan de orde komen; een aanleiding doet zich ongeveer gelijktijdig voor in de algebra (bij de meetkundige reeksen) en in de meetkunde (oppervlak en omtrek van den cirkel). En ik geloof, dat tegen een behoorlijke behandeling daarvan in het geheel geen bezwaar behoeft te bestaan, dus ook niet tegen een exacte formulering. We zullen b.v. aanknoopen bij hetgeen vroeger omtrent de repeteerende breuken geleerd is. Het symbool 0,4 komt weer ter sprake, de reeks getallen 0,4, 0,44, 0,444, 0,4444 enz. wordt opkeken en de reeks getallen 0,4, 0,44, 0,444, 0,4444 enz. wordt opnieuw beschouwd en van die reeks worden de eigenschappen genoemd, dat elk volgend getal grooter is dan het vorige en dat er bij de getallen van de rij *geen laatste* is; dat bij dat voortdurende aangroeien het getal toch kleiner blijft dan 10, zelfs dan 1, zelfs dan

0,45, en dat er een kleinste getal bestaat, waaronder het veranderende getal steeds blijft, $\frac{4}{9}$. Dit wordt aangetoond door te laten zien, dat men zooveel vieren kan schrijven, dat het verschil van het getal en $\frac{4}{9}$ kleiner is dan een vooraf aangegeven klein getal. Men kan dit door voorbeelden toelichten en daarna het gevondene uitdrukken door de bewering, dat bij elke δ een N te vinden is zóó dat

$$\frac{4}{9} - u_n < \delta \quad \text{voor elke } n > N$$

en dat men dit bedrag kortweg aldus uitdrukt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \frac{4}{9}.$$

Wanneer men deze formuleeringen behoorlijk door getallenvoorbeelden (naar aanleiding van oneindige reeksen enz.) toelicht, dan blijken zij den leerling volstrekt geen bijzondere moeilijkheid te geven. Inderdaad is ook deze redeneering begrijpelijker dan de onzuivere, die men er wel eens voor in de plaats geeft. Dat men er teleurstelling bij ondervindt, vindt m.i. in hoofdzaak zijn oorzaak hierin, dat men niet genoeg met ongelijkheden heeft laten werken. Ik geloof, dat één van de fouten van het gangbare wiskunde-onderwijs is, dat het de ongelijkheden te zeer bij de gelijkheden achterstelt.

De verwaarloozing van de *ongelijkheden* moet noodlottig werken bij de ontwikkeling van het getalbegrip. Het spreekt vanzelf, dat de behandeling der ongelijkheden niet later bij het onderwijs moet worden ingeschoven, maar moet beginnen bij het begin der eerste klasse.

Men zal daarvan ook het noodzakelijke inzien bij de invoering der irrationale getallen. Hiertoe zijn we nl. genaderd bij het begin der 4de klasse. Wel is er reeds herhaaldelijk met irrationale getallen gewerkt (dit is niet te ontgaan), maar we hebben er ook herhaaldelijk den leerlingen op gewezen, dat veel van wat er nu gedaan werd, eerst later zal worden verantwoord.

We zullen dan in de 4de klasse beginnen met een opsomming van al die gevallen, waarin we gewerkt hebben met die getallen, vóór dat ze behoorlijk waren ingevoerd. We zullen in herinnering brengen, dat we bij het behandelen der vierkantsworteltrekking onbeantwoord gelaten hebben de vraag, wat $\sqrt{3}$ eigenlijk was en er toch maar mede gewerkt hebben alsof het een getal was, dat de logaritmen der natuurlijke getallen voor een natuurlijk getal als grondtal

in het algemeen geen getallen zijn uit de verzameling, die we beschikbaar hadden, dat we in de meetkunde b.v. de hoofdstelling van de evenredigheid van lijnstukken gedaan hebben, alsof er voor elke twee lijnstukken een gemeene maat bestond. Dat dit niet het geval is toonen we aan door het bekende bewijs van de onderlinge onmeetbaarheid van zijde en diagonaal van een vierkant. Maar daarmee blijkt, dat bedoelde hoofdstelling, waarop toch de theorie der gelijkvormigheid en de berekening van lijnstukken berust, eigenlijk niet bewezen is. En zoo is het voor de stellingen omtrent het verband tusschen hoeken en cirkelbogen, omtrent de oppervlakte van figuren enz.

We moeten de leerlingen goed doordringen van het besef, dat de meetkunde staat of valt met het bestaan van andere getallen dan de rationale, die echter toch met deze te rangschikken zijn op de getallenrechte, dat dus de getallenrechte nog niet vol is met de punten, die de geheele getallen en de breuken afbeelden.

De vraag is nu slechts, hoe we dan hierna in de 4de klasse de irrationale getallen zullen invoeren, d.w.z. bij welke der klassieke of meer moderne theoriën we ons het dichtst zullen aansluiten. Nu is dit, behalve een kwestie van didaktiek, ook een kwestie van smaak, en we weten, dat hierover niet te redetwisten valt. Bepalen we ons tot de theorie van de fundamentealreeksen van Cantor en tot de theorie van de Dedekind'sche snede; dan hebben beide hun voordeelen en hun bezwaren. Persoonlijk gevoel ik het meest voor de Dedekind'sche snede en wel op grond van de groote mate van aanschouwelijkheid, waarmee deze theorie kan worden behandeld.

Echter zie ik zeer goed de bezwaren: 1°. zijn de irrationale getallen niet altijd even gemakkelijk als sneden voor den dag te brengen; 2°. is de bewerking van optelling en aftrekking wel heel gemakkelijk te behandelen, maar de vermenigvuldiging geeft reeds moeilijkheden. Ik zie er echter in het geheel geen bezwaar in om voor deze moeilijkheden te blijven staan, en mij te bepalen tot de eerstgenoemde bewerkingen. We geven dus na het begrip „snede in het gebied der rationale getallen” ontwikkeld te hebben, de definities van gelijkheid en ongelijkheid van twee sneden, bewijzen, dat door twee sneden weer een snede wordt bepaald, die de som der eerste is, bewijzen, dat de optelling in het verruimde getalgebied een onbeperkt uitvoerbare en ondubbelzinnige bewerking is, de associatieve en commutatieve eigenschap, bewijzen, dat de

aftrekking een onbeperkt uitvoerbare bewerking is, enz. Reeds met dit weinige (bij de behandeling waarvan men niet te zuinig met zijn tijd moet zijn) kan men de leerlingen brengen tot het besef, dat al deze zaken op een hechten grondslag steunen en dat vele dingen, die vroeger zonder bewijs werden aangenomen, thans hun bevestiging verkregen hebben.

Het gedeelte mijner voordracht, dat op de behandeling der complexe getallen betrekking heeft, is reeds verschenen, zelfs eenigszins nader uitgewerkt, in afl. 3. Dat dit eerste gedeelte later verschijnt, is een gevolg van de omstandigheid, dat ik aanvankelijk niet voornemens was het te publiceeren, en er eerst op verzoek van de Redactie thans toe overgegaan ben.

BOEKBESPREKINGEN.

Beginnelsen der Vlakke Meetkunde. Een leerboek voor beginners, overeenkomstig de hedendaagsche inzichten in de Euclidische Meetkunde, samengesteld door J. H. Schogt. P. Noordhoff. 1929. Groningen.

De heer J. H. Schogt, schrijver van een voor eenige jaren verschenen veelbesproken leerboek der Theoretische Mechanica, dat om het wetenschappelijk peil van zijn inhoud onverdeelde bewondering heeft gewekt, maar welks practische bruikbaarheid in het M.O. nog steeds voorwerp van meningsverschil is, heeft thans eene inleiding in de Euclidische meetkunde het licht doen zien, die voorbestemd schijnt om in nog hoogere mate dan het eerstgenoemde werk mathematischen lof te oogsten en didactische oneenigheid te veroorzaken.

Ik beschouw het als een voorrecht, dat de redactie van dit tijdschrift mij de gelegenheid biedt, hier de vraag te bespreken, in hoeverre die lof verdiend is en of er voor die oneenigheid inderdaad aanleiding bestaat.

Ter inleiding daarvan mogen enkele woorden voorafgaan over het doel, dat den schrijver bij de bewerking van zijn boek voor oogen heeft gestaan en over de motieven, die hem er toe dreven, dit doel te vervolgen.

De ontwikkeling van de wiskunde in de 19e en 20e eeuw heeft het meetkundige systeem, dat ontwikkeld wordt in de *Elementen* van Euclides beroofd van het aureool van mathematische onaantastbaarheid en didactische onfeilbaarheid, waardoor het vanaf den tijd van zijn ontstaan omgeven was geweest. De moderne axiomatica onthulde de ontoereikendheid van de fundamenteen, waarop de Stoicheiotes zijn gebouw van theorema's en problema's onafhankelijk van de voorstelling en door het denken alleen had willen optrekken; nieuwere inzichten in de didactiek der wiskunde deden de vraag rijzen, of zijn werk, zoo het oorspronkelijk al als leerboek voor beginners bestemd was geweest, nog wel beantwoordde aan de eischen, die men in onzen tijd aan een voornamelijk door kinderen te gebruiken leerboek mag stellen. Het gevolg van deze twee groepen van nieuwere inzichten heeft bestaan in een algemeen verspreid meningsverschil betreffende het onderwijs in de eerste beginselen der meetkunde, dat in groote lijnen is terug te brengen tot dezen eenvoudigen vorm, dat tegenover degenen, die geheel met de Euclidische methode willen breken en die het meetkunde-onderwijs

in de eerste stadia veel meer willen laten aansluiten bij de empirie, ja zelfs bij het experiment, anderen staan, die de klassieke Grieksche methode in beginsel willen behouden, maar die het systeem der *Elementen* op grond van moderne wetenschappelijke inzichten willen hervormen. Voor de eersten is de ontdekking van de ontoereikendheid der traditioneele Euclidische fundeering een argument, dat ze gaarne aangrijpen, om de Euclidische methode in het discrediet te brengen, dat ze haar op didactische gronden toewenschen; voor de laatsten is zij een aansporing om ter wille van de didactische waarde, die zij aan de methode zijn blijven hechten, voortdurend te werken aan een verbetering van het Euclidische systeem, die het weer zal kunnen herstellen op zijn oude eereplaats in den voorhof der mathesis.

De heer Schogt nu staat met volle overtuiging op het tweede der boven onderscheiden standpunten; hij aanvaardt het oude, thans in veler oogen verouderde beginsel, dat de wiskunde van den aanvang af zal worden bedreven als wiskunde en niet als empirische ruimtekennis en hij streeft er naar, het wiskunde-onderwijs op de middelbare scholen op dezelfde wijze mee te laten groeien met de ontwikkeling der mathematische wetenschap zelf, als het onderwijs in physica en chemie — zonder verbaasde protesten van eenige zijde — zich van jaar tot jaar vervormt, om de wetenschappen, welker beginselen zij leert kennen, in de verte in haar verloop te kunnen volgen.

Dit is zijn doel en hij streeft het na, omdat hij overtuigd is van de mogelijkheid, om leerlingen, die op een H.B.S. of Gymnasium thuis hooren, reeds op jeugdigen leeftijd ordelijk te leeren redeneeren en exact te leeren spreken en omdat hij aan de oefening van deze beide vermogens een hooge intellectuele en moreele waarde toekent. Zijn boek is een ernstig pleidooi voor de gegrondheid van deze overtuiging en reeds daarom verdient het de aandacht van voor- en tegenstanders van de zienswijze, die het tot uiting brengt.

Bezien wij nu den inhoud van het boek zelf, dan is een van de eerste dingen, die dadelijk aantoonen, in hoe hooge mate de schrijver zich verwijdt van den gebruikelijken leergang, het groote aantal axiomata en postulaten, dat hij ter fundeering van zijn systeem invoert. Men vindt 18 axiomata en wel twee van incidentie, twee van orde, vijf van congruentie van lijnstukken, zes van congruentie van hoeken, twee van congruentie van driehoeken, het Euclidische parallel-axioma en een cirkelaxioma. Daarnaast komen nog vijf constructiepostulaten ter fundeering van de bewerkingen, die men in het stoffelijke met behulp van papier, potlood, lineaal en passer kan nabootsen. De hierdoor verkregen breede basis stelt hem in staat, vele dingen expliciet uit te spreken, die in den gebruikelijken leergang stilziggend worden aanvaard en afstand doen van vele schijnbewijzen, waarmee men dingen aannemelijk tracht te maken, welker nauwkeurig bewijs veel dieper liggende redeneeringen zou vereischen. Zoo wordt in het bijzonder de behandeling van de congruentie van driehoeken verrassend kort en eenvoudig.

Een tweede opvallende wijziging bestaat hierin, dat de congruentie van driehoeken behandeld wordt vóór de theorie van de evenwijdige

lijnen. De schrijver keert hierdoor terug tot de handelwijze van Euclides zelf, die men, zonder aandacht voor de zeer zorgvuldig overwogen constructie van de groote lijnen van het eerste boek der *Elementen*, op onvoldoende gronden heeft verlaten. Met Euclides (I, 16) behandelt hij de stelling van den buitenhoek met behulp van congruentie-eigenschappen en niet als een gevolg van de stelling van de hoekensom van een driehoek (welke laatste methode den onjuisten indruk wekt, alsof zij eveneens afhankelijk was van het parallelenpostulaat) en hij kan daardoor volgens de methode van Euclides I, 27 een voorwaarde, die voldoende is voor parallelisme onmiddellijk door redeneering uit het ongerijmde (I, 27 is eigenlijk logische omkeering of contrapositie van I, 16) afleiden, zonder dat hij zijn toevlucht behoeft te nemen tot de gekunstelde methode van Ptolemaeus, waaraan het hedendaagsche wiskunde-onderwijs op onnaspeurlijke gronden zulk een verwonderlijke waarde hecht.

Vermelding verdient hierbij nog, dat afstand is gedaan van de gebruikelijke praemature invoering van den graad als eenheid van hoekmaat. De woorden graad, minuut en seconde worden terloops vermeld op de laatste bladzijde van het zuiver wiskundige deel van het boek, wat wel een overtuigend bewijs is van hun ontbeerlijkheid in den opbouw van de meetkunde. In metrische beschouwingen over hoeken wordt, zoo noodig, aan den rechten hoek het getal één toegekend; overigens wordt het goede spraakgebruik van Euclides gevolgd, waarin b.v. de som van de hoeken van een driehoek gelijk wordt genoemd aan twee rechte hoeken (de schrijver had volgens zijn beginselen eigenlijk moeten zeggen: de som van twee rechte hoeken). Het zou mij verheugd hebben, indien ook het Euclidische woord „parallel” weer in eere was hersteld; onze term „evenwijdig” brengt de aequidistantie-opvatting van het parallelisme tot uiting en past daardoor niet bij eene definitie, die met Euclides parallele lijnen definieert als in een vlak gelegen lijnen, die elkaar niet snijden; bovendien kan ze, van jongs af gebruikt, ernstige belemmeringen veroorzaken voor het verkrijgen van een ruimeren kijk op het begrip parallel.

Ik wil verder de aandacht vestigen op de wijze, waarop het netelige hoofdstuk Verhouding en Evenredigheid is behandeld. De schrijver maakt hier gebruik van den Euclidischen algorithmus tot het onderzoek, of twee lijnstukken aldan niet een gemeene maat hebben en tot het bepalen van de grootst gemeene maat, zoo zij onderling meetbaar zijn en, consequenter dan Euclides zelf (die de antanairesis versmaadt ter wille van de redentheorie van Eudoxos of, modern gesproken, de kettingbreuk voor de snede), definieert hij de verhouding van twee onderling onmeetbare lijnstukken, door de verhouding van hun lengten uit de drukken door een periodieke kettingbreuk. Hierna kan de hoofdstelling van de evenredigheid van lijnstukken volkomen correct worden bewezen. Onder de toepassingen van de stellingen over evenredigheid van lijnstukken komen ook de stellingen van Meneloas en de Ceva voor.

Zooals wel vanzelf spreekt, wordt de behandeling van de gelijkvormigheid gebaseerd op de theorie van de vermenigvuldiging van

figuren. Het valt hierbij op, dat de factor van vermenigvuldiging steeds positief wordt gerekend, terwijl dan twee soorten van vermenigvuldiging, de directe en de inverse worden onderscheiden; dit geeft eenige vereenvoudiging in de formuleering van sommige stellingen.

Op het hoofdstuk Verhouding en Evenredigheid (waarin ook de berekening van lijnstukken behandeld wordt) volgt een bespreking van de beginselen van de Goniometrie (invoering en waardebeloop van de functies $\sin x$, $\cos x$ en $\tan x$ voor x tusschen 0 en $4R$) en van de Trigonometrie (sinus- en cosinusregel). Daarna wordt de Planimetrie voortgezet met het hoofdstuk Oppervlakte van driehoeken en veelhoeken, waarin het oppervlak van een driehoek wordt gedefinieerd als het halve product van de lengte van een zijde en de lengte van het hoogtelijnstuk op die zijde (nadat eerst bewezen is, dat dat product voor een gegeven driehoek constant is). Daarna wordt de reeds vroeger aangevangen behandeling van den cirkel voortgezet, waarbij o.a. het begrip „macht van een punt P ten opzichte van een cirkel M ” ter sprake komt (gedefinieerd als $PM^2 - R^2$) en de machtslijn van twee cirkels ingevoerd wordt. Bij de behandeling van cirkel en driehoek wordt de sinusregel opnieuw afgeleid, nu als betrekking tusschen de lengten van middellijn en koorde en den sinus van de bij die koorde behorende omtrekshoeken (wat wellicht beter in onmiddellijke aansluiting aan § 195 had kunnen geschieden). Na een hoofdstuk over regelmatige veelhoeken volgt een afzonderlijk hoofdstuk met den titel Limietbeschouwingen, waarin de raaklijn van een cirkel (vroeger ingevoerd als snijlijn met één snijpunt en als zoodanig correct behandeld, wat, voorzoover mij bekend is, een unicum is in onze leerboekliteratuur) als limietstand van een snijlijn wordt beschouwd, terwijl verder uitvoerig de begrippen lengte van een cirkelboog en oppervlak van een cirkelsector worden ontwikkeld.

Hierna volgt nog in afwijking van het thans nog vigeerende programma voor de H.B.Scholen een zeer verzorgde meetkundige behandeling van ellips, hyperbool en parabool, gedefinieerd door brandpuntseigenschappen en, voorzoover de eerste twee betreft, behandeld met behulp van den richtcirkel; bij de ellips wordt bovendien nog gebruik gemaakt van het begrip „vermenigvuldiging ten opzichte van een rechte lijn” ter vervanging van de methode der parallelprojectie. Ten slotte brengt het laatste hoofdstuk na een beknopt overzicht over de geschiedenis van de Euclidische meetkunde een zeer interessante bloemlezing van fragmenten uit leerboeken der Euclidische meetkunde uit verschillende tijden, namelijk uit de eerste Nederlandsche Euclides-uitgave van J. Pz. Dou (geplaatst tegenover den oorspronkelijken tekst van Euclides), uit de voortreffelijke *Eléments de Géométrie* van Legendre, uit de *Beginselen der Meetkunst* van Jacob de Gelder en ten slotte uit twee schoolboeken, een (J. de Gelder) van 1827 en een (Molenbroek-Wijdenes) van onzen tijd.

Ik heb in het bovenstaande, zonder aanspraak op volledigheid, een overzicht van den inhoud van het boek gegeven; het is mogelijk op deze wijze aan iemand, die het boek niet heeft gelezen, een indruk

te geven van wat er in staat; het is echter niet mogelijk, hem op deze wijze tevens te doen beseffen, hoe het er in staat, hem iets te laten voelen van de toewijding, waarmee overal gestreefd is naar zoo zuiver mogelijke formuleeringen, naar zoo exact mogelijke spreekwijzen, naar zoo streng mogelijke bewijzen. Wie het boek aandachtig leest, zal telkens weer kunnen opmerken, welk een vooruitgang ten opzichte van den traditioneeelen leergang hierdoor is bereikt. Als een voorbeeld uit vele van de verbeteringen in spreekwijze wil ik noemen de onderscheiding tusschen lijn, halve lijn, lijnstuk, lengte van een lijnstuk, en goniometrische maat van een lijnstuk, die ook consequent wordt volgehouden in het spreken van hoogtelijnstukken, zwaartelijnstukken en raaklijnstukken in tegenstelling tot de hoogtelijnen, zwaartelijnen en raaklijnen, waarvan die lijnstukken deel uitmaken. Ook aan de redactie van de bewijzen is zeer veel zorg besteed; opvallend is, dat de schrijver, ook in dit opzicht terugkeerende tot Euclides, veel meer de dingen in woorden zegt en dus veel minder gebruik maakt van afkortende symbolen dan b.v. Haalmeijer doet; het valt niet te ontkennen, dat hierdoor het betoog vaak iets zwaars en onoverzichtelijks krijgt. Zeer toe te juichen is de volledigheid in de vermelding van toegepaste stellingen en axiomata.

Er ligt voor alle wiskunde-leeraren van ons land iets beschamends in dit boek. De schrijver is geroepen geweest, om de vlakke meetkunde te doceeren aan leerlingen van de eerste drie klassen van een hogere burgerschool. Hoe nederig moet deze taak toeschijnen aan allen, die buiten de wiskunde staan en aan die wiskundigen, die met de buitenstaanders den waan gemeen hebben van de gemakelijkheid en onbelangrijkheid van de elementaire wiskunde. Maar welk een inhoud verkrijgt ditzelfde werk, wanneer men, al doceerende, zoo gewetensvol en kundig als de schrijver dit heeft gedaan, voortdurend zichzelf de heilzame vragen stelt: „wat zeg ik eigenlijk?” en „hoe zit dat, wat ik in onvolkomen vorm doceer, eigenlijk precies in elkaar?” Het is een antwoord op deze vragen, verkregen in jarenlange ernstige werkzaamheid, dat de schrijver ons in dit leerboek geeft en daarom zal de nauwgezette bestudeering ervan voor elken wiskunde-leeraar niet alleen verdieping van kennis beduiden, maar tevens een voortdurende aansporing tot even degelijke opvatting van de opgelegde taak zonder zorg om de waarde, die anderen daaraan hechten.

Ik zal de vraag naar de waarde, die het boek van den heer Schogt als schoolboek kan hebben, straks pas aanroeren. Hier moge eerst nog iets meer worden gezegd over de beteekenis, die het bezit voor leeraren en studenten. „Een leerboek voor beginners” wordt het in zijn ondertitel genoemd. Maar is in het algemeen niet iedere afgestudeerde in wis- en natuurkunde een beginner in de planimetrie? Begint hij, dank zij de wonderlijke onverschilligheid, die de Universiteit nog veelal aan den dag legt aangaande den toekomstigen werkring van hare alumni, in den regel zijn loopbaan als leeraar niet met een nauwelijks dieper gaande kennis van dit vak, dan hij zich uit zijn schooljaren herinnert en dan hij in het te gebruiken schoolboek aantreft? Hij wordt dan met het gebruikelijke optimisme, waar-

van de Universiteit vervuld is, waar het de verwachtingen betreft, die men van universitair gevormden mag koesteren, in staat geacht, zich zelf geheel in te werken in datgene, wat hem nog ontbreekt, maar vóór 1927. kon hij ter bereiking van dat doel, wat de planimetrie aangaat, in het geheel geen boek in de wiskundige litteratuur aantreffen en sinds dat jaar was er alleen het weliswaar voortreffelijke, maar zeer dure en moeilijke boek van Forder. Schogt's boek kan hier nu waarlijk als inleiding fungeeren; het lijkt mij daarom onmisbaar voor alle studenten in wiskunde en het zou mij daarnaast zeer verheugen, indien de studie ervan verplicht werd gesteld voor de examens Wiskunde L.O. en K I, die op het gebied der vlakke meetkunde eenigszins aan vraagstukhypertrophie lijden en waarvoor theoretische verdieping van de examenstof een dringende eisch is.

Ik kom thans tot het moeilijkste punt van deze bespreking, tot de vraag namelijk, hoe men het boek van den heer Schogt moet beoordeelen, wanneer men onder de beginners, waarvoor het geschreven is, de leerlingen uit de eerste drie klassen van een H.B.S. verstaat.

Het spijt mij, te moeten verklaren, dat ik deze vraag niet kan beantwoorden in denzelfden onvoorwaardelijk goedkeurenden en bewonderenden zin, waarin ik boven over de mathematische verdiensten van het werk heb gesproken. Ik stem geheel in met de beginselen, die aan het boek ten grondslag liggen en die in de twee geciteerde uitspraken van Legendre en van Schuh een welsprekende uiting hebben gevonden; ik kan ook de stemming begrijpen, waarin de schrijver het fiere motto koos, dat het titelblad versiert; maar ik meen toch, dat hij bij het schrijven van zijn boek te weinig rekening heeft gehouden met de didactische realiteit en dat hij aan die realiteit verplicht was geweest, althans in den aanvang, zijn wetenschappelijke overtuigingen meer weg te cijferen en zich de gevoelens van onlust te getroosten, die daaraan ongetwijfeld voor hem verbonden zouden zijn geweest. Ik wil trachten, dit oordeel nader toe te lichten.

In Hoofdstuk II wordt de behandeling van de congruentie van lijnstukken gebaseerd op vier axiomata, die opvolgend uitspreken, dat de relatie „congruent” reflexief en transitief is, dat er op een halve rechte een punt is, dat met het eindpunt een lijnstuk begrenst, congruent met een gegeven lijnstuk en dat sommen van congruente lijnstukken congruent zijn. Hierna worden zonder bewijs zes stellingen vermeld, terwijl dan *bewezen* wordt, dat de som van twee lijnstukken grooter is dan elk van deze en dat helften van congruente lijnstukken congruent zijn. Het komt mij ongelooflijk voor, dat men in een eerste klasse van een H.B.S. met leerlingen, die pas van de Lagere School komen, zoo te werk zal kunnen gaan. Want ten eerste zijn zij nog niet rijp voor impliciete definities en ze zullen dus willen weten, wat congruent nu eigenlijk beduidt. Voelen ze dit, dan zullen ze natuurlijk volgaarne de axiomata en onbewezen stellingen aanvaarden en ze zullen het hoogstens een beetje gek vinden, dat die vanzelfsprekende dingen zoo uitvoerig worden uitgesproken en opgeschreven. Maar hoe zal men hun dan duidelijk kunnen maken, dat er nu ineens *bewezen* moet worden, dat de som van twee lijnstukken

grooter is dan elk van deze en dat helften van congruente lijnstukken congruent zijn, terwijl ze dit even vanzelfsprekend vinden als alles, wat zonder bewijs is aangenomen? Kan men voor dergelijke bewijzen, die niet zoozeer zijn opgenomen, omdat ze noodzakelijk zijn dan wel, omdat ze mogelijk worden geacht, redelijkerwijze aandacht en belangstelling eischen? Bij de behandeling van de congruentie van hoeken gelden dezelfde opmerkingen en pas bij de congruentie van driehoeken lijkt het mij niet meer geheel onmogelijk, het boek te gaan volgen. En dat nog niet eens blijvend. Zoo kan ik bij alle waardeering voor het werk van den schrijver niet de opmerking verzwijgen, dat een uiteenzetting als die van de blz. 50 en 51 in een leerboek, dat bestemd is voor kinderen van 12 à 13 jaar zoo niet had mogen worden opgenomen. Het moet mogelijk zijn, deze dingen eenvoudiger te zeggen en toch exact te blijven.

Ik wil er echter weer wel den nadruk op leggen, dat de practisch-didactische bezwaren, waarvan ik hier een voorbeeld heb aangevoerd, steeds geringer worden, naarmate men meer in het boek opschiet. Ik acht het voor de eerste klasse zonder twijfel voor een groot deel onbruikbaar, maar het lijkt mij mogelijk, dat het in de tweede en derde klasse wel wordt gebruikt, al zou ik het nog liever toegepast zien in een programma, waarbij ook in de klassen IV en V planimetrie werd gedoceerd (een van de meest urgente wenschelijkheden voor ons wiskunde-onderwijs). Moeilijk zal het echter blijven; moeilijk voor de leerlingen, maar vooral moeilijk voor den leeraar, die wel een overtuigd aanhanger van Schogt's beginselen mag zijn, als hij het boek met vrucht wil gebruiken en aan wien men den bij de tegenwoordige toestanden wellicht niet overal verwezenlijkten eisch zal mogen stellen, dat hij voldoende axiomatisch is gevormd en voldoende belang stelt in de elementaire wiskunde, om zelf den inhoud van het werk volkomen te beheerschen.

En nu rijst bij mij de vraag, of het in mijn oog ongelukkig begin, dat het boek, als ik goed zie, zeer veel kwaad doet (menigeen komt niet verder dan de eerste bladzijden en het oordeel, dat hij dan velt, is onbarmhartig!), niet te vermijden zou zijn geweest. Het komt mij voor, dat dit het geval is en dat de schrijver meer voor het wiskunde-onderwijs zou hebben gedaan dan nu reeds het geval is, indien hij in zijn eerste hoofdstukken wat minder had gegeven. Deze hoofdstukken hooren wel in het boek thuis, maar ze hadden achterin moeten staan inplaats van voorin; daar hadden ze vruchtbaar kunnen zijn, terwijl ze nu slechts ellende bij leerlingen en leeraar zullen veroorzaken; daar hadden ze ook volledig kunnen worden uitgewerkt, terwijl ze nu toch slechts programma zijn gebleven.

De heer Schogt had nog meer terug moeten gaan tot Euclides; hij had maar in dezelfde beperkte mate als zijn illuster voorbeeld gebruik moeten maken van het bewegingsbegrip en de superpositiemethode, onbekommerd om de wetenschappelijke bezwaren, die daartegen kunnen worden aangevoerd. Want die bezwaren worden toch nooit spontaan door een leerling gevoeld, en men moet van dat gemis aan kritiek maar liever dankbaar gebruik maken, om de moeilijkheden van het begin voorloopig te omzeilen dan dat men met veel

moeite correct redeneert, zonder dat de noodzaak en de waarde van die correctheid kunnen worden beseft. Ik wil er bijvoegen, dat het niet mijn ideaal zou zijn, dat men in deze houding zou blijven volharden gedurende den geheelen H.B.S.tijd. Wat didactische plicht is in een eerste klasse, kan didactische zonde zijn in een vijfde en omgekeerd. Het is verkeerd, aan kinderen een leerstof voor te zetten, die ze onmogelijk kunnen verwerken, maar het is even verkeerd, jongelieden, die binnen afzienbaren tijd de collegebanken van onze universiteiten en hoogeschoolen zullen vullen, te behandelen, alsof het nog steeds kinderen waren. Daarom zou in een verder stadium van het onderwijs een kritische bespreking van het in het begin van de meetkunde intuïtief aanvaarde op haar plaats zijn; bij die gelegenheid zouden de axiomata van orde en van congruentie kunnen worden ingevoerd, die de heer Schogt in zijn eerste hoofdstuk plaatst.

De voornaamste fout van den schrijver ligt dus m.i. in zijn streven, een boek te schrijven, dat van den aanvang af het fundament zou kunnen zijn van een correcte ontwikkeling der planimetrie, zoodat verdere studie slechts aanvulling zou vereischen en geen wijziging van het eenmaal geleerde. Dit streven is in beginsel onjuist, omdat het begin van de planimetrie het moeilijkste deel is, terwijl het onderwijs graag bij het gemakkelijkste wil beginnen.

Resumeerende zou ik ten slotte mijn meening over het boek van den heer Schogt als volgt willen formuleeren:

Het werk bevat een voortreffelijke, aan de hoogste eischen van vorm en inhoud voldoende bewerking van het systeem van Euclides naar moderne mathematische inzichten; het is onmisbaar als inleiding tot de studie van dit vak voor ieder, die naar een degelijke wiskundige ontwikkeling streeft; het is echter door inhoud en stijl ongeschikt voor aanvangsonderwijs in meetkunde in de eerste klasse van een H.B.S. of Gymnasium; het kan onder gunstige omstandigheden van groot nut zijn voor oudere leerlingen, maar het kan als zoodanig pas volledig tot zijn recht komen na een reorganisatie van het huidige wiskunde-onderwijs. E. J. Dijksterhuis.

Oefeningen in de Vlakke Meetkunde, in aansluiting aan de Beginselen der Vlakke Meetkunde door J. H. Schogt. P. Noordhoff. 1929. Groningen.

Bij het boven besproken leerboek der vlakke meetkunde behoort een afzonderlijke verzameling van oefeningen, bevattende niet minder dan 1449 met de uiterste zorg samengestelde opgaven, die gelegenheid geven, de behandelde theorie aan te vullen en toe te passen. De aanvullingen bestaan ten eerste uit uitvoerig uitgewerkte voorbeelden, om te laten zien, hoe men een theorema met zijn bewijs of een problema met zijn oplossing moet neerschrijven en hoe men een volledige bespreking van de resultaten moet geven; daarnaast wordt veel aandacht besteed aan het omkeeren van stellingen (met duidelijke voorbeelden van juiste en onjuiste omgekeerden), aan de contrapositie (met welken naam de schrijver de z.g. Logische Omkeering

aanduidt), aan het gesloten systeem van stellingen, aan verschillende types van relaties enz. De toepassingen bestaan niet uit gekunstelde vraagstukken, maar uit grootendeels zeer eenvoudige opgaven, bij welker oplossing echter groote zorg moet worden besteed aan den vorm van het betoog. Flair in het vinden van een oplossing, die zoo dikwijls als identiek met mathematischen aanleg wordt beschouwd, terwijl ze daarvan toch slechts een component is, zal daarvoor geenszins voldoende zijn; het komt op ordelijkheid in denken, spreken en opschrijven aan, op systematiek in nomenclatuur en notatie, kortom op al die eigenschappen van een goed wiskundig betoog, die het rechtvaardigen, dat men, tot dusverre tenminste nog, eenige wiskundige ontwikkeling eischt van allen, die wetenschappelijke vorming nastreven.

Ook in dit werk heeft de schrijver voortdurend contact gehouden met de historie der meetkunde. Voortdurend ontmoet men opgaven, die aan oude wiskundige werken ontleend zijn; zij verleenen aan het boek nog een afzonderlijke bekooring. E. J. Dijksterhuis.

Noordhoff's Verzameling van Wiskundige Werken, deel XV. H. J. van Veen: „Leerboek der Beschrijvende Meetkunde”, Deel II. Oppervlakken en ruimtekrommen. Aanhangel (Pooltheorie en Meetkundige Verwantschappen).

Het eerste deel van dit Leerboek is besproken in het „Bijvoegsel” van het „Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde”, 2e Jaargang, 1925/26, Nr. 5/6, p. 168, en aangezien het tweede deel geheel op dezelfde leest geschoeid is, en dezelfde goede eigenschappen bezit, als het eerste, kunnen wij bij de bespreking van het tweede kort zijn. Voorafgaande aan de hoofdstukken die men gewend is in een leerboek der Beschr. Meetk. aan te treffen, geeft de schrijver een „Inleiding”, waarvan de bestudeering, naar hij onderstelt, zal kunnen bijdragen tot een beter begrip van hetgeen in de volgende hoofdstukken behandeld wordt; men kan het hier geheel mee eens zijn, aangezien in deze Inleiding de aan de Algebra ontleende fundamenteele begrippen worden behandeld zonder welke de Meetkunde onverstaaanbaar blijft: n -dimensionale verzamelingen, r -voudige voorwaarden, stralencongruenties en stralencomplexen, algebraïsche variëteiten, algebraïsche krommen en oppervlakken, graad, klasse, enz. enz., kortom, alle begrippen, die men moet kennen om zelfs de eenvoudige krommen en oppervlakken, die in de theorie en de praktijk der Beschr. Meetk. voorkomen, werkelijk volledig te kunnen begrijpen.

Bij wijze van Aanhangel geeft de Schrijver een kort overzicht over de Pooltheorie, en over de Meetkundige Verwantschappen, waarvan de kennis eveneens dringend noodig is, wil men de Beschr. Meetk. van een zuiver graphisch vak, waarin vele uitkomsten onbegrepen blijven, opheffen tot een wetenschappelijke, construeerende Synthetische Meetkunde.

Het eerste deel heeft reeds zijn weg gevonden buiten de Technische Hoogeschool; nu het werk compleet is, meenen wij te mogen voorspellen dat dit verschijnsel zich in de naaste toekomst in nog sterkere mate zal voordoen.

H. d. V.

Dr. D. P. A. Verrijp, Leerboek der Goniometrie en Vlakke Trigonometrie. Vierde, omgewerkte druk. 's-Gravenhage, N.V. Joh. Ykema's uitgeversmaatschappij. 1929. Geb. f 2.75.

De vierde druk van Dr. Verrijp's Leerboek der Trigonometrie heeft eene zoodanige herziening ondergaan, dat een bespreking in dit tijdschrift wel gewettigd is, ook al worden, als regel, herdrukken niet besproken.

Deze vierde druk is op meer ingrijpende wijze herzien dan de vorige. Duidelijk kan men bemerken, dat het des schrijvers bedoeling geweest is, de exactheid in woordgebruik en notatie in overeenstemming te brengen met de eischen, die sinds eenige jaren gesteld worden, en die blijkbaar zijne instemming hebben (aan de strengheid der redeneeringen viel sedert den eersten druk niet veel te verbeteren.) Blijkens het voorbericht heeft de schrijver er bovendien naar gestreefd, de duidelijkheid zijner uiteenzetting te vergrooten, omdat hij meent opgemerkt te hebben, dat hij in vorige drukken te weinig uitvoerig is geweest, om de voordeelen zijner methode goed tot de in zijn werk belangstellenden te doen doordringen.

De verbeteringen zijn groot in aantal en belangrijk. Ten eerste zien wij eene notatie, die een duidelijk onderscheid maakt tusschen lijnen, lijnstukken (al of niet gericht) en halve lijnen; voorts is het blijkbaar de bedoeling geweest, niet meer het woord „lijn” te gebruiken als „lijnstuk” bedoeld wordt (dit is echter, jammer genoeg niet consequent doorgevoerd; in § 27 staat eenige malen „lijnen” voor „lijnstukken”, en ook elders is het onderscheid niet steeds in het oog gehouden.) De dwaze uitdrukking „beweegbaar been” is verdwenen. Hoogst belangrijk is, verder, dat veel aandacht geschonken is aan de verklaring en het gebruik van het woord „oneindig”, aan de beteekenis van formules als $\text{tg } 90^\circ = \pm \infty$, en aan de gevallen, waarin de leden eener formule geen getallen meer voorstellen (bijvoorbeeld $\text{tg } \alpha = \sin \alpha : \cos \alpha$ voor $\alpha = 90^\circ$). Het hoofdstuk over goniometrische vergelijkingen is nieuw geschreven, en de daarin voorkomende beschouwingen over het invoeren en verdrijven van wortels zijn aanmerkelijk scherper dan die, welke in den derden druk voorkomen. Ten slotte mogen als verbeteringen genoemd worden eenige belangrijke toevoegingen omtrent harmonische bewegingen en omtrent veelhoeken en vierhoeken. Eene tamelijk ingrijpende wijziging is het opnemen eener inleiding, die in 13 bladzijden de eenvoudigste eigenschappen van de goniometrie en de trigonometrie behandelt op eene wijze, die de directe behoeften van eerstbeginnenden voorloopig kan bevredigen.

Een boek, dat van den aanvang af reeds op zoo hoog peil stond als het werk van den heer Verrijp, en dan nog zoo grondig is herzien en in overeenstemming gebracht met de gewijzigde inzichten, kan zonder voorbehoud een *zeer goed leerboek* genoemd worden; ik hoop dat deze vierde druk het succes zal hebben, dat hij op grond van zijne qualiteiten verdient.

De schrijver veroorlove mij enkele bedenkingen. Ik heb zooeven

met waardeering gesproken over de zorg, die hij besteedt aan uitdrukkingen als oneindig groot. De op bladzijde 11 aangeprezen uitdrukking, dat de tangens van een tot 90° naderende hoek „tot oneindig nadert” of „de limiet oneindig heeft”, kan ik niet gelukkig vinden; wil men eene ε -definitie vermijden, dan zou ik liever zeggen, dat als een hoek tot 90° nadert, zijn tangens onbeperkt toeneemt. Ernstiger bezwaar heb ik tegen het zinnetje op bladzijde 73: „Het aantal wortels van een gon. vergelijking nadert tot oneindig of is nul”. Hier verwacht de schrijver „oneindig” als term ter kenschetsing van het gedrag eener functie in de omgeving van een punt met „oneindig” als eigenschap eener verzameling. Dat de verzameling der wortels van eené goniometrische vergelijking, die wortels heeft, eene oneindige verzameling is, heeft toch niet te maken met limiet-beschouwingen! — Dat er onder de bijna 1150 vraagstukken misschien enkele onjuiste zijn, zal men wel door de vingers willen zien; het op bladzijde 157 vet gedrukte vraagstuk 18 is onjuist, de formule die bewezen moet worden geldt alleen voor scherphoekige driehoeken.

In den vierden druk zijn eenige wijzigingen aangebracht, waarschijnlijk gerechtvaardigd door communes opiniones, die ik niet deelen kan. De „inleiding”, waarnaar in den eigenlijken leergang meermalen verwezen wordt, heeft naar mijne meening de fraaie structuur van het geheel geschaad. In het bijzonder zie ik met leedwezen de mooie §§ 75, 78 en 83 van den derden druk verdwijnen, die ik met mijne leerlingen steeds behandeld heb. Maar ik twijfel niet, of men zal het in meerderheid niet met mij eens zijn en ook deze veranderingen als verbeteringen beschouwen; waarmede zij dan ook in mijn oog tot op zekere hoogte gerechtvaardigd zijn.

J. H. S.

INGEKOMEN BOEKEN.

J. VERSLUYS—POSTMA, Vlakke driehoeksmeting met vraagstukken . . . 17e druk gec. f 2.—

P. WIJDENES, Algebra voor examen in Handelsrekenen (M. O. KXII, Accountancy en staatspraktijkexamens) f 2,75 geb. - 3,25

Dr. E. J. DIJKSTERHUIS, De elementen van Euclides I
Deel I van Noordhoff's Historische Bibliotheek 217 blz.
met 44 fig. geb. - 4,50

Dr. H. J. E. BETH, Inleiding in de niet-Euclidische Meetkunde op historischen grondslag 212 blz. met 77 fig. . . . geb. - 4,50

Voor int. op Noordhoff's wiskundige tijdschriften is de prijs f 3,90.

Wis- en Natuurkundig Tijdschrift onder redactie van Prof. Dr. C. DE JANS, IV^e deel Afl. VI.

Inhoud:

Dr. J. W. A. VAN KOL, Over den complex der bikwadratische kromme in R_4 , die door vijf gegeven punten gaan en een gegeven vlak en een gegeven rechte snijden.

R. LAGAGE, Over het continuïteitsbegrip.

Prof. Dr. J. E. VERSCHAFFELT, Het meten van oppervlaktespanningen volgens de methode der afvallende druppels.

Boekbesprekingen nl. de boeken van Dr. Haalmeijer, van Schogt en Prof. Van Veen.

Het Wis- en Natuurkundig Tijdschrift is het Orgaan van het Vlaamsch Natuur- en Geneeskundig congres; ieder intekenaar is ipso facto lid van dit congres. De prijs voor Nederlanders is f 4.— per jaar; we wekken de lezers van Euclides op tot intekening om het geestelijke contact te bevorderen tusschen de beoefenaars onzer wetenschap in onze taal aan beide zijden der staatkundige grens. Men melde zich aan bij Dr. Peremans, Antwerpen, Louisastraat 8.

Inhoud van den vijfden jaargang.

Artikelen.

Artikelen.	Blz.
Dr. D. P. A. VERRIJP, Over de meetkundige oplossing van de vergelijking $a \sin x + b \cos x = c$	1
Dr. D. P. A. VERRIJP, Nomenclatuurcommissie	4
Dr. U. PH. LÉLY, Een wijze van behandeling der logaritmen van rekenkundige getallen	5
Dr. J. G. VAN DE PUTTE, Eigenschappen over de deelbaarheid	12
Prof. Dr. F. SCHUH, Axiomatische behandeling der meetbare en onmeetbare verhoudingen van grootheden	14
Dr. H. J. E. BETH, Het experimenteel georiënteerde onderwijs in mechanica	49
Dr. E. J. DIJKSTERHUIS, De aanslag op de mechanica	61
J. H. SCHOGT, De mechanica als afzonderlijk leervak op de hogere burgerschool	70
J. H. SCHOGT, De kosmographie op de hogere burgerschool	80
Dr. D. J. E. SCHREK, Bibliotheca mathematica	82
D. VAN DANTZIG, Eigenschappen van de deelbaarheid	84
„ Woord en werktuig	86
R. H. VAN GULIK, De mathematische conceptie bij de oude Chineezers	104
Dr. H. J. E. BETH, De behandeling der complexe getallen	110
P. WIJDENES, De oplossing van de vergelijking van den eersten graad met twee onbekenden	122
Dr. B. P. HAALMEIJER, Bijdrage tot de kennis van practische onderwijsresultaten in vroegere tijden	137
J. H. SCHOGT, Het limietbegrip in het middelbaar onderwijs	140
Dr. P. DE VAERE, De wiskunde in het Belgisch middelbaar onderwijs	145
Dr. CH. M. VAN DEVENTER, Een foutieve natuurwet	177
Dr. E. J. DIJKSTERHUIS, De ontdekking van het Tautochronisme der cycloidale valbeweging. Een bijdrage tot de 300 ^{ste} herdenking van den geboortedag van Christiaan Huygens op 24 April 1929	193
E. DE HAIRS, Geschiedschrijvers der Wiskunde	229
A. C. DE KOCK, Over een belangrijk vraagstuk der Sterrenkunde	237
J. SCHELTENS, Natuurkunde en wiskunde	268
Dr. H. J. E. BETH, De ontwikkeling van het getalbegrip bij het middelbaar en voorbereidend hooger onderwijs	270
Ingekomen boeken	47, 296
Uit buitenlandsche tijdschriften	48

Boekbesprekingen.		Blz.
Dr. J. G. RUTGERS, Inleiding tot de Analytische Meetkunde I		
2e druk		132
Dr. FRED. SCHUH en Dr. J. G. RUTGERS, Compendium der		
hoogere wiskunde IV		133
Dr. W. LIETZMANN, Aus der Mathematik der Alten		133
PAUL DELTOUR, Meetkunde voor middelbare scholen		134
N. J. SCHONS, Traité d'Algèbre élémentaire		134
Dr. A. D. FOKKER, Inleiding tot de golvings- en de quantum-		
mechanica		135
Dr. P. MOLENBROEK en J. MULDER, Leerboek der Natuurkunde		136
BROMBACHER en NAUTA, Natuurkunde (voor M. U. L. O.)		136
Ir. G. L. LUDOLPH en Ir. A. P. POTMA, Theoretische mechanica		
voor het Middelbaar Onderwijs en voor zelfstudie		168
Dr. B. P. HAALMEIJER, Leerboek der Vlakke Meetkunde met		
vraagstukken		174
Dr. F. SCHUH, Opl. Vraagstukken KV in 1928		176
N. VAN DOOREN en J. J. RAIMOND, Natuurkunde voor voortgezet		
onderwijs		176
J. H. SCHOGT, Beginselen der vlakke meetkunde		285
J. H. SCHOGT, Oefeningen in de vlakke meetkunde		292
H. J. VAN VEEN, Beschrijvende meetkunde II		293
Dr. D. P. A. VERRIJP, Leerboek der Goniometrie en Vlakke		
Trigonometrie		294

Portretten van de Professoren

Dr. J. A. BARRAU, Dr. L. E. J. BROUWER, Dr. M. J. VAN UVEN,	
Dr. J. G. RUTGERS, Dr. W. VAN DER WOUDE.	

DR. E. J. DIJKSTERHUIS VAL EN WORP

Een bijdrage tot de geschiedenis der Mechanica van Aristoteles tot Newton.
468 blz. f7.50 gebonden f8.25

Val en worp bij Aristoteles en zijn Grieksche commentatoren.

Val en worp in de scholastiek.

Val en worp in de Italiaansche mechanica voor Galilei.

Galileo Galilei. — De verdere ontwikkeling van de theorieën van val en worp. De invloed van de theorieën van val en worp op het ontstaan der moderne dynamica.

Bewijspplaatsen en aantekeningen bij elk hoofdstuk.

Eine ausserordentliche Fülle des Interessanten für den Historiker, den Methodologen, Naturphilosophen und den Naturforscher enthält dieses Werk, das eine bedeutende geistige und wissenschaftliche Arbeitsleistung darstellt und den Verfasser und sein Land ehrt
H. DINGLER.

Mitt. z. Geschichte der Medizin und der Naturwissenschaften.

Wat hier geboden wordt is zonder twijfel het resultaat van jarenlange studie en nasporingen, beschreven op boeiende wijze, klaar en bezonken, vaak met geheel nieuwe opinies over historische bijzonderheden, steeds tot verder lezen uitlokkende. Al zou men het alleen lezen om levenslang zijn lessen op school met betrouwbare historische bijzonderheden te kruiden (onbetrouwbare kennen we allemaal bij de vleet), dan was het reeds waard gekocht te worden.
J. BRUIN in *Christ. Midd. Ond.*

PROF. DR. HK. DE VRIES DE VIERDE DIMENSIE

Een inleiding tot de vergelijkende studie der verschillende meetkunden.

2de vermeerderde en verbeterde druk Gebonden f3.90

Een Duitse vertaling van dit werk, van de hand van Frau Dr. Ruth Struik, verscheen in de bekende serie „Wissenschaft und Hypothese“, uitg. B. G. Teubner, Leipzig.

Voor dengene, die zich voor deze kwestie interesseert, is het boek van Prof. de Vries ten zeerste aan te bevelen. Ik ken op dit gebied geen ander werk, waar dergelijke moeilijke kwesties op zoo onderhoudende wijze aan den lezer „verteld“ worden. Een ieder zal veel uit dit werk leeren en degene, die zich in de relativiteit wil verdiepen, heeft zoo'n werk over niet-Euclidische meetkunde broodnoodig.
Maasbode. Dr. JOS. TER HEERDT.

PROF. DR. HK. DE VRIES HISTORISCHE STUDIËN I

Onderwerpen uit de geschiedenis der wiskunde, waardevol voor het onderwijs.

192 blz. gebonden f3.25

Inleiding. Geschiedenis van de stellingen van Pascal en Brianchon. Over Jacob Steiner's: „Die geometrischen Constructionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises, als Lehrgegenstand auf höheren Unterrichts-Anstalten und zur praktischen Benutzung.“ Over de stelling van Menelaos. Mascheroni. Over Archimedes' „Methodenleer der Mechanische leerstellingen.“ John Napier en de eerste logaritmenlafels. De „Geometrie“ van Descartes en de „Isagoge“ van Fermat.

Deze studiën lokken door hun heldere voorstelling tot lezen, en het lezen wordt bestudeeren, en het bestudeeren is rijk genot. *De Nederlander.*

Het is uiterst interessant wat de stof betreft en gesteld in den stijl die eigen is aan zijn schrijven: nooit droog of dogmatisch, immer aantrekkelijk en zwierig, ja hier en daar gekruid met rake opmerkingen of opgewekt door een humor, die trouwens aan den ernst volstrekt geen afbreuk doet.

Wis- en Natuurr. Tijdschrift.

P. NOORDHOFF - GRONINGEN

Zoo juist verscheen :

LEERBOEK DER BESCHRIJVENDE MEETKUNDE

door

Prof. H. J. v. VEEN

DEEL II

Oppervlakken en Ruimtekrommen. Aanhangsel (Pooltheorie en Meetk. Verwantschappen)

Prijs gebonden met afzonderlijke atlas f 7.75

Vroeger verscheen :

DEEL I — PROJECTIEMETHODEN AANHANGSEL (KEGELS NEDEN)

Prijs gebonden met afzonderlijke atlas f 6.90

Verschenen :

Historische Bibliotheek voor de Exacte Wetenschappen

ONDER LEIDING VAN

Dr. E. J. DIJKSTERHUIS en Dr. H. J. E. BETH

DEEL I De Elementen van Euclides, I, door

Dr. E. J. DIJKSTERHUIS

DEEL II Inleiding in de Niet-Euclidische Meetkunde op-
historischen grondslag, door Dr. H. J. E. BETH.

Bij intekening voor twee deelen:

gebonden à f 3.90. Afzonderlijke prijs f 4.50

UITGAVEN VAN P. NOORDHOFF TE GRONINGEN