DE ONTDEKKING VAN HET TAUTOCHRONISME DER CYCLOIDALE VALBEWEGING

EEN BIJDRAGE TOT DE 300e HERDENKING VAN DEN GEBOORTEDAG VAN CHRISTIAAN HUYGENS OP 14 APRIL 1929.

DOOR

E. J. DIJKSTERHUIS.

§ 1. In het tweede deel van zijn *Horologium Oscillatorium* bewijst Huygens de beroemde, door hem ontdekte stelling, dat een holle cycloïde-boog met verticale as tautochrone is voor de valbeweging, d.w.z. dat de tijd, waarin een stoffelijk punt vanuit een willekeurig punt van de kromme in val uit rust neerdaalt tot het laagste punt, van de keuze van het uitgangspunt onafhankelijk is [1]). De groote waarde van deze, door Huygens zelf op hoogen prijs gestelde vondst [2]), is zoowel van practisch als van theoretisch standpunt uit duidelijk. Ze vormde in zekeren zin een afsluiting en bekroning van de leer der natuurlijk versnelde beweging, waarvan Galilei's *Discorsi* de fundamenten wereldkundig hadden gemaakt [3]) en ze stelde Huygens in staat, aan het slingeruurwerk, waarvan hij de constructie met onverflauwden ijver trachtte te verbeteren, de wijziging aan te brengen, die den regelmatigen gang van den slinger in zoo hooge mate zou bevorderen, de vervanging namelijk van de vóór dien tijd slechts op empirische gronden gekozen

[1]) Christiani Hugenii Zulechemii, dum viveret Zelemii Toparchae, *Opera Varia.* Volumen Primum. Lugdunum Batavorum, apud Janssonios van der AA, Bibliopolas. MDCCXXIV. *Horologium Oscillatorium, sive de motu pendulorum, ad horologia aptato, demonstrationes Geometricae.* Pars secunda. *De descensu Gravium et motu eorum in Cycloide.* Prop. XXV. pag. 87.

[2]) In een brief van 6 Dec. 1695 aan Fr. van Schooten zegt Huygens van zijn ontdekking: mihi quidem omnium felicissima videtur in quas unquam inciderim. *Oeuvres Complètes* de Christiaan Huygens. II (1889), 522.

[3]) In de voorrede van het *Horologium Oscillatorium,* Ed. cit. pag. 30, zegt Huygens zelf, dat het voornaamste doel van het werk bestaat in .... promovere ulterius viri maximi Galilei de descensu gravium doctrinam, cujus fructus desideratissimus, atque apex veluti summus, haec ipsa quam invenimus cycloidis est proprietas. Deze voorstelling is natuurlijk eenigszins eenzijdig. Voor Calilei zelf is in de *Discorsi* de fructus desideratissimus veeleer de brachistochrone voor de valbeweging. Zie *Discorsi,* Giorn, III, Ed. Naz. VIII, Prop.

gebogen plaatjes [4]), waar de slinger zich heen en teruggaand tegenaan legt, door de zuiver te construeeren cycloïdale lamellen [5]).

Wanneer men nu, het *Horologium Oscillatorium* bestudeerende, tracht door te dringen in den gedachtengang, die Huygens tot zijn ontdekking kan hebben geleid, ondervindt men dezelfde moeilijkheid, die het bij de lectuur van mathematische geschriften in het algemeen al bezwaarlijk en in het bijzondere geval van Grieksche of naar Griekschen trant ingekleede bewijsvoeringen in den regel vrijwel onmogelijk maakt, het ontstaan der ontdekking als het ware nog eens opnieuw te beleven: de schrijver zet niet uiteen, hoe het inzicht, waarvan hij ons de resultaten schenkt, hemzelf ten deel viel, maar hij geeft het achteraf kunstig ineengezette systematische betoog, dat ons zal dwingen, de waarheid dier resultaten te erkennen. Zoo ook hier. De volledige behandeling van het cycloïdale tautochronisme eischt, nadat de algemeene theorie van den val in de verticaal en langs hellende vlakken is ontwikkeld, het bewijs van niet minder dan 15 proposities, waaronder een der belangrijkste met behulp van een zeer gecompliceerde reductio ad absurdum moet worden aangetoond en, hoe onwrikbaar hierdoor ook ten slotte de juistheid der bewering vast komt te staan, men blijft bewonderend het vernuftige bouwsel van buiten af beschouwen, zonder te kunnen inzien, hoe de schrijver er toe gekomen is, het zoo ineen te zetten.

Een enkele maal echter stelt een gelukkig toeval ons in staat, een dieperen blik te slaan in de gedachtenwerkplaats van de genieën der wetenschap, dan zij ons in den regel zelf willen gunnen. Zoo heeft de ontdekking van *Ephodos*-manuscript door Heiberg in 1906 een te voren onvermoed inzicht verschaft in de wordingsgeschiedenis van enkele beroemde stellingen van Archimedes, de publicatie van de kladpapieren van Galilei de verbazingwekkend irrationeele wijze onthuld, waarop later zoo redelijk schijnende vondsten vaak worden gedaan en de ontcijfering van de dagboeken van Gauss een waren schat van historische kennis aan het licht gebracht over het ontstaan van tal van zijn meest geniale ontdekkingen.

---

[4]) Brief van 1 Nov. 1658 aan P. Petit. *Oeuvres* II (1889), 271 .... je suspendois du commencement le pendule entre deux platines que l'experience m'apprit de quelle maniere et combien je devois plier, pour esgaler entre eux les coups des plus larges jusqu'aux plus menus.

[5]) *Horologium Oscillatorium*. Ed. cit. pag. 39 seq.

Een soortgelijk toeval is het nu ook, dat ons in staat stelt, hier enkele nadere bijzonderheden mee te deelen over de wijze, waarop Huygens tot zijn ontdekking van het tautochronisme der cycloïdale valbeweging gekomen is. In de nog onuitgegeven manuscripten van zijn hand, die in de Universiteitsbibliotheek te Leiden worden bewaard en waarvan de monumentale Huygens-uitgave van de Hollandsche Maatschappij van Wetenschappen te zijner tijd de volledige en verzorgde publicatie zal brengen, komen verschillende aanteekeningen voor uit het jaar 1659, waarin we het doen van de bedoelde ontdekking van zoo nabij kunnen meebeleven, als slechts zelden bij een historisch onderzoek mogelijk is en waarin we bovendien de verschillende phasen kunnen vervolgen, die het bewijs der gevonden eigenschap heeft doorloopen, voordat het den onberispelijken vorm aannam, waarin we het in het *Horologium Oscillatorium* aantreffen.

We zullen in het volgende een deel van deze aanteekeningen zoo getrouw mogelijk weergeven en ze voorzien van een letterlijke vertaling en van de noodige toelichting [6]).

§ 2. Op fol. 72 recto van het manuscript *Chartae Mechanicae* [7]) vindt men een tamelijk verwarde verzameling van figuren, berekeningen en redeneeringen, die voor een deel weer zijn doorgeschrapt. Wat is blijven staan, blijkt alles betrekking te hebben op eenzelfde probleem, op de vraag namelijk naar den tijd, besteed aan val uit rust langs een cirkelboog in een verticaal vlak [8]). We laten het geheel hier in ordelijke rangschikking volgen.

Boven aan het blad vindt men den datum 1 December 1659; daarnaast in den rechterbovenhoek:

---

[6]) Bij de vertalingen is uitsluitend gestreefd naar zooveel mogelijk letterlijke weergave van den tekst, niet naar sierlijkheid of zelfs naar duidelijkheid. Een vertaling mag geen interpretatie willen zijn; zij is slechts de onvermijdelijke concessie aan het gemis van klassieke ontwikkeling bij menigen lezer. Zij moet daarom trachten, niets anders te doen, dan het bezwaar der vreemde taal weg te nemen en ze moet daarom het origineel zóó nauw op den voet volgen, dat het haar plicht is, onbeholpen of onduidelijk te zijn, wanneer het den schrijver heeft behaagd, zich onbeholpen of onduidelijk uit te drukken.

[7]) Een photographie van deze bladzijde vindt men aan den aanvang van dit artikel gereproduceerd.

[8]) Het is niet waarschijnlijk, dat deze probleemstelling reeds verband houdt met de constructie van het slingeruurwerk. Immers Huygens wist reeds lang, dat de enkelvoudige slinger niet isochroon slingert, zooals Galilei *(Discorsi,* Giorn. I, Ed. Naz. VIII, 128) had gemeend. Zie b.v. den geciteerden brief van 1 Nov. 1658. *Oeuvres* II (1889), 271.

Fol. 72 recto Quaeritur quam rationem habeat tempus minimae oscillationis penduli ad tempus casus perpendicularis ex penduli altitudine.

Gevraagd wordt, welke verhouding de tijd van een zeer kleine schommeling van een slinger heeft tot den tijd van loodrechten val uit de hoogte van den slinger.

en links boven:

Hinc data fuit occasio inventi de Cycloide.

Hierdoor is aanleiding gegeven tot de ontdekking over de Cycloïde.

Hierna volgt de figuur, die we hier op grootere schaal en in meer correcte uitvoering weergeven.

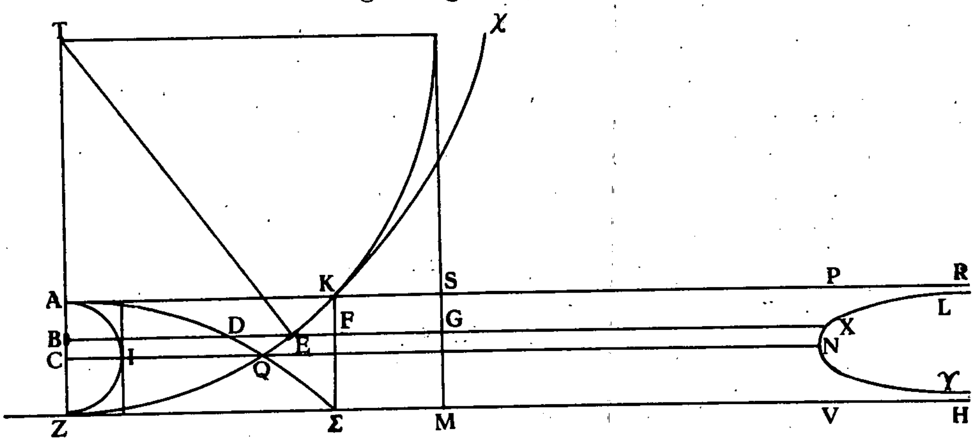


Fig. 1. *)

T is het middelpunt van een cirkel door Z; K en E zijn willekeurige punten op dien cirkel, $AQ\Sigma$ is eén parabool met top A door Σ, waarbij $Z\Sigma = AK$. $ZK\aleph$ is eén parabool, congruent met $AQ\Sigma$, waarvan wordt aangenomen, dat hij van Z tot K met den cirkelboog samenvalt.

De figuur wordt hieronder nader toegelicht. Naast de figuur leest men:

Tempus per particulam E, ex K cadentis, est ad tempus per particulam B cum celeritate ex AZ in ratione composita ex longitudine E ad B, hoc est ex ratione TE sive GB ad EB, et ex ratione ZΣ sive BF ad BD†) quae ratio comp[a]. est quae ▭ GBF ad ▭ EBD.

De tijd over een deeltje E van een uit K vallend punt staat to den tijd over het deeltje B met een snelheid [verkregen door val] over AZ in een reden, samengesteld uit die van de lengte E tot B, dat is uit de reden van TE of GB tot EB en uit de reden van ZΣ of BF tot BD. Welke samengestelde reden die van ▭ GBF tot ▭ EBD is.

*) De letter, die op hoogte van T bij de kromme ZQK... staat, is bedoeld als $\aleph$.

†) In het ms. Δ.

Huygens vergelijkt dus den valtijd t_E over een zeer klein deeltje van den cirkelboog bij E (dat als een recht lijnstukje wordt beschouwd) in de valbeweging langs den cirkelboog uit rust in K met den tijd, besteed aan het doorloopen van de projectie op TZ van het beschouwde lijnstuk in een eenparige beweging, waarvan de snelheid gelijk is aan de eindsnelheid van een val uit rust in A van A tot Z. Stellen we de lengtes der beschouwde lijnstukjes resp. voor door p_E en p_B en de bedoelde snelheden door V_E en V_Z, dan is

$$\frac{t_E}{t_B} = \frac{p_E}{p_B} \cdot \frac{V_Z}{V_E} = \frac{TE}{BE} \cdot \frac{Z\Sigma}{BD}$$

waarin $Z\Sigma$ en BD resp. de bij Z en B behoorende ordinaten zijn van de parabool $AD\Sigma$ met top A. Immers volgens bekende stellingen is de snelheid V_E gelijk aan de snelheid in B bij val uit rust in A [9]), welke snelheid zich tot V_Z verhoudt als de tijd, in dien val aan AB besteed, tot den tijd over AZ [10]). De wegen AB en AZ zijn met de quadraten dier tijden evenredig [11]), dus met de quadraten der beschouwde snelheden en deze laatste verhouden zich dus zelf als de ordinaten van een parabool, die AZ tot as heeft [12]). Wordt deze parabool nu zoo gekozen, dat $Z\Sigma = AK$ (van welke afspraak de beteekenis hieronder zal blijken), dan vinden we

$$\frac{t_E}{t_B} = \frac{GB \,.\, BF}{EB \,.\, BD} \tag{1}$$

wat aangeduid wordt door

$$\frac{t_E}{t_B} = \frac{\square GBF}{\square EBD}.$$

De tekst gaat als volgt voort:

ut $\square$ EBD ad $\square$ FBG ita BF ad BX, unde ut omnes BX ad omnes BF ita tempus per KZ ad tempus per AZ cum celeritate ex AZ.	als $\square$ EBD tot $\square$ FBG, zoo BF tot BX, zoodat, zooals alle BX tot alle BF zoo de tijd over KZ tot den tijd over AZ met snelheid [verkregen door val] over AZ.

9) Dit is door Huygens afgeleid uit Galilei's postulaat der gelijke eindsnelheden (*Discorsi,* Giorn. III, Ed. Naz. VIII, 205) door den cirkelboog te beschouwen als bestaande uit oneindig veel rechte lijnstukjes. (zoo ook later in *Horologium Oscillatorium,* Pars II, Prop. VIII. Ed. cit. pag. 65).

10) Galilei, *Discorsi,* Giorn. III. Ed. Naz. VIII, 198.

11) ibidem, Prop. II, Ed. Naz. VIII, 209.

12) Apollonius, *Conica* I, ll. ed. J. L. Heiberg. Lipsiae (Teubner). 1891, I 36 seq.

Et tempus per KZ ad tempus per AZ* ut spatium infinitum [13]) ASPRLNYHVMZA ad 2 ▭ KZ.

En de tijd over KZ tot den tijd over AZ* als het oneindige oppervlak [13]) ASPRLNYHVMZA tot 2 ▭ KZ.

* tempus per AZ est aequale tempori motus aequabilis per AZ cum $^1/_2$ celeritate ex AZ.

* de tijd over AZ is gelijk aan den tijd van de eenparige beweging over AZ met de halve snelheid [verkregen door val] over AZ.

Uit deze regels blijkt, dat het middel, waardoor Huygens zijn doel wil bereiken, bestaat uit de toepassing van de befaamde methode, die in de ontwikkeling zoowel van de wiskunde als van de mechanica steeds zulk een groote rol heeft gespeeld, de methode namelijk waarbij men een continuum opvat als som van continua, die één dimensie minder hebben en die i.h.a. indivisibilia kunnen worden genoemd, al hebben ze dien naam historisch slechts in enkele gevallen gevoerd. Het is de methode, die in de Grieksche wiskunde van het klassieke tijdperk als heuristisch hulpmiddel in eere is geweest [14]), hoewel ze streng werd geweerd uit de definitieve bewijzen, zooals de gepubliceerde werken ze bevatten; haar beteekenis in latere periodes van ontwikkeling der wiskunde kunnen we hier niet schetsen; om haar rol in de geschiedenis der mechanica te doen inzien, zal het voldoende zijn, er aan te herinneren, dat ze ten grondslag ligt aan de fundamenteele onderzoekingen over de valbeweging in Galilei's *Discorsi* [15]).

Huygens wil nu dit beginsel der indivisibilia toepassen om de tijden, die aan verschillende bewegingen besteed zijn, te vergelijken. Zooals hij den cirkelboog KZ beschouwt als som van een oneindig groot aantal kleine deeltjes E (die wel als boogjes worden ingevoerd en als rechte lijnstukjes worden beschouwd, maar waaraan, op straffe van de noodzaak, aan den cirkelboog KZ een oneindige lengte toe te kennen, geen afmeting kan worden toegekend en die dus eigenlijk, hoewel dit ook niet kan, punten zijn [16]), zoo is

[13]) Hiermee wordt niet bedoeld, dat het oppervlak geen eindige grootte zou hebben, maar slechts, dat het zich tot in het oneindige uitstrekt.

[14]) Dit is gebleken door de ontdekking van den *Ephodos* van Archimedes. Archimedis *Opera Omnia cum commentariis Eutocii* iterum edidit J. L. Heiberg. Lipsiae (Teubner). 1913. *De Mechanicis propositionibus ad Eratosthenem Methodus.* II, 425—507.

[15]) Galilei, *Discorsi,* Giorn. III, Prop. II. Ed. Naz. VIII, 208.

[16]) In deze woorden is kort de onverbiddellijke kritiek samengevat, die Zenoon van Elea op de methode der indivisibilia heeft uitgeoefend. Zie E. J. Dijksterhuis, *De Elementen van Euclides.* Groningen (Noord-

de tijd, besteed aan de beweging over KZ, voor hem eenvoudig de som van de oneindig vele oneindig kleine tijden, die voor het doorloopen der particulae E noodig zijn en — door een hernieuwde toepassing van het theoretisch onhoudbare en practisch vruchtbare principe — de meetkundige voorstelling van dien totalen tijd het oppervlak, dat gevormd wordt door de ordinaten, die de tijdselementen aangeven. Die ordinaten zijn de lijnen BX, waarmee wegens de afspraak

$$\frac{\square \mathrm{EBD}}{\square \mathrm{FBG}} = \frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{BX}} \tag{2}$$

in verband met (1) de tijden over de particulae E evenredig zijn. Dat hij uit

$$\frac{t_E}{t_B} = \frac{\mathrm{BX}}{\mathrm{BF}}$$

onmiddellijk concludeert tot: $\frac{\text{omnes BX}}{\text{omnes BF}} = \frac{t_{KZ}}{t_{AZ}}$

is daarbij hierdoor te motiveeren, dat men de opvolgende elementen p_B onderling gelijk kan denken, zoodat t_B, evenals BF, een constante is. Men heeft dus, sommeerend over de deeltjes E van K tot Z

$$\text{Omnes } t_E = \frac{t_B}{\mathrm{BF}} \,.\, \text{Omnes BX}$$

terwijl

$$\frac{t_B}{\mathrm{BF}} = \frac{\text{Omnes } t_B}{\text{Omnes BF}}.$$

Hierdoor wordt

$$\frac{\text{Omnes } t_E}{\text{Omnes } t_B} = \frac{t_{KZ}}{t_{AZ}} = \frac{\text{Omnes BX}}{\text{Omnes BF}} = \frac{\text{Opp. A..R..N..H..ZA}}{\square \mathrm{KZ}}.$$

en, in verband met den z.g. regel van Oresme [17]), als t'_{AZ} den valtijd over AZ aanduidt:

$$\frac{t_{KZ}}{t'_{AZ}} = \frac{\text{Opp. A..R..N..H..ZA}}{2 \square \mathrm{KZ}} \tag{3}$$

---

hoff). 1929. I, 41—55. Ook kan men raadplegen H. Hasse und H. Scholz, *Die Grundlagenkrisis der Griechischen Mathematik*. Pan—Bücherei, Gruppe: Philosophie, Nummer 3. Charlottenburg (Pan—Verlag). 1928.

17) Dit is de stelling, volgens welke de weg in een eenparig veranderlijke beweging in zekeren tijd afgelegd, gelijk is aan den weg, in denzelfden tijd afgelegd in een eenparige beweging, waarvan de snelheid gelijk is aan de snelheid van de veranderlijke beweging op het middelste oogenblik van den beschouwden tijd. Over den naam zie E. J. Dijksterhuis, *Val en Worp, Een bijdrage tot de geschiedenis der Mechanica van Aristoteles tot Newton. Groningen* (Noordhoff). 1924; pag. 105.

Van de verspreid staande berekeningen vermelden we eerst:

$$CO - CG - CF - CN\,†) \qquad CO \propto \tfrac{1}{2}\,CF$$

$$\text{ergo } CN \propto 2\,BG.$$

Men moet hierbij de letters F en G blijkbaar als „loopende" letters opvatten: komt E in Q en dus B in C (midden van AZ), dan duiden F en G weer de snijpunten van CQ met KΣ resp. SM aan. We hebben dan wegens (2):

$$\frac{CQ^2}{CF\,.\,CG} = \frac{CF}{CN}$$

met $$CQ^2 = \tfrac{1}{2}\,Z\Sigma^2 = \tfrac{1}{2}\,CF^2$$

waaruit volgt: $$CN = 2\,CG.$$

De nieuw optredende grootheid $\frac{1}{2}$ CF wordt volgens een gewoonte, die we Huygens telkens zullen zien volgen, door een nieuw lijnstuk CO voorgesteld.

Iets lager vinden we

$$* \; CF \qquad CN \propto 2\,BG \qquad CI$$

$$\sqrt{2bc} \;——\; 2b \;——\; \tfrac{1}{2}c \;\Big/\; \frac{bc}{\sqrt{2bc}} \text{ sive } \sqrt{\tfrac{1}{2}bc} \qquad (4)$$

Sit AZ $\propto c$

ZM, TZ $\propto b$.

hoc est ipsa CO $\propto \frac{1}{2}$ CF.

* consideratur AK applicata in circumf.^m tanquam aequalis applicatae in parabola ZKℵ, cujus $^1/_2$ lat. rectum TZ, cui eadem est parabola AQΣ. hoc est supponitur AK $\propto$ ZΣ.

* AK, ordinaat van den cirkelomtrek, wordt beschouwd als gelijk aan de ordinaat in de parabool ZKℵ, waarvan het halve latus rectum TZ is, waarmee de parabool AQΣ identiek is. Dat is: er wordt ondersteld AK = ZΣ.

Huygens gaat hier dus tot een benadering over, hierin bestaande, dat hij den cirkelboog KZ samenvallend denkt met den boog KZ van een parabool ZKℵ die Z tot top, ZT tot as en de middellijn van den cirkel T als latus rectum heeft. (Modern gesproken, komt dit hier op neer, dat hij de parabool ZKℵ in de buurt van den top laat samenvallen met den kromtecirkel van de parabool in den top. Men heeft dus

$$Z\Sigma^2 = 2\,TZ.\,AZ$$

terwijl exact geldt: $$AK^2 = (2\,TZ - AZ)\,AZ.$$

De bedoelde benadering komt nu hierop neer, dat $Z\Sigma = AK$ gesteld wordt, welke gelijkheid van den aanvang af gebruikt is.

Het is overigens niet duidelijk, wat de bedoeling van de even-

†) Dit beduidt: CO : CG = CF : CN.

HISTORISCHE BIBLIOTHEEK VOOR DE EXACTE WETENSCHAPPEN.

De groeiende belangstelling in de historische ontwikkeling der wis- en natuurkundige wetenschappen, die in onzen tijd zoowel in de kringen van het Hooger als in die van het Gymnasiaal en Middelbaar Onderwijs valt waar te nemen, wordt in hare volledige ontwikkeling belemmerd, doordat in den regel noch in het onderwijs aan onze Universiteiten en Hoogescholen, noch in de gangbare leer- en handboeken aan de wetenschapsgeschiedenis voldoende aandacht wordt geschonken. Wij hebben gemeend, een bescheiden poging te moeten doen, in deze leemte eenigszins te helpen voorzien en hebben daartoe het plan ontworpen, een Historische Bibliotheek voor de Exacte Wetenschappen uit te geven, die in deeltjes van beknopten omvang monographieën over historisch belangrijke onderwerpen, biographieën van groote onderzoekers en toegelichte uitgaven van klassieke werken en verhandelingen zal brengen.

Gelukkig vonden wij den heer Noordhoff bereid, om het werk, dat hij reeds sedert vele jaren heeft gedaan in het belang der mathematische wetenschappen en dat hij sinds kort begonnen is te doen in dat der physische, uit te breiden op het gebied van de geschiedenis van beide. Wij betuigen hem onzen dank en onze hulde voor dit nieuwe blijk van zijn ondernemingsgeest en van zijn vertrouwen in den ernst, waarmee in Nederland de studie der wis- en natuurkunde wordt bedreven.

Ter inleiding van de nieuwe uitgave laten wij thans een nadere uiteenzetting volgen van het doel, dat ons voor den geest staat en van de middelen, waardoor wij het willen bereiken.

Het streven naar historische ontwikkeling als onmisbaar bestanddeel van een wetenschappelijke vorming op mathematisch-physisch gebied kan voort komen uit motieven van verschillenden aard, die echter in hoofdzaak in tweeën te onderscheiden zijn: het eerste is de wensch naar reconstructie van verleden tijdperken uit de geestesgeschiedenis der menschheid, die den met historischen aanleg begiftigde ook dan belangstelling inboezemt, wanneer er geenerlei verband is aan te toonen tusschen de gedachtenwereld, die hij onderzoekt en die, waarin zich het huidige wetenschappelijke denken beweegt; het tweede de behoefte, de tegenwoordige structuur der wis- en natuurkundige wetenschappen te zien, niet als een in den tijd geïsoleerd en voor ons uitsluitend belang hebbend verschijnsel, maar als een phase in de ontwikkeling van een geleidelijk wordingsproces, om daardoor eenerzijds het inzicht in de tegenwoordige denkwijzen te verdiepen en anderzijds beter de onoverzienbare beteekenis te beseffen, die deze wetenschappen voor de West-Europeesche cultuur bezitten.

Wij meenen niet ver mis te tasten, wanneer wij onderstellen, dat het tweede motief in onzen tijd in veel hoogere mate werkzaam is, dan het eerste; wij beleven een periode van bezinning op het wonderlijke proces, dat zich in ons voltrekt, wanneer wij het tooverwerktuig der mathesis hanteeren, een periode van omwenteling in onze meest fundamenteele begrippen over ruimte, tijd en materie en over de wijze, waarop wij de natuurverschijnselen met behulp van die begrippen trachten te beschrijven en wij worden door de problemen, die daarbij rijzen, telkens weer geprikkeld tot de vraag, hoe toch al onze denkwijzen, onze begrippen, onze termen zijn gegroeid tot den staat, waarin wij ze thans met verwondering, twijfel en kritiek zien verkeeren.

Zonder nu ook maar in het minst het bestaansrecht der eerst geschetste, zuiver historische, opvatting der wetenschapsgeschiedenis in twijfel te willen trekken, meenen wij goed te doen bij den opzet onzer Historische Bibliotheek in de eerste plaats met het tweede der boven onderscheiden motieven rekening te houden en dus onderwerpen ter behandeling te kiezen, waarvan de problemen nog in onzen tijd actueel zijn of waarvan de historische invloed zoo machtig is geweest, dat het voor het volledig begrip van de huidige structuur der wetenschap noodzakelijk is, er kennis van te nemen. Beide gezichtspunten komen reeds tot uiting in de keuze der deelen, waarmee de reeks zal worden geopend; in het eerste daarvan geeft de eerste ondergeteekende het eerste deel van een studie over en een bloemlezing uit de Elementen van Euclides, die in onzen tijd de aandacht trekken als oudst bewaard gebleven poging tot axiomatiseering der wiskunde en die daarnaast op de bewijsmethoden en de terminologie der elementaire wiskunde een onuitwischbaren stempel hebben gedrukt, terwijl het tweede, van de hand van den tweeden ondergeteekende, een inleiding in de voor de moderne ontwikkeling der wis- en natuurkunde zoo uiterst belangrijke Niet-Euclidische Meetkunde op historischen grondslag bevat.

Legden wij in het bovenstaande vooral den nadruk op de waarde, die naar onze meening kan worden gehecht aan historische ontwikkeling als bestanddeel van wetenschappelijke vorming, niet minder belangrijk achten wij haar invloed in de voorbereiding op en de uitoefening van het ambt van docent, dat een groot deel van de studeerenden in wis- en natuurkunde geroepen is te vervullen. Niet alleen, omdat de wijze, waarop een docent zijn ambt bekleedt, nauw samenhangt met zijn wetenschappelijke ontwikkeling, maar ook, omdat vertrouwdheid met de historie van het vak, dat hij doceert, een hulpmiddel kan zijn bij de oplossing van de didactische moeilijkheden, die hij daarbij ondervindt.

Men versta dit niet aldus, dat wij zouden willen aanbevelen, om van het onderwijs steeds een soort copie van den historischen groei der gedoceerde wetenschap te maken. Er zijn gevallen, waarin het zeer is aan te bevelen, den leerling de phasen van ontwikkeling te laten doorloopen, die het wetenschappelijk denken eens doorloopen heeft; er zijn andere, waarin het bepaald is af te raden. Men kan dus zeer zeker de historie steeds om raad vragen in didactische moeilijkheden, maar men moet er op voorbereid zijn, dat zij soms zal zeggen: doe het zoo; andere keeren met nadruk: doe het zoo niet; en dat zij er soms het zwijgen toe zal doen.

Dit neemt nu echter niet weg, neen, het sluit in, dat de docent in ieder geval de historie van zijn vak nauwkeurig moet kennen, niet, om haar overal, waar er maar aanleiding toe is, bij zijn onderwijs te pas te brengen, ook niet, omdat het zoo belangrijk is, met de chronologie van de wetenschapsgeschiedenis nauwkeurig op de hoogte te zijn, maar omdat de historie hem op mogelijkheden wijst, voor gevaren waarschuwt, fouten doet begrijpen, die eerst individueele gebreken van den leerling schijnen, maar die bij aandachtiger beschouwing zwakheden blijken te zijn, die inhaerent zijn aan het menschelijk denken, omdat ze de oude dingen plaatst in den glans van bekorende nieuwheid, die ze omgaf bij hun ontdekking en omdat ze, wat nu afgezaagde schoolsche kennis is, doet zien in zijn cultuurhistorische beteekenis.

Wij zouden ons gelukkig prijzen, indien wij door de uitgave van de Historische Bibliotheek iets in den hier aangeduiden zin ten behoeve van het onderwijs in wis- en natuurkunde konden doen.

Over de aanhangige plannen tot voortzetting der met de twee bovengenoemde deelen en met het tweede deel van het eerst aangekondigde aangevangen reeks kunnen we thans nog niets meedeelen; uit den aard der zaak hangt de kans op hun verwezenlijking in hooge mate af van den aftrek, dien de eerste deelen zullen vinden.

En hiermede bevelen wij de Historische Bibliotheek in de belangstelling van vak- en ambtgenooten aan.

E. J. DIJKSTERHUIS, Oisterwijk.
H. J. E. BETH, Deventer.

---

redigheid (4) is. Voorzoover wij hebben kunnen nagaan, wordt het gevonden resultaat: CF : CN = CI : CO nergens toegepast.

Men vindt nu verder

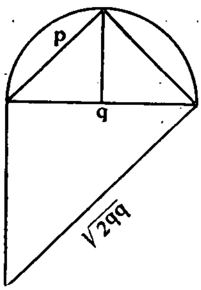


Fig. 2.

$$cII$$

$$p - q - \tfrac{1}{2} c \;\Big/\; \tfrac{1}{2}\,\frac{cq}{p} \tag{5}$$

$$\tfrac{1}{2} c - \sqrt{2bc} - \tfrac{1}{2}\,\frac{cq}{p} \;\Bigg/\; \frac{\left.\begin{array}{c}\dfrac{\text{aliud}\,\square\, q\sqrt{2\,bc}}{p}\\ 2\end{array}\right\} m}{\dfrac{2\,q\sqrt{2\,bc}}{p}} \tag{6}$$

CN

$$2b - \frac{2q}{p}\sqrt{2\,bc}$$

ita erit spatium infin. vertice N ad duplum $\square$ KZ, hoc est ita tempus per KZ ad tempus per AZ.

Zoo zal het oneindige oppervlak met top N staan tot het dubbele van $\square$ KZ, dat is: zoo de tijd over KZ tot den tijd over AZ.

Hier hebben we blijkbaar het voornaamste deel der redeneering. We interpreteeren als volgt: in de figuur komt, behalve de kromme A . . R . . N . . H . . ZA met top N nog een andere soortgelijke kromme voor, die haar top in I heeft en die eveneens asymptotisch nadert tot AR en ZH. Over deze kromme zullen we nadere bijzonderheden aantreffen op fol. 73 recto, waaraan we bij voorbaat het volgende ontleenen. Ze ontstaat (fig. 3) door voor elk punt B van AZ een ordinaat Bβ te construeeren, die met de cirkelordinaat Bα samenhangt door de betrekking Bα : Bδ = Bδ : Bβ, waarin Bδ = CI.

Het oppervlak O_2, begrensd door de verkregen kromme, de asymptoten en de lijn AZ

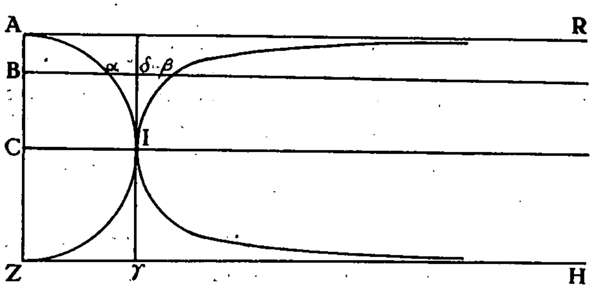


Fig. 3.

verhoudt zich tot dat van den rechthoek Aγ als de omtrek p van den halven cirkel staat tot diens middellijn q (over het bewijs van deze stelling zie men bij fol. 73 recto).

Noemen we nog het vroeger reeds vermelde oppervlak A .. R .. N .. H .. ZA : O_1, dan kunnen we de redeneering als volgt reconstrueeren:

De overeenkomstige ordinaten BX en Bβ van de twee beschouwde krommen hebben een constante verhouding. Immers uit

$$\frac{BX}{BF} = \frac{BF \,.\, BG}{BE \,.\, BD} \text{ en } \frac{B\beta}{B\delta} = \frac{B\delta}{B\alpha}$$

volgt

$$\frac{BX}{B\beta} = \frac{BF^2 \,.\, BG \,.\, B\alpha}{BE \,.\, BD \,.\, B\delta^2}.$$

Nu is

$$\frac{BE \,.\, BD}{CQ^2} = \frac{BE}{CQ} \cdot \frac{BD}{CQ} = \frac{\sqrt{BZ \,.\, BA}}{ZC} = \frac{B\alpha}{B\delta}$$

zoodat

$$\frac{BX}{B\beta} = \frac{BF^2 \,.\, BG}{CQ^2 \,.\, B\delta}, \text{ dus constant.}$$

De waarde van die constante verhouding vindt men in eenvoudigeren vorm, door B in C te kiezen. Zij blijkt dan te zijn

$$\frac{CN}{CI}.$$

Hieruit wordt nu afgeleid

$$\frac{O_1}{O_2} = \frac{CN}{CI}.$$

Wij zouden nu in moderne schrijfwijze als volgt verder gaan:

$$\frac{O_1}{2 \,\Box\, KZ} = \frac{O_1}{O_2} \cdot \frac{O_2}{\Box\, AJ} \cdot \frac{\Box\, AJ}{2 \,\Box\, KZ}$$

en hieruit voor de gevraagde verhouding vinden:

$$\frac{CN}{CI} \cdot \frac{p}{q} \cdot \frac{CI}{2\,CF} = \frac{p \,.\, CN}{2\,q\sqrt{2\,bc}}.$$

Huygens, zich streng houdend aan de regels der klassieke redentheorie, berekent eerst de verhouding

$$\frac{O_1}{\Box\, AJ} \text{ uit } \frac{O_1}{O_2} = \frac{CN}{CI} \text{ en } \frac{O_2}{\Box\, AJ} = \frac{p}{q}$$

door de eerste dezer evenredigheden te herleiden tot een vorm, waarin de vierde term p is. Hij maakt dus

$$\frac{p}{q} = \frac{CI}{C\Pi} \quad \text{(de boven vermelde evenredigheid (5))}$$

en kan nu door de z.g. conclusio ex aequo [18]) besluiten tot

$$\frac{O_1}{\square AJ} = \frac{CN}{C\Pi}$$

Om dit te kunnen combineeren met

$$\frac{\square AJ}{\square KZ} = \frac{CI}{CF}$$

moeten we weer stellen

$$\frac{CI}{CF} = \frac{C\Pi}{\varphi}$$

(d. i. de evenredigheid (6), waarin de vierde term φ rechtstreeks berekend wordt op $\dfrac{q\sqrt{2\,bc}}{p}$.

Men vindt nu eveneens

$$\frac{O_1}{2\square KZ} = \frac{CN}{\frac{2q}{p}\sqrt{2\,bc}}. \qquad (7)$$

De hiermee toegelichte redeneering voert nu spoedig tot het doel:

sed tempus per AZ est ad tempus per TZ ut $\sqrt{2bc}$ ad $\sqrt{2bb}$; hoc est ut $\frac{2q}{p}\sqrt{2bc}$ ad $\frac{2q}{p}\sqrt{2bb}$. Ergo ex aequo tempus per KZ arcum ad tempus per TZ ut $2b$ ad $\frac{2q}{p}\sqrt{2bb}$ sive ut $b - \frac{q}{p}\sqrt{2bb}$. hoc est ut $p - \sqrt{2qq}$. hoc est ut quadrans circumferentiae ad suam subtensam.

maar de tijd over AZ staat tot den tijd over TZ als $\sqrt{2bc}$ tot $\sqrt{2bb}$. dat is als $\frac{2q}{p}\sqrt{2bc}$ tot $\frac{2q}{p}\sqrt{2bb}$. Dus ex aequo de tijd over den boog KZ tot den tijd over TZ als als $2b$ tot $\frac{2q}{p}\sqrt{2bb}$ of als b tot $\frac{q}{p}\sqrt{2bb}$. dat is als p tot $\sqrt{2qq}$. dat is als het vierde deel van een cirkelomtrek tot zijn koorde

Hiermee is het aanvankelijk gestelde probleem bij benadering opgelost. Wanneer het hierbij gebleven was, zouden we een vernuftige behandeling van een vraagstuk hebben leeren kennen, waarvan de mathematische beheersching voor de wiskunde der 17e eeuw onbereikbaar was en er zou nauwelijks aanleiding hebben bestaan, ons er zoo uitvoerig in te verdiepen. Thans komt echter ineens in een opmerking aan den voet der bladzijde de lichtflits der geniale intuïtie:

Quum AZ pro arbitrio sumta sit, fiatque semper tempus per KZ ad tempus per TZ ut p ad $\sqrt{2qq}$.

Daar AZ naar willekeur is genomen en de tijd over KZ steeds tot den tijd over TZ staat als p

---

[18]) Δι' ἴσου. Euclides V, 22.

ponendo nempe puncta K et E esse in parabola cujus vertex Z. ½ lat. rectum TZ, hinc vidi opus esse, si curvam volimus per cujus arcus quosvis in Z terminatos, tempora descensus sint aequalia, ut sit ejus naturae, ut quemadmodum ET curvae perpendicularis ad applicatam EB, ita faciendo rectam datam ut GB ad aliam EB, cadat punctum E in parabolam vertice Z. Hoc autem Cycloidi convenire inveni ex cognita tangentis ducendae ratione.

tot $\sqrt{2qq}$, onderstellende namelijk, dat de punten K en Z op een parabool liggen waarvan de top Z is en het halve latus rectum TZ, heb ik hieruit gezien, dat, indien wij een kromme wenschen, over welker willekeurige, in Z eindigende bogen de tijden van neerdaling gelijk zijn, het noodig is, dat zij van dien aard is, dat zooals ET, loodrecht op de kromme, staat tot de ordinaat EB, aldus een gegeven rechte zooals GB tot een andere EB makende, het punt E op een parabool met top Z valt. Dat dit echter bij de Cycloïde uitkomt, heb ik gevonden uit het inzicht in de wijze, waarop de raaklijn getrokken wordt.

We worden hier dus zeer nauwkeurig en openhartig ingelicht over de wijze, waarop de beroemde ontdekking van het tautochronisme der cycloïdale valbeweging in haar werk is gegaan. Huygens heeft blijkbaar opgemerkt, dat de bewezen stelling, waarin de verhouding van den valtijd over boog KZ uit rust in K tot den constanten valtijd over TZ constant, dus onafhankelijk van K, is gebleken en die voor een cirkel slechts bij benadering geldt, exact juist zou zijn, indien het punt E werkelijk op de parabool lag, waarop het thans slechts bij benadering wordt aangenomen. Hij zal nu hebben overwogen, dat in de geheele boven weergegeven afleiding E slechts eenmaal optreedt als punt van den cirkelboog KZ, namelijk daar, waar we $\frac{p_E}{p_B}$ vervangen door $\frac{TE}{BE}$ en dit door $\frac{GB}{BE}$ en overal elders als punt van de parabool $ZK\aleph$. Laten we nu de voorwaarde, dat E op den cirkel ligt, vallen, zien we dus af van de gelijkheid $TE = GB$, dan kunnen we de gelijkheden

$$\frac{p_E}{p_B} = \frac{TE}{BE} = \frac{GB}{BE'}$$

volhouden, als TE de normaal in E is van de kromme, waarover het beschouwde punt valt, gemeten tot de verticaal door Z, GB een willekeurige constante lengte en E′ een ander punt dan E. Met dit punt E′, welks ordinaat BE′ de alia (sc. applicata) EB is, waarvan Huygens spreekt, hebben we nu verder te maken. Hiervan wordt geeischt, dat het op een parabool met top Z ligt en de kromme, waarlangs de val plaats heeft, moet zoo worden gekozen, dat dit het geval is. Een gelukkig toeval heeft nu gewild, dat Huygens zich in het afgeloopen jaar zeer druk met de cycloïde had bezig gehouden [19]; in het bijzonder was hij op 1 Dec. 1659 reeds bekend met de raaklijnconstructie [20]) en het is niet moeilijk te begrijpen, hoe hij uit de kennis hiervan zeer eenvoudig heeft kunnen afleiden, dat de transformatie

$$\frac{TE}{BE} = \frac{GB}{BE'}$$

inderdaad E′ een parabool doet doorloopen, als E een cycloïde beschrijft.

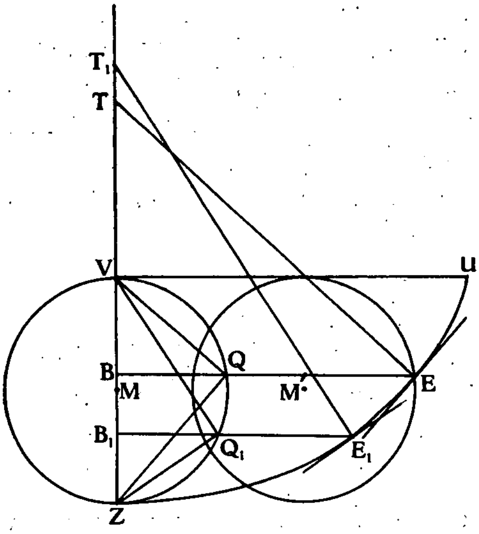


Fig. 4.

Zij nl. van deze cycloïde Z de top, UV de basis, M(Z) de stand van den voortbrengenden cirkel [21]), waarin het punt, dat bij rollen van den cirkel over UV de kromme beschrijft, in Z valt, dan is de normaal in E parallel aan VQ. Maakt men nu voor E

$$\frac{BE'}{BG} = \frac{BE}{TE}$$

waarin BG een willekeurige constante lengte voorstelt (E′ en G niet in de figuur opgenomen), dan geldt voor 2 punten E en E_1 wegens

$$\frac{BE}{TE} = \frac{BZ}{ZQ} \text{ en } \frac{B_1E_1}{T_1E_1} = \frac{B_1Z}{ZQ_1}$$

$$\frac{BE'^2}{B_1E_1'^2} = \frac{BZ^2}{B_1Z^2} \cdot \frac{ZQ_1^2}{ZQ^2} = \frac{BZ^2}{B_1Z^2} \cdot \frac{ZV \,.\, ZB_1}{ZV \,.\, ZB} = \frac{BZ}{B_1Z}.$$

---

[19]) In Juni 1658 had Blaise Pascal onder het pseudoniem Dettonvillius een prijsvraag uitgeschreven, waarin het bewijs van verschillende eigenschappen van de Cycloïde werd gevraagd (betreffende zwaartepuntsbepaling, quadratuur en kubatuur bij omwenteling enz.). Zie *Oeuvres Complètes* de Christiaan Huygens. II (1889), 187 seq. Dat Huygens zich met deze problemen heeft bezig gehouden, blijkt uit zijn reeds gepubliceerde mathematische onderzoekingen over de cycloïde. *Oeuvres* XIV (1920), 347 seq.

[20]) Ibidem, 374 seq., waar de raaklijnconstructie gedateerd is op 18 Febr. 1659.

[21]) De cycloïde wordt beschreven door een vast punt van een cirkel, die rolt over een raaklijn; deze rechte heet de basis van de cycloïde.

zoodat de meetkundige plaats van E′ inderdaad een parabool is [22]).

Hierdoor is dus aangetoond, dat de cycloïde tautochrone is voor de valbeweging; de vraag, of zij de eenige kromme is met die eigenschap, is hierdoor natuurlijk nog niet beslist.

§ 3. Door het bovenstaande is de redeneering, die Huygens op fol. 72 recto van de *Chartae Mechanicae* houdt, volledig gereconstrueerd. We zullen thans nog nader aantoonen, dat de gegeven interpretatie inderdaad zijn gedachtengang weergeeft en een poging doen, het nog ontbrekende bewijs van de voornaamste der gebruikte hulpstellingen aan te vullen, om vervolgens aan de hand van verdere aanteekeningen na te gaan, hoe de weergegeven eerste, intuïtief overtuigende, maar logisch onbevredigende redeneering achteraf vervormd is tot het exacte bewijs, waarmee de stelling in het *Horologium Oscillatorium* wordt aangetoond.

Het bereiken van het eerste doel wordt vergemakkelijkt, doordat op fol. 73 recto van de *Chartae Mechanicae* een opsomming voorkomt van de stellingen, die bij de ontdekking van de tautochrone eigenschap van de cycloïde noodig zijn geweest. Men leest daar:

Fol. 73 recto Sine quibus motus aequabilis [23]) in cava cycloide inveniri non poterat.	Zonder welke de gelijkmatige [23]) beweging in de holle cycloïde niet kon worden gevonden.
Velocitates gravis cadentis ex A per AC esse in punctis singulis B, C sicut applicatae in parabola BD, CE.	I. De snelheden van een uit A langs AC vallend zwaar lichaam verhouden zich in de afzonderlijke punten B, C als de ordinaten van een parabool BD, CE.

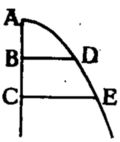


Fig. 5.

De juistheid van deze eigenschap als gevolg van fundamenteele stellingen van Galilei is boven (blz. 205) reeds ingezien.

---

[22]) Dit bewijs kan natuurlijk korter worden geleverd, door te schrijven

$$\frac{BE}{TE} = \frac{BQ}{VQ} = \frac{ZQ}{ZV} = \frac{\sqrt{ZV \cdot ZB}}{ZV} \text{ dus } \frac{ZB}{ZV} = \frac{BE'^2}{BG^2} = \frac{BE'^2}{VK^2}$$

waaruit volgt, dat E′ een parabool doorloopt. In dezen vorm komt het voor op fol. 187 van ms. A. We hebben boven de voorkeur gegeven aan de iets meer omslachtige redeneering, waarin twee willekeurige punten van de kromme vergeleken worden, omdat de figuur van Huygens ook twee willekeurige punten met hun ordinaten bevat.

[23]) De uitdrukking „motus aequabilis" beduidt gewoonlijk „eenparige beweging". Hier wordt er blijkbaar het tautochronisme mee bedoeld.

Tempora quibus grave ex A cadens particulas aequales conficit, puta in B et C, esse inter se sicut applicatae BL, CH in curva FHL, ejus naturae ut semper sint continue proportionales BD, BK, linea certa, et BL.

II. De tijden, waarin een zwaar lichaam uit A vallend gelijke deelen aflegt, denk in B en C, staan tot elkaar als de ordinaten BL, CH in een kromme FHL, van dien aard, dat steeds gedurig evenredig zijn BD, BK (een zekere lijn) en BL.

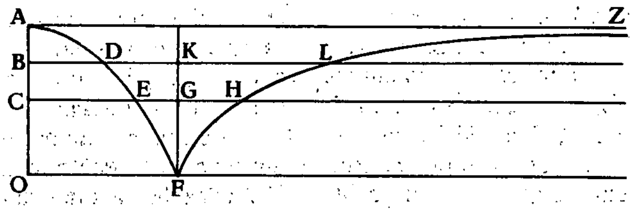


Fig. 6.

ADF is een parabool, welks ordinaten BD, CE de snelheden weergeven, waarmee de punten B, C bij val uit rust in A worden gepasseerd. Men construeert BL, zoodat BD : BK = BK : BL enz. Vergelijkt men nu de valtijden over gelijke deelen in B en C, dan is

$$\frac{t_B}{t_C} = \frac{V_C}{V_B} = \frac{CE}{BD} = \frac{BL}{CH}.$$

Dictae curvae spatium infinitum [24]) OFHLZA esse duplum rectanguli AF.

Het oneindige oppervlak [24]) van de genoemde kromme OFHLZA is het dubbele van den rechthoek AF.

Zeer waarschijnlijk heeft Huygens dit ingezien door op te merken, dat de tijd, besteed aan AO in val uit rust in A zich verhoudt tot den tijd over AO in eenparige beweging met een snelheid, gelijk aan de snelheid in O in de valbeweging, als omnes BL tot omnes OF, terwijl die verhouding volgens den regel van Oresme [25]) gelijk is aan de verhouding van 1 tot 2. De eigenschap II wordt in de in § 2 gegeven reconstructie van de redeneering van Huygens niet gebruikt. De beschouwing van de fig. van fol. 72 recto in het ms. leert echter, dat daarin een kromme $\Sigma\Sigma\Sigma$ voorkomt, die uit de parabool AQΣ door dezelfde transformatie is afgeleid, waardoor hier FHL uit ADF ontstaat. Vermoedelijk heeft Huygens dus eerst geprobeerd, den valtijd over KZ rechtstreeks uit te drukken in dien over AZ door het oppervlak O_1 te vergelijken met het door de kromme $\Sigma\Sigma\Sigma$, de asymp-

[24]) Zie noot 13.
[25]) Zie noot 17.

toten en AZ begrensde oppervlak en is hij daarvan later teruggekomen ten gunste van de boven (§ 2) toegepaste methode, waarin hij de beweging over den cirkelboog vergelijkt met een eenparige beweging over AZ.

Si sint duae semi-parabolae quaecunque ad eundem axem sed contrario situ ut ABC, DBE, et ducantur applicatae communes FGH, KLM, eandem esse rationem rectanguli HFG ad MKL quae est partium dictarum applicatarum, semicirculo super AD interceptarum, nempe quae NF ad OK.

III. Als er twee halve parabolen zijn, willekeurig, met dezelfde as maar in tegengestelde ligging zooals ABC, DBE en de gemeenschappelijke ordinaten FGH, KLM worden getrokken, dan is de verhouding van den rechthoek HFG tot KLM dezelde als die van de deelen der genoemde ordinaten, door den halven cirkel op AD [als middellijn] afgesneden, namelijk die van NF tot OK.

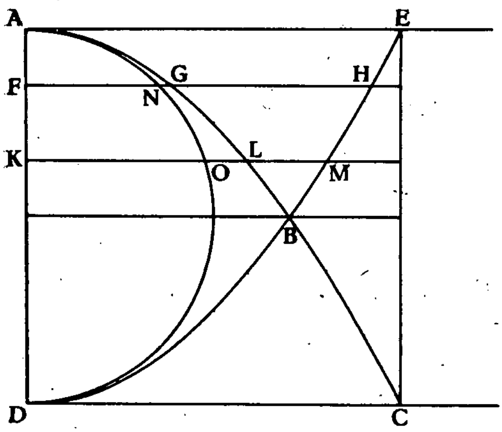


Fig. 7.

Het is niet noodig, dat de parabolen congruent zijn. Inderdaad is

$$\frac{FG.FH}{KL.KM} = \frac{\sqrt{AF.DF}}{\sqrt{AK.DK}} = \frac{FN}{KO}$$

Dit is de eigensehap die we in § 2 hebben toegepast, om het constant zijn van de verhouding der overeenkomstige ordinaten van de kromme A . . R . . N . . H . . ZA en van de kromme, die het oppervlak O_2 begrenst, in te zien.

Si semicirculum ACB tangat in vertice recta PCQ, ductisque ordinatis DFG, fiat sicut DF ad DG ita haec ad DM esse spatium inter curvam CMM et asymptotos ejus NA, OB, rectamque AB interjectam ad rectangulum AQ, ut semiperipheria ACB ad rectam AB.

IV. Indien aan een halven cirkel ACB in den top een rechte PCQ raakt en indien, als de ordinaten DFG getrokken zijn, gemaakt wordt dat, zooals DF tot DG, aldus deze tot DM staat, dan staat het oppervlak tusschen de kromme GMM en zijn asymptoten NA, OB en de rechte AB gelegen, tot den rechthoek AQ, als de halve omtrek ACB tot de rechte AB.

Hier ontmoeten we dus de belangrijke, in § 2 toegepaste hulp-eigenschap, zonder welke het probleem niet had kunnen worden

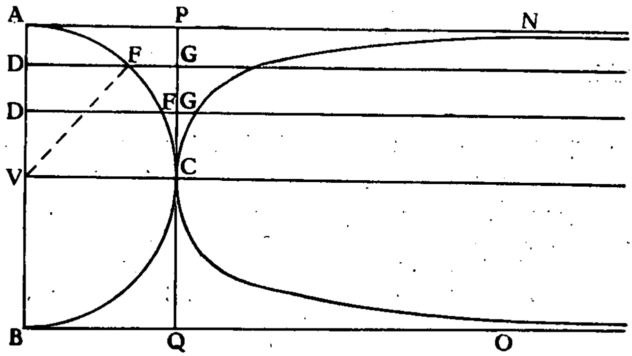


Fig. 8.

opgelost, omdat eerst zij de verhouding van de cirkelomtrek tot de middellijn in de formules invoert, die in de uitdrukking voor den cycloïdalen valtijd een rol speelt. Voorzoover we hebben kunnen nagaan, bevatten de mss. geen ophelderingen over de manier, waarop Huygens haar bewees. Het is echter denkbaar, dat hij daarbij als volgt te werk is gegaan:

We beschouwen een punt, dat zich eenparig beweegt over den halven cirkel ACB en een ander punt, dat met dezelfde snelheid eenparig den weg AB doorloopt. De tijd van het 1e punt over een deeltje F verhoudt zich tot dien van het tweede over de projectie van F op AB als VF : FD dus als VC : FD. Maken we nu DF : DG = DG : DM, dan stelt dus DM den tijd over F voor, als VC den tijd over D aangeeft. De deeltjes D onderling gelijk denkend, vinden we als in § 2

$$\frac{t_{ACB}}{t_{AB}} = \frac{\text{omnes DM}}{\text{omnes DG}} = \frac{\text{opp. ANMCOBA}}{\text{opp. } \square \text{ APQB}}$$

terwijl wegens het gegeven, dat de beide bewegingen eenparig zijn met dezelfde snelheid, ook geldt

$$\frac{t_{ACB}}{t_{AB}} = \frac{\text{bg ACB}}{\text{AB}}.$$

Si PQ distet a vertice C, tamen spatium curvae quae tunc orietur datum esse. posita scilicet quadratura circuli.

Als PQ afstaat van den top C, is toch het oppervlak van de kromme, die dan zal ontstaan, bepaald; ondersteld, wel te verstaan, de quadratuur van den cirkel.

Inderdaad hebben we in § 2 een oppervlak O_1 leeren kennen, begrensd door een kromme, waarvan de top N niet op de raaklijn van den cirkel lag en waarvan de grootte niettemin met behulp van de verhouding van omtrek en middellijn van een cirkel kon worden uitgedrukt.

Curvam AB quae sit ejus naturae, ut ductâ ipsi BD ad ang. rectos,quae occurrat axi AD in D, faciendoque ut BD ad applicatam ordinatim BC, ita sit recta quaevis EC ad CF in eadem ordinata sumptam, fit FFA parabola, eam curvam esse cycloidem.

V. Een kromme AB, die van dien aard zij, dat, wanneer men onder rechte hoeken tot haar BD trekt, die de as AD in D moge snijden, en makende, dat, zooals BD tot de ordinaat BC, aldus een willekeurige rechte EC tot CF, op dezelfde ordinaat genomen, staat, FFA een parabool wordt, die kromme is een cycloïde.

Zooals in § 2 reeds bleek, is het de omgekeerde eigenschap van deze, die in staat stelt tot de conclusie, dat de cycloïde tautochrone is. De eigenschap V leert nu daarnaast nog, dat volgens de methode van § 2 het tautochronisme voor geen andere kromme dan de cycloïde bewezen kan worden. Fol. 73 recto bevat geen bewijs van de eigenschap V en ook elders is het tot dusver niet gevonden. We kunnen ons echter voorstellen, dat Huygens het als volgt heeft kunnen leveren.

Zij gegeven de kromme AV met top A en symmetrieas AT. DB is de normaal in B.

Trek AK parallel aan de raaklijn in B (K op CB) en KL parallel aan de normaal BD (L op AD). Nu is

$$\frac{CF^2}{CE^2}=\frac{BC^2}{BD^2}=\frac{KC^2}{KL^2}$$

dus, als p het latus rectum van de parabool AFF voorstelt,

$$\frac{p\,.\,AC}{CE^2}=\frac{LC\,.\,CA}{LC\,.\,LA}$$

of

$$CE^2=p\,.\,LA.$$

LA is dus onafhankelijk van de keuze van B. Beschouw nu den cirkel met middellijn AL als voortbrengenden cirkel van een cycloïde met basis LV. Deze cycloïde moet nu de opvolgende lijnen CB snij-

PROSPECTUS.

ZOO JUIST VERSCHENEN:

LEERBOEK BESCHRIJVENDE MEETKUNDE

DOOR

H. J. v. VEEN,

HOOGLEERAAR AAN DE TECHNISCHE HOOGESCHOOL TE DELFT.

DEEL II.

OPPERVLAKKEN EN RUIMTEKROMMEN.

AANHANGSEL

(POOLTHEORIE EN MEETKUNDIGE VERWANTSCHAPPEN).

Prijs van het complete boek met afzonderlijke atlas, geb. . . . . **f 7.75**

Voor abonné's op Christiaan Huygens, N. Tijdschrift v. Wisk. en Euclides tot 1 Juni 1929 **f 6.25**

P. NOORDHOFF, — 1929. — GRONINGEN.

VOORBERICHT.

In dit 2[e] deel worden constructies met oppervlakken en ruimtekrommen behandeld.

Waar mij bleek, dat het 1[e] deel van dit Leerboek ook gebruikers heeft gevonden buiten de T. H., heb ik met deze omstandigheid, bij het vaststellen der te bespreken leerstof, rekening gehouden.

De bestudeering van de „Inleiding" zal, naar ik veronderstel, kunnen bijdragen tot een beter begrip van hetgeen in de volgende hoofdstukken behandeld wordt. — Het „Aanhangsel" bevat eenige beginselen van de Pooltheorie t.o. van vlakke krommen en oppervlakken, alsmede van de eenvoudigste meetkundige verwantschappen; van de hier verkregen uitkomsten wordt in verschillende hoofdstukken gebruik gemaakt. — In verband met de uitgebreide Inhoudsopgave en de vele verwijzigingen in den tekst is van het samenstellen van een register afgezien.

Mijn dank aan de heeren R. Boom en Ir. A. P. C. van Beek, assistenten aan de T. H., voor hun hulp bij het vervaardigen der teekeningen en het doorlezen van de copie, alsmede aan de firma Noordhoff voor het gevolggeven aan mijn wenschen, betreffende de uitgave van dit boek.

H. J. VAN VEEN.

Delft, November 1928.

INHOUD

INLEIDING.

HOOFDSTUK I.

KEGELS EN CYLINDERS.

HOOFDSTUK II.

HOOFDSTUK III.

HOOFDSTUK IV.

HOOFDSTUK V.

ALGEMEENE ONTWIKKELBARE OPPERVLAKKEN.

HOOFDSTUK VI.

OMWENTELINGSOPPERVLAKKEN.

HOOFDSTUK VII.

SCHEEVE REGELVLAKKEN.

HOOFDSTUK XII.

HOOFDSTUK XIII.

HOOFDSTUK XIV.

HOOFDSTUK XV.

HOOFDSTUK XVI.

DOORSNIJDING VAN OPPERVLAKKEN.

HOOFDSTUK XVII.

AANHANGSEL

POOLTHEORIE.

HOOFDSTUK XVIII.

MEETKUNDIGE VERWANTSCHAPPEN.

HOOFDSTUK XIX.

HOOFDSTUK XX.

den onder dezelfde hoeken als de gegeven kromme AV [26]), terwijl ze van hetzelfde punt A uitgaat als deze. Hieruit kan Huygens als

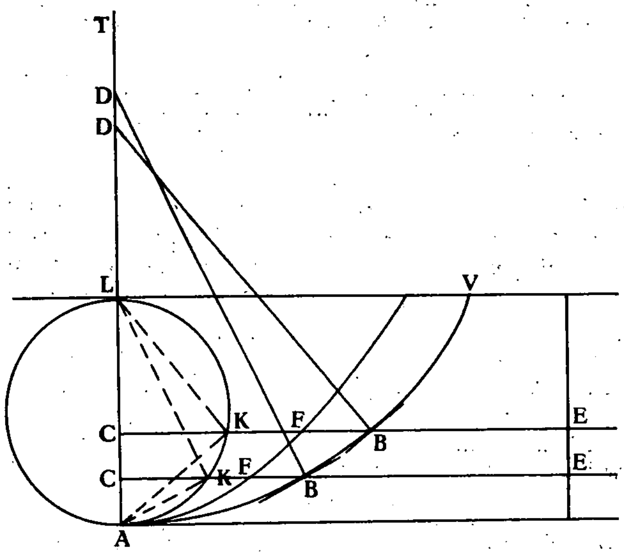


Fig. 9.

intuïtief duidelijk hebben afgeleid, dat de cycloïde dus met de kromme AV samenvalt, terwijl hij ongetwijfeld in staat zou zijn geweest, desgewenscht een bewijs hiervoor te leveren [27]).

§ 4. Het is begrijpelijk, dat Huygens, zoover gekomen, dus in het bezit, zooals niet van een werkelijk bewijs, dan toch van de gegronde overtuiging van de juistheid van de tautochrone eigenschap der cycloïde, nog niet dadelijk het oorspronkelijk gestelde

[26]) Immers de raaklijn van de cycloïde in het punt, dat op CB ligt, moet parallel zijn aan AK.

[27]) Men kan hiervoor namelijk geheel dezelfde methode toepassen, die hij in het *Horologium Oscillatorium* (Pars III, *De linearum curvarum evolutione et dimensione,* Prop. III. Ed. cit. pag. 93) gebruikt, om te bewijzen, dat twee van één punt uitgaande, eenzijdig gebogen en naar denzelfden kant holle krommen, die de eigenschap hebben, dat elke rechte, die de eene kromme loodrecht snijdt, dit ook de andere doet, samen moeten vallen. Dat hij dit bewijs reeds in 1659 zou hebben kunnen leveren, wordt hierdoor aannemelijk gemaakt, dat men op fol. 75^v van het ms. *Chartae Mechanicae* een teekening vindt van een cycloïde met bijbehoorende evolvent, op fol. 75^r studies voor het bewijs van de prop. VIII van het derde deel van het *Horologium Oscillatorium* (Ed. cit. pag. 99) en op fol. 74^v een telkens weer herhaalde figuur van dezelfde soort, als hij bij het bewijs van de geciteerde propositie III gebruikt.

probleem van den valtijd langs een cirkelboog heeft laten varen, waarvan de cycloïde-eigenschap voorloopig misschien een waardevol bijproduct kon schijnen, maar dat zelf nog op exacte oplossing wachtte.

Inderdaad vinden we hem op fol. 73 verso weer bezig met den valtijd langs een cirkelboog. Blijkens de inleidende woorden:

Quaeritur tempus per quadrantem circumferentiae circuli, quod dubito an inveniri possit.	Gevraagd wordt de tijd over het vierde deel van den omtrek van een cirkel, wat ik betwijfel of gevonden kan worden.

voelt hij echter al, dat dit probleem zijn krachten te boven zal gaan en we zien hem dan ook al spoedig de berekening staken. We zullen deze bladzijde hier niet reproduceeren.

Hierna is hij er blijkbaar toe overgegaan, de redeneering van fol. 72 recto correcter te formuleeren voor het geval, dat de kromme, waarlangs de val plaats heeft, van den aanvang af een cycloïde is. Van deze nieuwe redactie is echter slechts het slot bewaard gebleven; men vindt het op fol. 74 recto. Aan den linkerkant van deze bladzijde is een overblijfsel van een ander vel ingeplakt, dat, naar den toestand van het overblijfsel te oordeelen, verbrand is. Aan de andere zijde van het fragment staat, door Huygens zelf geschreven „pertinebat ad inventum de Cycloidis isochronismo" („behoorde bij de ontdekking van het isochronisme van de Cycloide"); zeer waarschijnlijk heeft het dus het eerste deel van het betoog bevat, waarvan we het slot op fol. 74 recto aantreffen. Gelukkig staat de figuur, waarover geredeneerd wordt, ook op fol. 74 recto. We kunnen daardoor met vrij groote zekerheid zeggen, wat er op het verbrande blad heeft gestaan. We laten hier een korte weergave daarvan voorafgaan aan de reproductie van fol. 74 recto.

CX is de basis van de cycloïde EΣ met top E. De val begint in Q. Beschouwd wordt een punt O. BO is de normaal van de cycloïde in O. E$\Xi = \beta$G is een lengte $=2$CE. Verder gelden de relaties $\frac{BO}{DO} = \frac{D\alpha}{DR}$, (waaruit wegens de omgekeerde eigenschap V van § 3 volgt, dat de meetkundige plaats van R een parabool EX is, terwijl AI een hiermee congruente parabool is) en

$$\frac{D\delta}{D\varepsilon} = \frac{D\varepsilon}{D\eta}.$$

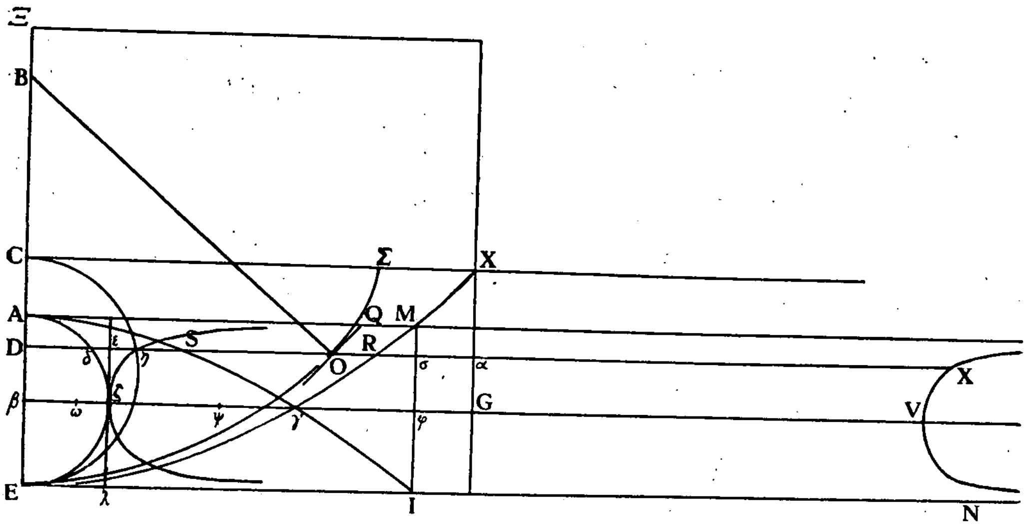


Fig. 10.

Redeneerende als in § 2 vindt men in de daar gebruikte notatie [28]):

$$\frac{t_O}{t_D} = \frac{BO}{DO}\cdot\frac{EI}{DS} = \frac{D\alpha}{DR}\cdot\frac{D\sigma}{DS} = \frac{DX}{D\sigma}$$

dus $\frac{t_{QE}}{t_{AE}} = \frac{\text{omnes } DX}{\text{omnes } D\sigma} = \frac{\text{opp. } XV}{\square AI}$ [29]), terwijl $\frac{\text{opp. } XV}{\text{opp. } \zeta\eta} = \frac{\beta V}{\beta\zeta}$.

Hieraan sluit nu ongedwongen aan op

fol. 74 recto:

fol. 74 recto sed spatium infinitum $\zeta\eta$ est ad $\square A\lambda$ ut semicircumferentia $A\zeta E$ ad AE, hoc est (si fiat ut $\frown A\zeta E$ ad AE ita $\beta\zeta$ ad $\beta\omega$) ut $\beta\zeta$ ad $\beta\omega$. Ergo ex aequo erit spatium inf. VX ad $\square A\lambda$ ut $V\beta$ ad $\beta\omega$. hoc est ut $2b$ ad $\frac{1}{2}\frac{cc}{p}$. nam $V\beta \propto 2b$ et $\beta\omega \propto \frac{1}{2}\frac{cc}{p}$.

(vertaling niet letterlijk)

$$\frac{\text{opp. } \zeta\eta}{\square A\lambda} = \frac{\text{bg } A\zeta E}{AE} = \frac{\beta\zeta}{\beta\omega}$$

dus wegens $\frac{\text{opp. } XV}{\text{opp. } \zeta\eta} = \frac{\beta V}{\beta\zeta}$

$$\frac{\text{opp. } XV}{\square A\lambda} = \frac{V\beta}{\beta\omega}.$$

dus als $\beta G = b$ en $AE = c$, wegens $\beta V = 2\beta G$ (zie § 2) en eig. IV (§ 3)

$$\frac{\text{opp. } XV}{\square A\lambda} = \frac{2b}{\frac{1}{2}\frac{cc}{p}},$$

waarin $p = \text{bg } A\zeta E$.

[28]) We herinneren er aan, dat t_D, resp. t_{AE} den valtijd over het particula D, resp. den weg AE voorstelt in een eenparige beweging met een snelheid, gelijk aan de snelheid in E van een val uit rust in A en dat t'_{AE} den tijd over AE in val uit rust in A beduidt.

[29]) Het oppervlak XV is het oppervlak, dat begrensd wordt door de kromme met top V, de twee asymptoten AM en EI daarvan en de lijn AE; $\zeta\eta$ is het overeenkomstige, door de kromme met top ζ begrensde oppervlak.

sit ut $\square A\lambda$ ad $\square AI$, hoc est ut
$\beta\zeta$ ad $\beta\varphi$ ita $\beta\omega$ ad $\beta\psi$

$$\tfrac{1}{2}c - \sqrt{2bc} \quad \tfrac{1}{2}\frac{cc}{p} \quad \frac{c\sqrt{2bc}}{p}$$

unde spat. inf. VX ad $2\square AI$ ut
$V\beta$ ad $\beta\psi$

$$b - \frac{c\sqrt{2bc}}{p}$$

hoc est tempus per QOE ad tempus per AE.
Sed tempus per AE est ad tempus per CE, hoc est per dimidiam $E\Xi$ ut AM ad CX, hoc est, ut $\sqrt{2bc}$ ad b, hoc est ut $\frac{c}{p}\sqrt{2bc}$ ad $\frac{bc}{p}$, hoc est ut p ad c.

Zij $\dfrac{\square A\lambda}{\square AI} = \dfrac{\beta\zeta}{\beta\varphi} = \dfrac{\beta\omega}{\beta\psi}$ dan is

$$\beta\psi = \frac{c\sqrt{2bc}}{p}.$$

Daardoor is

$$\frac{\text{opp. XV}}{2\square AI} = \frac{b}{\dfrac{c\sqrt{2bc}}{p}} = \frac{t_{QE}}{t'_{AE}}$$

$$\frac{t'_{AE}}{t_{CE}} = \frac{AM}{CX} = \frac{\sqrt{2bc}}{b}$$

dus

$$\frac{t_{QE}}{t_{CE}} = \frac{p}{c}.$$

(vertaling letterlijk)

Ergo ex quocunque puncto Q mobile descendat per curvam ΣQE erit tempus descensus ad tempus descensus per perpendicularem CE ut p ad c, hoc est ut semicircumferentia ad diametrum.

Ergo ex quocunque puncto curvae descenderit usque in E, semper aequale tempus impendet.

Dus uit welk punt Q het bewegende ook neerdaalt langs de kromme ΣQE, de tijd van neerdalen zal staan tot den tijd van neerdalen over de loodlijn CE als p tot c, dat is als de halve omtrek tot de middellijn.

Dus uit welk punt van de kromme het ook neer zal dalen tot in E, steeds zal het een gelijken tijd besteden.

Men vindt de in het bovenstaande gebruikte figuur van fol. 74 recto van de *Chartae Mechanicae* terug op fol. 187 van het ms. A, echter met dit verschil, dat de krommen $\zeta\eta$ en VX niet meer aanwezig zijn. Daar die krommen uit de latere strengere bewijzen geheel verdwenen zijn, is het waarschijnlijk, dat de redactie van A fol. 187 later moet worden gesteld dan die van fol. 74 recto van de *Chartae Mechanicae*. We zullen haar niet weergeven: ze loopt in hoofdzaak parallel aan wat we boven aangaande den inhoud van het verbrande blad ondersteldden tot op het oogenblik, dat men vindt

$$\frac{t_O}{2t_D} = \frac{1}{2}\,\frac{D\alpha\,.\,D\sigma}{DR\,.\,DS}.$$

Inplaats van hieruit nu de ordinaat DX en dus de kromme VX af te leiden, bewijst Huygens hier, dat deze verhouding dezelfde is als die van $\frac{1}{4}$ EI tot Dδ. Hiermee breekt hij echter de redeneering af.

§ 5. Op fol. 76 recto van het ms. *Chartae Mechanicae* en op fol. 138 van het ms., gemerkt A, beginnen nu twee onderling slechts weinig verschillende, samenhangende uiteenzettingen van een strenger bewijs van de eigenschap van het tautochronisme, die blijkbaar bedoeld zijn als ontwerpen voor een publicatie. We geven hier hun inhoud verkort weer, waarbij we de formuleering der propositie en de figuur aan fol. 188 seq. van ms. A ontleenen.

Deze bladzijde draagt den datum 15 Dec. 1659 en het opschrift

Demonstratio melior huc tandem redacta.	Beter bewijs eindelijk aldus geredigeerd.

terwijl een opmerking boven de figuur (uit Ovidius, *Metamorphoses* XV, 146).

Magna nec ingeniis investigata priorum.	Groote dingen en door het vernuft van vroegeren niet opgespoord.

nog eens getuigt van de waarde, die Huygens zelf aan zijn ontdekking hechtte. De propositie luidt als volgt:

Sit dimidia cycloidis ABC vertice A deorsum spectantis et axe AD ad perpendic.	Zij gegeven de helft van een cycloïde ABC met den top A naar beneden gericht en met de as AD verticaal.
Et ex quocunque ejus puncto B descendat per ipsam mobile usque in A. Dico tempus hujus descensus ad tempus casus perpendicularis ex D in A, fore ut semiperipheria circuli ad diametrum. Ideoque ex quovis cycloidis puncto tempora descensus aequalia esse.	En laat uit een willekeurig punt B van haar een bewegend ding neerdalen tot in A. Ik zeg, dat de tijd van deze neerdaling zich zal verhouden tot den tijd van loodrechten val uit D naar A, zooals de halve omtrek van een cirkel tot de middellijn. En daardoor dat de tijden van neerdaling, uit welk punt van de cycloïde ook, gelijk zijn.

Zij (fig. 11) CBA de beschouwde halve cycloïde met basis CD en top A. Het doel is, den valtijd over boog BA te vergelijken met dien van den val van D tot A (alle valbewegingen uit rust ondersteld), welke laatste volgens de koordenwet [30]) van Galilei gelijk is aan den valtijd langs EA, dus volgens den regel van Oresme aan den tijd van een eenparige beweging over EA met een snelheid, gelijk aan de

[30]) Galilei, *Discorsi*, Giorn. III, Prop. VI. Ed. Naz. VIII, 221.

halve eindsnelheid in A van den val langs EA. Daar deze snelheid wegens Galilei's postulaat der gelijke eindsnelheden weer gelijk is aan de snelheid V_A in A bij val van F naar A, kunnen we dus ook den valtijd langs BA vergelijken met dien van een eenparige beweging langs EA met de helft van de snelheid, verkregen door val over FA. Zij nu op FA als middellijn een cirkel beschreven met middelpunt V en om dezen cirkel een polygoon, waarvan SS met raakpunt L een der zijden zij. Het aantal zijden van dit polygoon kan zoo groot

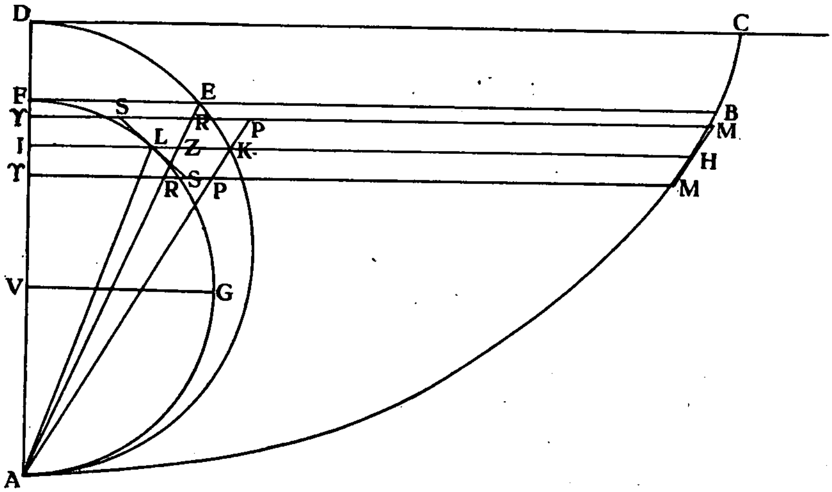


Fig. 11.

worden gemaakt, dat de omtrek willekeurig weinig verschilt van den halven cirkelomtrek FGA. Door L wordt een lijn getrokken, parallel aan CD, die DA snijdt in I, AE in Z, den cirkelomtrek DEA in K en de cycloïde in H. Door de punten S worden lijnen getrokken, parallel aan IH die DA snijden in Υ, AE in R, AK in P en de raaklijn van de cycloïde in H in M. Op dezelfde wijze handelt men met de andere zijden van het polygoon. Aan elk van zijn zijden wordt dus een tangentsegment van de cycloïde toegevoegd (deze vormen echter geen polygoon). Uit de woorden „hae tandem si infinitus numerus earum fuerit ipsam curvam conficient" („deze zullen ten slotte, als hun aantal oneindig groot is geworden, de kromme zelf vormen") blijkt, dat het heele bewijs nog op het gebruik van indivisibilia gebaseerd zal zijn.

De val over den cycloïdeboog BA wordt nu vervangen door een reeks van valbewegingen over de opvolgende tangentsegmenten van de cycloïde. Langs elk van deze wordt de beweging beschouwd als eenparig met een snelheid, gelijk aan de snelheid in het raakpunt bij val vanuit B, dat is dus voor het segment MM de snelheid in H, welke gelijk is aan de valsnelheid in I, V_I, bij val uit F. Vergeleken worden nu de tijden τ en t in de eenparige bewegingen over MM met snelheid V_I en over RR met snelheid $\frac{1}{2}$ V_A. Men vindt (in moderne notatie):

$$\frac{\tau}{t}=\frac{MM}{RR}\cdot\frac{\frac{1}{2}V_A}{V_I}=\frac{MM}{RR}\cdot\frac{\frac{1}{2}\sqrt{FA}}{\sqrt{FI}}\,^{31)}=\frac{MM}{RR}\cdot\frac{\frac{1}{2}FA}{FL}=\frac{MM}{RR}\cdot\frac{VF}{FL}.$$

Nu is de raaklijn MM parallel aan AK, dus MM = PP, zoodat

$$\frac{MM}{RR}=\frac{PP}{RR}=\frac{AK}{AZ}=\frac{AE}{AK}\,^{32)}=\frac{AF}{AL}\,^{33)}=\frac{FL}{LI},$$

dus
$$\frac{\tau}{t}=\frac{VF}{LI}=\frac{VL}{LI}=\frac{SS}{YY}.$$

Daar nu verder de heele weg EA doorloopen wordt gedacht in een eenparige beweging, zullen de opvolgende tijden t_i over de opvolgende wegen RR van EA zich verhouden als deze wegen, dus als hunne projecties YY op FA. Noemen we de opvolgende zijden SS σ_i, hunne projecties YY op FA s_i, dan geldt dus

$$\frac{\tau_i}{t_i}=\frac{\sigma_i}{s_i} \text{ en } \frac{t_i}{t_{i+1}}=\frac{s_i}{s_{i+1}}$$

waaruit volgens een bekende propositie van Archimedes [34]) volgt:

$$\frac{\Sigma\tau_i}{\Sigma t_i}=\frac{\Sigma\sigma_i}{\Sigma s_i}$$

dus

$$\frac{\text{valtijd over boog BA}}{\text{valtijd over DA}}=\frac{\text{bg FGA}}{\text{FA}}=\frac{\text{halve cirkelomtrek}}{\text{middellijn}}.$$

---

31) Deze schrijfwijze is vanuit Euclidisch standpunt zinledig. Huygens zegt, dat de reden van V_A tot V_I de halfreden (ratio subduplicata) is van de reden van FA tot FI en dat ze daardoor gelijk is aan de reden van FA tot FL.

32) De conclusie $\frac{AK}{AZ}=\frac{AE}{AK}$ steunt op een lemma, dat Huygens ook in het *Horologium Oscillatorium* (Pars II; vóór Prop. XXIII; Ed. cit. pag. 78) gebruikt en waarvan men de juistheid inziet, door op te merken, dat de driehoeken AKZ en AEK gelijkvormig zijn.

33) De conclusie $\frac{AE}{AK}=\frac{AF}{AL}$ wordt gemotiveerd, door op te merken:

$$\frac{AF^2}{AK^2}=\frac{AF}{AI}=\frac{AF^2}{AI\,.\,AF}=\frac{AF^2}{AL^2}.$$

34) Archimedes, *De Conoidibus et Sphaeroidibus* Prop. I. Huygens citeert haar als prop. II.

De vooruitgang, die in dit bewijs is verkregen ten aanzien van het in § 2 meegedeelde, is aanzienlijk, hoewel de toepassing van de methode der indivisibilia nog niet vermeden is. Zij is vooral hierdoor verkregen, dat de verhouding van de snelheden V_I en V_A niet meer wordt uitgedrukt door de verhouding van ordinaten van een parabool, maar als verhouding van de koorde FL tot de middellijn FA van den cirkel FGA, terwijl de vernuftige toepassing van het lemma $AK^2 = AE.AZ$ in verband met de raaklijneigenschap van de cycloïde het mogelijk maakt, de verhouding MM: RR eveneens als verhouding van twee lijnstukken in dezen cirkel op te vatten. Hierdoor vinden we de gevraagde verhouding van de tijden over MM en RR terug als verhouding van een tangentsegment van een cirkel tot zijn projectie op een middellijn. Tot het vinden van deze methode werd uit den aard der zaak eenigszins de weg gewezen door het feit, dat bij de redactie van dit bewijs reeds bekend was, dat in het te vinden resultaat de verhouding van een cirkelomtrek tot de middellijn een rol speelt.

Op fol. 77 verso van de *Chartae Mechanicae* vermeldt Huygens nog als corollarium, dat de valtijden over willekeurige deelen van boog BA in den val uit rust in B zich verhouden als de bogen van cirkel FGA, die tusschen dezelfde horizontale lijnen liggen als de beschouwde cycloïde-bogen. Hij merkt daar verder nog op, dat indien de beweging voorbij A op den opstijgenden boog van de cycloïde wordt voortgezet, er zuiver tautochrone schommelingen zullen optreden, waarbij de slingertijd zich tot den valtijd langs de as der cycloïde verhoudt als de cirkelomtrek tot de middellijn. Modern uitgedrukt, leidt dit tot de formule

$$T = \pi \sqrt{\frac{2l}{g}}$$

waarin l de lengte van de cycloïde-as voorstelt. Immers de valtijd over de hoogte l bedraagt

$$\sqrt{\frac{2l}{g}}$$

Daar nu de lengte L van den cycloïdalen slinger $2l$ bedraagt, vinden we zoo de bekende formule [35])

---

[35]) Op de kinematische beteekenis van de uitdrukking $\sqrt{\frac{l}{g}}$ wordt in het hedendaagsche onderwijs ten onrechte geen acht meer geslagen.

$$T = \pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

die voor cycloïdale slingeringen exact geldt.

§ 6. Een grondig Archimedes-kenner als Huygens moet natuurlijk wel voortdurend gevoeld hebben, dat een bewijs als het bovenstaande nog niet den toets der strenge eischen kon doorstaan, die de Grieksche mathematici aan een wiskundig betoog hadden leeren stellen. Toch schijnt hij er een tijd lang aan gedacht te hebben, het zoo maar te laten. Immers op fol. 191 van het ms. A treft men een beschouwing aan onder het opschrift „haec ante praecedens theorema legenda" („dit te lezen vóór het voorafgaande theorema"), waarin hij een poging doet, zijn infinitesimale beschouwingen nader te rechtvaardigen, door te betoogen, dat de valtijd over den cycloïdeboog niet kan verschillen van de som der tijden over de opvolgende tangentsegmenten in de beschouwde eenparige bewegingen, mits men aanneemt, dat het vallende punt den val langs elk tangentsegment begint met een snelheid, gelijk aan de eindsnelheid, die het op het voorafgaande segment heeft verkregen. Hij merkt daartoe op, dat hij over elk segment een te korten, resp. te langen tijd zou vinden, indien hij het liet doorloopen met een constante snelheid, gelijk aan de eindsnelheid, resp. de beginsnelheid van den val langs het segment en gaat dan voort:

Sed quoniam tangentem infinite parvam pono ratione totius AE, ideo et discrimen velocitatis quam acquirit mobile, sive descendente

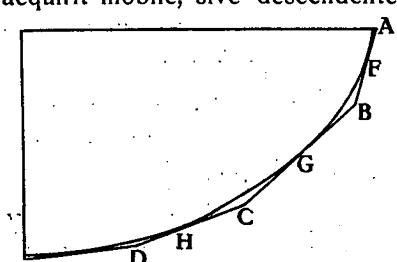


Fig. 12 [36])

ex A usque in C, sive ex A usque in D, sive denique etiam ex A usque in H punctum, ubi CD curvam tangit, tanquam nullum est

Maar aangezien ik een tangent oneindig klein stel in verhouding tot de heele AE, daarom moet ook het verschil van de snelheid, die het bewegende verkrijgt, hetzij uit A tot in C neerdalend, hetzij uit A tot in D, hetzij tenslotte ook uit A tot in het punt H, waar CD de kromme raakt, als nul worden beschouwd . . . . Zoodat dus ook de tijd van de eenparige beweging over CD met de snelheid, die verkregen wordt door den val over AH . . . . niets geacht moet worden te verschillen van den tijd van de natuurlijke neerdaling over CD. We nemen dus dien gemiddelden tijd in de

[36]) Huygens neemt hier aan, dat de tangentsegmenten tot een polygoonstuk aaneensluiten.

reputandum .... Unde itaque nec tempus motus aequabilis per CD, celeritate quae acquiritur ex casu per AH, ... differre quicquam censendum est à tempore descensus naturalis per CD. Tale ergo medium tempus in singulis tangentibus pro tempore descensus naturalis per easdem tangentes ponimus, omniumque istorum temporum summam pro tempore per totam curvam usurpabimus.

Quod tuto fieri posse periti geometrae facile perspicient neque desiderabunt puto ut longo ambitu illa exsequam quae ad demonstrationem more veterum geometrarum conscribendam hic requirerentur.

afzonderlijke tangenten voor den tijd der natuurlijke neerdaling over dezelfde tangenten en we zullen de som van al die tijden voor den tijd langs de heele kromme gebruiken. De ervaren wiskundigen zullen gemakkelijk inzien, dat dit veilig geschieden kan en ze zullen, denk ik, niet verlangen, dat ik langs een langen omweg datgene ten uitvoer breng, wat hier vereischt zou worden voor het neerschrijven van een bewijs naar den trant der oude wiskundigen.

We hebben deze passage eenigszins uitvoerig weergegeven, omdat ze ons typeerend schijnt voor de houding, die de 17e eeuwsche mathematici gaandeweg beginnen in te nemen ten aanzien van den Griekschen stijl van wiskundige bewijsvoering. Men voelt de Grieksche strengheid langzamerhand als een hinderlijke belemmering voor den bloei van een wetenschap, die bezig is, overal nieuwe wegen in te slaan en die zich, onder de bekoring van het vele schoons, dat ze op die wegen ontmoet, met eenigen wrevel afwendt van de, als overdreven gevoelde zorgzaamheid, waarmee de Ouden voor alles, wat ze voldoende hadden geanalyseerd, om het bewijsbaar te maken, onverbiddelijk een streng synthetisch bewijs verlangden. Het is bekend, welk een ontwikkeling de reactie, die we zich hier bij Huygens zien afteekenen, gehad heeft, hoe het vooral de infinitesimaalrekening, welker embryonalen staat we bij hem aantreffen, geweest is, die van die reactie heeft geprofiteerd, om zich in korten tijd op onvoldoende fundamenten tot groote hoogte te ontwikkelen en hoe in de 19e eeuw opnieuw een reactie ten gunste van een meer soliede fundeering is ingetreden, die in wezen een terugkeer tot de Grieksche beginselen heeft beduid.

Bij Huygens staan we nog in het begin van de periode van vruchtbare onstrengheid. Want hoewel hij in het geciteerde fragment zijn lezers als het ware schijnt te verzoeken, nu maar zooveel vertrouwen te stellen in zijn mathematische techniek, dat hij zich wel ontslagen kan achten van de verplichting, een werkelijk streng bewijs te leveren, en hoewel hij van plan schijnt, hen te begoochelen met het schijnbetoog, dat de gemaakte fouten immers alle oneindig klein zijn (alsof dat afdoende ware, als hun aantal oneindig groot wordt!), blijkt hij zich in het *Horologium Oscillatorium* toch den „longum ambitum" te getroosten, en levert hij daar „more veterum geometrarum" een bewijs, dat geheel vrij is van alle smetten van het oneindig kleine. Hij bedraagt zich dus ten slotte zeer rechtzinnig, geheel naar het voorbeeld van zijn grooten leermeester Archimedes, maar het lijkt wel, of hij het niet van harte doet. We bezitten namelijk van zijn hand een zeer merkwaardige ontboezeming [37]) over strengheid en aanschouwelijkheid bij de uiteenzetting van mathematische beschouwingen, die nog eenig licht schijnt te kunnen werpen op de weifeling, die hij ten aanzien van het bewijs van het tautochronisme van de cycloïde schijnt te hebben doorgemaakt, en waarvan we hier daarom een deel citeeren:

Caeterum ad fidem faciendam apud peritos haud multum interest, an demonstratio absoluta tradatur an fundamentum eius demonstrationis, quo conspecto non dubitent demonstrationem perfectam dari posse. fateor tamen etiam in hac rite instituenda ut clara concinna omniumque aptissima sit, peritiam et ingeniam elucere, uti in Archimedis omnibus operibus. verum et prior et longe praecipua est inveniendi ratio ipsa, hujus cognitio potissimè delectat atque a doctis expetitur, quamobrem magis etiam haec methodus sequenda videtur qua brevius clariusque comprehendi et ob oculos poni potest. Tum verò et nostro labori parcimus in scribendo, et aliorum in legendo, quibus vacare tandem amplius non poterit, ut ingentem multitudinem Geometricorum inventorum quae augetur in dies doctoque hoc saeculo in immensum porro exitura videtur, evolvant, si quidem prolixam illam

Overigens doet het er, om vertrouwen te wekken bij deskundigen, niet veel toe, of men een absoluut bewijs meedeelt of een zoodanigen grondslag voor dat bewijs, dat zij, na daarvan kennis te hebben genomen, niet meer twijfelen, dat het volmaakte bewijs geleverd kan worden. Ik geef weliswaar toe, dat ook uit de wijze, waarop dit in den vorm geschiedt, zoodat het helder zij, sierlijk en het best passend van alle, kundigheid en vernuft blijken, zooals in alle werken van Archimedes. Maar het eerste en verreweg voornaamste is de wijze van ontdekken zelf, waarvan de kennisname voornamelijk bekoort en van de geleerden gevraagd wordt. Daarom komt het mij voor, dat men het meest die methode moet volgen, waarvoor dit het kortst en het helderst kan worden begrepen en voor oogen gelegd. Wij besparen dan de moeite van het schrijven aan ons zelf en die

---

[37]) *Oeuvres* XIV, 337.

ac perfectam veterum methodum scriptores usurpant.

van het lezen aan anderen, die ten slotte geen tijd meer zullen hebben, om van de ontzaglijke hoeveelheid wiskundige vondsten, die van dag tot dag toeneemt en die in deze geleerde eeuw tot in het onmetelijke schijnt te zullen aangroeien, kennis te nemen, indien de schrijvers gebruik maken van die uitvoerige en volmaakte methode der ouden.

We behoeven na deze uitlating niet bevreesd te zijn, dat het een onbescheiden blik in de werkplaats van Huygens geweest is, die we door de ontcijfering van zijn aanteekeningen hebben gedaan; de „ratio inveniendi" is er duidelijk door aan het licht gekomen en we vernemen, dat dit toch zijn eerste wensch was.

We zullen thans als slot van onze beschouwingen nog nagaan, hoe hij, na ons het „fundamentum demonstrationis" te hebben geschonken, slaagt „in hac rite instituenda ut clara concinna omniumque aptissima sit."

§ 7. Van het in § 5 meegedeelde bewijs kan blijkbaar zonder bezwaar behouden blijven het gedeelte, waarin de verhouding van den tijd van een eenparige beweging langs een raaklijnsegment van de cycloïde met een snelheid, gelijk aan de snelheid in het raakpunt in val uit rust in B tot den tijd van een eenparige beweging langs het overeenkomstige [38]) segment van de lijn EA met een snelheid, gelijk aan de helft van de snelheid in A bij val uit rust in F gelijk is gevonden aan de verhouding van de lengtes der met het beschouwde raaklijnsegment overeenkomende segmenten van een raaklijn aan den cirkel FA en de as van de cycloïde. Inderdaad maakt dit dan ook den inhoud uit van Prop. XXIII van het Tweede Boek van het *Horologium Oscillatorium* met geen andere wijziging dan deze, dat de eenparige beweging over de opvolgende deelen van EA (fig. 11) vervangen is door die over de overeenkomstige deelen van de aan EA parallele raaklijn $B\theta$ van de cycloide in B. (fig. 13).

Wijziging is pas noodig in het daarop volgende deel van het bewijs, waarin de cycloïdeboog BA beschouwd werd als som van oneindig veel raaklijnsegmenten. Het beginsel, waarnaar die wijziging

[38]) We noemen in het volgende twee segmenten van rechte of kromme lijnen overeenkomstig, wanneer ze gelegen zijn tusschen hetzelfde paar lijnen, parallel aan de basis van de cycloïde.

wordt aangebracht, is geen ander dan het algemeene beginsel van de Grieksche methode ter behandeling van limietovergangen, die men exhaustiemethode pleegt te noemen, maar die eerder inexhaustiemethode zou kunnen heeten, omdat zij gebaseerd is op het inzicht in de onuitputtelijkheid van het oneindige door het doen van eindige stappen en in de noodzakelijkheid, den sprong naar het oneindige (b.v. van polygoon tot kromme), dien de prae-Eudoxische meet-

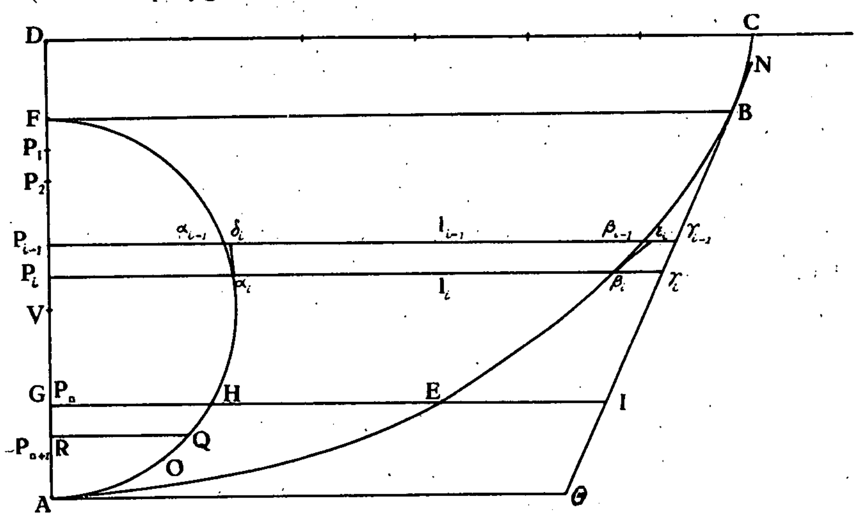


Fig. 13.

kunde zich wel placht te veroorloven, te vervangen door een reductio ad absurdum van de ontkenning van de juistheid van het vermoede eindresultaat.

Wij zullen de eigenlijke kern van de toepassing, die Huygens nu van dit beginsel zal maken, eerst in algemeenen vorm uiteenzetten.

Beschouwd wordt een cycloïdale val uit rust in B tot een willekeurig punt E van boog BA. Als boven is BF parallel aan CD, terwijl een lijn door E, parallel aan CD, de lijn FA snijdt in G, den cirkel FA in H en de cycloïderaaklijn BΘ in I. Zij nu:

t de tijd over boog BE in val uit rust in B.

T de tijd van een eenparige beweging met snelheid $\frac{1}{2}V_\theta$ over het raaklijnsegment BI.

s de lengte van boog FH, k die van het lijnstuk FG.

Te bewijzen is:

$$\frac{t}{T} = \frac{s}{k}.$$

Is dit niet het geval, dan is $\frac{t}{T}$ òf grooter òf kleiner dan $\frac{s}{k}$. [39])

Zij ten eerste $$\frac{t}{T} > \frac{s}{k}$$
dan moet er een tijd Z bestaan met
$$\frac{Z}{T} = \frac{s}{k}, \text{[40]) waarbij } Z < t \text{ (Eucl. V, 13 en 10).}$$
Zij nu t_1 een tijd, voldoende aan $Z < t_1 < t$, dan is
$$\frac{t_1}{T} > \frac{s}{k} \quad \text{(Eucl. V, 8 en 13).}$$
Er bestaat dan [41]) een lengte s_1, zoodat
$$\frac{t_1}{T} = \frac{s_1}{k}, \qquad s_1 > s.$$
Het bewijs komt nu hierop neer, dat er een tijd τ en een lengte σ worden gevonden, zoodat
$$\frac{\tau_1}{T} = \frac{\sigma}{k}$$
$$\tau > t_1, \quad \sigma < s_1.$$
Dit voert tot een contradictie, omdat uit
$$\frac{t_1}{T} = \frac{s_1}{k} \text{ en } \frac{\tau}{T} = \frac{\sigma}{k} < \frac{s_1}{k}$$
volgt $\frac{\tau}{T} < \frac{t_1}{T}$, dus $\tau < t_1$ in strijd met $\tau > t_1$.

De tweede mogelijkheid $\frac{t}{T} < \frac{s}{k}$ kan hierna met soortgelijke redeneeringen worden weerlegd. We beperken ons echter tot het geval $\frac{t}{T} > \frac{s}{k}$.

Het hiermee uiteengezette beginsel wordt nu als volgt toegepast: Zij t_1 de valtijd over boog BE bij val uit rust in N, welk punt

---

[39]) Het is een zwak punt van de Grieksche redentheorie, dat in het vijfde boek van Euclides niet wordt bewezen, dat de relaties grooter, gelijk, kleiner voor redens elkaar aanvullen en elkaar uitsluiten. Ten deele zou dit op de in dit boek gelegde grondslagen wel mogelijk zijn geweest.

[40]) Ook hier schuilt een leemte in de Grieksche methode. De beginselen van de Grieksche wiskunde eischen in het algemeen een constructie als existentiebewijs: Het bestaan van een vierde evenredige tot drie gegeven grootheden wordt echter in bewijzen als het bovenstaande steeds zonder motiveering aangenomen.

[41]) Hier geldt de opmerking van noot 40.

N zoo gekozen wordt op boog CB, dat het verschil $t - t_1$ kleiner is dan het verschil T — Z.

Zij s_1 een boog FGO, waarbij O ligt op boog HA, zoo bepaald, dat aan

$$\frac{t_1}{T} = \frac{s_1}{k}$$

voldaan is.

Het is nu duidelijk, wat we onder τ en σ zullen moeten verstaan. We kennen immers het verband tusschen eenparige bewegingen op raaklijnsegmenten van de cycloïde (welker aantal in de redeneering van § 5 oneindig groot werd gedacht, terwijl het nu eindig zal blijven) en op overeenkomstige segmenten van de raaklijn $B\Theta$, van welke bewegingen de tijden zich verhouden als de lengtes van overeenkomstige segmenten van raaklijnen van den cirkel FA en de lijn FA. We zullen dus voor τ moeten nemen de som van tijden τ_i over raaklijnsegmenten van de cycloïde, voor σ de som van lengtes σ_i van overeenkomstige raaklijnsegmenten van den cirkel. We hebben dan nog slechts τ met t_1 en σ met s_1 te vergelijken.

We verdeelen nu den afstand FG in n gelijke deelen $P_{i-1}P_i$ ($F = P_0$, $G = P_n$)[42]), waarbij n zoo gekozen wordt, dat elk deel kleiner is dan de projectie van NB op de as der cycloïde en kleiner dan de projectie van HO op deze as. Verder zij nog $GR = P_n P_{n+1} = \frac{1}{n} . FG$; R ligt dan tusschen G en de projectie van O op FA. Door de deelpunten P_i trekt men lijnen l_i parallel aan de basis der cycloïde, die den cirkelomtrek snijden in α_i, den cycloïdeboog BA in β_i, de raaklijn $B\Theta$ in γ_i. Door de punten α_i trekt men raaklijnen aan den cirkel en door de punten β_i raaklijnen aan de cycloïde; van beide wordt slechts beschouwd het stuk tusschen l_i en l_{i-1} (resp. $\alpha_i\delta_i$ en $\beta_i\varepsilon_i$). Verstaan we nog onder T_i den tijd over $\gamma_i\gamma_{i-1}$ in eenparige beweging met snelheid $\frac{1}{2}V_\Theta$, dan is volgens Prop. XXIII (eerste deel van het bewijs van § 5), als τ_i den tijd over $\beta_{i-1}\beta_i$ voorstelt in eenparige beweging met een snelheid, gelijk aan de snelheid in β_i in val uit rust in B, terwijl $\sigma_i = \alpha_i\delta_i$:

$$\frac{\tau_i}{T_i} = \frac{\sigma_i}{P_{i-1}P_i}$$

---

[42]) Huygens neemt hier, evenals de Grieken steeds doen, voor n een willekeurig getal (6).

waaruit, op geheel dezelfde manier als in § 5, op grond van een propositie van Archimedes volgt:

$$\frac{\sum\limits_1^n i\,\tau_i}{\sum\limits_1^n i\,T_i} = \frac{\sum\limits_1^n i\,\sigma_i}{\sum\limits_1^n i\,P_{i-1}P_i}$$

óf

$$\frac{\tau}{T} = \frac{\sigma}{k}.$$

Het bewijs zal dus geleverd zijn, indien we nog kunnen aantoonen

$$\tau > t_1 \quad \text{en} \quad \sigma < s_1.$$

De eerste bewering wordt in het begin van Prop. XXIV aangetoond door elken tijd τ_i te vergelijken met den valtijd τ_{1i} over den overeenkomstigen cycloïdeboog in den val uit rust in N. Hierbij blijkt

$$\tau_i > t_{1i}$$

omdat 1) de beginsnelheid op boog $\beta_{i-1}\beta_i$, verkregen door val over N β_{i-1} grooter is dan de eindsnelheid in β_i in val uit rust in B (immers de verticale afstand van β_{i-1} tot β_i is kleiner dan die van N tot B), 2) de snelheid langs $\beta_{i-1}\beta_i$ tijdens de beweging nog aangroeit, terwijl ze in de beweging over $\varepsilon_i\beta_i$ constant gedacht wordt, 3) de weg $\beta_{i-1}\beta_i$ kleiner is dan de weg $\varepsilon_i\beta_i$ [43]).

Sommeerend over alle raaklijnsegmenten vindt men

$$\tau > t_1$$

De tweede bewering wordt met een verwante stelling, die noodig is voor de weerlegging van de onderstelling $\frac{t}{T} < \frac{s}{k}$ bewezen in den loop van de proposities XVI—XX. We toonen haar hier volgens de methode van deze proposities rechtstreeks aan voor fig. 13.

Om de gedachten te bepalen nemen we daarbij aan, dat G ligt tusschen het middelpunt V van den cirkel en A. Dan is er een getal m, zoodat P_m tusschen F en V, P_{m+1} tusschen V en A ligt. Nu is voor $i \leqq m$

$$\alpha_i\delta_i < \text{bg}\ \alpha_i\alpha_{i-1}$$

Dit blijkt als volgt: voor $i \leqq m$, is $\angle\ \alpha_{i-1}\delta_i\alpha_i$ stomp, omdat

---

[43]) Dit wordt, merkwaardig genoeg, zonder nadere motiveering aangenomen.

$\angle P_i a_i \delta_i$, staande op een boog, kleiner dan een halve cirkel, scherp is. Dus geldt

$$a_{i-1} a_i > a_i \delta_i$$

en wegens een postulaat van Archimedes [44]) a fortiori:

$$bg\, a_{i-1} a_i > a_i \delta_i$$

Verder is voor $i > m$

$$\delta_i a_i < \text{bg}\, a_{i+1} a_i$$

wat men inziet, door $\delta_i a_i$ te verlengen en het lijnstuk, dat door de parallelen l_i en l_{i+1} van de lijn $\delta_i a_i$ wordt afgesneden, te vergelijken met boog $a_{i+1} a_i$.

Ten slotte wordt zoo ook

$$\text{H}\,\delta_n = a_n \delta_n < \text{bg}\, a_n \text{Q} = \text{bg HQ}.$$

Sommeerende vinden we dan

$$\sigma = \sum_1^n i\, a_i \delta_i < \text{bg}\, a_0 a_m + \text{bg}\, a_{m+1} \text{Q} < \text{bg FQ} < \text{bg FO} = s_1$$

waarmee het geheele bewijs voltooid is.

De behandeling van de cycloïdale valbeweging wordt hierna besloten door de algemeene formuleering van het tautochronisme in Prop. XXV (verkregen door het punt E van de vorige propositie te laten samenvallen met A) en die van het op fol. 77 van de *Chartae Mechanicae* vermelde corollarium, betreffende de verhouding van valtijden over verschillende deelen van boog BA in val uit rust in B in prop. XXVI.

Hiermee zijn we gekomen aan het einde van ons overzicht. Wij hebben de stelling van het tautochronisme van de cycloïdale valbeweging zich zien ontwikkelen van een vermoeden, uitgesproken in een opmerking van een slordig kladpapiertje uit de *Chartae Mechanicae* tot de op magistrale wijze aangetoonde waarheid, aan welker uiteenzetting het tweede deel van het *Horologium Oscillatorium* is gewijd. Het schijnt ons toe, dat de beschouwing van deze ontwikkeling op zal moeten wekken tot bewondering voor de combinatie van het fantasierijke ontdekkingsvermogen en de volmaakt beheerschte formaliseeringstechniek, die Huygens een eereplaats verzekert onder de geniale figuren van de geschiedenis der Wis- en Natuurkundige Wetenschappen.

---

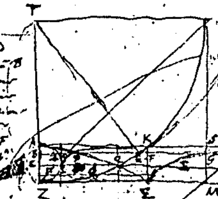
[44]) Dit is het voor alle Grieksche beschouwingen over kromme lijnen fundamenteele 2e postulaat van *De Sphaera et Cylindro* I, dat uitspreekt, dat van twee vlakke, naar denzelfden kant holle, gebogen lijnstukken in hetzelfde platte vlak met dezelfde eindpunten datgene het kleinst is, dat òf geheel omvat wordt door het andere en het rechte lijnstuk, dat de eindpunten verbindt òf ten deele daardoor wordt omvat en ten deele met het andere samenvalt.

72

Hinc data fuit occasio die 1. Decembr. 1659 inventi de Cycloide.

Quaeritur qua ratione habeat tempus minimae oscillationis penduli ad tempus casus perpendicularis ex penduli altitudine. 16

A



Tempus per particulam E, seu K ... est ad tempus per particulam B ... in ratione composita ex longitudinis E ad B, hoc est ex ratione TE ad GB ad EB, et ex ratione ΞZ ad BF ad BA. quae ratio componitur ex qua □ GBF ad □ EBD.

ut □ EBD ad □ FBG ita BF ad BX, unde patet omnes BX ad omnes BF ita esse tempus per KZ ad tempus per AZ cum celeritate ex AZ.

CO — BG — CF — CN

ergo CN ∞ 2BG.

CO ∞ ½ CF

tempus per AZ est aequale tempori motu aequabili per AZ cum ½ celeritate ex AZ.

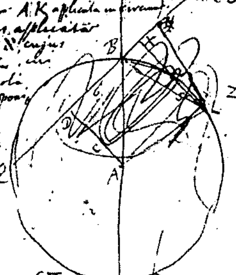
Et tempus per KZ ad tempus per AZ ut spatium infinitum ASPRLNYHVMZA ad 2 □ KZ,

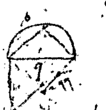
sit AZ ∞ c

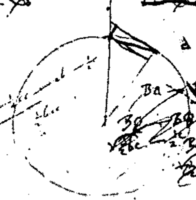
ZM, TZ ∞ b

$\frac{CF}{\sqrt{2bc}}$ — $\frac{CN \infty 2BG}{2b}$ — $\frac{CI}{\frac{1}{2}c / \frac{bc}{\sqrt{2bc}}}$

* considerentur AK applicatae in circumf. tanquam aequales applicatae in parabola ZKA, cujus ½ lat. rectum TZ. cui ... parabola AΘΣ. Hoc est supponitur AK ∞ ZΣ.







CΠ

CI — $\frac{1}{2}c$ — $\sqrt{2bc}$ — $\frac{2q}{p}$

$\frac{\frac{q\sqrt{2bc}}{p}}{2}$

$\frac{2q\sqrt{2bc}}{p}$

$\sqrt{aa-xx}$ BX

$aa - xx - bb \;\sqcap\; \Theta XB \infty \frac{1}{2}cc + cx + \frac{1}{2}xx$

$aa - bb - \frac{1}{2}cc - cx \infty \frac{3}{2}xx$

$\frac{1}{2}cc - cx \infty \frac{3}{2}xx$

$\frac{1}{3}cc - \frac{2}{3}cx \infty xx$

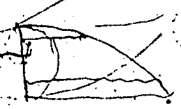
CN. $2b$ — $\frac{2q\sqrt{2bc}}{p}$ ita sunt

spatium infin. ... ad duplum □ KZ, hoc est ita tempus per KZ ad tempus per AZ.

$a - b$, $ar - br$, $ar + br$, $\sqrt{aarr - bbrr}$

$2bc$ — $\sqrt{2bc}$ — $2b$

Sed tempus per AZ ad tempus per TZ ut $\sqrt{2bc}$ ad $\sqrt{2bb}$ hoc est ut $\frac{2q\sqrt{2bc}}{p}$ ad $\frac{2q\sqrt{2bb}}{p}$



Ergo ex aequo tempus per KZ, ad tempus per TZ ut $2b$ ad $\frac{2q\sqrt{2bb}}{p}$. sive ut b ad $\frac{q\sqrt{2bb}}{p}$

hoc est ut p ad $\sqrt{2qq}$.

hoc est ut quadrans circumferentiae ad suam subtensam.

Cum AZ pro arbitrio sumta sit, semper itaque tempus per KZ ad tempus per TZ ut p ad $\sqrt{2qq}$. positis nimirum punctis K et E esse in parabola cujus vertex Z, ½ lat. recta TZ. Sed videndum opus esse, si curva videamus per cujus arcus quosvis in Z terminatos, tempora descensus sint aequalia, ut sic ejus natura, ut quemadmodum ET curvae perpendicularis ad applicatam EB, ita facienda recta data ... ad SB ad illam SB, cadente puncto E in parabola ... Z. Hoc autem Cycloidi convenire ... tangentes ducendo ...