

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDAC-
TIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN

J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

MET MEDEWERKING VAN

Dr. H. J. E. BETH
DEVENTER

Dr. E. J. DIJKSTERHUIS
OISTERWIJK

Dr. G. C. GERRITS
AMSTERDAM

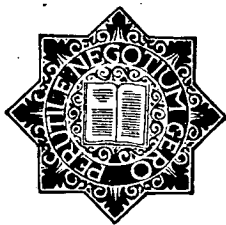
Dr. B. P. HAALMEIJER
AMSTERDAM

Dr. D. J. E. SCHREK
UTRECHT

Dr. P. DE VAERE
BRUSSEL

Dr. D. P. A. VERRIJP
ARNHEM

5e JAARGANG 1928/29, Nr. 4



P. NOORDHOFF — GRONINGEN

Prijs per Jg. van 18 vel f 6.—. Voor inteekenaars op het
Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde en Christiaan Huygens f 5.—.

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken, verschijnt in zes tweemaandelijksche afleveringen, samen 18 vel druks. Prijs per jaargang *f* 6.—. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6.—) of op „Christiaan Huygens” (*f* 10.—) zijn ingeteekend, betalen *f* 5.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans-van-Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Het honorarium voor geplaatste artikelen bedraagt *f* 20.— per vel.

De prijs per 25 overdrukken of gedeelten van 25 overdrukken bedraagt *f* 3,50 per vel druks *in het vel gedrukt*. Gedeelten van een vel worden als een geheel vel berekend. Worden de overdrukken buiten het vel verlangd, dan wordt voor het afzonderlijk drukken bovendien *f* 6.— per vel druks in rekening gebracht.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

INHOUD.

	Blz.
Dr. PAUL DE VAERE, De wiskunde in het Belgisch middelbaar onderwijs	145
Boekbesprekingen	168
CH. M. VAN DEVENTER, Een foutieve natuurwet	177

 De redactie heeft het genoegen in deze aflevering het portret te geven van Prof. Dr. J. G. RUTGERS; zij hoopt de portretten van al onze hooggeleerden den Intekenaars achtereenvolgens te kunnen aanbieden.

Ter perse om dezer dagen te verschijnen:

Historische Bibliotheek voor de exacte wetenschappen

I. DE ELEMENTEN VAN EUCLIDES

DEEL I — DE ONTWIKKELING DER GRIEKSCHE WISKUNDE
VAN EUCLIDES. BOEK I DER ELEMENTEN
door Dr. E. J. DIJKSTERHUIS

II. INLEIDING IN DE NIET-EUCLIDISCHE MEET- KUNDE OP HISTORISCHEN GRONDSLAG

door Dr. H. J. E. BETH

Prijs bij intekening 2 deelen geb. à *f* 3,90, afzonderlijke prijs *f* 4.50

UITGAVEN VAN P. NOORDHOFF TE GRONINGEN

DE WISKUNDE IN HET BELGISCH MIDDELBAAR ONDERWIJS

DOOR

Dr. PAUL DE VAERE (Brussel).

De discussie welke zich in de jaargangen II, III en IV van dit tijdschrift ontsponnen heeft naar aanleiding van het leerplan voor het onderwijs in de exacte vakken aan de Hollandsche Hoogere Burgerscholen en van de opleiding van de met dat onderwijs gelaste docenten, is ook voor leeraars in het buitenland buitengewoon interessant geweest, omdat ze hun vergund heeft een blik te werpen in het Hollandsch Middelbaar Onderwijs, en de daar heerschende toestanden en gekoesterde wenschen met die in eigen land te vergelijken.

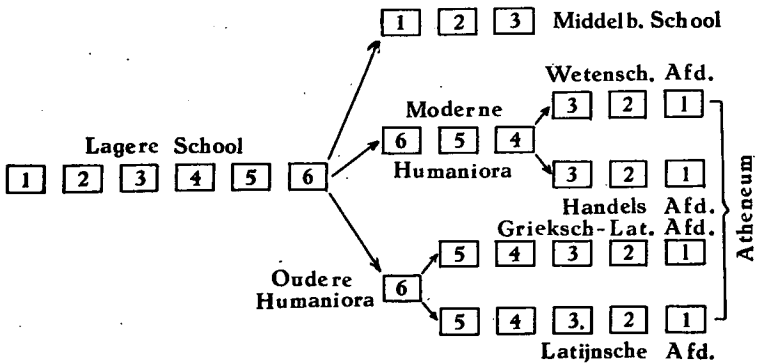
Nu is het omgekeerd wellicht belangwekkend voor Hollandsche docenten een en ander te vernemen omtrent het Wiskunde-onderwijs in andere landen. Wij willen dan ook pogen, in de volgende bladzijden, een idee te geven van de huidige inrichting van het Belgisch Officieel Middelbaar Onderwijs, het onderwijs in de Wiskunde, de opleiding van de leeraars.

Op die manier drage **Euclides**, zij het dan ook in bescheiden mate, bij tot de voortzetting van de taak welke wijlen de C. I. E. M. (I. M. U. K.) zich tot doel gesteld had. De in opdracht van dat organisme door de Belgische sub-commissie uitgebrachte verslagen, werden in boekvorm verzameld en uitgegeven onder den titel: *Rapports sur l'Enseignement des Mathématiques, du Dessin et du Travail manuel dans les Ecoles primaires, les Ecoles normales primaires, les Ecoles moyennes, les Athénées et les Collèges belges* (Brussel, J. Goemaere, 1911). In dit werk treft men tal van belangwekkende bijzonderheden aan, o.a. over de historische ontwikkeling van het Belgisch Middelbaar Onderwijs sedert het begin der 19de

eeuw, over het in 1910 (en tot 1924) in zwang zijnde leerplan, zijne gebreken en leemten, de destijds gewenschte (en sindsdien ten deele verwezenlijkte) hervormingen en aanvullingen. Over de opleiding en het wettelijk statuut van de leeraars kan men een artikel naslaan van **J. Rose**: *La préparation théorique et pratique des professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Secondaire en Belgique* in **L'Enseignement mathématique**, 18de jaargang, 1916, blz. 335—352, waarvan de meeste gegevens tegenwoordig nog juist zijn.

In de volgende bladzijden wordt alleen gehandeld over den huidige toestand, en blijven alle historische beschouwingen achterwege; waar bovendien deze bijdrage slechts als informatie voor Hollandsche belangstellenden en niet als mogelijke kritiek bedoeld is, willen wij ons ook onthouden van alle op- of aanmerkingen.

1. DE INRICHTING VAN HET BELGISCH MIDDELBAAR ONDERWIJS.



De leerling die van 6 tot 12 jaar de zes klassen der lagere school doorloopen heeft en middelbare studiën wil aanvangen, heeft te kiezen tusschen de *Middelbare School* en het *Atheneum* (of *College*).

De *Middelbare School* omvat 3 studie jaren en kan, in een eerste benadering, bij een Hollandsche H.B.S. met 3-jarigen cursus vergeleken worden.

Het *Atheneum* is gesplitst in twee afdelingen die elk 6 studie-jaren omvatten: de *Oudere Humaniora* (vgl. het Hollandsch Gymnasium) en de *Moderne Humaniora* (die een H.B.S. met 6-jarigen cursus zou kunnen heeten). Het Atheneum vertoont dus eenige gelijkenis met de Hollandsche Lycea, maar verschilt daarvan toch.

hierin, dat geen aan beide afdeelingen gemeenschappelijke onderbouw aanwezig is; de programma's loopen reeds van het eerste jaar af uiteen. Het spreekt dus ook vanzelf dat België niet het in Holland gehuldigd onderscheid tusschen Middelbaar en Voorbereidend Hooger Onderwijs kent.

De *Oudere Humaniora* op hare beurt wordt na de 6de, d.i. laagste, klasse (de rangnummers der klassen nemen af van de laagste tot de hoogste, zooals in Frankrijk en Duitschland) gesplitst in een *Grieksch-Latijnsche afdeeling* en in een *Latijnsche afdeeling*, deze laatste zonder Grieksch, echter met een sterk uitgesproken wiskundig karakter (vgl. de splitsing van het Hollandsch Gymnasium in een A en een B afdeeling).

In de *Moderne Humaniora* heeft eveneens een splitsing plaats, echter pas na de 4de klas, dus na 3 jaar gemeenschappelijke studiën, en wel in een *Wetenschappelijke Afdeeling* (met hetzelfde sterk wiskundig programma als de Latijnsche afdeeling) en een *Handelsafdeeling* (vgl. de B en de A afdeeling van de H.B.S.).

Tot 1924 verstrekke de *Middelbare School* een soort vrij degelijk M.U.L.O. onderwijs, met practische tendenz, dat vrijwel een afgerond geheel vormde, en de leerlingen voorbereidde tot niet-leidende betrekkingen op kantoren of in openbare besturen.

Sinds 1924 stemt het programma der *Middelbare School* voor jongens volkomen overeen met dat van de drie laagste klassen van de *Moderne Humaniora* van het Atheneum, zoodat het overbodig wordt in de volgende bladzijden nog speciaal over de *Middelbare School* te handelen; nochtans dient vermeld te worden dat de leerstof op de *Middelbare School* voor meisjes minder uitgebreid is dan die voor jongens.

Het programma van de *Oudere Humaniora* van het Atheneum omvat de volgende leervakken: Godsdienst of Zedeleer, 1ste, 2de, 3de, 4de taal, Latijn, Grieksch (alleen in de *Grieksch-Latijnsche afdeeling*), Geschiedenis, Aardrijkskunde, Wiskunde, Wetenschappen (Natuurlijke Historie, Natuur- en Scheikunde), Teekenen, Muziek, Turnen; dat der *Moderne Humaniora*, dezelfde vakken, uitgezonderd Latijn en Grieksch, bovendien echter Handelskennis (niet in de *Wetenschappelijke afdeeling*) en Handenarbeid (in de 3 laagste klassen).

Sommige dezer vakken zijn facultatief gesteld; geen enkel leerling mag trouwens meer dan 34 uren les in de week bijwonen.

Tot welke loopbanen bereidt elke afdeeling hare leerlingen voor — afgezien van de algemeene cultuur die ze hun verstrekt?

A.s. doctoren in de Letteren en Wijsbegeerte, in de Rechten, in de Natuurlijke Wetenschappen, in de Medicijnen zijn verplicht de lessen der *Grieksch-Latijnsche afdeeling* te volgen (een verouderde wetgeving legt deze verplichting ook op aan de beide laatste categorieën, tot groot nadeel van de voor hen zoo onontbeerlijke wiskundige vorming); oud-leerlingen dier afdeeling gaan trouwens zonder examen van het Atheneum naar de hoogervermelde Faculteiten over.

Oud-leerlingen der *Latijnsche* of der *Wetenschappelijke afdeeling* (beide hebben hetzelfde wiskunde-programma) studeeren in hoofdzaak verder voor ingenieur of voor doctor in de Wis- en Natuurkunde; in het eerste geval dienen zij een toelatingsexamen tot de Universiteit af te leggen, in het tweede geval niet.

Van de oud-leerlingen der *Handelsafdeeling* studeeren enkele voort aan Handelshoogescholen (of daarmee gelijkstaande inrichtingen), terwijl de meerderheid een betrekking zoekt in privaats ondernemingen of in openbare besturen.

Oud-leerlingen der *Grieksch-Latijnsche afdeeling* kunnen het toelatingsexamen tot de *Militaire School*, afdeeling Infanterie of Cavalerie, afleggen; zij die tot de afdeeling Genie of Artillerie toegang wenschen, moeten het zwaarder wiskundig programma der *Latijnsche* of *Wetenschappelijke afdeeling* doorgewerkt hebben.

De beoordeeling der leerlingen was tot in de laatste jaren uitsluitend gesteund op de uitslagen van drie driemaandijksche schriftelijke proeven; sinds het schooljaar 1926-27 is (samen met een nieuw leerplan) een gansch nieuw stelsel in zwang gekomen, waarbij aan maandelijks toegekende cijfers hetzelfde belang gehecht wordt als aan twee schriftelijke proeven die eind Januari en eind Juni afgenomen worden.

Om tot een volgende klasse toegelaten te worden moet de leerling de helft der punten behaald hebben in alle verplichte vakken; is zulks niet het geval, dan kan hij toch overgaan als hij met succes een bij het begin van het schooljaar (15 September) afgenomen proef doorstaat in die vakken waarin hij faalde.

Na de 1ste (hoogste) klasse, wordt een openbaar en mondeling *eindexamen* afgenomen, dat als bekrachtiging der middelbare studiën kan beschouwd worden. Het is echter niet het einddiploma, wel het door het schoolhoofd (*prefect*) afgeleverde *getuigschrift van volledig middelbaar onderwijs* dat aan sommige categorieën van leerlingen (zie hooger) examenvrije toegang tot de Universiteit verleent. Deze getuigschriften moeten, evenals die welke door vrije, niet geïnspecteerde gestichten afgeleverd worden, door een speciaal daartoe aangestelde Staatscommissie bekrachtigd worden.

Terwijl de inrichting van het Officieel Lager Onderwijs aan de gemeentebesturen toevertrouwd is (onder Staatstoezicht), wordt het Middelbaar Onderwijs hoofdzakelijk verstrekt in Rijksinstellingen (*Rijksmiddelbare Scholen* en *Koninklijke Athenea*); er bestaan bovendien enkele provinciale en gemeentelijke inrichtingen, talrijke vrije (katholieke) gestichten, waarvan slechts een klein aantal aan Rijkstoezicht onderworpen zijn, en enkele privaat instellingen.

Er bestaan tegenwoordig in België:

A. *Middelbare Scholen voor jongens.*

91 Rijksmiddelbare Scholen, 7 gemeentelijke, 7 aan Staatstoezicht onderworpen vrije.

B. *Middelbare Scholen voor meisjes.*

46 Rijksmiddelbare Scholen, 8 gemeentelijke, 2 aan Staatstoezicht onderworpen vrije.

C. *Athenea voor jongens* (of daarmee gelijkstaande inrichtingen).

24 Koninklijke Athenea, 11 aan Rijksmiddelbare Scholen gehechte Atheneumafdeelingen; 1 provinciaal atheneum; 3 gemeentelijke athenea; 9 aan Rijkstoezicht onderworpen (katholieke) colleges.

Er bestaan nog geen Rijksathenea voor meisjes; wel zijn een paar Koninklijke Athenea ook voor hen toegankelijk gesteld, en zijn bij enkele Rijksmiddelbare Scholen voor meisjes Atheneumafdeelingen gevoegd. De meisjes die volledig middelbaar onderwijs verlangen zijn in hoofdzaak aangewezen op 1 provinciale en 8 gemeentelijke inrichtingen, *Lycea* geheeten.

Wij wijzen nog op het bestaan van een „*Verbeteringsraad voor het Middelbaar Onderwijs*”, een officieele, uit hoogleeraars en

leeraars M.O. bestaande commissie, wier advies door de Minister ingewonnen wordt bij elke het Middelbaar Onderwijs betreffende hervorming; en op het feit dat alle in het Middelbaar Onderwijs gebruikte leerboeken dienen goedgekeurd te worden door eene van Regeeringswege aangestelde boekencommissie.

II. HET LEERPLAN VOOR HET ONDERWIJS IN DE WISKUNDE.

Het leerplan voor de Athenea was sinds 1887 ongewijzigd gebleven en mocht dan ook vrij verouderd heeten, toen het in 1924 ingrijpende veranderingen onderging.

De moderniseering bestond vooral in 1° het op den voorgrond brengen van het functiebegrip en van de grafische voorstelling; 2° het invoeren (uitgezonderd in de Handelsafdeeling) van de grondbeginselen van de Differentiaalrekening (geen Integraalrekening); 3° het invoeren van het rekenen met de natuurlijke waarden der goniometrische functies; 4° een bescheiden poging tot het invoeren van een propaedeutische cursus voor het Meetkunde-onderwijs. Zulks beteekent natuurlijk niet dat deze onderwerpen vóór die tijd volkomen genegeerd werden; tal van leeraars brachten ze ter sprake in hun onderwijs; officieel echter bestond daartoe geen verplichting.

Voor deze nieuwigheden werden de volgende hoofdstukken geofferd:

A. In de *Rekenkunde*: oude en vreemde maten; verkorte bewerkingen; n^{de} machtswortel uit een getal voor $n > 3$; algemeene theorie van de talstelsels; bewerkingen, deelbaarheid en repeteerende breuken in andere talstelsels dan het tientallige.

B. In de *Algebra*: het bepalen, met elementaire hulpmiddelen, van de uiterste waarden van sommige functies; de methode der onbepaalde coëfficiënten; onbepaalde vergelijkingen; repeteerende kettingbreuken; n^{de} machtswortel van een veelterm ($n > 2$).

C. In de *Trigonometrie*: toepassingen van de Boldrichoeksmeting.

In 1926 onderging het programma nogmaals wijzigingen; diep ingrijpend waren deze niet; het ging in hoofdzaak over de verdeling van de leerstof tusschen de verschillende klassen. Bovendien

werden, in de Grieksch-Latijnsche Afdeeling, de eischen betreffende de beginselen der Differentiaalrekening eenigszins lager gesteld, dit in verband met het beperkte aantal lesuren.

Alvorens een samenvatting te geven van dit thans van kracht zijnde leerplan 1926, mogen hier nog enkele opmerkingen volgen.

Mechanica en Kosmografie komen, evenmin als op het oud, op het nieuw programma niet voor; enkele hoofdbegrippen komen natuurlijk ter sprake in de Natuurkunde- of Aardrijkskundeles; een systematisch, wiskundig getint onderwijs in de Mechanica en Kosmografie wordt echter niet gegeven.

De leer van de logarithmen wordt gegrondvest op het in verband brengen van een meetkundige en een rekenkundige reeks, niet op een der omgekeerde bewerkingen van de machtsverheffing.

De in België gebruikte Meetkundeboeken, huldigen nog steeds de door **Legendre** ingevoerde, en met die van **Euclides** niet overeenstemmende verdeeling der Meetkunde in acht „Boeken”: I behandelt hoeken, loodlijnen, congruentie en eigenschappen van driehoeken, evenwijdige rechten, veelhoeken, bijzondere vierhoeken; II, de cirkel (met inbegrip van het meten van hoeken door cirkelbogen); III, evenredige lijnstukken, gelijkvormige figuren, oppervlakken; IV, regelmatige veelhoeken, cirkelomtrek en -oppervlak; V, punt, rechte lijn, platte vlak en hunne verbindingen in de ruimte; VI, eigenschappen en inhoud van veelvlakken; VII, eigenschappen van den bol en bolmeetkunde; VIII, oppervlak en inhoud van cylinder, kegel, bol en hunne deelen. (Sommige bewerkers van *Legendre* wisselen VII en VIII om).

Hieronder het aantal lesuren dat wekelijks in de verschillende klassen aan de Wiskunde besteed wordt.

Oudere Humaniora.

6	5	4	3	2	1
4	3	3	3	3	3
	4	4	7	7	7

Klas.

Grieksch-Latijnsche Afdeeling.

Latijnsche Afdeeling.

Moderne Humaniora.

6	5	4	3	2	1
4	4	4	7	7	7
			3	3	3

Klas.

Wetenschappelijke Afdeeling.

Handelsafdeeling.

Ziehier nu, in beknopten vorm, het nogal in bizonderheden omschreven leerplan; het behelst, bijna voor elke klas, als eerste punt: herhaling van de hoofdzaken uit den vorigen cursus; dit punt zullen wij telkens onvermeld laten.

OUDERE HUMANIORA.

6de Grieksch-Latijnsche (4 uren).

Rekenkunde. Herhalingsoefeningen over de praktijk van het cijferrekenen en van het hoofdrekenen; vraagstukken over het metriek stelsel, het soortelijk gewicht, mengsels en legeringen, regel van drieën, gezelschapsrekening, winst- en verliesrekening, enkelvoudige intrest en disconto.

Theorie van de vier hoofdbewerkingen met geheele, gebroken en decimale getallen en van de deelbaarheid der geheele getallen; bewijs en in formule brengen van de eigenschappen dier bewerkingen (de deeling der geheele getallen echter zonder bewijs).

5de Grieksch-Latijnsche (3 uren).

Rekenkunde. Vraagstukken over dezelfde onderwerpen als in de 6de; algemeene daaruit afgeleide formules.

Theorie der deeling der geheele getallen. Stellingen over machten. Samengestelde breuken. Getallenverhoudingen en evenredigheden.

Verhouding van grootheden; het meten van grootheden. Recht en omgekeerd evenredig.

Meetkunde. 1. De rechte lijn en het platte vlak. Hoeken, loodlijnen. De cirkel. Meten van middelpuntshoeken. Gebruik van liniaal, dubbele decimeter, passer, gradenboog.

2. Beknopte vormleer: constructie en oppervlak van vlakke figuren; inhoud van lichamen.

4de Grieksch-Latijnsche (3 uren).

Rekenkunde. G.G.D. door deeling. Vierkantswortel.

Algebra. 1. Letterformuleering van eigenschappen uit de Rekenkunde.

2. Invoering der negatieve getallen; afbeelding, op de punten van een rechte, van de positieve en negatieve getallen, en van tijdstippen.

3. Algebraïsch rekenen, tot de deeling van twee veeltermen (niet inbegrepen).

BESTELKAART VOOR BOEKWERKEN.

Binnenland

1½ cts.

Aan de N.V. Erven P. NOORDHOFF's
Uitgeverszaak

POSTBUS 39

Postbus . . . No. 39.
Giro Ned. Bank No. 1858.
Post giro . . . No. 6593.

GRONINGEN.

Ondergeteekende, abonné op { „Christiaan Huygens”
„N. T. voor Wiskunde” *)
„Euclides” (het vroegere Bijvoegsel)

verzoekt toezending van een exemplaar:

Prof. H. J. v. VEEN,
LEERBOEK DER BESCHRIJVENDE MEETKUNDE
DEEL II.

tegen den verminderden prijs: geb. à f 6.25 (Gewone prijs is f 7.75,) door bemiddeling van den boekhandel
direct per post,

.....
Naam:

.....
Woonplaats:

.....
*) Ieder abonné heeft slechts recht op 1 ex. en mits besteld voor 1 Juni 1929

4. Deelbaarheid door $x \pm a$; toepassing op de ontbinding in factoren.

5. Breuken.

Meetkunde. 1. Slot van het 1ste Boek.

2. Toepassingen op het landmeten.

3. 2de Boek.

3de Grieksch-Latijnsche (3 uren).

Algebra. 1. Algemeene stellingen over gelijkheden, ongelijkheden, vergelijkingen.

2. Vergelijkingen en vraagstukken van den 1en graad met 1 of 2 onbekenden.

3. Verloop en grafiek der lineaire functie. Vergelijking van een rechte. Toepassing op nr. 2.

Meetkunde. 3de Boek.

2de Grieksch-Latijnsche (3 uren).

Algebra. 1. Wortelvormen van den 2den graad.

2. Tweedemachtsvergelijkingen en vraagstukken. Positieve en negatieve toestand van $ax^2 + bx + c$.

3. Grafiek van $y = ax^2 + bx + c$ en toepassing op nr. 2.

4. Reken- en meetkundige reeksen. Logarithmen. Samengestelde intrestrekening.

Meetkunde. 4de en 5de Boek (drie- en veelvlakshoeken uitgezonderd).

Driehoeksmeting. Bepaling der goniometrische verhoudingen. Betrekkingen tusschen de goniometrische verhoudingen van een zelfden hoek, van twee hoeken die elkaars complement of supplement zijn. Gebruik der tafels der natuurlijke waarden. Eenvoudigste eigenschappen en oplossing van rechthoekige en willekeurige driehoeken. Eenvoudige toepassingen op het landmeten.

1ste Grieksch-Latijnsche (3 uren).

Algebra. 1. Algemeene begrippen over functies, grenswaarden, continuïteit.

2. Begrip afgeleide en afgeleide functie; afgeleide en raaklijn.

3. Afgeleide en grafiek (met raaklijnen) van $y = f(x)$ als $f(x)$ een geheele algebraïsche vorm is.

4. Onderzoek, met behulp van de afgeleide, naar het stijgen en dalen en naar de uiterste waarden van een functie; toepassing op $x(a-x)$ en $x + a/x$.

Meetkunde. 6de, 7de, 8ste Boek (de hoofdzaken; geen boldriehoeken of bolveelhoeken).

6de Latijnsche (4 uren).

Rekenkunde. Zie 6de Grieksch-Latijnsche.

Meetkunde. Zie 5de Grieksch-Latijnsche.

5de Latijnsche (4 uren).

Rekenkunde. Zie 5de Grieksch-Latijnsche.

Algebra. Zie 4de Grieksch-Latijnsche, nr. 4 uitgezonderd.

Meetkunde. Zie 4de Grieksch-Latijnsche.

4de Latijnsche (4 uren).

Rekenkunde. G.G.D. door deeling; eigenschappen. Stellingen over onderling ondeelbare getallen. Vierkantswortel. Vraagstukken over samengestelde intrest, annuïteiten, lijfrenten, verzekeringen (gebruik van tafels).

Algebra. 1. Deeling van twee veeltermen. Deelbaarheid door $x \pm a$.

2. Eerstegraadsvergelijkingen en vraagstukken (met bespreking) met een of meer onbekenden.

3. Ongelijkheden.

4. Hoofdzaken over wortelvormen van den 2den graad (met het oog op hun optreden in de *Meetkunde*).

5. Oplossen van tweedegraadsvergelijkingen en vraagstukken.

Meetkunde. 3de Boek en een deel van het 4de (regelmatige veelhoeken met 3, 4, 5, 6, 10 zijden). Het opmeten van een terrein.

3de Latijnsche (7 uren).

Theorie der Rekenkunde. Algemeene herhaling en aanvulling: G.G.D., K.G.V., onderling ondeelbare getallen, priemgetallen, deels van een getal (opzoeken, aantal, som, product), 3de machtswortel, repeteerende breuken, benaderde waarden.

Algebra. Deeling door $x \pm a$ (reststelling en rekenwijze van Horner).

Vierkant en vierkantswortel van een veelterm. Het rationaal maken van noemers.

Plaatsbepaling op een rechte. Formule van Möbius—Chasles voor n punten op een rechte. Harmonische ligging van vier punten.

Plaatsbepaling in het platte vlak. Verloop en grafiek van de lineaire functie. Vergelijking van een rechte. Grafische oplossing

van eerstegraadsvergelijkingen en vraagstukken met twee onbekenden.

Vierkantsvergelijkingen (met eigenschappen der wortels) en vergelijkingen welke tot vierkantsvergelijkingen leiden. Herleiding van

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} \text{ tot } \sqrt{a} \pm \sqrt{\beta}.$$

Positieve en negatieve toestand en grafiek van $y = ax^2 + bx + c$; een gegeven getal met de wortels van een gegeven vierkantsvergelijking vergelijken. Algebraïsche en grafische oplossing van het stelsel

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c, \\ mx + ny + p = 0. \end{cases}$$

Reken- en meetkundige reeksen; bepaling van $1^a + 2^a + \dots + n^a$ voor $a = 1, 2, 3$, en van de som van enkele eenvoudige reeksen.

Logarithmen. Samengestelde intrest en annuïteiten.

Meetkunde. Vervolg en slot van het 4de Boek, met inbegrip van de berekening van π . 5de Boek.

Driehoeksmeting. Uitbreiding van de begrippen boog en hoek. Formules van Möbius-Chasles voor bogen en hoeken. Bepaling, verloop, eigenschappen der goniometrische functies. Stellingen over het projecteerēn van vectoren. Optelling- en verdubbelingformules. Herleiding van sommen of verschillen tot producten. Het werken met natuurlijke en logarithmische tafels. Eenvoudige goniometrische vergelijkingen. Eigenschappen en oplossing van driehoeken. Toepassing op het bepalen van afstanden.

2de Latijnsche (7 uren).

Algebra. Algemeene stellingen betreffende machten en wortels; gebroken en negatieve exponenten; binomium van Newton.

Determinanten en toepassingen op lineaire stelsels.

Grenswaarden. Schijnbaar onbepaalde vormen. Continuïteit van functies.

Irrationale getallen.

Kettingbreuken (ook oneindig voortlopende, echter geen periodieke).

Eerste begrippen over reeksen en eenvoudige convergentiekenmerken. Convergentie van de e -reeks.

Exponentieele functie; hare continuïteit; grafische voorstelling; exponentieele vergelijkingen.

Theorie van de logarithmen gesteund op de exponentieele functie; overeenstemming met de vroegere theorie (zie 3de Lat.). Vergelijking van verschillende logarithmenstelsels; natuurlijke logarithmen; modulus van een logarithmenstelsel.

Begrip afgeleide; afgeleide van x^n (n willekeurig), van de goniometrische functies, van een functie van een functie, van sommen, verschillen, producten, quotiënten van functies.

Stijgen en dalen, uiterste waarden van een functie. Toepassingen op eenvoudige, algebraïsche en goniometrische functies; in 't bijzonder op $x + y$ als $xy = C$ en $x^a y^b$ als $x + y = C$.

Toepassingen op vraagstukken van meetkundigen, mechanischen of natuurkundigen aard.

Meetkunde. 6de, 7de, 8ste Boek (de theorie van den boldriehoek af te leiden uit die van den drievlakshoek).

Complement der Meetkunde. Stellingen van Menelaos en Ceva. Dubbelverhouding van vier punten, stralen, vlakken op een zelfden drager; ook van vier punten op of van vier raaklijnen aan een cirkel. Harmonische viertallen. Harmonische eigenschappen van de volledige vierhoek en de volledige vierzijde.

Vermenigvuldiging, gelijkvormigheid en inversie van figuren in het platte vlak en in de ruimte.

Macht, machtlijn, machtvlak, machtpunt (bij cirkel en bol).

Pool en poollijn bij den cirkel; pool en poolvlak bij den bol.

Driehoeksmeting. Aanvulling van het programma van de 3de Lat. (goniometrische vergelijkingen, verdere eigenschappen van den driehoek, oplossing van driehoeken in andere gevallen dan de hoofdgevallen).

Complexe getallen; hunne afbeelding in het complexe vlak; formules van Moivre; afleiding van $\cos nx$ en $\sin nx$.

Analytische Meetkunde (rechthoekige coördinaten). Het punt en de rechte lijn; evenwijdige assenverschuiving.

Vergelijking van cirkel, ellips, hyperbool, parabool, uitgaande van hunne meetkundige bepaling. Topvergelijking dier krommen; daaruit afleiden dat zij als vlakke doorsneden van een rechten cirkelkegel te bekomen zijn.

Constructie van eenvoudige krommen gegeven door hun vergelijking $y = f(x)$; raaklijnen; holle en bolle zijde; buigpunten. Studie van de sinusoiden.

1ste Latijnsche (7 uren).

Herhaling. De bizonderste punten uit den cursus van de 3de en de 2de (door de leerlingen voor te bereiden).

Aanvulling. Uitbreiding van sommige theorieën; bijv.: talstelsels in 't algemeen; repeteerende breuken in een willekeurig talstelsel; n^{de} worteltrekking van een getal; onderling onmeetbare grootheden; aanvullend bewijs voor stellingen uit de Meetkunde waarin onderling onmeetbare grootheden optreden.

Analytische Meetkunde. Herhaling van het programma van de 2de Lat. met uitbreiding tot scheefhoekige coördinaten. Transformatieformules. Homogene coördinaten.

Stralenwaaier. Tweestraal voorgesteld door $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$. Meetkundige plaatsen.

Studie van de kromme voorgesteld door de algemeene 2de graadsvergelijking $f(x, y) = 0$: indeeling, constructie, snijpunten met een rechte, positieve en negatieve toestand van $f(x, y)$; raaklijnen, normalen (hyperbool van Apollonius); asymptoten; pool en poollijn, wederkeérige poolfiguren; kegelsneden door 5, 4, 3 punten; stellingen van Pascal en Brianchon met toepassing op de constructie van kegelsneden; middelpunt; middellijnen, toegevoegde middellijnen; assen; brandpunten en richtlijnen.

Herleiding der algemeene vergelijking tot eenvoudiger vormen, en daarop gesteunde studie der kromme.

Stellingen van Dandelin.

Meetkundige plaatsen. Vermenigvuldiging van figuren.

Poolvergelijking van de rechte, den cirkel, de kegelsneden en enkele merkwaardige krommen.

Boldriehoeksmeting. Willekeurige driehoeken: betrekkingen tussen vier elementen; formules van Delambre en Neper. Betrekkingen in den rechthoekigen driehoek (af te leiden uit de vorige). Toepassingen.

Beschrijvende Meetkunde. Het punt, de rechte lijn, het platte vlak. Het aannemen van nieuwe projectievlakken, het neerslaan van vlakken, het wentelen. Bepalen van afstanden en hoeken. Vlakke doorsneden van prisma's en pyramiden.

MODERNE HUMANIORA.

6de Moderne	}	zie	6de Latijnsche
5de „			5de „
4de „			4de „
3de Wetenschappelijke			3de „
2de „			2de „
1ste „			1ste „

HANDELSAFDEELING.

Bij het hieronder geschetste leerplan komt nog, in elke klas, een flinke dosis Handelsrekenen, waarvan het onderwijs doorgaans aan den leeraar in de Handelswetenschappen toevertrouwd is.

3de Handelsklas (3 uren).

Algebra. Reken- en meetkundige reeksen. Logarithmen. Samengestelde intrest. Kapitaalvorming door annuïteiten. Gebruik van tafels.

Driehoeksmeting. Zie 2de Grieksch-Latijnsche.

2de Handelsklas (3 uren).

Algebra. Binomium van Newton. Binomiaalreeks (zonder bewijs). Aflossing van leeningen door annuïteiten.

Meetkunde. 5de Boek (de hoofdzaken; geen drievlakshoeken).

1ste Handelsklas (3 uren).

Algebra. Aflossing van obligatieleeningen, ook in meer ingewikkelde gevallen. Lijfrenten en levensverzekeringen.

Meetkunde. Zie 1ste Grieksch-Latijnsche.

Om een denkbeeld te geven van den geest waarin dit programma moet uitgewerkt worden, laten wij hier een beknopte samenvatting volgen van de methodologische wenken welke het leerplan 1926 vergezelden.

Het hoofddoel van het Wiskunde-onderwijs is niet het verstrekken van een zekere dosis wetenschap, wel het scholen van den geest en het leeren wiskundig denken. Daartoe zal in de eerste plaats het logisch verband tusschen de verschillende deelen van de leerstof in 't licht gesteld worden; zal elk nieuw vraagstuk zóó voorgesteld

en behandeld worden dat de leerlingen actief meewerken tot zijn oplossing; zal het ex-cathedra-onderwijs zooveel mogelijk vermeden worden; zal de leeraar, na elk deel van den cursus dat een afgerond geheel vormt, de onderlinge afhankelijkheid tusschen de verschillende stellingen door de leerlingen laten opzoeken, punten van overeenkomst en van afwijking met gelijkaardige theorieën laten aanstippen.

De aanschrijving van 1926 wees bovendien alle leeraars M.O. op de noodzakelijkheid om, meer dan vóórheen het geval was, de leerlingen te dwingen tot zelfwerkzaamheid in de klas, door het invoeren van het stelsel van de zoogenaamde „geleide oefeningen” (de Amerikanen heeten het „*supervised study*” en de Franschen, „*travail dirigé*”).

Het in de vorige bladzijden geschetste leerplan, in 1924 ingevoerd en in 1926 licht omgewerkt, moest tijdens het schooljaar 1924—25 in de laagste klas en daarna, trapsgewijze, in de volgende toegepast worden, zoodat het pas in 1929—30 in zijn vollen omvang van kracht zal zijn; waarschijnlijk zal het vóór die tijd nog wijzigingen ondergaan.

Reeds in 1922 had de *Vrije Universiteit te Brussel*, voor het toelatingsexamen tot hare *Polytechnische School*, eischen gesteld die tamelijk ver boven het toenmalig programma van het Middelbaar Onderwijs uitgingen, en thans nog boven het tegenwoordig leerplan uitgaan door de volgende onderwerpen:

Analytische Meetkunde. Begrip en gebruik van lijncoördinaten bij de analytische studie van het punt, de rechte lijn, de kegelsneden. Begrip van algemeene ternaire coördinaten. Imaginaire elementen; isotrope rechten, cirkelpunten. Invarianten bij kegelsneden. Kegelsneebundels en -scharen.

Beschrijvende Meetkunde. Het programma van de 1ste Latijnsche, echter zoowel in gewone orthogonale als in genummerde projectie.

Daar de eischen voor dit examen ten huidigen dage in België het summum voorstellen van wat gevergd wordt, op wiskundig gebied, van leerlingen die uit een Latijnsche of Wetenschappelijke Afdeling van een Atheneum komen, laat ik hier de vragen volgen in Juli 1928 gesteld op de schriftelijke proef van het *Toelatingsexamen tot de Polytechnische School gehecht aan de Universiteit te Brussel*.

Analytische Meetkunde en Algebra.

In een rechthoekig assenkruis Ox, Oy stellen x, y, z de homogene puntcoördinaten en u, v, w , de homogene lijncoördinaten voor.

I. $2u + w = 0, 2u - w = 0,$

zijn de vergelijkingen van twee vaste punten M, N ;

$$2u - tv - w = 0, 2u + tv + w = 0.$$

zijn de vergelijkingen van twee veranderlijke punten P, Q (t is een veranderlijk parameter).

Men beschouwt de gelijkzijdige hyperbolen (H) welke door deze vier punten gaan, en men vraagt

1°) de hyperbolen (H) voor dewelke $t = 2, t = 4, t = 6$ in drie afzonderlijke figuren voor te stellen; voor elk hunner bepale men de asymptoten, de reële toppen (A, A_1), de imaginaire toppen (B, B_1), de raaklijn in M (als lengte-eenheid wordt de centimeter aangenomen);

2°) de vergelijkingen op te zoeken der meetkundige plaatsen beschreven door A, A_1, B, B_1 en deze meetkundige plaatsen door een vierde figuur, op dezelfde schaal als de eerste drie, voor te stellen.

II. Vier punten A, B, C, D zijn gegeven door hunne vergelijkingen:

$$2u + 2v + w = 0,$$

$$4u - 2v + w = 0,$$

$$4u + 2v - w = 0,$$

$$2u - 2v - w = 0.$$

Te bewijzen dat er twee vaste punten bestaan waaruit alle in den vierhoek $ABCD$ beschreven kegelsneden onder rechte hoeken gezien worden.

III. Teeken de grafiek van

$$y = \sin x - \cos 2x$$

als x tusschen 0° en 360° verandert.

Men bediene zich daarbij van de eerste en tweede afgeleide van y naar x , en teekene de raaklijnen in het begin- en in het eindpunt van de kromme, in de snijpunten met de x -as en in de buigpunten; de lengte-eenheid worde zoo gekozen dat, op de x as, 360° voorgesteld wordt door een lijnstuk van 12 cm.

Beschrijvende Meetkunde (Genummerde Projecties).

Gegeven (met volledige opgave van de ligging dier elementen in de figuur): 1°) de schaal $2/100$; 2°) een rechte a evenwijdig met

het projectievlak en op een hoogte 8; 3°) twee punten A en B, op hoogten 8 en 13.

Gevraagd: 1°) door de rechte AB een vlak aan te brengen waarvan de helling $\frac{4}{5}$ bedraagt (van de twee vlakken die aan de vraag voldoen, kiese men datgene waarvan de vallijn naar de bovenkant van het blad wijst);

2°) in dat vlak een vierkant te teekenen waarvan AB een diagonaal is;

3°) op dat vlak en in het middelpunt van het vierkant de loodlijn op te richten;

4°) op die loodlijn de punten S en T aan te nemen waarvan de hoogten opvolgend 19 en 2 bedragen;

5°) het achthoek SABCDT te teekenen;

6°) op de ribbe AT het punt E aan te nemen waarvan de hoogte 5 bedraagt;

7°) de doorsnede van het achthoek met het vlak (E α) te bepalen;

8°) van de twee deelen, waarin het achthoek aldus verdeeld wordt, datgene, waarvan T een hoekpunt is, als een ondoorschijnend lichaam af te beelden.

Cijferoefening.

De candidaten zullen, naar keus, één der volgende vragen behandelen:

I. Om een bol is een rechte cirkelkegel beschreven, waarvan de tophoek 2α is.

1°) Druk de verhouding van het buiten den bol gelegen deel van den kegel tot den bol zelf uit in α .

2°) Bereken deze verhouding als $\alpha = 36^\circ 24' 35''$.

3°) Bereken α als deze verhouding $\frac{1}{4}$ is.

De voor 2° en 3° gebruikte formules dienen logaritmisch te zijn.

II. Van een boldriehoek ABC zijn gegeven

$$a = 116^\circ 44' 48'', \quad b = 50^\circ 48' 20'', \quad C = 120^\circ 8' 38''.$$

Bereken A, B en het oppervlak, dit laatste als de straal van den bol 2 meter is.

III. DE OPLEIDING VAN DE LEERAARS IN DE WISKUNDE.

A. Leeraars aan Middelbare Scholen.

Worden alleen benoemd aan Middelbare Scholen, dragers van

het diploma van „geaggregeerd leeraar van het Middelbaar Onderwijs” (doorgaans zegt men „regent”) of van „regentes”.

De opleiding van deze regenten of regentessen geschiedt in zoo-genoemde *Middelbare Normaalscholen*; ze draagt niet het academisch karakter van de opleiding van de Atheneumleeraars, maar is echter paedagogisch beter verzorgd, zooals trouwens die van de lagere onderwijzers welke in *Lagere Normaalscholen* geschiedt.

Er zijn 2 Rijksmiddelbare Normaalscholen voor jongens, en 5 voor meisjes, enkele gemeentelijke inrichtingen en een aantal vrije.

De Studie loopt over drie jaar, opvolgend voorbereidend, 1ste en 2de jaar genoemd. De Middelbare Normaalscholen zijn gesplitst in drie afdeelingen: *Letterkundige Afdeeling*, *Wetenschappelijke Afdeeling*, *Afdeeling voor Germaansche Talen* (sommige inrichtingen bezitten deze laatste niet).

Daar als Wiskunde-leeraars aan Middelbare Scholen bij voorkeur die regenten (of regentessen) aangesteld worden welke uit een Wetenschappelijke Afdeeling komen, slaat het volgende slechts op die afdeeling der jongensnormaalscholen (de eischen voor de meisjes zijn eenigszins lager gesteld).

Het toelatingsexamen tot het voorbereidend studiejaar eischt de kennis van het Wiskunde-programma van de Latijnsche Afdeeling van een Atheneum tot en met de 3de, echter geen Driehoeksmeting. Het leerplan van de drie studie jaren zelf omvat ongeveer de leerstof van de 2de en 1ste Latijnsche, de Boldriehoeksmeting uitgezonderd, echter met inbegrip van de beginselen van de Integraalrekening (primitieve functie, bepaalde en onbepaalde integraal, bepaling van booglengten, oppervlakken en inhouden), genummerde projecties en schaduwconstructies (prisma's en pyramiden).

Aan de paedagogische opleiding worden in de laatste twee studie-jaren wekelijks 6 uren besteed; er zijn leergangen over Opvoedkunde en hare geschiedenis, Beginselen der Logica, Algemeene Methodiek, Methodiek van het Lager en van het Middelbaar Onderwijs; bovendien moeten de leerlingen zoogenoemde modellessen bijwonen, didactische lessen voorbereiden en zelf practische lessen geven (aan leerlingen van lagere of middelbare scholen).

Het overgangsexamen van het tweede tot het derde studiejaar behelst trouwens twee lessen over onderwerpen uit het leerplan van het Lager Onderwijs, en het eindexamen twee lessen (waaronder

steeds een van Wiskunde) over onderwerpen uit het leerplan van de Middelbare School.

B. Atheneumleeraars.

Van 1852 tot 1890 bestond er, voor de opleiding van Atheneumleeraars, een *Normaalschool voor Letteren* te Luik en een *Normaalschool voor Wetenschappen* te Gent. Beide hebben uitstekende leerkrachten gevormd, werden echter in 1890 opgeslorpt, de eerste door de Faculteit van Letteren en Wijsbegeerte van de Universiteit te Luik, de tweede door de Faculteit van Wetenschappen van de Universiteit te Gent. Sinds 1890 is de opleiding der Atheneumleeraars dus uitsluitend aan de Universiteiten toevertrouwd; examens in den aard van de Hollandsche Middelbare of Hoogere Actes bestaan in België heelemaal niet.

Wat in 't bijzonder de Wiskunde betreft, hebben alleen bevoegdheid tot lesgeven in dat vak (in officieele inrichtingen) de doctoren in de Wis- en Natuurkunde, gepromoveerd aan een van de vier Belgische Universiteiten, nl. de Rijksuniversiteiten te Gent en te Luik, de Vrije Universiteiten te Brussel (vrijzinnig) en te Leuven (katholiek). Wel kan, bij koninklijk besluit, ook bevoegdheid verleend worden aan ingenieurs, maar door het groote aantal doctoren doet dit geval zich practisch gesproken niet meer voor.

De studie in de Wis- en Natuurkunde aan Belgische Universiteiten eischt een minimum van vier jaar; de meeste studenten doen er trouwens niet meer over. Na twee jaar wordt de titel van „*Candidaat in de Wis- en Natuurkunde*” verleend; na nog verdere twee jaar, die van „*Doctor in de Wis- en Natuurkunde*”; de verdediging van het proefschrift maakt deel uit van het doctoraal examen.

Toegang tot de lessen van de Candidatuur hebben alleen de leerlingen die een volledige Latijnsche of Wetenschappelijke Afdeeling van een Atheneum (of daarmee gelijkgestelde inrichting) doorloopen hebben, of die met goed gevolg een toelatingsexamen aflegden waarvan het programma, in zake Wiskunde, gelijk staat met dat dezer afdeelingen.

In de *Candidatuur* worden de volgende vakken gedoceerd: Hoogere Algebra (de theorie van de determinanten inbegrepen), Differentiaal- en Integraalrekening (Differentiaalmeetkunde, Differentie- en Variatierekening inbegrepen), Kinematica en Statica, Beschrijvende Meetkunde, Analytische Meetkunde (in het vlak en in de

ruimte), Projectieve Meetkunde, Proefondervindelijke Natuurkunde, Anorganische Scheikunde, Kristallografie, Natuurkundige Sterrekunde, Logica, Psychologie, Moraalfilosofie. Over deze vakken mag in één- of in tweemaal examen afgelegd worden; de studietijd dient echter minstens twee jaar te bedragen.

Deze beide laatste bepalingen gelden ook voor het *Doctoraat*, waarvan het programma behelst: Hoogere Analysis, Waarschijnlijkheidsrekening, Dynamica, Wiskundige Natuurkunde, Wiskundige Sterrekunde, Wiskundige Methodologie, Geschiedenis der Wis- en Natuurkunde. Bovendien behoort de doctorandus zich te specialiseeren voor een der volgende vakken: Analysis, Hoogere Meetkunde, Mechanica, Sterrekunde, Natuurkunde, de desbetreffende bijzondere cursussen te volgen, en een proefschrift voor te leggen over een tot zijne specialiteit behoorend onderwerp.

De wet verplicht bovendien elke doctor, die later in 't Middelaar Onderwijs wenscht te treden, na zijn eigenlijke promotie twee openbare lessen te geven, een over Elementaire Wiskunde en een over Elementaire Natuurkunde.

Hoe worden nu de doctorandi tot die lessen — en tot hunne latere werkzaamheden — voorbereid?

Slechts één van de wettelijk verplichte, hooger vermelde leervakken houdt rechtstreeks verband met de paedagogische voorbereiding van den toekomstigen leeraar: de cursus over Wiskundige Methodologie. In werkelijkheid gaat het in de meeste der colleges voor de $\frac{9}{10}$ over Wiskunde en voor $\frac{1}{10}$ over Methodiek. Deze wordt doorgaans beperkt tot eenige algemeene raadgevingen over de kunst van het doceeren, en de cursus is in hoofdzaak gewijd aan Axiomatic en Elementaire Wiskunde uit hooger standpunt beschouwd. Om een idee te geven van de ter sprake komende onderwerpen, geef ik hier de inhoudstafel van het werk „*Introduction à la Méthodologie mathématique*, door **Prof. M. Stuyvaert**,¹⁾ die tot voor korten tijd met dit college aan de Universiteit te Gent gelast was: Préliminaires, Principes de l'Arithmétique, Congruences, Fractions ordinaires, Nombres irrationnels, Nombres négatifs, Corps et domaines, Nombres imaginaires, Les exposants algébriques, Les problèmes antiques, Principes de la Géométrie, Géométrie générale projective. Natuurlijk werden niet elk jaar al deze onderwerpen behandeld.

¹⁾ Gent, Van Rijsselberghe en Rombaut; Parijs, Albert Blanchard; 1923.

Wat nu de verdere paedagogische opleiding van den a.s. leeraar betreft, deze wordt door elke Universiteit, naar eigen goeddunken, geregeld. Ziehier, voor zoover ik mij heb kunnen inlichten, wat de huidige toestand is.

1. *Rijksuniversiteiten te Gent en te Luik.* Naar aanleiding van het college over Wiskundige Methodologie geeft elke student een paar lessen over een onderwerp dat op het leerplan van het Middelbaar Onderwijs voorkomt; professor en medestudenten vormen het auditorium en oefenen kritiek uit.

Te Gent is ook een facultatieve leergang over de praktijk van het onderwijs in de Natuurkunde, waarbij elke student in de gelegenheid gesteld wordt enkele lessen te geven.

In 1928 werd bij elke Rijksuniversiteit een *Hooger Instituut voor Opvoedkunde* gevoegd; voor 't oogenblik verkeert het nog in zijn organisatiestadium; er mag echter verwacht worden dat het later zijn invloed zal laten gelden bij de opleiding der leeraars voor het Middelbaar Onderwijs.

2. *De Vrije Universiteit te Brussel* welke sinds 1919 een college over Opvoedkunde voorzag en in 1926 een zelfstandig Paedagogisch Instituut oprichtte, heeft voor doctorandi drie cursussen ingericht: Algemeene Methodologie, Opvoedkunde, Geschiedenis van de Opvoedkunde; voor a.s. leeraars in letterkundige vakken zijn ze alle drie verplichtend, voor a.s. leeraars in wetenschappen is het alleen de eerste.

3. *Vrije Universiteit te Leuven.* Doctorandi die later in 't Middelbaar Onderwijs wenschen te treden zijn sinds 1923 verplicht, buiten het door de wet voorziene college over Wiskundige Methodologie, nog twee andere colleges met paedagogische strekking bij te wonen, nl. Algemeene Methodiek van het Middelbaar Onderwijs, en Methodiek van het Middelbaar Wiskunde-Onderwijs. Bij dit laatste college behooren didactische oefeningen, wekelijks 2½ uur gedurende twee jaar, waarvan de leiding toevertrouwd is aan een leeraar M.O.; ze bestaan hierin, dat werkelijk les gegeven wordt in een college van de stad, door een student van het doctoraat, in aanwezigheid van zijne medestudenten en van den leider der oefeningen; daarna wordt de les gezamenlijk besproken. Tijdens het eerste jaar worden de lessen over alle klassen willekeurig verdeeld; tijdens het tweede wordt, in verstandhouding met den betrokken collegeleeraar, in een van de hoogste klassen, de uitwerking van een be-

paald deel van het programma (bijv. de beginselen der Differentiaalrekening), algeheel en uitsluitend aan de doctorandi toevertrouwd; met de daarbij behorende ondervragingen en oefeningen; Eindelijk, en als voorbereiding tot de praktijk van het onderwijs in de Natuurkunde, fungeeren de studenten van het 1ste doctoraat als assistenten van den directeur van het Natuurkundig Laboratorium.

Deze verschillende leergangen leveren de stof voor het theoretisch gedeelte van een examen dat op de eigenlijke promotie volgt, en waarvan de twee hooger vermelde openbare lessen het practisch gedeelte uitmaken.

Ten slotte weze hier nog vermeld dat, sinds jaren, door de Regeering bij het Parlement een wetsvoorstel aanhangig gemaakt is waardoor de inrichting van het Hooger Onderwijs en de voorbereiding der Atheneumleeraars grondige wijzigingen zou ondergaan.

Na twee jaar Hoogeschoolstudiën zou het *candidaatsdiploma*, en na nog verdere twee jaar het *licenciaatsdiploma* uitgereikt worden; hiermede zou de eigenlijke studie aan de Universiteit afgelopen zijn; pas een jaar na het behalen van het licenciaatsdiploma zou de *doctorstitel* kunnen verworven worden, door het indienen en verdedigen van een oorspronkelijke verhandeling en stellingen.

Toekomstige Atheneumleeraars zouden na het behalen van het licenciaatsdiploma ten minste nog een semester college moeten loopen (Opvoedkunde en hare geschiedenis, Algemeene en bijzondere Methodologie), een proeftijd van minstens zes maand in het Middelbaar Onderwijs doormaken, en ten slotte een examen afleggen (waarop twee openbare lessen zouden voorkomen) ter verkrijging van den titel „*Geaggregeerd leeraar van het Middelbaar Onderwijs van den hooger grad*”; deze alleen zou bevoegdheid verleenen tot het doceeren in Athenea.

NASCHRIFT.

De uitlating van den Heer **Schogt** in de 2de alinea op blz. 135 van dezen jaargang, noopt mij er toe bij het vorige nog dit te voegen: voor zoover mijn omgang met een paar Hollandsche Wiskunde-leeraars en met Hollandsche leerboeken en tijdschriften mij in staat stelt het Wiskunde-onderwijs ten Noorden en ten Zuiden van de Moerdijk met elkaar te vergelijken, zou ik de meening uiten dat in België aan een zorgvuldige uiteenzetting van de theorie meer aandacht geschonken wordt dan tot dusver in Holland gebruikelijk was; dat de gemiddelde Hollandsche leerling het echter wellicht van zijn Belgischen makker haalt wat de vaardigheid in het maken van ingewikkelde sommen betreft.

Misschien is men in België soms te ver gegaan in de richting van de theorie, en was het niet overbodig dat de aanschrijving van 1926 den leeraars wees op het groote belang van de zelfwerkzaamheid der leerlingen in de klas. Zorgvuldige fundeering van de theorie kan trouwens gebeuren met medewerking van de leerlingen en sluit vaardigheid bij het oplossen van vraagstukken niet uit.

P. D. V.

BOEKBESPREKINGEN.

Theoretische Mechanica voor het Middelbaar Technisch Onderwijs, Middelbaar Onderwijs en voor Zelfstudie. Deel I A van het Leerboek der Mechanica door Ir. G. L. Ludolph en Ir. A. P. Potma. Groningen, Den Haag (J. B. Wolters) 1929.

De omstandigheid, dat het hierboven aangekondigde leerboek der Theoretische Mechanica weliswaar in de eerste plaats, maar toch niet uitsluitend bestemd is voor het M. T. O. heeft mij er toe gebracht, gehoor te geven aan de uitnoodiging van de redactie van dit tijdschrift, er een bespreking aan te wijden. Ik ken namelijk het M. T. O. niet uit ervaring en moet me dus beperken tot een beoordeeling van de waarde, die het boek voor het M. O. en voor zelfstudie bezit, zonder aandacht te kunnen schenken aan wat het M. T. O. er aan zal kunnen hebben. Ik ben mij bewust, dat de bespreking daardoor eenigszins eenzijdig zal uitvallen.

Het boek heeft het welverzorgde uiterlijk, dat de uitgaven der firma Wolters kenmerkt; het is voorzien van duidelijke figuren en van een groot aantal vraagstukken en het is geschreven met de blijkbare bedoeling, een inleiding in de theoretische mechanica te geven, waarin nauwkeurigheid van uitdrukking en exactheid van bewijsvoering gepaard zouden gaan met vlotheid van schrijfwijze en bevattelijkheid van betoogtrant. De schrijvers hebben zich, om dit doel te bereiken, op de hoogte gesteld van de verschillende wenschen, die in de laatste jaren ten aanzien van het onderwijs in Mechanica zijn uitgesproken en van de nieuwe wegen, die door anderen reeds ter verwezenlijking van die wenschen zijn ingeslagen en ze hebben er ernstig naar gestreefd, aan het goede, dat ze op die wijze vonden, in hun eigen formuleering een plaats in hun boek te geven. Er is hierdoor een werk ontstaan, dat op tal van plaatsen een verbetering ten opzichte van vele oudere leerboeken der Mechanica beteekent en de schrijvers verdienen waardeering voor hun poging, mede te werken tot vernieuwing en verdieping van het onderwijs in Mechanica.

Met het oog op de goede bedoelingen van de schrijvers en de moeite, die zij zich hebben getroost, valt het nu echter dubbel te betreuren, dat het werk op principiële belangrijke punten zulke ernstige tekortkomingen vertoont, dat ik het voorloopig, d.w.z. zoolang niet bij een herdruk de thans voorkomende fouten zullen zijn verbeterd, niet kan aanbevelen. Om dit oordeel te motiveeren, moet ik eenigszins uitvoerig zijn.

Ik spreek daartoe in de eerste plaats over de behandeling van de beginselen van de vectorrekening en over de toepassing daarvan op het

begrip „versnelling”. De schrijvers onderscheiden vrije, glijdende en (aan een bepaald punt) gebonden vectoren (blz. 44). Als voorbeeld van de laatste noemen ze de snelheid van een bewegend punt op een bepaald tijdstip. Hierna definiëren ze de som van twee vectoren voor het geval, dat deze een gemeenschappelijk beginpunt hebben, dat ze vrij zijn of glijdend, maar niet voor willekeurige gebonden vectoren. Bij de definitie van gemiddelde versnelling van een eenparige kromlijnige beweging teekenen ze echter de snelheidsvectoren V_A en V_B voor twee verschillende punten A en B, die ze eerst uitdrukkelijk aan die punten gebonden hebben, toch met eenzelfde oorsprong en spreken ze van hun vectorsom. Waar blijft nu de gebondenheid en waar wordt deze wel gebruikt?

Over het sommeeren van vectoren staat op blz. 47 de opmerking, dat de besproken wijze van sommeeren een aanname is, waarvan de juistheid niet op zich zelf kan worden bewezen, dat men echter tot hare juistheid mag besluiten op grond van de overeenstemming van de resultaten dezer bewerking op verschillende in de Natuurkunde voorkomende vectorgrootheden met de uitkomsten van proefnemingen. Deze opmerking lijkt mij principiëel onjuist. Men mag onder de som van twee vectoren verstaan, wat men wil; ter wille van de mathematische doelmatigheid zal men die definitie liefst zoo geven, dat de fundamenteele eigenschappen der optelling zooveel mogelijk behouden blijven. Maar met de vraag, of de ingevoerde bewerking nu ook doelmatig zal blijken in de mathematische beschrijving van physische verschijnselen, heeft dat alles niet het minste te maken. Het heeft geen zin, om naar de juistheid van de definitie van een vectorsom te vragen; het praedicaat „juist” is op definities heelemaal niet van toepassing. Het is even ondenkbaar, dat de uitkomst van een physisch experiment ons ooit tegen onzen wil zou noodzaken, een andere definitie van vectorsom te geven, als dat er ooit metingen zouden worden verricht, die ons zouden kunnen dwingen, voortaan iets anders onder een ellips te verstaan, dan we nu eenmaal gewend zijn te doen. Wij zullen zien, dat de gemaakte fout zich later op een beslissend moment wrekt.

De ingevoerde begrippen der vectorrekening worden o. a. toegepast op behandeling van de versnelling van een eenparige kromlijnige beweging. Op blz. 57 wordt als een feit meegedeeld, dat bij een eenparige kromlijnige beweging een versnelling optreedt, terwijl de paragraaf verder besteed wordt aan het bewijs van een eigenschap van die versnelling. Ik vrees, dat een lezer, die het boek zonder goede leiding doorwerkt, dit onmogelijk zal kunnen begrijpen. Er is nog niet anders sprake geweest van versnelling dan als limiet van een gemiddelde snelheidstoename (een scalaire toename, waarvan het op blz. 49 nog niet wezenlijk is, dat ze ook als vectorverschil kan worden geïnterpreteerd!) en bij een eenparige kromlijnige beweging is immers geen toename van de scala-waarde der snelheid. Het vervolg van de paragraaf lost de moeilijkheid niet op. Er wordt gezegd, dat „om te geraken” van den snelheidsvector V_A tot den snelheidsvector V_B (den aan B gebonden, maar niettemin naar A verplaatsten vector V_B), V_A vermeerderd moet worden met een vector ΔV (die hoogst ondoelmatig snelheidstoename inplaats van snelheidsverandering wordt ge-

noemd), maar dit zal den lezer niet wijzer maken. Men „geraakt” van V_A ook tot V'_B , door V_A over een hoek α om A te draaien!

Ik leg op deze dingen om twee redenen den nadruk; vooreerst begrip ik niet, dat de schrijvers, die toch in hun onderwijs ook wel zullen hebben te worstelen met de moeilijkheden, die het ongelukkig gekozen woord „versnelling” voor snelheidsverandering veroorzaakt en die zich altijd weer openbaren in de verbazing, waarmee de vraag naar de versnelling van een eenparige, dus niet versnelde, cirkelbeweging wordt aangehoord, hier niet duidelijker zijn geweest. En vervolgens lijkt het mij toe, dat zij hier een voor hen typische denkfout begaan, die in wezen dezelfde is als die wij bij de behandeling van het begrip „vectorsom” opmerkten en die men als volgt zou kunnen omschrijven, dat zij de willekeur van de mathematische begripsvorming niet inzien. Bij het begin van § 31 heeft de kromlijnige eenparige beweging nog geen versnelling; d.w.z. aan het woord „versnelling” is nergens een beteekenis toegekend, die het recht geeft, van de versnelling van een eenparige kromlijnige beweging te spreken. Het hangt dus van ons af, of we aan een eenparige kromlijnige beweging een versnelling willen toekennen en het staat ons vrij, hoe we dat willen doen, mits we maar zorgen, dat de vroeger gegeven definitie van versnelling van een rechtlijnige beweging onder de nieuwe definitie als bijzonder geval begrepen is. De opmerking op blz. 49, dat de scalaire snelheidstoename van een rechtlijnige beweging ook als vectorverschil te beschouwen is, had dus kunnen worden gebruikt als aanleiding tot de uitbreiding van de definitie; nu dat niet is geschied, had achteraf bewezen moeten worden, dat de nieuwe definitie de oude impliceert.

In § 33 wordt nu een stelling afgeleid over de versnelling van een niet-eenparige kromlijnige beweging. Het is mij niet gelukt, aan deze stelling een zin te verbinden. De tangentiële versnelling wordt namelijk omschreven als de versnelling, die het punt op het beschouwde tijdstip zou hebben, indien de snelheid vanaf het beschouwde tijdstip alleen van grootte en niet van richting veranderde. Maar hoe kan dat bij een kromlijnige beweging? Het heeft zin, een gegeven niet-eenparige kromlijnige beweging in gedachten te vervangen door een eenparige beweging over dezelfde kromme, maar het heeft geen zin, bij een kromlijnige beweging te onderstellen, dat de richting van de snelheid niet zou veranderen. En waartoe deze complicatie? De tangentiële versnelling kan toch afdoende worden omschreven als een versnelling langs de raaklijn ter grootte $\frac{dv}{dt}$.

Nu is het waar, dat de schrijvers in hun systeem niet van een grootte $\frac{dv}{dt}$ zouden kunnen spreken. Immers $\frac{dv}{dt}$ is „hoogere wiskunde” en het M. O. kent slechts „lagere wiskunde”. Maar dan hadden ze toch van een grootte $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$ kunnen spreken, wat volgens hen wel tot de lagere wiskunde behoort.

Ik roer hier een zwakke plek van het boek aan, namelijk het onbegrijpelijke verschil, dat de schrijvers tusschen de twee genoemde deelen der wiskunde maken. In § 9 leiden ze het differentiaalquotient

naar t af van een geheele rationale functie van t en in een opmerking vermelden ze, dat de Differentiaalrekening dit ook leert vinden en wel zeer eenvoudig. Is er tusschen de door de schrijvers gevolgde methode en die welke zij de methode der Differentiaalrekening schijnen te noemen, dan eenig ander verschil dan tusschen invlechting van de afleiding eener algemeene formule in de behandeling van een concreet geval en toepassing van een eenmaal afgeleide formule? Zoo vinden we in § 10 de behandeling van de meetkundige beteekenis van de snelheid in het weg-tijd-diagram en in een opmerking de mededeeling, dat iemand, die Hoogere Wiskunde kent, die beteekenis onmiddellijk kan inzien. Waartoe toch die geheimzinnige toespelingen? Wat in § 10 staat, is immers Hoogere Wiskunde en wat kan iemand, die deze paragraaf heeft begrepen, in de Hoogere Wiskunde nog voor nieuws leeren aangaande de meetkundige beteekenis van het differentiaal-quotient? Het lijkt mij zeer te betreuren, dat de schrijvers op dit punt de consequentie; waartoe hun geheele opvatting van de ondernomen taak noodzakelijk leiden moest, niet hebben aangedurfd. Hun houding is nu onzeker en de lezer krijgt er heel verkeerde voorstellingen aangaande de hoogere wiskunde door.

Wanneer ik, van dit onderwerp afstappende, den inhoud van het boek verder overzie, moet ik met ingenomendheid vermelden, dat de schrijvers aan de behandeling van den scheeven worp een hoofdstuk over projectiebeweging doen voorafgaan, waardoor ze zich voor de onzuiverheid van een praemature dynamische behandeling van deze beweging vrijwaren. (Ze kunnen echter niet nalaten, om op blz. 85 toch even over de aantrekkende werking van de aarde te spreken, wat ze in de zuiver kinematische behandeling niet hadden mogen doen). Als toepassing wordt ook nog de enkelvoudige trilling behandeld, wat mij juist gezien lijkt. Te waardeeren is ook, dat zij over de beweging van een onveranderlijke vlakke figuur in haar eigen vlak en over de beweging van een vast lichaam spreken, voordat zij tot de behandeling van de samenstelling van bewegingen overgaan. De behandeling van dit laatste onderwerp is in beginsel correct. Te betreuren lijkt mij alleen, dat na de juiste formuleering van de stelling van het parallelogram van snelheden op blz. 115 een minder juiste wordt gegeven op blz. 116. Er is daar namelijk sprake van „de snelheid van de meevoeringsbeweging” van het bewegende stoffelijke punt. Ook bij het parallelogram van versnellingen ontmoet men dezelfde neiging, om iets, nadat het correct is geformuleerd, ook nog eens minder correct te zeggen (op blz. 118 wordt namelijk gebruik gemaakt van de verwarrende zegswijze, dat een punt deelneemt aan twee bewegingen). De schrijvers deelen blijkbaar de veel voorkomende overtuiging, dat een slechte formuleering duidelijker kan zijn dan een goede.

Bij het bestudeeren van een Mechanicaboek kijkt men natuurlijk altijd vol belangstelling uit naar de fundeering der Dynamica. Om een indruk te geven van de wijze, waarop de schrijvers dit moeilijke onderwerp behandelen, wil ik hier den inhoud van blz. 131 weergeven.

We lezen daar, dat Newton het bestaan van een vast assenstelsel aannam. Het komt mij voor, dat men dit niet zoo kan zeggen. Newton spreekt niet van assenstelsels; hij neemt het bestaan van een absolute

ruimte aan, wat heel iets anders is. Het absolute assenstelsel toch moet een oorsprong hebben en absolute richtingen der assen. Welk bevoorrecht punt der ruimte en welke bevoorrechte richtingen nemen de schrijvers hiervoor aan?

Het denkbeeld der algemeene gravitatie wordt als volgt geformuleerd, „dat twee stoffelijke punten aan elkaar versnellingen t.o.v. het absolute assenstelsel meedeelen, die gericht zijn volgens de verbindingslijn der punten en wel zoo, dat de beweging der punten naar elkander toe plaats vindt.” De schrijvers verwarren hier blijkbaar de richting van een beweging met de richting van de versnelling dier beweging.

„De *verhouding* dezer versnellingen is voor twee bepaalde stoffelijke punten onafhankelijk van den afstand dier punten en dus uitsluitend afhankelijk van met het wezen der stoffelijke punten in verband staande grootheden.” Waarom „dus”? Kan de verhouding niet afhangen van de snelheden of van de afstanden der punten tot den absoluten oorsprong of van de richting van hun verbindingslijn ten opzichte van het absolute assenstelsel? En waarin bestaat het wezen van een stoffelijk punt?

„Beschouwen we nu twee stoffelijke punten P_1 en P_2 en noemen we de versnelling van het eerste punt a_1 , die van het tweede punt a_2 , dan houdt de versnelling van het eerste punt P_1 o.a. verband met een tot het tweede punt behorende grootheid, die we met m_2 zullen aanduiden, terwijl de versnelling van het tweede punt P_2 in verband staat met een tot het eerste punt behorende grootheid, die we m_1 zullen noemen. We kunnen de waarden van m_1 en m_2 nu voorloopig zoo kiezen, dat voldaan wordt aan de betrekking:

$$a_1 : a_2 = m_2 : m_1."$$

Deze redeneering heb ik ondanks herhaald nadenken niet kunnen begrijpen en ik beklaag dan ook de leerlingen, van wie de reproductie van dit duistere betoog zal worden gevergd. Hoe weet men, dat die grootheden bestaan? Waarom wordt de versnelling van P_1 juist in verband gebracht met de grootheid, die bij P_2 behoort en wat is dat voor verband? En als die grootheden al bestaan, mogen we hun waarden dan nog kiezen? En voorloopig? Wordt het dan later toch weer anders? De schrijvers zijn hier weer vervallen in de boven reeds opgemerkte typische fout: in plaats van aan P_1 en P_2 door een vrije begripsbepaling grootheden m_1 en m_2 toe te kennen, zoodat $a_1 : a_2 = m_2 : m_1$, spreken ze over die grootheden, alsof ze er zonder die begripsbepaling ook al zijn en beredeneeren ze als eigenschap, wat niets anders dan definitie kan zijn. Ze moeten daarbij echter de dubbele vraag; hoe ze het bestaan van die grootheden en hoe ze hun eigenschappen kennen, onbeantwoord laten.

„Newton nam nu nog aan, dat bij een willekeurige reeks stoffelijke punten $P_1, P_2, \dots, P_n$ een reeks bijbehorende grootheden $m_1, m_2, \dots, m_n$ kan worden bepaald, zoo, dat voor elke twee willekeurige punten P_u en P_v , die elkaar versnellingen a_u en a_v meedeelen, de betrekking geldt:

$$a_u : a_v = m_v : m_u."$$

Ik zou de schrijvers graag willen vragen, waar dit in de *Principia* te lezen staat. Voorzooover mij bekend is, leest men er het volgende:

Quantitas Materiae est mensura ejusdem orta ex illius Densitate et Magnitudine conjunctim. Dat staat in Definitio I en daardoor is voor Newton het massa-begrip afdoende bepaald. Moet men het geen misleiding van den lezer noemen, wanneer hem door schrijvers, die blijkbaar nog nooit de *Principia* hebben ingezien, wordt wijsgemaakt, dat de massa voor Newton een getal is, bepaald op de wijze, waarop zij dat in hun leerboek wenschen te doen?

Het zou mij te ver voeren, de lectuur op deze wijze voort te zetten en ik beperk me dus tot enkele opmerkingen over de volgende bladzijden.

Op blz. 133 staat, dat Galilei de traagheidswet uit heeft gesproken. Zouden de schrijvers eens de plaats uit de *Discorsi* of den *Dialogo* willen opgeven, waar dit te lezen staat?

Op blz. 134 wordt uit het gepostuleerde derde grondbeginsel van Newton afgeleid, dat voor twee stoffelijke punten met massa's m_1 en m_2 en versnellingen a_1 en a_2 de betrekking geldt $a_1 : a_2 = m_2 : m_1$.

Uit deze zelfde betrekking is echter op blz. 132 reeds het derde grondbeginsel van Newton afgeleid. De schrijvers houden veel van dergelijke cirkelbetoogen. Zoo definieeren zij op blz. 133 de kracht als product van massa en versnelling en definieeren daarna de reeds lang gedefinieerde massa als verhouding van kracht en versnelling. Men passe hier eens het voorschrift van Pascal: „substituer les définitions à la place des définis” toe!

Op blz. 134 staat, dat de uitkomsten, verkregen op grond van de drie grondbeginselen van Newton niet veranderen, als men een assenstelsel aanneemt, dat ten opzichte van het oorspronkelijke een eenparige rechtlijnige translatie heeft. Dit is natuurlijk niet waar; alle berekende plaatsen en snelheden zullen bij zulk een overgang in het algemeen veranderen.

Het Relativiteitsbeginsel der Klassieke Mechanica wordt als volgt uitgesproken:

„De Stellingen der klassieke Mechanica... blijken dus onveranderlijk geldig te zijn t.o.v. verschillende assenstelsels, die onderling eenparige rechtlijnige translaties bezitten”.

Dit is zeer onduidelijk; vooreerst is het woord „Stellingen” natuurlijk even onjuist als boven het woord „Uitkomsten”. Maar een kritische lezer zal natuurlijk vragen, of het voor de geldigheid van de mechanica van Newton dan werkelijk een voldoende voorwaarde is, dat er twee assenstelsels zijn, die ten opzichte van elkaar eenparige rechtlijnige translaties hebben. Zoo ja, zijn er er dan assenstelsels, ten opzichte waarvan zij niet geldt? En zoo neen, hoe moet men dan de assenstelsels, waarvoor zij wel geldt, onderscheiden van de andere?

De schrijvers zeggen het niet. Wel deelen zij mede, dat er „be-zwaarlijk” van een absoluut assenstelsel gesproken kan worden (wat rijkelijk euphemistisch is). Met het absolute assenstelsel stort echter hun opbouw der Dynamica ineen en dat is, als men pas de moeilijke bladzijden 131—134 heeft doorgeworsteld (ik kan nog niet zeggen, dat ik ze begrepen heb) wel heel teleurstellend.

Van volledigheid van ons overzicht afziende, vermelden we nog, dat op blz. 139 gezegd wordt, dat de gezamenlijke uitwerking van twee gegeven krachten, die op een stoffelijk punt werken, ook kan

worden veroorzaakt door een kracht R , die de diagonaal is van het parallelogram, waarvan de krachten aangrenzende zijden zijn en dat men dit als axioma moet aanvaarden, omdat er in deze stelling niets anders wordt gezegd dan in de in § 23 gegeven bepaling van vector-som. Kort samengevat: de resultante van twee krachten is hun vector-som, omdat een vectorsom een vectorsom is.

Ik wil hiermee mijn opmerkingen besluiten; niet, omdat ze zijn uitgeput, maar omdat ik geen misbruik wil maken van de mij toegestane plaatsruimte. Ook zal het wel niet noodig zijn, de opsomming nog uit te breiden, om tot een slotconclusie te kunnen komen. Welke die conclusie is, werd boven reeds aangeduid. Inderdaad: men moet natuurlijk steeds gedachtig zijn aan het woord: „ut desint vires, tamen est laudanda voluntas” en daarom heb ik boven reeds verschillende malen gezegd, wat mij in het werk van de heeren Ludolph en Potma prijzenswaardig lijkt. Maar men kan het bij het waarderen van de goede bedoeling niet laten. Wie een leerboek schrijft, wie de uiterst verantwoordelijke taak op zich heeft durven nemen, de intellectuele ontwikkeling van het opgroeiend geslacht te beïnvloeden door de autoriteit, die van het gedrukte woord nu eenmaal — en vooral op jonge mensen! — uitgaat, zal ook wel niet terugdeinzen voor het aanhooren van een openhartig uitgesproken meening. Ik zou daarom willen zeggen, dat de schrijvers in hun taak te kort zijn geschoten door gemis aan consequentie in het nastreven van de door hen gestelde juiste doeleinden, maar bovenal door onvoldoende beheersing van de moeilijkheden der stof. Zij hebben vergeten, dat het schrijven van een leerboek over een zoo moeilijk onderwerp als de theoretische mechanica slechts het werk kan zijn van de allerbesten onder ons.

E. J. Dijksterhuis.

Dr. B. P. Haalmeijer, Leerboek der Vlakke Meetkunde met vraagstukken. Groningen, P. Noordhoff, 1929.

Deel I, 152 bladz. f 2,10, geb. f 2,50.

Deel II, 163 bladz. f 2,10, geb. f 2,50.

Om de beteekenis van dit leerboek voor het onderwijs naar waarde te schatten, dient men zich te bezinnen op de punten, waarop het onderwijs in de vlakke meetkunde te onzent verbetering behoeft. Wij hebben hier in Nederland een stereotiepen leergang, waaraan verschillende fouten kleven. Deze kunnen worden verdeeld in drie groepen:

1°. Onvolledigheden, die onvermijdelijk zijn bij het onderwijs aan beginners, en die dus in een voor dezen bestemd leerboek geen fouten mogen heeten. Hiertoe behoort de verwaarloozing van de analysis situs van het euclidische vlak, anders gezegd het aan de aanschouwing ontleenen van alle eigenschappen over „binnen”, „buiten” en „tusschen”. Verder bijvoorbeeld het niet ingaan op de commutativiteit der optelling van lijnstukken en van hoeken, op de additiviteit van de lengte van lijnstukken, e. d.;

2°. fouten, die slechts te vermijden zijn ten koste van tamelijk ingrijpende veranderingen in den leergang. Deze zijn niet talrijk, hiertoe behoort de behandeling van de evenwijdigheid vóór de con-

gruentie en de toepassing van de verplaatsingsmethode bij congruentiebewijzen;

3°. fouten, die door weinig ingrijpende wijzigingen te vermijden zijn. Deze laatste groep telt verreweg de meeste fouten; deze fouten ontstaan doordat de auteurs niet op de hoogte zijn van den stand der wetenschap, doordat zij vasthouden aan lang verouderde wijzen van voorstelling en zich niet kunnen ontworstelen aan een zekere sleur. Hiertoe behooren o. a. de onvoldoende onderscheiding in nomenclatuur en notatie tusschen rechte lijnen, halve lijnen en lijnstukken, het steeds weer op wanhopige wijze verwarren van noodzakelijke en voldoende voorwaarden, het door elkaar haspelen van analyse en bewijs, het verwarren van meetkundige figuren met de eraan toegevoegde getallen, en het door elkaar halen van verschillende geometrieën (door het toekennen van oneindig verre punten aan rechte lijnen van het euclidische vlak).

Men kan de strekking van het boek van den heer Haalmeijer nu vrij nauwkeurig als volgt aanduiden: er is gestreefd naar verbetering van de fouten der laatste groep, niet naar verbetering van die van de tweede. De gebruikelijke leergang is vrijwel intact gebleven, en dit heeft ten gevolge, dat aan iemand, die het boek even doorbladert, de groote verbeteringen, die het vergeleken bij de oudere werken brengt, verborgen blijven. Om deze te ontdekken moet men nauwkeurig toezien, maar dan merkt men ze ook op vrijwel iedere bladzijde op. Want de schrijver heeft radicaal afgerekend met de gebruikelijke slordigheden.

Eene zeer belangrijke nieuwigheid is, dat de lijnstukken niet alleen in de benaming, maar ook in de notatie van rechte lijnen worden onderscheiden: AB duidt de rechte lijn, $\overline{AB}$ het lijnstuk aan. Deze notatie maakt verscherping van vele redeneeringen in uiterst beknopten vorm mogelijk. Ik betreur het, dat de schrijver het verschil tusschen lijnen en lijnstukken niet heeft doorgevoerd bij de merkwaardige lijnen; wel zegt hij (I, bladz. 34) dat onder een zwaartelijijn vaak een lijnstuk zal worden verstaan, maar het komt mij voor, dat deze handelwijze bij de leerlingen den indruk van de onderscheiding verzwakt.

Op vele plaatsen in het boek treft men, dikwijls met kleine lettergedrukt, zeer belangrijke opmerkingen en verklaringen aan, die, voorzoover ik weet, in oudere werken steeds ontbreken: iets over het woord „bepaald” (I, bladz. 78), eene opmerking over het geven van namen aan soorten van figuren (I, 89), over de beteekenis van „gegevens” (I, 99), over oppervlakten (II, 14). Juist in deze gedeelten komt goed uit, hoe hoog de schrijver boven de leerstof staat. Ook blijkt dit, waar hij wijst op opzettelijke lacunes in zijn betoog, zoodat (behalve misschien in de eerste hoofdstukken) zinledige beweringen en schijnbewijzen ontbreken. Soms gaat hij zeer ver in deze richting, zooals waar hij wijst op het niet gemotiveerd zijn van het spreken over „de” brandpunten eener ellips (II, 134).

Met het oog op de mogelijke invoering der door de commissie-Beth voorgestelde wijzigingen zijn hoofdstukken over trigonometrie en over de kegelsneden opgenomen. Het laatste bevat een zeer kort overzicht:

over de belangrijkste eigenschappen van ellips, hyperbool en parabool, in streng euclidisch-metkundigen vorm.

Het boek is geschreven met eene vlotheid, die de stroef stellende recensent den schrijver benijdt, en die ten gevolge moet hebben, dat de leerlingen het boek gemakkelijk zullen lezen. Het bevat 744 vraagstukken, welk aantal zeker voldoende is, als men, zooals de schrijver m. i. terecht wil, den nadruk op de theorie gaat leggen. De figuren zijn zeer fraai en duidelijk, de typographische uitvoering is zeer net.

Resumeerende kan ik zeggen, dat de heer Haalmeijer in zijn werk eene zeer geperfectioneerde uitgave van den gebruikelijken leergang heeft gegeven; een ruim gebruik van zijn boek kan aan ons meetkunde-onderwijs niet anders dan ten goede komen. J. H. S.

Dr. Fred. Schuh, Supplement 1928 op het tweede deel van de vraagstukken over differentiaal- en integraalrekening en over analytische en beschrijvende meetkunde, in het bijzonder met het oog op het examen wiskunde K₆. Groningen, P. Noordhoff, 1928. f 0,75.

Het werk, waarop dit boekje een supplement is, is besproken in den tweeden jaargang van dit tijdschrift, op bladzijde 178.

Zevende supplement op A. J. van Breen, Wiskundige vraagstukken voor het examen K₁, bevattende de vraagstukken van het schriftelijke examen 1928.

N. van Dooren en J. J. Raimond Jr., Natuurkunde voor Voortgezet Onderwijs. Purmerend, Muusses, 1926—1928.

In deze „Natuurkunde voor Voortgezet Onderwijs” zijn tal van technische toepassingen naar voren gebracht, terwijl de natuurkundige wetten en eigenschappen betrekkelijk oppervlakkig behandeld zijn. In een klein bestek is hier veel behandeld, waaronder de helderheid der uiteenzetting noodzakelijk lijden moest. Gs.

EEN FOUTIEVE NATUURWET

BESPROKEN DOOR

Ch. M. VAN DEVENTER.

§ 1. De natuurkunde kent een snarenwerktuig, *sonometer*, doch zoo het maar één snaar bevat, *monochord* genoemd. Evenwel wordt die laatste naam ook wel gegeven aan een *twee*-snarig instrument, ¹⁾ dat dan een dubbel doel heeft: het wil leeren over de betrekking tusschen toonhoogten voor snaren van verschillende lengte bij gelijke spanning, en het wil leeren over de betrekking tusschen toonhoogten voor snaren van verschillende spanning bij gelijke lengte: ondersteld wordt dan, dat de snaren in dikte en soortelijk gewicht onderling gelijk zijn.

Voor de eerste bedoeling klimt het instrument zeker op tot de Grieksche oudheid. De overlevering kent het zelfs aan Pythagoras toe, ²⁾ en vele eeuwen later wordt het door Claudius Ptolemaeus, groot in astronomie en méér, uitvoerig beschreven en verheven tot het werktuig bij uitnemendheid om intervallen aan getallen te verbinden: ³⁾ het is dan één-snarig.

Ptolemaeus noemt zijn instrument behalve *kanoon harmonikos*, ook *monochordos kanoon*, doch in zijn tijd kwam die laatste naam óók toe aan een één-snarig instrument voor muzikale voordracht, dat toen warme bewonderaars vond, die het óók voor demonstratie van consonantie-getallen gebruiken. Ptolemaeus

¹⁾ Zie Pouillet—Müller—Pfaundler, I (1886), p. 695, 761.

²⁾ Diogenes Laertius, VIII, 1, 11. — Gaudentius, *Isagoge*, c. 11. — Boëthius, *de Musica*, I, 11.

³⁾ Klaudios Ptolemaios leefde in de tweede eeuw na Kristus. Zijn boek over muziek heet *Harmonika*, en het bedoelde instrument: *Kanoon harmonikos*, d.i. muziek-liniaal. De beschrijving er van staat in I, 8 van genoemd werk, dat hier steeds geciteerd wordt naar de (afzonderlijke) uitgave van Wallis, Oxford, 1682.

echter is er weinig mee ingenomen, en als demonstratie-middel verwerpt hij het. ¹⁾ Zijn eigen *kanoon* is een gegradueerd liniaal, waarboven op twee vaste steunpunten een snaar is gespannen, terwijl een losse *kam* ²⁾, onder de snaar, over het liniaal heen en weer schuiven kan. Men mag het een zeer goed werktuig noemen, al lijkt het wat bevreemdend, dat hij niet een tweede snaar, vrij van de kam, naast de eerste brengt, om dan door gelijktijdigen aanslag van beiden de consonanties te doen hooren, een middel in de oudheid bekend. ³⁾

Dezen *kanoon* dan kende de overlevering aan Pythagoras zelve toe. Ten onrechte wellicht, doch men mag wel aannemen, dat Archytas van Tarente, Plato's vriend, er mee gewerkt heeft. Het meest van alle Pythagoreërs bemoeide Archytas zich met de muziek-leer, bericht Ptolemaeus, en hij zou het er wel bij gezegd hebben, zoo de Tarentijn juist niet van een *kanoon* zich had bediend. En hoezeer Archytas de muzikaleer als een zaak van wiskunstige beschouwing opvatte, hij zal daarbij wel zijn uitgegaan van het waarnemingsfeit, dat van snaren, die, slechts in lengte verschillend, het interval van een octaaf, een kwint en een kwart lieten hooren, de lengten zich opv. verhielden als 2 : 1, 3 : 2, 4 : 3, zoodat deze consonante intervallen door die verhoudingen werden voorgesteld. ⁴⁾

¹⁾ Beschrijving, met uitvoerige kritiek, in *Harmonika* II, c. 12, p. 156—159.

²⁾ Dit verplaatsbare steunsel was veel dunner dan de vaste steunsels, en heeft wellicht veel op onze kam geleken.

³⁾ Dit blijkt uit Theo Smyrnaeus, uitg. Hiller, p. 59. — Ptolemaeus zelf demonstreert de consonanties door met de losse kam de snaar in ongelijke deelen te splitsen en dan die deelen aan te slaan. Zijn *Kanoon* en demonstratie-wijze schijnen wel herhaald te worden door Boëthius, *de Musica*, IV, 4, en IV. 18. — Boëthius spreekt van *regula*, van *monochordus regularis*, en noemt ook Ptolemaeus' *harmonica regula*. Hij beweert voorts, dat het woord *regula* een overdrachtelijken zin heeft (zooals ons *richtsnoer* dus); verg. Ptolemaeus, I, 2, begin.

⁴⁾ Een spreker bij Plutarchus, *de Ei apud Delphos*, c. 10, § 389, verklaart, dat het grootste werk der muzikaleer over de consonanties gaat. Hij zelf erkent er vijf, nl. behalve de bovengenoemden nog de kwint der octaaf en de dubbele octaaf. Hij keurt het af, dat sommigen ook de kwart der octaaf als een consonantie beschouwen: Ptolemaeus echter aanvaardt de undecieme als een consonantie; dit deed ook Aristoxenus al, maar Euclides' *Sectio* verwerpt ze.

Boëthius noemt eveneens de consonanties den grondslag der muzikaleer (*de Musica*, I. 3, begin).

Want de even eenvoudige als *juiste* en gewichtige vondst der antieken, was de wet over het verband tusschen de intervallen der consoneerende tonen, en de snaarlengten voor die tonen,¹⁾ waarbij men echter aan *trillingsgetallen* niet dadelijk denken moet.

§ 2. De twee-snarige *sonometer* der huidige natuurkunde, ten onrechte dan wel eens *monochord* genoemd, wil echter ook het verband leeren tusschen de toonhoogten (*trillingsgetallen*) voor snaren van gelijke lengte (en dikte enz.) en hun *spanningen*. Ook naar deze strekking beschouwd, heeft ons demonstratie-instrument zekere voeling met de Grieksche oudheid, maar dan met twee belangrijke verschillen. Want in die oudheid werd de spanningswet niet onderzocht aan horizontaal gespannene, doch aan *hangende* snaren,²⁾ maar vooral: de aldus afgeleide wet was *foutief*, en het is juist over deze *foutieve wet*, dat dit opstel iets verhalen wil.

Twee antieke schrijvers, *Nicomachus* en *Gaudentius* hebben over die (foutieve) wet een uitvoerig bericht. Beiden waren tijdgenoot van *Ptolemaeus*,³⁾ leefden dus vele eeuwen na *Pythagoras*, en hun verhaal kan derhalve alleen als een *traditie*, en waarschijnlijk verminkte traditie, beteekenis hebben.

Gaudentius' bericht is het kortst, en begint als volgt:

„Den aanvang der vondst daarvan (nl. van de getallen aan consonanties verbonden), heeft, naar men zegt, *Pythagoras* bij toeval gemaakt, toen hij langs een smidse ging en de slagen der hamers op de aambeelden dissoneerend en consoneerend hoorde klinken. Terstond toch ging hij naar binnen en zocht naar de oorzaak van dat dissoneren en consoneeren. En die vindt hij, als hij de hamers van verschillend gewicht ziet, en de verhoudingen der gewichten oorzaken van het dissoneren en consoneeren der geluiden. Want voor de hamers met gewichten in verhouding *vier-drie* vindt hij klanken, die volgens de *kwart* consoneeren; de hamers met gewichts-

¹⁾ Steeds wordt dan ondersteld, dat de snaren onderling overeenstemmen in dikte, soort van stof (soortelijk gewicht) en fabrikaat.

²⁾ *Nicomachus' Encheiridion*, c. 6, uitg. *Janus*, p. 248, kent aan *Pythagoras* nog een instrument toe, *chordotonos* genaamd, dat *misschien* horizontaal gespannen snaren of één snaar droeg. De beschrijving is echter te kort dan dat men iets zekers over dit werktuig zou kunnen zeggen. — Over de *hangende* snaren berichten *Nicomachus' Encheiridion* c. 6, en *Gaudentius' Isagogae*, c. 11, ... verg. *Th. Smyrnaeus* (Hiller), o. a. p. 65.

³⁾ *Gaudentius* leefde wellicht later.

verhouding *anderhalf* hoort hij bij den slag de *kwint* geven, en de hamers met verhouding *twee* naar de *octaaf* consoneeren.¹⁾

Nicomachus' verhaal wijkt hiervan niet wezenlijk af, en tot op dezen dag is het duister, wat er eigenlijk in die smidse gebeurd kan zijn. Laat ons aannemen, dat Pythagoras, of wie het dan ook was, enkel een vingerwijzing noodig had, en die vond in een wellicht verkeerd verstande waarneming: zoo iets is méér gebeurd.

Gaudentius gaat voort:

„Nadat hij aldus een begin had gemaakt over den samenhang der consonanties met getallen, zet hij het onderzoek op andere wijze voort. Hij hangt twee *snaren* op, even groot en van gelijke soort en bewerking, en de eene bezwaart hij onderaan met een gewicht van *drie* deelen, de andere met een van *vier*; hij slaat beiden aan en hoort ze consoneeren met de *kwart*. Daarna bezwaart hij ze met gewichten *drie* en *twee*, slaat weder aan, en bevindt ze te consoneeren met de *kwint*. Toen hij gewichten in verhouding *twee-één* had aangehangen, hoorde hij de snaren consoneeren met de *octaaf*. Bij de verhouding *drie-één*, nam hij de consonantie *duodeciem* waar, en zoo verder.”

Nicomachus spreekt van *vier snaren*, en is wat uitvoeriger.²⁾ Beide mannen zien in Pythagoras blijkbaar een gewetensvol proefnemer. Helaas! De lezer van dezen dag moet hem tot een erbarmelijk knoeier verklaren, juist op grond der mildelijk meege-deelde cijfers. Niet de verhouding *twee-één* toch geeft de octaaf, doch de verhouding *vier-één* doet dat, en in alle cijfers schuilt dezelfde fout: *eerste* machten inplaats van *kwadraten*.

Gaudentius laat Pythagoras nu ook den *kanoon* uitvinden en aan dat werktuig dezelfde getallen-betrekkingen vastleggen voor het verband van lengte en toonhoogte — wat in orde is. En nog op vele andere wijzen (daar ter plaatse niet nader genoemd) zou de groote man tot dezelfde getallen geraakt zijn. Nicomachus daarentegen geeft den *kanoon* niet regelrecht aan Pythagoras,³⁾ maar wel dan het al te kort beschreven instru-

¹⁾ Gaudentius *Isagoge*, uitg. Janus, *Mus. Script. Graeci*. c. 11. p. 340. — Ongeveer hetzelfde verhaal ook bij Boëthius, *de Musica*, l. 10.

²⁾ Nicomachus' verhaal vindt men grootendeels terug in het *Leven van Pythagoras* (c. XXVI), beschreven door Iamblichos, ongeveer 300 na Kristus.

³⁾ Verg. zijn *Encheiridion* in uitg. Janus, c. 10, p. 254.

ment, den *chordotonos* (zooals reeds gezegd werd), dat met sleutelspanningen zou gewerkt hebben, en hij laat hem dezelfde getallen ook vinden aan andere instrumenten, waaronder voorkomen de *pijpen*: *aulos* (klarinet) en *syrinx* (fluit). ¹⁾

Bij *Gaudentius* en *Nicomachus* kan men het getuigenis voegen van *Theo Smyrnaeus* ²⁾, die herhaaldelijk proeven met aangehangen gewichten vermeldt, en eens er bijvoegt, dat deze gewichten *de reeds genoemde verhoudingen* toonen, en dat zijn dan verhoudingen zooals zij geleerd werden o.a. door een twee-snarigen *kanoon*. ³⁾ Ook *Smyrnaeus* aanvaardt dus de foutieve spanningswet, gelijk die vóór hem eveneens aanvaard werd door *Plutarchus*, die twee hangende snaren, met gewichten 1 en 2 bezwaard, naar de *octaaf* laat consoneeren, en voor gewichten 2 : 3, en 3 : 4 naar kwint en kwart. ⁴⁾

Eigenaardig is ten deze *Ptolemaeus'* houding. Hij verwerpt, naast veel anders, ook de methode der hanggewichten ter vastlegging van interval-getallen, maar dan niet om de principieele fout, doch om, overigens ernstige, bijredenen. ⁵⁾ Althans, mij schijnt hij toe te beweren, dat door de zware gewichten, de snaren (die wel *darmsnaren* of *pezen* zijn geweest) min of meer scheuren of ontrafeld worden, en dat, zelfs zoo dit niet gebeurt, zij zich *rekken*, en wel de sterk bezwaarde méér dan de minder bezwaarde, en daardoor ook zal dan, buiten de verhouding der gewichten om, een zeker verschil in de tonen ontstaan. *Ptolemaeus* spreekt als een veel-eischend proefnemer; dat hij de principieele fout niet bemerkt heeft, valt zeker te betreuren, maar méér te betreuren is, dat *Nicomachus*

¹⁾ Verg. *Ibid.* c. 6, p. 248. Er wordt daar ook een *monochord* genoemd, maar volgens het verband wijst die naam daar niet op het demonstratie-instrument, den *Kanoon*, doch op een èèn-snarig instrument voor muzikale voordrachten.

²⁾ *Theo Smyrnaeus* leefde in de 2e eeuw na Kristus. Zijn geschrift over *platonische wiskunde* vermeldt de methode der hanggewichten op p. 57, 59, 60, 65, 66 der uitgave van Hiller, en op p. 60 de *verhoudingen* gevonden, zoowel door die methode als door andere.

³⁾ p. 59. — Op deze bijzonderheid werd reeds gewezen in noot 3 van blz. 178.

⁴⁾ *Plutarchus* leefde ongeveer 50—125 na Kristus, en de bedoelde uiting is te vinden in *de Animae Procreatione*, § 17, 1021 A.

⁵⁾ *Harmonika*, l. 8. Men bedenke echter, dat *Ptolemaeus* van een instrument waarschijnlijk niet enkel voorlichting eischt over de consonanties, doch ook over kleinere intervallen, en die kon alleen de *kanoon* nauwkeurig geven.

en Gaudentius zijn verwerping der methode niet overnamen. Toch hebben hij zelf en lateren wellicht gevoeld, dat het met die wet niet in den haak was, want Boëthius vermeldt de methode der hanggewichten maar in het voorbijgaan.¹⁾ Maar in allen geval strekt ook Ptolemaeus tot bewijs, dat in de tweede eeuw na Kristus de foutieve spanningswet nog altijd in omloop was, en voor velen een bruikbare grondslag ter demonstratie van consonantie-getallen, en in 300 na Kristus werd, zooals reeds gezegd is, Nicomachus' bericht zonder verzet door Iamblichus herhaald.

Hoeveel legendarisch in de berichten van Nicomachus, Gaudentius en Smyrnaeus ook zijn moge, zij hebben allen waarschijnlijk één groote historische deugd: zij geven een vondst in den meest eenvoudigen en primitieven vorm. *Bepaalde consonanties aan bepaalde getallen verbonden*, — dat leeren zij, en dat was voor de Pythagoreërs ook de hoofdzaak. De verhalen vragen niet naar verklaring en blijven buiten het begrip trilling. Daarmee is niet gezegd, dat de oudheid nooit om de begrippen trilling en frequentie gedacht heeft, maar dat denken kwam dan lang na Pythagoras.³⁾

§ 3. Men vraagt zich af: hoe is het mogelijk, dat zulk een geweldige fout zoo lang kon blijven bestaan? Ptolemaeus' bezwaren zullen wel goeden grond hebben, toch is het te betwijfelen of zelfs zij voldoende rekenschap kunnen geven van het groote verschil, dat proef en waarneming ten deze *moesten* opleveren.

Ik voor mij kan alleen verklaring vinden in de volgende hypothese. De pionier-proefnemers vonden die wet, omdat zij ze *wilden* vinden, en zij *wilden* ze vinden, omdat enkele eenvoudige *blaas-instrumenten* reeds lang zekere getallen-verhoudingen, zij het dan ook in het ruw, geleerd hadden. Zij wisten daarbij uit overoude ervaring, dat sterker spanning toonverhooging geeft; zij waren ook hoogstwaarschijnlijk onder invloed van de gedachte, dat een wet zoo eenvoudig mogelijk moet zijn. En toen zij aan gewichten getallen gingen zoeken, manoeuvreerden zij zóó lang tot de verwachte getallen (voor de octaaf bijv. 2 : 1) aan den dag kwamen, en zij konden daarin slagen, wijl de gegevens der proef allerlei speling toelieten. Bijv. zoo men het met de gelijke *dikte* en *soortelijk gewicht*

¹⁾ *De Musica*, l. 11.

²⁾ Verg. hierover het *Aanhangsel* van dit opstel.

der snaren niet te nauw nam, kon men al een heel eind het gewenschte doel naderbij komen, en als men wachtte tot de snaren min of meer gescheurd of ontrafeld of gerekt waren (Ptolemaeus immers wijst op zulke mogelijkheden), dan kon men er wel geheel komen. Wel is waar laat Nicomachus zijn held alle voorzorgen nemen, maar men kan betwijfelen of zelfs Pythagoras de *dikte* nauwkeurig meten kon en van het onderling gelijke fabrikaat der snaren zeker zijn. Er was genoeg aanleiding tot onwillekeurig geschipper voor hen, die nu eenmaal zekere getallen *wilden* vinden, of liever terugvinden, en naar de voorgestelde hypothese werd dan de proefneming gedaan onder den dwang vooral van een idee, dat door zekere *pijp-instrumenten* reeds lang aangeboden was.

Hier zij de opmerking gemaakt, dat de onmiskenbare voordeelen van den *kanoon* de kwantitatieve muziekleer der antieken ten slotte tot een leer van *snaar-lengten*, of van *verhoudingen* dier lengten verhieven: de *snaar* kreeg ten slotte de leiding in de leer en aan de *snaar* ook bouwden de antieken op wat zij dan bereikten aan inzicht over trilling en frequentie. Maar tot het eind hunner periode bleven zij achterlijk met de *pijpen* — *aulos* en *syrinx* — hoe *die* in hun toonwekking te verstaan. Zij waren niet bij machte bij de *pijpen* trilling te ontwaren, wat geen wonder is, daar eerst in de 18e eeuw de leer der staande longitudinale golven der lucht in de pijpen grondvest werd.¹⁾ De antieken konden tot het eind de pijptonen alleen begrijpen als gewekt door een *stoot* (bij het blazen gegeven), die, met meer of minder snelheid door de pijp schrijdend, in de buitenlucht zich voortplante; van trilling der lucht in de pijp hadden zij nooit de minste voorstelling. Snaar en pijp brachten zij wel is waar onder één dak, doch dan met het begrip *stoot*, met de overeenkomst in de verhouding der pijp-afmetingen voor bepaalde intervallen en de verhouding der snaar-lengten, en daardoor met het begrip *getal*. De pijpen-leer was ten slotte onvolkomen naast die der snaren; in de muziekleer kwam het primaat aan de *snaar*, en de *pijp* vormde als het ware een *aanhangsel*.

Doch dit historisch beloop heeft dan de verhouding omgekeerd.

¹⁾ Vooral door Daniel Bernouilli. — Verg. J. G. Pogendorff, *Gesch. der Physik* (1879), p. 826.

De meest eenvoudige pijp-instrumenten reeds, de *syrinxen* (de één-pijpige, zoowel als de méér-pijpige herdersfluit, wellicht het aller-oudste blaasinstrument), verbonden zekere intervallen aan getallen, en eenvoudige *auloi* (klarinetten) deden het zelfde. Zulke instrumenten moeten ook den dienst van *stemvork* bewezen hebben, al maakt wellicht geen enkel antiek bericht daarvan melding. Maar dat zoo iets noodig is geweest, is al jaren geleden geleerd door Gevaert,¹⁾ die er op wijst, hoe het vraagstuk der absolute toonhoogte dwingend werd, toen de *aulodie*, gezang door fluit begeleid, werd ingevoerd, wat omstreeks 710 vóór Kristus zou geschied zijn. Ik weet niet of men dit cijfer nog aanvaardt, maar ongetwijfeld moet de vroege oudheid reeds naar pijpen van verschillende afmeting hebben gezocht, berekend op de toonnormen der stemsoorten, en dus heeft ook hierin de pijp de leiding gehad boven de snaar.

Overigens is voor het gebruik van een pijp als stemvork bij mijn weten geen getuigstuk aan te voeren. Daarentegen ontbreken de getuigstukken over het verband van lengten van pijp-instrumenten met interval-getallen allerm minst en de bekendheid met dat verband moet wel veel hooger opklimmen dan die getuigstukken zelf.

§ 4. Archytas van Tarente zegt:²⁾

„Maar ook het *riet* (kalamos) zal, als men het onderste deel toestopt, een [lagen] toon geven, maar als [men het dicht maakt] op de helft, of een ander deel ervan, zal het hoog klinken.”

Veel later verklaart Aelianus³⁾: „en ook de *syrinxen* maken dat duidelijk,⁴⁾ wanneer de pijpen uit grootten van verschillende lengten bestaan, maar in wijdden gelijk; het kortste pijpje toch geeft een hooger toon, het grootste een lageren, de tusschenliggende naar verhouding.”

Aelianus blijft hier, evenals Archytas, bij een algemeenheid. Voor hun naaste doel hadden zij daaraan genoeg, gelijk ook Nicomachus eerst zulk een algemeenheid noemt,⁵⁾ hoewel hij later wel degelijk kwantitatieve bijzonderheden geeft.⁶⁾

¹⁾ *Histoire et Théorie de la Musique de l'Antiquité*, I. 243.

²⁾ Diels, Vorsokratiker, I, 260, waar ook over *auloi* iets gezegd wordt.

³⁾ Geciteerd door Porphyrius, uitg. Wallis, III. p. 216—217. — Aelianus leefde vóór en na 223 na Kr.

⁴⁾ Nl. dat een langere pijp een lageren toon geeft.

⁵⁾ *Encheiridion*, c. 4.

⁶⁾ *Ibid*, c. 10.

En het ontbreekt dan ook niet aan berichten, voor *auloi* en *syrinxen*, over afmetingen met getallen en intervallen.

[Aristoteles], *Problem.* XIX, 14, vermeldt een *syrinx*, die in samenspel met menschenstemmen, een octaaf verschil gaf. Dit zegt niet veel, doch *Problem* XIX, 23, spreekt van een *syrinx* (blijkbaar een één-pijpige), met een gat *midden in*, en daarmee een toon gevend, een octaaf (hooger) dan de pijp in haar geheel doet klinken. Voorts geven de *auloi* bij dubbele lengte de lagere octaaf. En de vervaardigers van *syrinxen* (ditmaal blijkbaar het samengestelde instrument) stoppen de laagst-klinkende pijp alleen onderaan met was dicht, doch de hoogst-klinkende vullen zij voor de helft er mee, terwijl zij voor de kwint en de kwart de vulling naar de verhoudingen 3 : 2 en 4 : 3 regelen. En iets diergelijks doet *Problem* XIX, 50 kennen, terwijl *Nicomachus' Encheiridion* in zijn tiende hoofdstuk beslist verklaart, hoe een *aulos*, door drie gaten in vier gelijke stukken verdeeld, door spel van vingeroplegging octaaf, kwint en kwart van den grondtoon kan doen hooren; hij legt dat spel in bijzonderheden uit, en voor de *syrinxen* laat hij de tweeledigen de dubbele klank (d.i. de octaaf) van de vierledigen geven.

Ook bij *Plutarchus*¹⁾ geeft een *aulos* van zekere lengte de lagere octaaf van een *aulos* der halve lengte. Dit zelfde vindt men mede bij *Theo Smyrnaeus* vermeld,²⁾ die overigens over den *aulos* vrijwel dezelfde bijzonderheden geeft als *Nicomachus*.

Ptolemaeus eindelijk, met hoeveel overtuiging ook hij voor *nauwkeurige* metingen alleen zijn *kanoon* toelaat, geeft althans toe, dat bij *auloi* en *syrinxen* „de afmetingen de verschillen der tonen volgen.”³⁾

Zóó nu getuigen allerlei *schrijvers* der oudheid, en wat zij berichten, moet al eeuwen vóór hen gemeengoed geweest zijn van allen, die eenvoudige *auloi* en *syrinxen* vervaardigden, en de meesten, die ze bespeelden. Tot een zéér oude oudheid nu klimmen die instrumenten op, en al vele eeuwen vóór *Aristoteles* dan moet het bekend geweest zijn, in het ruw althans, welke getallen gebonden waren aan die intervallen, die voor het antieke oor den grondslag

¹⁾ In *de Animae Procreatione*, § 17, 1021. Ook voor andere consonanties geeft Pl. daar verhoudingen van pijp-lengten.

²⁾ Uitg. *Hiller*, p. 60—61.

³⁾ *Harmonika*, II. c. 12, p. 157.

der muziekleer legden: de intervallen der *consonanties*.¹⁾

Zeker mag men het daarom noemen, dat *Pythagoras* (of wie het dan ook was) zekere getallen in het hoofd had, toen hij proeven ging nemen over snaren en hanggewichten, en volgens een niet avontuurlijke onderstelling zou hij dan als het ware zoo lang gewerkt hebben, tot hij die zelfde getallen ook in de gewichten vond: de fluit had dan ook hier de leiding gehad, en wel een noodlottige leiding, die wellicht een noodlottigen steun vond in de gedachte: het eenvoudige is het ware.

Op de vraag: waarom zocht iemand nog leering bij de *snaren*, zoo de *pijpen* reeds getallen hadden geleerd, — kan men wellicht antwoorden,²⁾ dat het groote aantal blaasinstrumenten altijd kon doen twijfelen aan de betrouwbaarheid van *aulos* en *syrinx* in het bijzonder, en het daarbij van belang was ruwe getallen door meer nauwkeurige te vervangen; bovendien maakte de belangrijkheid der snaren een eigen onderzoek gewenscht, en door de overoude ervaring van toon-verhooging bij spanningsvermeerdering werd een leerzame uitkomst voor zulk een onderzoek waarschijnlijk. Naar de in dit opstel aangeboden verklaring, was de pionier echter bij zijn proefneming niet onbevangen, en deed hij in de fysische akoustiek eeuwenlang een *foutieve* wet rondwaren.

De middeleeuwen hebben wellicht *Boëthius'* kort bericht aanvaard over die wet; ik vind vermeld³⁾, dat *Galileï* ze heeft aangetast, en iedereen weet, dat men aan *Mersenne* (1636) de *juiste* spanningwet dankt.⁴⁾

¹⁾ Verg. noot 4 op p. 178. — In de daar genoemde verhandeling, mede § 389, laat *Plutarchus* de getallenverhoudingen der *consonanties* zoowel door de *snaren* als door de *gaten* (*trupemata*) geleerd worden. Het woord *gaten* kan alleen op *pijpen*, en dan op de *afstanden* tusschen de *gaten* der *pijpen* wijzen.

In den zoo even genoemden passus § 1021 van *de Anim. Procr.* wordt een volkomen parallelie gesteld van *consonantie*-getallen uit hanggewichten met die uit pijpafmetingen afgeleid.

²⁾ Wat *Boëthius* dienaangaande opmerkt, lijkt mij onbevredigend.

³⁾ Bij *Oscar Paul*, in zijn vertaling van *Boëthius' de Musica*, p. 193, aanteekening bij I, 10, die ook leert, dat *Vincenzo Galileï*, de vader, er op wees, hoe de oudheid, blijkens *Suidas* vooral, de ontdekking der *consonantie*-getallen óók toeschreef aan een zekeren *Diokles*, die ze zou hebben afgeleid uit de geluiden door *vaten* bij aanslag gegeven.

⁴⁾ Verg. *A. Heller*, *Gesch. d. Physik*, II (1884), p. 75. — Verg. ook *Bosscha—van Schaik*, III (1900), p. 157, en *Chwolson*, II, 1 (1919), p. 59.

AANHANGSEL:

over de begrippen *trilling* en *frequentie* in de antieke akoustiek.

Boëthius, die de antieke periode afsluit, toont in het derde hoofdstuk van zijn *de Musica*, eerste boek, veel juist besef van de begrippen trilling en frequentie, al geeft hij niet regelrecht *vakwoorden* aan die zaken.

Hij bespreekt die begrippen echter uitsluitend als behoorend bij de *snaar*-beweging, ¹⁾ doch voor dat voorwerp ziet hij helder in: 1e. dat de snaar heen en weer beweegt; 2e. dat die bewegingen meer of minder opeengedrongen kunnen zijn; 3e. dat sterkere spanning snellere beweging en meer opeengedrongen slagen geeft; 4e. dat tragere en ijlere beweging *lage*, doch snellere en dichtere beweging *hooge* tonen geeft; 5e. dat toonhoogte een zaak van getallen is.

Over nog meer goeds bij hem, later; doch ook het reeds genoemde is te beschouwen als een erfenis van vele eeuwen.

Een deel van het genoemde mag men zeker doen opklimmen tot de inleiding van Euclides' *Sectio Canonis*, die van *ijlere* en *dichtere* bewegingen spreekt voor lagere en hoogere tonen, en eveneens tot het *kwantitatieve* der toonhoogten besluit. Waar echter Paul Tannery heeft aangetoond, ²⁾ dat het *slot* der *Sectio* zeker niet van den grooten Euclides afkomstig is, mag men ook voor den *aanhef* aan zijn vaderschap twijfelen.

Boëthius' bericht heeft echter ook Nicomachus' *Encheiridion* tot voorganger, dat zegt, in cap. 4:

¹⁾ B. laat snaarbewegingen *velociores* en *tardiores* zijn, of ook *spissiores* en *rariores*, terwijl de toon een *percussio* van de lucht is door die bewegingen veroorzaakt. Naarmate de snaar meer gespannen is, geeft zij een *velocior pulsus*, keert sneller terug, en slaat de lucht *frequentius* en *spissius*. Zonder twijfel bedoelt B., zonder het zoo te zeggen, dat de bewegingen en de stooten meer of minder in een *zelfde tijdseenheid* opeengehoopt of -gedrongen kunnen zijn.

In den aanhef van Euclides' *Sectio* worden *ijl* en *dicht* met de woorden *araios* en *puknos* aangegeven.

Oscar Paul geeft in zijn vertaling (1872) van de *Musica* te veel toe aan de gevaarlijke neiging om *nieuwe* inzichten aan de ouden, hier dan aan Boëthius, toe te kennen. Zoo laat hij B. spreken van *trillingen* der *lucht*, terwijl de tekst alléén *stooten* aan de lucht meegedeeld vermeldt, en over haar *trilling* niets beweert. — B. heeft ook, evenmin als een andere antiek, iets over trilling der lucht in pijp-instrumenten.

²⁾ *Mémoires Scientifiques*, III, p. 213—219.

„Bij de snaarinstrumenten geven grootere en strakkere spanningen sterkere en hoogere tonen, de mindere [spanningen] echter zwakkere en lagere [tonen]. Want als het *plectrum* de snaren verplaatst [d.i. uit hun ruststand brengt], slaan de eersten [dus de sterk gespannen snaren], uit hun [nieuwen] stand losgelaten, zeer snel, en met veel zwaaing en dikwijls, de omringende lucht, en keeren terug door hun sterke spanning gedwongen; de andere echter rustig en zonder [d.i. met weinig] zwaaing, evenals het richttouw der timmerlieden.”

Euclides echter en Nicomachus spreken (evenmin als Boëthius) van trilling der omringende en gestootene lucht. Wel vergelijkt keizer Augustus' tijdgenoot Vitruvius (*de Architectura*, V. 3) met veel helderheid de voortplanting van het geluid door de lucht met de golfbeweging, in een stilstaand water door een ingeworpen steen gewekt; wel spreekt Galenos (2e eeuw na Kr.; uitg. Kühn, III, 644) terloops eveneens van een golfbeweging; wel neemt Boëthius in een afzonderlijk hoofdstuk Vitruvius' voorstelling over, doch het zou ongeoorloofde „Konsekwenzmacherei” zijn, om daaruit onze trillingsleer als een bezit dier antieken af te leiden. Alleen in den aanhef van het merkwaardige werkje *de Audibilibus*¹⁾ meen ik, en dan alleen nog maar een voorbijgaand, besef van trilling der lucht waar te nemen.

Bij mijn weten is Nicomachus de eerste en eenige der antieken, die een kenmerkend woord voor trilling (van een snaar dan) aanbiedt. Van kradasmos spreekt hij, zooeven door *zwaaiing* vertaald, maar door hem dan gebruikt voor die beweging der snaar, welke wij *trilling* noemen, hoewel hij het daar niet bezigt voor *een* trilling, maar voor een trillenden toestand. Boëthius spreekt van *tremere* voor een snaar, en van een *chorda tremebunda*, maar een eigen en vast woord voor trillen, trillingsstaat en een trilling biedt hij niet aan: zóóver schijnt de oudheid niet gekomen te zijn.

Dat de lucht het geluid (den *stoot*) overdraagt naar het oor, wordt kortelijks doch beslist aangegeven in Plato's *Timaeus* (67 B) en uitvoeriger door Aristoteles (*de Anima*, II, 8); eveneens door Nicomachus (*Encheir.* cap. 4) en in [Aristoteles] *Problemata*,

¹⁾ Dit werkje, in de oudheid zelve aan Aristoteles toegeschreven, wordt tegenwoordig hem ontegd, en soms aan Heraclides van Pontos, dan weer aan Straton, dan weer aan een nog niet aangewezen gegend.

XI, 6, waarbij men dan Vitruvius, Galenus en Boëthius kan doen aansluiten, terwijl ook *de Audibilibus* ten deze vermelding verdient, maar die overdracht is dan enkel een overdracht van *stoot*, zonder het mecanisme der trilling van lucht, en de stelling: *toon is een stoot der lucht*,¹⁾ werd gaandeweg leerstuk.

Zoo men met Tannery het slot van Euclides' *Sectio Canonis* tot een bijvoegsel uit de 3e eeuw v. Kristus verklaart,²⁾ en, buiten hem om, den aanhef tot den zelfden tijd brengt, en dus ook Boëthius' uitingen ten deele tot dien tijd doet opklimmen, blijft de vraag wat vroegere pioniers, met name Archytas van Tarente gemeend hebben. En er is nog meer reden dit te vragen, wijl een enkele uiting in den aanhef der *Sectio*, bij Boëthius terugkeerend, ook in het groote muzikale fragment van Archytas³⁾ gevonden wordt: de toon ontstaat door een beweging, bij welke één voorwerp tegen een ander slaat.

Er is over dit punt nog al wat te zeggen.

Paul Tannery⁴⁾ en Erich Frank⁵⁾ kennen aan Archytas het begrip trilling toe, alsmede het inzicht, dat het aantal trillingen eener snaar omgekeerd evenredig is aan de snaarlengte. Naar mijn meening vergissen deze geleerden zich, zoowel voor het fragment, als voor een uiting van Theo Smyrnaeus, die *kan*, en wellicht *moet* worden uitgelegd zonder Archytas met trilling en frequentie voor een snaar bekend te maken.

Als een bijzonderheid van het groote fragment⁶⁾ moet men zeker opmerken, dat het geen woord over de *snaar* bevat. Natuurlijk mag men daaruit niet tot onbekendheid bij Archytas besluiten met snaar en snaartonen, want het is maar een *fragment*, doch feit is, dat de snaar er niet in genoemd wordt. Voorts is de strekking er van om aan te toonen (wat Archytas zegt over te nemen van

1) Vaak met een bijvoeging, die hier onbesproken blijft.

2) O.c. p. 216—219.

3) Opgenomen in Diels' Vorsokratiker², I, p. 257—260. Het fragment komt voor bij Porphyrius' in Ptol. Harm. Wallis, p. 236.

4) O.c. III, p. 217, p. 242.

5) In zijn *Plato und die sogenannten Pythagoreer*, 1923, herhaaldelijk.

6) Janus, in zijn *Musici Scriptores Graeci*, Prolegomena bij Euclides' *Sectio*, oordeelt over Archytas (p. 130, vlg.) zeer ongunstig. Ten onrechte m.i., maar niettemin verdient de beschouwing van dien zeer kundigen en scherpzinnigen geleerde alle aandacht.

door hem niet genoemde voorgangers), dat de toon een bewegingsfeit is, een *stoot* tot oorzaak heeft en zijn wezen heeft in *kwantitatieve bepaaldheid*, wat voor een Pythagoreër de hoofdzaak was, en dan door tal van lateren, ook Ptolemaeus¹⁾ en Boëthius overgenomen werd. Voorts heeft het fragment tot leidende stelling, dat *hoog* en *laag* bepaald worden door *kracht* en *snelheid* van voortplanting, en aan tal van voorbeelden tracht hij te bewijzen, in het grof en in het fijn, dat deze opvatting de juiste is. Uit háár juist leidt hij af, dat tonen aan getallen zijn gebonden, welke getallen dan ook snelheden van voortplanting uitdrukken, terwijl de snelheden zelf door de kracht van den *stoot* veroorzaakt worden.

Voor Archytas is het duidelijk, dat de *pijpen* dit alles bewijzen: „Dringt de uit den mond gestooten lucht in de het dichtst bij den mond gelegen gaten, dan geeft de [*aulos*] tengevolge van den sterken druk een hooger toon, maar zoo in de verder afgelegenen, dan een lageren²⁾ want de zelfde lucht stroomt door een lange ruimte langzamer, doch door een kortere heftig.”

En met dit beroep op de ervaring heeft Archytas een andere *foutieve* wet eeuwenlang door de antieke wereld doen rondwaren. De stelling: hooge tonen planten zich snel voort, lage langzaam, — men vindt ze terug in den *Timaeus* (80 A-B); men vindt ze in de *Problemata* (XI, 6), en het schijnt wel, dat nog Aelianus ze aanvaardt met het zelfde beroep op *aulos* en *syrinx*.³⁾

Nauwkeurig bezien schijnt Archytas twee dingen dooreen te halen: de snelheid der voortplanting en de snelheid der stootbeweging, doch de eerste gedachte verkondigt hij niettemin ook.⁴⁾

Bij Theo Smyrnaeus schijnt *snel* en *traag* meer op de beweging van den *stoot* te zien (uitg. Hillel, p. 60), doch ook zóó beschouwd krijgt de toon kwantitatieve bepaaldheid, wat Theo dan weer aan de *auloi* bevestigd ziet. En als hij dan volgen laat,

¹⁾ Ptolemaeus' hoofdstuk over het wezen van *hoog* en *laag* is niet zoo bevredigend en helder als men van hem verwachten zou, (*Harmonika*, I, 3). Toch aanvaardt hij de kwantitatieve bepaaldheid van hoog en laag. Verg. hierover Boëthius, o.c. V, 3.

²⁾ In enkele hier weggelaten regels spreekt Arch. over de *syrinxen*.

³⁾ Aangehaald bij Porphyrius, uit. Wallis, III, p. 216.

⁴⁾ „Van de onze waarneming aandoende (klanken) betoonen die, welke snel en (krachtig) van den aanslag tot ons komen, zich als *hooge* (klanken), doch die, welke langzaam en zwak (voortgaan), als *lage* (klanken) aan ons.”

dat de kring van E u d o x u s en A r c h y t a s den aard der consonanties in getallen zocht en dat de snelle beweging hoog is, daar zij de lucht sneller slaat, dan schijnt dit wel alleen op de snelheid van den *stoot* te wijzen, maar nog niet *trilling* en *frequentie* aan te duiden. Iets diergelijks valt op te merken over N i c o m a c h u s (E n c h. c. 4, slot).

Maar als men aan A r c h y t a s, wat men wel doen *moet*, bekendheid met *snaar-tonen* toekent, — wat dan? — zag hij dan niet evengoed als N i c o m a c h u s het deed, de snaar heen en weer gaan? Tot antwoord diene allereerst de opmerking, dat het er op aan kwam al dan niet in dat heen en weer gaan *het bepalend moment* voor de toonhoogte te zien, en ten tweede, dat voor een pionier, om dit in te zien, niet zoo gemakkelijk was als het schijnen kan. De snaarbeweging toch wekt een reeks van telkens afgebroken stooten, de toon daarentegen is een continu verschijnsel. En dat een pionier met dezen *puzzle* verlegen moest zijn, maakt meer dan één bericht uit wat later tijd zeer waarschijnlijk.

P o r p h y r i u s toch, de commentator van P t o l e m a e u s, vermeldt een beschouwing van H e r a c l i d e s over de snaarbeweging, waarin de genoemde *puzzle* beschreven wordt, en daarna opgelost met beroep op een eigenaardige *gezichtswaarneming*,¹⁾ de waarneming van de *nawerking*, en wel bij een draaienden *tol*. De *tol* toch, het stuk speelgoed,²⁾ met een gekleurde streep voorzien, zal bij zijn draaien in zijn geheel gekleurd schijnen; het gezicht is niet in staat om de standen van het kleurbrok van elkaar gescheiden te houden. En zoo ook is het oor te zwak om de snel opvolgende stooten uiteen te houden. De A u d i b i l i b u s wijst eveneens met nadruk op de *reeks* van *gescheiden* stooten bij de snaarbeweging, en óók op de aanschouwing van snel bewogen gekleurde voorwerpen, al spreekt het niet met name van den tol. B o ë t h i u s daarentegen noemt den tol weder wel, waar hij het thans beschrevene her-

1) P o r p h y r i u s in P t o l e m a e u m, uitg. Wallis, III, p. 214.

2) Van het speelgoed, den *tol*, is een afbeelding te zien op een schaal in Brussel bewaard; de tol heeft daarop het uiterlijk van wat wij noemen een *priktoel*. Zie een plaat op p. 193 in E r n s t B u s s c h e Griechische Vasenmalerei, 1921. — Ik dank de bekendheid met dit werk aan de welwillendheid van Mej. Frieda Meyboom. — P o r p h y r i u s spreekt van H e r a k l e i d e s zonder nadere aanwijzing, en zijn zegsman is dan ook wellicht niet H e r a k l e i d e s van P o n t o s.

haalt (I. 3), en men mag veilig beweren, dat het speelgoed de *tol* de akoustiek over een dood punt heeft heen geholpen.

Maar zóóver was *Archytas* dan nog niet; de *puzzle* stond hem in den weg, zoodat hij met die tril-beweging verlegen blijven moest, en méér nog wijl hij bij de toonwekking in de *syrinx* niets van een trillend voorwerp ontwaren kon: hij beperkte zich daarom tot het eenvoudige begrip *stoot*, voor snaar en pijp beiden.

Ook de lateren dachten niet om trilling voor de pijpen, maar voor de snaar althans hebben zij ze aanvaard. Doch snaar en pijp brachten zij ook toen enkel onder één dak met de begrippen *stoot*, *vaart* van den stoot, *afmetingen* van het instrument en eindelijk *kwantitatieven* zin van den toon, ¹⁾ — zoodat er nog veel van *Archytas* en diens voorgangers overbleef. ²⁾

¹⁾ Men ziet dit zeer duidelijk o.a. in *Nicomachus' Encheiridion*, c. 4, slot.

²⁾ Verscheidene opmerkingen van dit opstel moesten ook een plaats vinden in een verhandeling van den schrijver over den toonladder van den *Timaeus*, weldra te verschijnen in het *Tijdschrift van Wijsbegeerte*.

Burnet (*Early Greek Philosophy*^s, 1920, p. 106—107) beschouwt al de verhalen over de (foutieve) spanningswet als folklore zonder ernstigen zin. De lezer van dit opstel zal wellicht anders denken, en ik teeken nog aan, dat ook *Porphyrius* de wet vermeldt zonder principieel verzet, (W. III. p. 293).

HAALMEYER

Leerboek der Vlakke Meetkunde met vraagstukken

1e deel f 2.10, geb. f 2.50; 2e deel f 2.10, geb. f 2.50.

De Schrijver heeft de zeer moeilijke taak, die hij op zich nam, op uitnemende wijze volbracht.

Hij volgt nog steeds de, door voornoemde commissie „vooralsnog aanbevelenswaardig" geachte, „gematigde Euclidische methode", d. w. z. hij sluit zich in hoofdzaak bij de in de Elementen gebruikte methode en de aldaar gevolgde gedachtengang aan, maar hij ziet er, met het oog op den leeftijd der leerlingen, van af, de logische strengheid tot het uiterste door te voeren; hij schroomt echter niet, waar hij er voordeel in ziet, van verbeteringen, die als resultaten van het moderne onderzoek in de Elementen zouden kunnen worden aangebracht, gebruik te maken.

Blijkens het voorbericht heeft de Schrijver het zwaartepunt van het onderwijs in de planimetrie willen verleggen van de vraagstukken naar de theorie. Zijn bedoeling is duidelijk: terwijl menig leerboek erop berekend schijnt, den leerlingen slechts zóó weinig van de theorie mede te geven als nog juist voldoende is om hen in staat te stellen, de gangbare vraagstukken op te lossen, bij welke opvatting de theorie slechts *middel* is, is bij Haalmeyer de theorie het *doel*, en de vraagstukken zijn „slechts" het middel om de theorie te verduidelijken, vast te leggen en toe te passen. Gekunstelde opgaven treft men bij hem niet aan. De opgaven tot constructie en bewijs spelen bij Haalmeyer, in overeenstemming met het doel, een belangrijke rol; in zake de opgaven ter berekening heeft hij zich zeer weten te beperken, zoowel wat het aantal als wat den omvang betreft.

Kenmerkend voor het leerboek (en dit is een van zijn groote verdiensten) is een nimmer aflatend *streven* naar een strengen opbouw en naar een exact woordgebruik, maar we vinden (en dit is een stellig niet geringere verdienste) dit streven op verstandige wijze *gematigd*, omdat het boek voor eerstbeginnende, jeugdige leerlingen bedoeld is.

Aan de behandeling van het algemeene begrip raaklijn en van het oppervlak en den omtrek van den cirkel gaat een bespreking van het limietbegrip vooraf, waarin men de bewijzen vindt van enkele stellingen omtrent limieten, die worden toegepast. Van alle moeilijkheden, die de Schrijver te overwinnen had, lagen hier wel de allergrootste. Het is hier niet de plaats, op deze zaak nader in te gaan, en ik wil volstaan met de verklaring, dat de behandeling mij zéér heeft bekoord.

In het laatste hoofdstuk worden van ellips, hyperbool en parabool de eenvoudigste eigenschappen langs zuiver meetkundigen weg afgeleid en de eenvoudigste constructies met betrekking tot die krommen behandeld; ook dit hoofdstuk lijkt mij zeer geslaagd. Terecht merkt echter de Schrijver in het voorbericht op, dat, waar we hier voor geheel nieuwe leerstof staan, de practijk zal moeten leeren, in *hoeverre* zij voor de leerlingen verteerbaar is.

Nu ik een en ander uit dien inhoud en omtrent de wijze van behandeling heb medegedeeld, moge ik, om te besluiten, nog iets zeggen over den vorm. Als een voorbeeld om aan te duiden met hoe groote nauwgezetheid de Schrijver met de vaktermen omgaat, wijs ik op het volkomen consequente gebruik van de termen: lijn, halve lijn en lijnstuk. De vorm der bewijzen en der constructies is onberispelijk en echt wiskundig sober. Stijl en woordenkeus zijn natuurlijk en eenvoudig.

De Schrijver heeft de vakgenooten zeer aan zich verplicht, omdat hij, door zijn diepgaande kennis dienstbaar te maken aan het streven naar verdieping van het wiskunde-onderwijs, hun daartoe een kostelijk hulpmiddel in handen gegeven heeft; ik geloof namens velen te spreken, indien ik hem hiervoor dank zeg.

Weekbl. v. G. en M. Onderw.

H. J. E. Beth.

UITGAVE VAN P. NOORDHOFF TE GRONINGEN

Zoo juist verscheen :

LEERBOEK DER BESCHRIJVENDE MEETKUNDE

door

Prof. H. J. v. VEEN

DEEL II

Oppervlakken en Ruimtekrommen. Aanhangel (Pooltheorie en Meetk. Verwantschappen)

Prijs gebonden met afzonderlijke atlas f 7.75

Voor abonne's N. T. v. Wiskunde, Chr. Huygens en
Euclides tot 1 Juni a.s. f 6.25

Vroeger verscheen :

DEEL I — PROJECTIEMETHODEN AANHANGSEL (KEGELS NEDEN)

Prijs gebonden met afzonderlijke atlas f 6.90

Zoo juist verscheen :

P. WIJDENES

BEKNOPT E STEREOMETRIE

voor Kweek- en Normalscholen, voor de
hoofdakte en voor de Nijverheidsakten
2e druk

Prijs gebonden f 1.50

UITGAVEN VAN P. NOORDHOFF TE GRONINGEN

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDAC-
TIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN
J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

MET MEDEWERKING VAN

Dr. H. J. E. BETH
DEVENTER

Dr. E. J. DIJKSTERHUIS
OISTERWIJK

Dr. G. C. GERRITS
AMSTERDAM

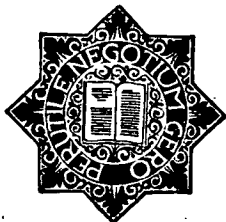
Dr. B. P. HAALMEIJER
AMSTERDAM

Dr. D. J. E. SCHREK
UTRECHT

Dr. P. DE VAERE
BRUSSEL

Dr. D. P. A. VERRIJP
ARNHEM

5e JAARGANG 1928/29, Nr. 5
„HUYGENS-NUMMER”



P. NOORDHOFF — GRONINGEN

Prijs per Jg. van 18 vel f 6.—. Voor intekenaars op het
Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde en Christiaan Huygens f 5.—.

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken, verschijnt in zes tweemaandelijksche afleveringen, samen 18 vel druks. Prijs per jaargang f 6.—. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (f 6.—) of op „Christiaan Huygens” (f 10.—) zijn ingeteekend, betalen f 5.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans-van-Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Het honorarium voor geplaatste artikelen bedraagt f 20.— per vel.

De prijs per 25 overdrukken of gedeelten van 25 overdrukken bedraagt f 3,50 per vel druks *in het vel gedrukt*. Gedeelten van een vel worden als een geheel vel berekend. Worden de overdrukken buiten het vel verlangd, dan wordt voor het afzonderlijk drukken bovendien f 6.— per vel druks in rekening gebracht.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

INHOUD.

	Blz.
E. J. DIJKSTERHUIS, De ontdekking van het tantochronisme der cycloidale valbeweging	193 – 227

Ter perse om dezer dagen te verschijnen:

Historische Bibliotheek voor de exacte wetenschappen

I. DE ELEMENTEN VAN EUCLIDES

DEEL I — DE ONTWIKKELING DER GRIEKSCHE WISKUNDE
VAN EUCLIDES. BOEK I DER ELEMENTEN
door Dr. E. J. DIJKSTERHUIS

II. INLEIDING IN DE NIET-EUCLIDISCHE MEETKUNDE OP HISTORISCHEN GRONDSLAG

door Dr. H. J. E. BETH

Prijs bij intekening 2 deelen geb. à f 3,90, afzonderlijke prijs f 4.50

UITGAVEN VAN P. NOORDHOFF TE GRONINGEN