

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDAC-
TIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN
J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

MET MEDEWERKING VAN

Dr. H. J. E. BETH
DEVENTER

Dr. E. J. DIJKSTERHUIS
OISTERWIJK

Dr. G. C. GERRITS
AMSTERDAM

Dr. B. P. HAALMEIJER
AMSTERDAM

Dr. D. J. E. SCHREK
UTRECHT

Dr. P. DE VAERE
BRUSSEL

Dr. D. P. A. VERRIJP
ARNHEM

5e JAARGANG 1928/29, Nr. 3



P. NOORDHOFF — GRONINGEN

Prijs per Jg. van 18 vel f 6.—. Voor inteekenaars op het
Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde en Christiaan Huygens f 5.—.

 De redactie heeft het genoeg in deze aflevering het portret te geven van Prof. Dr. M. J. VAN UVEN; zij hoopt de portretten van al onze hoogleeraren den teekenaars achtereenvolgens te kunnen aanbieden.

vierde leerjaar komt. Het wordt dan ook erg moeilijk den leerlingen uit te leggen, welk eene enorme verbetering de invoering der kijkers gebracht heeft, wat de voordeelen van den kijker boven de oude vizierinrichting zijn. Het is onmogelijk, om op bevredigende wijze iets te behandelen van de dynamische bewijzen voor de aswenteling der aarde, zelfs kan men niet eens de coördinatenstelsels op den bol met eenigen steun van stereometrische kennis behandelen.

Wanneer men bij de behandeling der kosmographie de natuurkundige onderwerpen meer op den voorgrond brengt, zoodat anomale dispersie, ionisatie en leer van het scheikundig evenwicht bekend ondersteld moeten worden, zullen de moeilijkheden, waartoe de thans vigeerende regeling aanleiding geeft, er zeker niet minder op worden.

Dit alles wijst er m. i. op, dat het voorstel der commissie-Beth, om de kosmographie gedurende twee uren in de *vijfde* klasse te behandelen, alle aanbeveling verdient. Het is zeker niet gewenscht, zonder noodzaak in de vijfde klasse met de behandeling van een nieuw leervak te beginnen, maar het komt mij voor, dat die noodzaak in dit geval bestaat. Den ouden toestand herstellen, dus aan de kosmographie één uur in de vierde en één uur in de vijfde toekennen, lijkt mij niet gewenscht, omdat er in de kosmographie eigenlijk geen onderwerpen zijn, die men met leerlingen van de vierde klasse in het begin van den cursus naar behooren kan behandelen.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA.

Ieder wiskundige kent, zij het ook slechts bij name, het hierboven genoemde tijdschrift met den ondertitel „Zeitschrift für Geschichte der Mathematik”, dat gedurende een lange reeks van jaren onder leiding van den Zweedschen historicus *Gustav Eneström* een middelpunt van historisch-mathematisch onderzoek was. In 1884 opgericht gaf het door zijn artikelen, zijn boekbesprekingen, door *Eneström*'s speciale rubriek „Kleine Bemerkungen zu Cantors Vorlesungen über Geschichte der Mathematik” leiding aan allen, die de geschiedenis der wiskunde beoefenen of in haar belang stellen, en het was tot groote schade van de wetenschap, dat in 1915 de moeilijke tijdsomstandigheden *Eneström* noodzaakten zijn werk te staken en het tijdschrift ophield te bestaan.

Natuurlijk hoopte men in betere tijden de uitgave opnieuw te kunnen beginnen en nog in 1920 sprak *Eneström* zich in dien geest uit in een brief aan Prof. *D. E. Smith* te New-York. *Eneström* zelf, die in 1923 overleed, heeft dit niet meer mogen beleven; in Amerika is de zaak echter niet uit het oog verloren en toen de omstandigheden gunstig schenen heeft de Mathematical Association of America ze ter hand genomen. Een commissie, bestaande uit de heeren *R. C. Archibald*, *Florian Cajori*, *H. E. Slaught*, *D. E. Smith* en *W. D. Cairns* (secretaris) wendde zich in het begin van 1928 tot een vijftigtal personen in Europa, Azië en Amerika met het verzoek, een circulaire mede te onderteekenen, die zou worden gezonden aan allen, van wie men belangstelling voor dit streven meende te mogen verwachten. Ongeveer allen, die gevraagd werden, verleenden dezen moreelen steun; onder de namen treffen we die van de meest gezaghebbende historici van onzen tijd aan (*Sir Thomas L. Heath*, *Gino Loria* en *H. Wieleitner*, om slechts enkele te noemen). De circulaire richt zich „to those interested in the history of mathematics and in the revival of the journal *Bibliotheca Mathematica*” en bedoelt, dat dezen zich zoo spoedig mogelijk

zullen opgeven als abonné. De omvang van het tijdschrift zal minstens gelijk zijn aan dien van vóór 1915 en hem zoo mogelijk overtreffen; de abonnementsprijs zal, hoewel de kosten der uitgave aanzienlijk zijn gestegen, niet hooger zijn dan die van vóór den oorlog en vijf dollars bedragen (voor de leden der Mathematical Association of America vier dollars). Ook het nieuwe tijdschrift zal in waarheid internationaal zijn en men zal alles doen om het op een hoog peil te houden. Waarschijnlijk zullen de hoogleeraren *D. E. Smith*, *F. Cajori* en *R. C. Archibald* de redactie vormen.

Slechts bij een voldoende aantal aanmeldingen kan tot de uitgave worden overgegaan. Wie dus het boven uiteengezette streven door het nemen van een abonnement wil steunen geve zich zoo spoedig mogelijk op bij Prof. *W. D. Cairns*, Oberlin, Ohio, U. S. A., tot wien ook alle verdere correspondentie is te richten. Ook door het bekend maken van het bovenstaande in eigen kring kan ieder medehelpen om de onderneming te doen slagen. Als velen medewerken zullen spoedig onze vakgenooten aan de overzijde van den Atlantischen Oceaen de zekerheid kunnen hebben, dat met de uitgave kan worden begonnen.

Utrecht, Dec. 1928.

D. J. E. Schrek.

EIGENSCHAPPEN VAN DE DEELBAARHEID.

In eene onlangs verschenen mededeeling ¹⁾ heeft Dr. J. G. v. D. PUTTE getracht, de eigenschappen van den G.G.D. uit twee axiomata (= karakteriseerende eigenschappen) af te leiden. Stellen we de te karakteriseeren grootheid voor door $\{a, b\}$, ²⁾ waarin a en b twee willekeurige niet-negatieve geheele rationale getallen zijn, dan luiden deze:

$$\text{I. } \{pa, pb\} = p\{a, b\}$$

$$\text{II. } \{\{a, b\}, c\} = \{a, \{b, c\}\}.$$

Daarnaast maakt hij echter gebruik van de beide volgende, niet genoemde axiomata:

$$\text{III. } \{a, 1\} = 1$$

(l.c. § 3, 5) en

$$\text{IV. } \{a, b\} = \{b, a\}$$

(l.c. § 4, 6), die niet van de beide eerste afhankelijk zijn, daar b.v. $\{a, b\} = a + b$ een symbool is, dat aan I, II en IV, maar niet aan III voldoet, terwijl $\{a, b\} = b$ een symbool is, dat aan I, II en III, maar niet aan IV voldoet.

Schr. bewijst uit deze vier axiomata enkele eigenschappen van den G.G.D., echter niet de beide fundamenteele eigenschappen:

A. Is $\{a, b\} = c$, dan bestaan er twee getallen x en y , zoodanig dat $a = cx$, $b = cy$ is.

B. Er bestaan bij ieder tweetal getallen a en b twee getallen x en y , zoodanig, dat $\{a, b\} = ax + by$ is.

Dit is ook niet mogelijk, daar ook de axiomata I—IV niet voldoende zijn om den G.G.D. te karakteriseeren.

¹⁾ Dr. J. G. v. D. PUTTE. „Eigenschappen over de deelbaarheid”, Euclides 5 (1928) p. 12—13.

²⁾ Ter onderscheiding van den „echten” G.G.D. (a, b) .

Stelt men n.l.

$$\{a, 0\} = \{0, a\} = a,$$

$$\{a, b\} = \begin{cases} a & \text{voor } 0 < a \leq b \\ b & \text{voor } 0 < b \leq a \end{cases}$$

dan is aan de axiomata I—IV voldaan, terwijl toch $\{a, b\} \neq (a, b)$ is. Eigenschap A is niet, eigenschap B wel vervuld.

Dit spreekt ook vanzelf. Immers axioma I karakteriseert $\{a, b\}$ als *veelvoud* van den G.G.D.; er is echter geen axioma, dat $\{a, b\}$ als gemeenen *deeler* karakteriseert. Neemt men hiervoor b.v. A, dan kunnen II, III, IV vervallen, daar ze, evenals B, bewijsbaar worden ³⁾.

Dat de door schr. bewezen eigenschappen desalniettemin uit I—IV bewijsbaar zijn, is mogelijk, doordat onderstellingen van de gedaante $\{a, b\} = 1$ optreden, waaruit wegens I a fortiori $(a, b) = 1$ volgt, terwijl de gestelden zwakkere eischen inhouden. ⁴⁾

Ten slotte zij nog opgemerkt, 1^e dat uit $\{a, c\} = c$ (l.c. § 2) nog *niet* volgt, dat a door c deelbaar is, tenzij men A als axioma aanneemt, 2^e dat een axioma ontbreekt, dat de *existentie* van een G.G.D. postuleert. Stellen de letters b.v. getallen van de gedaante $a + b\sqrt{5}$ voor (a en b geheel rationaal), dan hebben twee getallen in het algemeen geen G.G.D., terwijl toch de axiomata zin hebben en de algorithmen in de bewijzen kunnen worden uitgevoerd. Een helder inzicht in het G.G.D.-begrip krijgt men dan ook eerst met behulp van de ideaaltheorie.

³⁾ Met behulp van een aantal algemeenere axiomata.

⁴⁾ L. c. § 6 is triviaal daar het K.G.V. met behulp van den G.G.D. gedefinieerd wordt (§ 6, regel 5). Vermijdt men het (onnoodige) gebruik van IV door in regel 5 $\{p, q\} = 1$ te vervangen door $\{q, p\} = 1$, dan voert $\{a, b\} = b$ tot $v = b$ en $\{a, b\} = a + b$ tot $v = \frac{ab}{a+b}$; in beide gevallen geldt de stelling van § 6, die dan ook slechts de definitie van het K.G.V. in anderen vorm herhaalt.

Rotterdam, 8 November 1928.

D. van Dantzig.

WOORD EN WERKTUIG.

DE STRIJD OM HET MECHANICA-ONDERWIJS.

DOOR

D. VAN DANTZIG.

I.

1. Teneinde een recht inzicht te verkrijgen in de beteekenis en de oorzaken der moeilijkheden die zich in den laatsten tijd ten opzichte van het onderwijs in de mechanica hebben voorgedaan, is het wenschelijk, te trachten, ons ietwat scherper dan in discussiës als de onderhavige gebruikelijk is, rekenschap te geven van de beteekenis die de mathematische methode voor de physika heeft.

2. Zoowel in het rapport der commissie Fokker c.s. ¹⁾ als in het adres van het bestuur der Nederlandsche Natuurkundige Vereeniging ²⁾ wordt met sterken nadruk het overwegend experimenteele karakter der physika betoogd. Teneinde eene veelvuldig voorkomende begripsverwarring te voorkomen willen we vooraf vaststellen, dat we het woord *empirisch* zullen gebruiken voor kennis, die verkregen wordt door zintuigelijke waarneming in het algemeen, terwijl het woord *experimenteel* gereserveerd blijve voor kennis die verkregen wordt door waarneming onder opzettelijk en doelbewust op zoodanige wijze vereenvoudigde omstandigheden, dat daardoor op eene bepaalde, *vooraf gestelde*, scherp omschreven vraag een zooveel mogelijk eenduidig antwoord kan worden verkregen.

3. Wanneer nu het experimenteele karakter van de physika zoo nadrukkelijk betoogd wordt, dan is daarmee bedoeld, dat we tot de kennis der „natuur” alleen kunnen komen „door naauwkeurig te

¹⁾ Het onderwijs in de natuurkunde aan gymnasia, hogere burgerscholen en lycea. Rapport uitgebracht aan het bestuur van de Nederlandsche Natuurkundige Vereeniging. Groningen, den Haag, (J. B. Wolters), 1928.

²⁾ Opgenomen in het Weekblad voor gymnasiaal- en middelbaar onderwijs, 24, 42 (20/6 1928), 1419—1422.

letten op de verschijnsels der Natuur en die na te gaan; niet met alleen op (eene) kamer te zitten, en uit een valsche en verkeerde Bovennatuurkunde wat herssenschimmen en losse onderstellingen te maaken: Want dewijl wij geen ingeschaape denkbeelden van de lighaamen, noch van hunne eigenschappen, noch van de werkingen op malkanderen hebben, moeten wij alles door proeven en waarneemingen onderzoeken en leeren, en er dan zelf denkbeelden van vormen" ³⁾). Dit is natuurlijk eene naieve, anti-scholastische consequentie van een standpunt, dat nog steeds door vele physici wordt ingenomen, en dat we, van zijn extremisme ontdaan, kunnen opvatten als het opmerken van en het verlangen naar eene praedominatie van het zintuigelijke ten opzichte van het formalistisch-logische en mathematische element ⁴⁾); van het zintuig en het werktuig ten opzichte van het woord en het symbool, in den opbouw der natuurwetenschappen.

4. Daarbij moet echter tweeërlei opgemerkt worden.

Primo. Het is onmogelijk, deze beide elementen scherp van elkaar te scheiden, daar iedere (ook onopzettelijke, mits bovenbewuste) waarneming eene bepaalde wijze van katalogiseering der verschijnselen vóóronderstelt, die berust op eene in laatste instantie willekeurige, of althans subjectieve en veranderlijke groepeerings der associatief samenhangende voorstellingscomplexen rondom woordkernen, die zulk een complex noch eenduidig bepalen, noch eenduidig erdoor bepaald worden.

Evenwel, ondanks deze subjectiviteit en veranderlijkheid bezit de associatieve samenhang dezer woordkernen en voorstellingscomplexen (althans voorzooverre het de associaties van overeenkomst en verschil betreft) eene voldoende mate van stabiliteit en a posteriori

³⁾ Petrus van Musschenbroek, *Beginsels der natuurkunde*, beschreven ten dienste der landgenooten. Leyden (Samuel Luchtmans) 1739; Voorreden.

⁴⁾ Teneinde mij niet verder dan strikt noodzakelijk was van de gestelde opgave te verwijderen, heb ik moeten vermijden, de hier gebruikte signifiante en psychologische termen grondig te analyseren en nauwkeurig te definiëren, waardoor ook de duidelijkheid eenigszins moest lijden. Daarvoor zij verwezen naar G. Mannoury, *Mathesis en Mystiek*, Amsterdam (Wereldbibliotheek) 1925; D. van Dantzig, *Over de maatschappelijke waarde van onderwijs in wetenschap*, dit tijdschrift, 3 (1927) 187—197, en naar later door mij te publiceeren studiën, in het bijzonder naar eene in bewerking zijnde uitvoeriger „Einleitung in die Signifik“.

ori te constateeren objectiviteit om bij oppervlakkige beschouwing de *suggestie* van zulk een omkeerbaar eenduidig bepaald zijn te wekken, en daarmede (exopsychisch) redelijke verstandhouding van menschen onderling, en (endopsychisch) katalogiseering der verschijnselen, zooal niet in laatste instantie mogelijk, dan toch schijnbaar mogelijk en door hare onvolmaaktheid doelmatig te maken.

5. Secundo. Het exact stellen eener vraag is slechts mogelijk met gebruikmaken van woorden, welker beteekenis zeer scherp van die van andere woorden onderscheiden is, en welker relaties tot elkaar met groote nauwkeurigheid onderzocht zijn. Teneinde de gewenschte „scherpte” en „exactheid” te verkrijgen, dienen woorden uit de levende taal op kunstmatige wijze ontdaan te worden van het sterk emotioneele en dus fluctueerende, vage en van stemmingen afhankelijke karakter, dat daaraan van nature eigen is, als gevolg van het feit, dat zij doorgaans een zeer omvattend associatiecomplex met zich meesleepen van voorstellingen, die er „niets” mede te maken hebben, d.w.z. er op andere wijze associatief mede verbonden zijn dan door bemiddeling der bovengenoemde overeenkomsten-verschil-associaties.

Dit proces van woordverscherping en woordafbakening is het verst doorgevoerd in de wiskunde, en wordt derhalve gewoonlijk *mathematiseering* of *formaliseering* van de taal genoemd.

Samenvattende: *experimenteele wetenschap in den boven omschreven zin kan uitsluitend worden toegepast op een verschijnselencomplex, dat beheerscht wordt door een sterk geformaliseerd taalgebied.*

6. Hierbij dient echter het volgende te worden opgemerkt.

Ten eerste: Het bovengenoemde mathematiseeringsproces is niet noodzakelijk gebonden aan de gebruikelijke wiskundige taal, dus aan *bepaalde* afkortende woorden of symbolen. Anderzijds is het echter wenschelijk, de woorden uit de levende taal te vervangen door, of althans in nauw verband te brengen met zoodanige symbolen, dat men de zekerheid verkrijgt, dat het emotioneele element in voldoende hooge mate is uitgeschakeld.

Ten tweede. Iedere woordverscherping heeft ten gevolge, dat het verband van een oorspronkelijk sterk emotioneel getint woord met de emoties waarvan het de drager was, verbroken wordt. Zoo zal

bij voorbeeld het constateeren eener temperatuursverhooging in een kamer niet steeds tot een versterkt gevoel van „het warm hebben” leiden, hoewel bij het definieeren van de temperatuur — als door de uitzetting van een kwikkolom meetbaar gemaakten warmtegraad — vooraf geconstateerd wordt, dat zij gewoonlijk, of gemiddeld, of normaliter, in een zeker vagelijk aangevoeld maar niet nauwkeurig omschrijfbaar verband staat tot de niet-meetbare intensiteit der warmte-emotie. Analoge beschouwingen gelden voor alle andere gemathematiseerde begrippen, zooals waarschijnlijkheid, tijdsduur, afstand, snelheid, kracht, energie, enz.

Ten derde. Er dient onderscheid gemaakt te worden tusschen het formaliseeren van sterk emotioneel getinte woorden tot nauwkeurig omschreven begrippen, en het formaliseeren van a priori zuiver emotioneele *overtuigingsmiddelen* tot bewijsvoeringen volgens de regels der logika, waardoor zij in het algemeen ophouden, overtuigingsmiddelen te zijn.

7. De bij oppervlakkige beschouwing wellicht voor de hand liggende tegenwerping, dat de physicus reeds tevreden zou zijn met de mogelijkheid tot het opstellen van natuurwetten, waaruit zich voorstellingen omtrent later waar te nemen verschijnselen laten afleiden, op grond van een, *zij het niet volkomen bewust en in exacte woorden uitdrukbaar*, dan toch intuïtief en emotioneel aangevoeld kennen en weten en gezien-hebben, kortom *ervaren hebben* der physische verschijnselen, kan bij nadere beschouwing geen stand houden. Immers, ware dit zoo, dan zou bij voorbeeld een loods, die op grond zijner niet volbewust maar intuïtief geordende ervaring *weet* dat er „zwaar weer” op komst is, en, desgevraagd, dit weten of voorvoelen op een „bepaald”, maar door hem niet nauwkeurig omschrijfbaar karakter van „die” wolken baseert, een op zijn gespecialiseerd gebied ideale physicus zijn; deze begripsverruiming van het woord „physicus” zal echter wel door geen enkelen physicus-in-engeren-zin wenschelijk geacht worden.

De in het rapport der commissie Fokker c.s. en in het adres der Nederlandsche Natuurkundige Vereeniging tot uiting komende opvatting, dat voor een goed begrip eener physische theorie het persoonlijk uitgevoerd hebben der aan haar ten grondslag liggende experimenten noodzakelijk zoude zijn, voert dan ook in hare consequentie tot de absurditeit, dat b.v. de HH. Fokker en Kramers, ja

zelfs Lorentz en Einstein, niet in staat zouden zijn, de relativiteits-theorie te begrijpen, daar vermoedelijk geën van hen het experiment van Michelson ooit met eigen oogen gezien, laat staan met eigen handen gereproduceerd heeft. Een diepgaand inzicht in eene physieke theorie is dus wel degelijk mogelijk zonder persoonlijke waarneming der fundamenteele experimenten.

8. Vele physici zullen wellicht ook de tegenwerping willen maken, dat niet het systematiseeren en katalogiseeren en met behulp daarvan voorspellen der verschijnselen hoofddoel der physika is, maar het begrijpen van het „wezen” dier verschijnselen en van hunne wetmatigheden. Zij bewijzen daarmede slechts, dat de physika somtijds bedenkelijk dicht tot den rand der metaphysika nadert, en dat deze „angeblich” zoo bij uitstek experimenteele, a fortiori empirische wetenschap op kritische momenten en in onbewaakte oogenblikken bij voorkeur in eene typisch onempirische begrippenwereld vlucht.

Samenvattende: niet de intuïtief geordende, maar de in scherp omgrensde woorden uitdrukbare en in een gemathematiseerd taalstelsel samengevatte ervaring is inhaerent aan de physika.

9. De ontwikkeling van de physika in de laatste jaren bevestigt de hier verdedigde opvatting ten volle. Immers, er bestaat eene duidelijk waarneembare tendentie, die voornamelijk in de relativiteits-theorie en in de quantummechanika tot uiting komt, om woorden, die van oudsher een sterk aanschouwelijk karakter dragen, woorden als ruimte en tijd, plaats, vorm en snelheid (van een elektron b.v.), gelijktijdigheid, substantie, corpusculum, elektronenbaan, en zoo voorts, uit de physika, of althans uit een gedeelte der physika te verbannen, en ze te vervangen door abstract gedefinieerde woorden van meer overwegend formalistisch karakter, door woorden als interval, impulsmoment, Hermite'sche operator, azimutale (en andere) quantumgetallen, toestandsveld, overgangswaarschijnlijkheid, stationaire toestand, enz. ^{4a}).

^{4a}) Noot bij de correctie. „De theoretische physika is heden ten dage tot nieuw leven ontwaakt en zij wordt zeer ten onrechte door eenige tegenstanders bestreden. In haar klassieke, groote tijden was de physika altijd theoretisch en bespiegelend.” (A. Einstein in een interview, N. Rott. Crt., 29-I-'29, avondblad).

10. Het feit, dat de groote opbloei der physika is opgetreden ná en volgens eene veel gehuldigde opvatting ⁵⁾ grootendeels ten gevolge van het gedeeltelijk prijsgeven der zuiver speculatieve, zich uitsluitend langs woordsystemen richtende deductieve methoden der Scholastiek, voor de meer op zintuigelijke waarneming en doelbewuste proefneming gebaseerde methoden der Renaissance, leidt somtijds tot eene overschatting van de beteekenis der experimenteele inducties voor de physika en meer in het bijzonder voor de mechanika.

11. Bovendien doet de onder 2. gesignaleerde begripsverwarring sommigen over het hoofd zien:

ten eerste, dat de weinige vóór Newton uitgevoerde experimenten alléén niet in staat waren, de wetten der mechanika vast te leggen, daar zij vrijwel zonder uitzondering uitsluitend *qualitatieve* resultaten konden opleveren;

ten tweede, dat, behoudens enkele uitzonderingen (Foucault) de meeste *quantitatieve* mechanische experimenten die aan de in de physika gebruikelijke eischen van nauwkeurigheid voldoen (b.v. Eötvös, Michelson) eerst zijn uitgevoerd nadat de theoretische opbouw der Newtonsche mechanika reeds eene groote mate van volledigheid had bereikt.

12. Resumeerende: *de genoemde groepen van physici hebben in hunne recente uitingen het experimenteele karakter van de physika al te eenzijdig op den voorgrond geschoven, en daardoor eene voorstelling van de ontwikkeling dezer wetenschap gegeven, die in strijd is met de resultaten van historisch onderzoek en met den aan de physika als verschijningsvorm inhaerenten grondslag van taalformaliseering. Zij hebben niet nauwkeurig genoeg onderscheiden tusschen wetenschappelijke experimenten als noodzakelijk fundament voor den opbouw eener physische theorie en school-„proeven” als methodisch hulpmiddel ter veraanschouwelijking van het onderwijs. Daardoor is de schijn gewekt, alsof hun voorstel tot versterking van het experimenteele element in het onderwijs eene directe consequentie is van hun verlangen, het karakter van*

⁵⁾ Vergelijk echter: Dr. E. J. Dijksterhuis, Val en Worp, Groningen (P. Noordhoff) 1924, pag. 167, sec., waar deze opvatting bestreden wordt.

dit onderwijs in grootere overeenstemming te brengen met dat van de wetenschappelijke beoefening der physika.⁶⁾

Deze miskennis van het mathematische karakter der physika komt meer in het bijzonder tot uiting met betrekking tot de mechanica, die wel zeer zeker niet „overal en ten allen tijde” eene experimenteele wetenschap is geweest, en die dan ook noch een Regnault, noch een Faraday, noch een Kamerlingh Onnes heeft voortgebracht.

II.

13. Bij de vraag, hoe deze extremistische uitingen psychologisch te verklaren zijn bij een groep van geleerden en didaktici, die buiten het kader der huidige beschouwingen over onderwijshervorming blijkens hunne geheele wetenschappelijke werkzaamheid minder eenzijdig het experiment verheerlijken, kan ik niet vermijden, een ietwat meer persoonlijk element in de discussie te betrekken. Vooraf wil ik echter den Heer Schogt de verzekering geven, dat het feit, dat ik hem, of veeleer het door hem geschreven leerboek der mechanica⁷⁾, als zondboek moet brandmerken (en nog wel in het tijdschrift, waarvan hij zelf redacteur is!), in geenen deele te kort doet aan mijne waardeering voor de wetenschappelijk axiomatische en methodologische beteekenis van zijn werk.

Het komt mij namelijk voor, dat het verschijnen van dit leerboek, benevens de daarop gevolgde zeer waardeerende besprekingen van den Heer Dijksterhuis⁸⁾ bij de physici den indruk gewekt heeft, dat de hierin gevolgde methode (in beginsel althans) geheel het

⁶⁾ Het is wellicht niet overbodig, op te merken, dat het evenwicht tusschen experimenteele en theoretische physika reeds thans op de middelbare school eerder naar den experimenteele dan naar den theoretischen kant verschoven is, vergeleken met de wetenschappelijke ontwikkeling der physika. In het bijzonder is het zeer twijfelachtig of de talrijke gebruikelijke verouderde en sinds lang door theorie en techniek achterhaalde experimenten in staat zijn, het inzicht in het „wezen” der physika te verhoogen.

⁷⁾ J. H. Schogt, *Beginnelsen der theoretische mechanica*, twee deelen, Groningen (P. Noordhoff) 1926/27.

⁸⁾ E. J. Dijksterhuis, *Een nieuw leerboek der Theoretische Mechanica*, Weekblad voor Gymnasiaal en Middelbaar Onderwijs, 3/3 1926 en aldaar, 28/9 1927.

ideaal der wiskundigen en der wiskundeleeraren vertegenwoordigt; dat daardoor bij deze physici angstgevoelens ontstaan zijn met betrekking tot de toekomst van het, hun zeker niet minder dan den mathematici ter harte gaande mechanika-onderwijs, en dat zij, teneinde deze door hen gevreesde en in hunne oogen verderfelijke ontaarding van dit onderwijs te verhinderen, gemeend hebben, zelf de zaak ter hand te moeten nemen. Het is denkbaar, dat zij, teneinde met den noodigen nadruk hunne meening te kunnen verkondigen, uit hetzij bewuste, hetzij onbewuste tactische overwegingen eenzijdig het *empirische* karakter der mechanika hebben willen betoogen, en zich daardoor hebben laten verleiden tot de bewering, dat zij eene *experimenteele* wetenschap zoude zijn.

14. Wanneer we ons thans afvragen, welke eigenschappen van het boek van den Heer Schogt zulk een verweer kunnen hebben uitgelokt, dan moeten we opmerken, dat het zich voornamelijk in tweeërlei opzicht van de gebruikelijke oudere leerboeken onderscheidt.

Vooreerst heeft de Heer Schogt getracht, zich scherper reenschap te geven van de beteekenis der in de mechanika gebruikte woorden dan tot dusverre gebruikelijk was. Hij heeft zich onbevredigd gevoeld door de tallooze in vele der oudere leerboeken voorkomende onduidelijkheden, onnauwkeurigheden, onjuistheden en onzinnigheden⁹⁾, en hij heeft er, niet zonder succes, naar gestreefd, deze in zijn werk te vermijden.

In zooverre de Heer Schogt uitsluitend op den reeds lang ingeslagen weg is voortgegaan, kan zijn werk zeker niet het onderstelde bijzondere misnoegen der physici opgewekt hebben. Het ware althans beledigend, te onderstellen, dat dezen zich uitsluitend bevredigd zouden kunnen gevoelen door eene verwarde en onjuiste en, relatief tot haar eigen streven, slechte behandelingswijze der mechanika, en dat de oppositie een gevolg ware van eene door niemand betwiste verbetering binnen het kader eener sinds lang gebruikelijke methode. Wij zullen dus eene oorzaak te zoeken hebben in andere eigenschappen die het werk van den Heer Schogt

⁹⁾ J. H. Schogt, Eenige opmerkingen over het onderwijs in de méchanica, dit tijdschrift, 2 (1925) 54—75.

onderscheiden van, of althans in hoogere mate kenmerken dan de oudere leerboeken, en die den physicus verderfelijk voorkomen.

15. Daartoe kunnen we als tweede criterium des onderscheids opmerken, dat het zoo vaak gewraakte wiskundig karakter van het mechanika-onderwijs aan dit boek in hoogere mate dan aan zijne voorgangers eigen is.

Nu is echter de toepasbaarheid van logika en mathesis in de physika, dat is de bij ervaring gebleken doelmatigheid, onze verwachtingen te richten naar de uitkomsten van mathematische deducties in abstracte symbolen die door eene zekere correlatie met bepaalde waarneembaarheden in verband gebracht zijn, vrijwel identiek met de mogelijkheid eener natuurkundige wetenschap überhaupt, zoodat ook hierin zeer zeker niet de oorzaak van den „Putschversuch” der Nederlandsche Natuurkundige Vereeniging gezocht mag worden: als ancilla physicae heeft de mathesis reeds sinds lang van hare „meesteresse” eene zekere mate van beminnelijke erkentelijkheid ondervonden.

Het is veeleer in den aard der zoo even genoemde correlatie dat het verschil tusschen het zoogenaamd mathematische denken en het zoogenaamd physische denken gelegen is.

16. Voorloopig afziend van de vraag, in hoeverre het volgende op het boek van den Heer Schogt van toepassing is, kunnen we voorts, in aansluiting bij het onder 6. besprokene, opmerken, dat eene formaliseering van de taal der mechanika licht kan leiden, en inderdaad ook herhaaldelijk geleid heeft, tot eene formaliseering der emotioneele *overtuigingsmiddelen* tot formeel logische deductievormen, en vervolgens tot het verlangen naar een in zich zelf gesloten streng logischen, in het bijzonder axiomatischen, opbouw der geheele mechanische wetenschap.

Tijdens het betoog moet, wil het zuiver „logisch” blijven, ieder aanknoopingspunt met de aanschouwing verdwijnen, daar de taallooze „werkelijkheid” iedere onderscheiding, dus bepaaldheid, onmogelijk maakt. Teneinde nu ieder binnendringen der vrij associeerende onbewuste phantasie in het gebied der door strikte regels beheerschte en langs zoo scherp mogelijk bepaalde associatiebanen gerichte deducties te weren, ziet de axiomaticus zich genoodzaakt, zijne grondwoorden en grondsymbolen los van de

„physische werkelijkheid” in te voeren en de gebruikte woorden naar mogelijkheid van hunne emotioneele waarden te ontdoen; waardoor ze tot vrijwel buiten de levende werkelijkheid staande betekenislooze logische operatie-elementen moeten worden teruggevoerd, die door evenmin in de werkelijkheid voorkomende relaties (b.v. onbeperkt contractieve gelijkheidspraedicaten) axiomatisch moeten worden vastgelegd.

De correlatie tusschen woord en beeld is voor den axiomaticus dan ook niet anders dan een vaag en geheimzinnig parallelisme; dat hem voor het overige — naar hij zegt! — niet interesseert, daar de dingen der werkelijkheid voor hem niet anders zijn dan eene *aanleiding*, om niet te zeggen voorwendsel, tot het scheppen der dingen zijns geestes.

Het is echter juist dit voortdurend contact met de wereld der physische verschijnselen, dat de natuurkundige niet wenscht prijs te geven, zoodat hierin het principieele verschil tusschen de eigenheden der beide wetenschappen schijnt te liggen.

17. Schijnt. Want bij nadere beschouwing blijkt dit verschil toch niet zoo principieel te zijn als de eerste aanblik doet vermoeden.

Ten eerste namelijk zou eene *volkomen* strenge mathesis een volkomen uitschakelen van onze subjectieve emoties vereischen, En zelfs al konden we eene *volledige* splitsing tusschen onze onderbewuste affecten en onze bovenbewuste woordassociaties tot stand brengen, dan ware daarmee toch de mathesis nog niet gebaat. Immers alle deductie berust op zekere emoties, vóóronderstelt in het bijzonder de emoties van overeenkomst en verschil (tusschen de gebruikte symbolen bij voorbeeld), van herkenning en ontkenning; emoties, die wel met zekere formeele relaties „paralleliseerbaar” zijn; maar zelf nòch aan deze relaties, nòch aan andere wetmatigheden voldoen, daar emoties „einmalig”, dus onberekenbaar zijn, al valt er a posteriori wel eene zekere regelmaat in te herkennen. Bovendien berust het vaststellen van zulke wetmatigheden en het opmerken van zulke regelmatigheden zèlf weer op herkennings- en ontkennings-emoties, zoodat eene *volkomen* strenge mathesis evenmin bestaat als eene *volkomen* strenge mechanika, en alle axiomatika, dus alle pogen, het emotioneele element gehéél naar den aanvang te verleggen en buiten het verdere betoog te sluiten, reeds vooraf tot vruchteloosheid gedoemd is.

De consequentie van de formaliseering der taal kan dan ook niets anders zijn dan het doode mechanisme: de ideale mathematicus is de rekenmachine.

18. Maar geen wiskundige zal toegeven, dat deze ideale gemechaniseerde mathematicus het ideaal van den niet-gemechaniseerden mathematicus vertegenwoordigt. Alle charme van de beoefening der wiskunde ligt in hare *ónvolkomenheid*, in haar nog-niet-volledig-geformaliseerd zijn: *in het formaliseeringsproces zelf*.

Wanneer nu in eene axiomatische onderzoeking dit formaliseeringsprocédé niet expliciet wordt voltrokken, maar wanneer uitsluitend haar resultaat in kant-en-klaren vorm gedemonstreerd wordt, moet zij een ieder, die deze geleidelijke formaliseering niet zelf van het begin tot het einde voltrokken heeft — in het bijzonder dus den leerling der middelbare school — grenzenloos droog en machine-achtig voorkomen.

19. Ten tweede moeten we opmerken, dat, waar eene volkomen strenge wiskunde, menschelijkerwijze gesproken, onmogelijk is, ook eene tot *het uiterst bereikbare* doorgevoerde formaliseering der taal niet het diepste verlangen van den axiomaticus zijn kan. Immers ware dit zoo, dan zou hij alle woorden als punt, lijn, plaats, beweging, tijd, massa, grootheid, snelheid, evenwicht, enz., enz., moeten weren, deze woorden moeten vervangen door: A-dingen, B-dingen, C-relaties, D-relaties, en zoo voorts — waarmede hij echter nòg niet veel verder gekomen zou zijn, want wat zijn „dingen” en wat zijn „relaties”? —, en deze dingen en relaties door „axiomata”, dat zijn weer andere „dingen” en „relaties”, met elkander moeten „verbinden”. Maar ongetwijfeld zou er voor hem dan óók de charme af zijn, en zou hij het opstellen van een dergelijk systeem niet meer als „beoefening der meetkunde” of der mechanica beschouwd willen zien.

20. Physika en mechanica hebben slechts zin, wanneer ze het contact met de physische werkelijkheid voortdurend handhaven. Ze worden voor de maatschappij waardeloos en voor het individu oninteressant, zoodra dit contact verbroken wordt, zoodra de symbolen zóó abstract worden, dat ze in het geheel geen associaties met affectief geladen complexen meer opwekken.

De kant-en-klare wiskunde interesseert niemand. De aantrekke-

lijkheid ligt niet in het bereikt hebben van den uiteindelijke vorm, maar in het geleidelijk *worden*, het nog niet bereikt hebben, het zien groeien van dien vorm; niet in het weten, maar in het zoeken en het gissen en vergissen. niet in de *w i s k u n d e*, maar in de *w i s k u n s t*; niet in de zekerheid, maar in den twijfel en de onzekerheid.¹⁰⁾

21. Dit geldt voor de allerabstractste gedeelten der mathesis en der mathematische logika evenzeer als voor de physika en de mechanika: liefde en bewondering wekken ze slechts voor zooverre ze eene formaliseering van de *levende taal* zijn, waarin de „physische werkelijkheid” wordt uitgedrukt; voor zooverre het mathematiseeringsproces actief voltrokken wordt — zij het van de intuïtieve verzamelingsvoorstelling tot de axiomata van Zermelo, zij het van het vage beeld van den „overal even ronden” cirkel tot zijne ontstaanswijze als baankromme eener eenledig continue groep van Euklidische bewegingen van het platte vlak in zich zelf met een gemeenschappelijk invariant punt, zij het van eene aan menschelijke stuwkracht en volhardingsvermogen ontleende voorstelling van impetus en vis vita tot de vergelijkingen van Einstein voor den impuls-energie-tensor—; voor zooverre de gedachte aan den langen en moeizamen weg die doorloopen moest worden om deze mate van abstractie te bereiken, in het bewustzijn van den adept aanwezig is, en voor zooverre na voltrokken formaliseering de menschelijke geest zijn werk weer ongedaan maakt, zijne doode woorden weer gaat *realiseeren* tot levende werkelijkheid en van zijne abstracte symbolen weer terugkeert tot zijne concrete gevoelens.

22. Wanneer we thans terugkeeren tot het boek van den Heer Schogt en ons afvragen, in hoeverre het bovenstaande daarop van toepassing is, dan kunnen we het volgende opmerken.

1e. Eene neiging tot zoo streng mogelijke logische deductie en tot axiomatische behandeling komt in het werk duidelijk tot uiting.

2e. Het besef, dat een mathematisch systeem nooit eenig deel der werkelijkheid *volledig* kan weergeven, brengt den schrijver er toe, zich reeds op de eerste bladzijde van deze werkelijkheid af te wenden en zich te beperken tot het behandelen eener zoodanige idea-

¹⁰⁾ Vgl. G. Mannoury, „Wiskunst, Filosofie en Socialisme”, Groningen, (P. Noordhoff), 2e druk (1924) p. 29—31.

liseering daarvan als met de hulpmiddelen der logische deductie mogelijk is.

3e. Het contact met de physische werkelijkheid wordt in zoo-verre gehandhaafd, dat de invoering van nieuwe begrippen zooveel mogelijk geschiedt op eene wijze die uit de psychische ontstaanswijze dezer begrippen door toepassing van het bovengenoemde idealiseeringsproces ontstaat.

4e. Deze idealiseering is historisch het resultaat van een geleidelijk voltrokken mathematiseeringsproces, dat zelf door den schrijver niet of slechts terloops wordt aangeduid.

5e. In het bijzonder ontbreekt in het leerboek ten eenenmale de beschrijving der te behandelen physische verschijnselen in nog niet geformaliseerde woorden van sterk suggestief en aanschouwelijk karakter.

6e. Dat ook door geestverwanten van den Heer Schogt (en wellicht ook door den Heer Schogt zelf?) wordt beseft, dat een geleidelijk voltrekken van dit mathematiseeringsproces noodzakelijk is, blijkt o.a. uit eene hoogst belangwekkende publicatie van den Heer Dijksterhuis ¹¹⁾. Hierbij dient echter opgemerkt te worden, dat de historische behandelingswijze, hoewel zeer interessant en zeer instructief, geen *volledig* equivalent biedt voor de aansluiting op de hedendaagsche onwetenschappelijke taal, waarin de leerling zijne ervaringen vermag weer te geven.

7e. Het feit, dat enkelen als de Heer Dijksterhuis de gelegenheid hebben gehad eene groote mate van historische of signifi sche kennis te verwerven, mag niet doen vergeten, dat den leeraar in het algemeen tengevolge zijner opleiding de gelegenheid daartoe ontbreekt, zoodat men ook van den gemiddelden goeden leeraar niet mag eischen, dat hij de taalformaliseering zonder den steun van een leerboek zal kunnen voltrekken.

8e. Het feit dat dit mathematiseeringsproces in het boek van den Heer Schogt ontbreekt, mag den schrijver niet verweten worden, daar zulks ook met de oudere leerboeken het geval is, en daar het besef van de noodzakelijkheid daarvan eerst in de laatste jaren meer algemeen begint door te dringen.

¹¹⁾ E. J. Dijksterhuis, De historische behandelingswijze van de axiomata der mechanica van Newton; dit tijdschrift, 4 (1928) 245—255.

9e. Eveneens ontbreekt in het beschouwde werk het latere „realiseeren” der geformaliseerde taal door deze weder om te zetten in aanschouwelijke en emotioneele woorden, waarin de *verwachtingen* omtrent toekomstige ervaringen de *herinneringen* aan oorspronkelijk niet in de mathematiseering opgenomen ervaringen wordt uitgesproken.

23. Resumeerende: *In het boek van den Heer Schogt ontbreken de volgende voor goed onderwijs in de mechanika onontbeerlijke elementen:*

A. *Beschrijving der waargenomen verschijnselen in niet-geformaliseerde taal;*

B. *Geleidelijke overgang der niet-geformaliseerde tot de geformaliseerde taal;*

C. *„Realiseering” der formalistische symbolen door terugkeer tot nieuwe woorden van aanschouwelijk karakter, in het besef, dat deze de physische ervaringen wederom vermogen uit te drukken, maar dat zij thans bovendien deze ervaringen in associatieven samenhang brengen met andere, oorspronkelijk van deze geïsoleerde ervaringen, door bemiddeling van een uitermate omvattend complex van woordbeeldherinneringen.*

24. Het komt mij voor, dat in het bovenstaande de eigenlijke kern bevat is van de huidige impasse, waarin het mechanika-onderwijs geraakt is. In een principieel verschil tusschen physika en mathesis ligt zij althans niet en kan zij niet liggen, daar zulk een verschil niet bestaat. Beiden gaan uit van de levende taal: de physika, de mechanika, de astronomie en de meetkunde van de taal der „physische werkelijkheid”; de abstractere wiskunde van taalverschijnselen die minder rechtstreeks aan zintuigelijke waarneembaarheden gebonden zijn, maar die eene meer direct psychische en eene dieper introspectieve beteekenis hebben. Beide voeren eene geleidelijke formaliseering dezer taal door, en wel beiden *binnen zekere grenzen zoo ver mogelijk*, en voor beiden beteekent een overschrijden dezer grenzen een vervallen tot maatschappelijke en individueele waardeloosheid.

Deze grenzen verschillen: waar de physicus ophoudt, wenscht de mathematicus nog een eind weegs verder te gaan. En hij kan dit straffeloos doen, doordat hij zijne nieuwe en abstractere symbolen

nieuw leven weet in te blazen en de reeds ten deele geformaliseerde taal weer als levende en emotiedragende taal leert zien; doordat voor hem een g_{ik} of een Dedekindsche snede of eene ζ -functie of een Brouwersch continuüm de aanschouwelijkheid en de psychische realiteit en de associatieve bindingsrijkdom verkrijgen, die de physicus bij eene zwarte straling of een „kosmisches Glied” of een elektronensprong beleeft, en die de schooljongen bij een merkwaardig product of eene merkwaardige lijn nog ontbeert.

III.

25. Stellen we ons ten slotte de vraag, of we aan deze abstracte bespiegelingen eene basis voor constructieve didactische werkzaamheid kunnen ontleenen. Ik wil trachten, dit te bereiken door het opstellen van een aantal stellingen, die ik den betrokken partijen ter kritiek en ter aanvaarding of verwerping aanbied, in de hoop, dat hierin een grondslag voor verderen arbeid moge worden gevonden, die aan het bestaande conflict en aan het daarmee verbonden allen ietwat onwaardige urengesjacher een einde moge maken.

A. In de physika zijn woord en werktuig, redeneering en waarneming, elkaar aanvullende elementen, beide van begrensde draagwijdte, maar beide onontbeerlijk.

B. Mathesis en physika komen hierin overeen, dat zij beiden het verkrijgen van een grooteren rijkdom aan ervaringen ten doel hebben door formaliseering van de taal, waarin deze worden samengevat.

C. Deze ervaringen zijn bij den physicus meer van zintuigelijk physischen, bij den mathematicus meer van introspectief psychischen aard.

D. Zoowel de maatschappelijke als de individuele waarde voor den physicus en den mathematicus beide ligt in den toenemenden ervaringsrijkdom, d.i. de toenemende associatieve gebondenheid aan andere psychische complexen, die door de toenemende mathematiseering veroorzaakt wordt en deze mogelijk maakt.

E. Zoowel bij den physicus als bij den mathematicus, en vooral bij den leerling der middelbare school, kan de formaliseering slechts dan liefde en belangstelling wekken, indien haar groei actief beleefd wordt, en indien haar begin gebaseerd is op reeds vooraf opgedane

en in levende taal, zij het vaag en moeizaam, uitdrukbare ervaringen.

F. Daarnaast is echter noodzakelijk, dat de geformaliseerde woorden en symbolen eene zoodanige mate van aanschouwelijkheid verkrijgen, dat ze innig associatief verbonden worden met andere ervaringen en daardoor zelf weer emotioneele waarde verkrijgen, in levende taal uitgedrukt kunnen worden en daardoor tot object voor verdere taalformaliseering kunnen dienen.

G. Voor het verkrijgen der noodige ervaringen is het actief hanteeren der ervaringsobjecten, zij het der physische instrumenten, zij het der mathematische symbolen noodzakelijk.

H. Mechanika en geometrie vormen een schakel en gradueelen overgang tusschen physika en mathesis.

I. In de mechanika en de geometrie moet eene groote mate van empirische kennis omtrent de physische verschijnselen die object der mathematiseering zijn vooraf in den geest van den leerling aanwezig zijn.

J. Deze kennis kan het best verkregen worden door het zelf hanteeren der te bestudeeren objecten, zij het der physische instrumenten, zij het der meetkundige lichamen en figuren.

K. Het is wenschelijk, dat in de mechanika en de geometrie de mathematiseering verder worde doorgevoerd dan in de physika, mits de formalistische symbolen inderdaad weer aanschouwelijkheid en emotioneele waarde voor den leerling verkrijgen.

L. Daartoe is het wenschelijk, dat men zich beperke tot de grondige behandeling van een betrekkelijk klein aantal capita selecta uit de mechanika, en niet trachte, zooals vroeger gebruikelijk was, eene min of meer volledige behandeling der elementaire kinematika, statika, en dynamika te geven.

M. Ook is het wenschelijk, dat men zich beperke tot eene selecte schare van leerlingen, die de geschiktheid bezitten, niet slechts deze formaliseering te „volgen”, maar ook, hare „charme” te ondergaan.

N. Teneinde de bezwaren der thans vigeerende regeling te ontgaan is het wenschelijk, ook bij het eindexamen het systeem der keuzevakken in te voeren en de keuze van een facultatief vak als leervak te doen combineeren met de keuze van dit vak als examen-vak.

O. Het is wenschelijk, dat het verkrijgen der onder I. en J. genoemde geometrische ervaringen in den vorm eener zoogenaamde

intuïtieve propaedeuse (vormleer) in de eerste klasse der middelbare school in de meetkundeles geschiede.

P. Het is wenschelijk, dat het verkrijgen der onder I. en J. genoemde mechanische ervaringen in de lagere klassen der middelbare school in de natuurkundeles geschiede, waartoe het aantal der voor dit vak beschikbare uren met één of twee worde vermeerderd, conform het in gemeenschappelijke zitting door de commissie Beth c.s. en Fokker c.s. overeengekomene.

Q. Het is wenschelijk, dat in de hoogere klassen der middelbare school voor de onder K., L. en M. genoemde voortgezette formalisering der mechanica gezamenlijk twee of drie uren ter beschikking van het leervak „Theoretische mechanika” worden gesteld, conform het in gemeenschappelijke zitting door de commissies Beth c.s. en Fokker c.s. overeengekomene. ¹²⁾

NASCHRIFT.

De zeventien stellingen, die de geachte inzender aan de kritiek van mathematici en physici wenschte te onderwerpen, zullen, naar ik hoop, tot eenige gedachtenwisseling aanleiding geven. Ik wil mij thans beperken tot een zeer kort wederwoord op de kritiek, die op mijn boek is uitgeoefend. Dit werk is geschreven vóór de vele artikelen, die in de laatste paar jaren aan de didaktiek van de wiskunde en de mechanica gewijd zijn; had ik van al de daarin neergelegde denkbeelden, en vooral ook van het ontwerp-leerplan der commissie-Beth (met de toelichting daarop) kunnen profiteeren, dan zou mijn boek er op menige bladzijde anders uitgezien hebben.

Het wil mij intusschen voorkomen, dat de Heer Van Dantzig de rol, die een leerboek bij het onderwijs speelt, te groot ziet. Hij noemt in § 23 van zijn artikel eenige voor goed *onderwijs* in de mechanica onontbeerlijke elementen op, die in mijn *boek* ontbreken. Maar mijns inziens kan de mondelinge toelichting deze leemten beter aanvullen, dan de gedrukte tekst van een leerboek dat zou vermogen. Het

¹²⁾ De kennismaking met vele der hier verdedigde opvattingen dank ik aan gesprekken met Prof. G. Mannoury en aan diens in den herfst van 1926 te Amsterdam gehouden college over Didaktiek en Methodologie der Wiskunde. Tevens dank ik de heeren Dr. E. J. Dijksterhuis en W. Reindersma voor verschillende opmerkingen, na lezing van het manuscript gemaakt.

spreekt trouwens wel van zelf, dat wat ik en de overige gebruikers van mijn boek tot de leerlingen zeggen, met opzet soms in zeer weinig geformaliseerde taal is uitgedrukt, en dat dan, liefst met medewerking van de leerlingen zelve, als het ware bij opvolgende benadering, de woorden van het leerboek te voorschijn worden gehaald. Het leerboek geeft dus slechts het resultaat van de besprekingen in de klasse in bondigen en zoo correct mogelijken vorm.

In de redactie der vraagstukken is niet steeds naar een maximum van exactheid gestreefd, en bij de oplossing wordt niet steeds sterk geformaliseerde taal verlangd, juist omdat een deel der vraagstukken een schakel tusschen theorie en materiele werkelijkheid moet vormen. Realiseering der formalistische symbolen geschiedt vanzelf bij de behandeling dier vraagstukken.

Voor zoover ik weet is de geleidelijke overgang tot geformaliseerde taal nog nimmer in een leerboek (althans in een leerboek van wiskunde of mechanica) neergelegd; het zou mijns inziens op den weg van den Heer Van Dantzig liggen, zulk een voorbeeld van geleidelijke taalformalisatie te geven, zij het slechts voor een klein hoofdstuk uit een der vakken van de schoolwiskunde, maar dan ook in een voor het onderwijs direct bruikbaren vorm.

In tegenstelling met den Heer Van Dantzig geloof ik, dat de tegenzin in mijn leerboek niet wordt veroorzaakt door de tekortkomingen, die hij in § 23 heeft opgesomd.

J. H. S.

DE MATHEMATISCHE CONCEPTIE BIJ DE OUDE CHINEEZEN ¹⁾

DOOR

R. H. VAN GULIK.

Waar een volk eenige vordering in de wiskunde maakte, daar moeten ongetwijfeld het vermogen en de wil aanwezig zijn geweest om de veelvuldigheid der bijzonderheden in een algemeen, eenvoudigen vorm samen te vatten, en zoo te komen tot de kennis van onveranderlijke waarheden. Daar nu de oude Chineezers blijk gaven een zeer grooten aanleg en neiging te bezitten tot dit vereenvoudigen en abstraheeren, zoo zeer dat zij in hun schrift niet de verklankingen van begrippen in phonetische teekens neerlegden, doch liever door een harmonisch gebouwd schriftteeken het begrip, de idee trachtten uit te beelden, kan het ons nauwelijks verwonderen dat zij reeds vroeg goede uitkomsten verkregen.

Ik wilde U een algemeen beeld geven van die uitkomsten, door de Chineezers op wiskundig gebied verkregen, en ik zou U willen aantoonen dat zij reeds in dien tijd in staat waren tot verwerking van gecompliceerde gegevens, de stof in chronologische volgorde behandelend, gaande tot de geboorte van Christus. Immers in de eerste eeuw na Ch. kwam de Voor-Indische invloed, terwijl nog later de Westerlingen den Chineesch wiskunstenaar bekend maakten met hun denk- en uitdrukkingswijze. Liever zullen wij ons dus wenden tot oudere perioden.

Voor het onderzoek der wiskundige kennis van een volk behoeven wij geen oude boeken: de architectonische scheppingen, die over

¹⁾ Het is mijn bedoeling hier slechts in algemeene beschouwingen te treden. Voor het feitenmateriaal zie men het uitvoerige werk van Yoshio Mikami, *The Development of Mathematics in China and Japan*. De vraagstukken heb ik naar de vertaling van dezen geleerde opgenomen. Voorts raadplege men: L. Guichet, *Note sur la généralisation de l'extraction de la racine carrée chez les anciens auteurs chinois*, T'oung Pao, 2me Série. Vol. XV, en artikels van v. Hée in dezelfde periodiek.

zijn, spreken vaak een lijnentaal, wellicht duidelijker dan ooit in een boek of inscriptie kon worden aangegeven. De Indiërs evenwel hebben ook hierover ons boeken nagelaten. Men vergelijke de Çulbasûtra's²⁾. Maar bij de Chineezzen bezitten wij nog veel oudere gegevens. De oude Chineesche godsdienst namelijk bracht een nauwkeurige observatie van den tijd mede, en zoo bezitten wij van Keizer Hwang Ti (2697—2597 v. Chr.; de historici hielden er van de oude Keizers een lang leven toe te deelen!) een vernuftig systeem voor de tijdrekening, in China tot op den huidigen dag in gebruik gebleven. Men bezigde 2 cycli, een van 10, en een van 12 bijzondere teekens, die men, door ze naast elkaar te laten voortloopen totdat hun laatste teekens samenvallen, samenvoegde tot een cyclus van 60. Telkens stelde dus een teeken uit den 10-cyclus + een teeken uit den 12-cyclus een getal voor tusschen 1 en 60. Wanneer we voor 't gemak de teekens van den 10-cyclus door a b c j voorstellen, en die van den 12-cyclus door a' b' c' l' dan krijgen we onderstaande tabel:

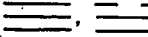
a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	a	b	c	 j
a'	b'	c'	d'	e'	f'	g'	h'	i'	j'	k'	l'	a'	 l'
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	 60

Volgens dit systeem is dus b.v. $a c' = 51$. Deze 60-cyclus werd steeds herhaald, zoodat wij oude tijdsopgaven als „in 't jaar c a' van Keizer X's regeering” gemakkelijk kunnen begrijpen, wanneer we slechts de regeeringsjaren van Keizer X weten.

Eveneens van zeer ouden datum is het Heilige Boek der Transformaties, de Yih Ching. De grondslagen van dit boek werden gelegd in de 12 eeuw v. Ch., doch helaas heeft de legende haar net geweven over deze oude tijden, zoodat niets met zekerheid omtrent den oorsprong bekend is, en er veel duistere plaatsen in zijn, wier juiste beteekenis verloren is gegaan in den loop der eeuwen. Ik noem dit werk hier, omdat het een mooi voorbeeld is van het vermogen tot generaliseeren der oude Chineezzen. In 64 hexagrammen is namelijk een tot het uiterste vereenvoudigde cosmogonie neergelegd. De veelheid van alle verschijnselen wordt teruggeleid tot twee beginsels, die op hun beurt weer voortgekomen zijn uit een hoogere eenheid. Deze beide beginsels, het manlijke en het vrouwe-

²⁾ Zie: Cantor, Geschichte der Mathematik, p. 512 sqq.

lijke, of wel het positieve en het negatieve (we zullen straks zien, dat de begrippen positief en negatief ook in de arithmetiek worden uitgedrukt) stelde men respectievelijk aldus voor:

Met behulp hiervan vormt men nu de z.g. Pa Kwa of 8 triagrammen,  etc. Door deze acht weer te verdubbelen, aldus:  verkrijgt men 64 hexagrammen, die natuurlijk tot het oneindige kunnen worden uitgebreid. Uitvoerige commentaren verklaren elke streep der figuren, doch de echte beteekenis is verloren, en nu is het boek afgedaald tot een geliefkoosd handboek voor toekomstvoorspellers. Wij kunnen echter het scherp vernuft en den ruimen blik van dengene bewonderen, die aldus verstond de oneindigheid tot twee symbolen terug te leiden.

Het eerste werk, dat uitsluitend de mathematica behandelt, is de Chow Pei Suan Ching, in twee deelen, waarvan de schrijver echter onbekend is. Het eerste deel behandelt in dialoog-vorm eenige wiskundig-philosophische problemen, het tweede deel den kalender. Het werk geeft een beeld van de wiskunde omstreeks de 12de eeuw v. Ch. Mikami leidt uit den dialoog af, dat de oude Chineezzen het theorema van Pythagoras kenden en wisten toe te passen.

Vervolgens is het belangwekkend een passage uit de werken van den wijsgeer Mo Ti (5de eeuw v. Ch.) aan te halen. Deze filosoof schijnt, naast verheven concepties betreffende de algemeene menschenliefde, ook een grooten mathematischen aanleg bezeten te hebben.

Hij was een bekwaam vestingbouwkundige, die vernuftige aanvals- en afweerwerktuigen construeerde en beschreef.

In zijn Dialektiek lezen wij:

„Een cirkel heeft een middelpunt met gelijke afstanden.”

„De som van de hoeken van een rechthoekige zuil vormen een cirkel” ($4 \times 90^\circ = 360^\circ$).

Voorts een experiment, dat ik naar de vertaling van Prof. Forke weergeef:

„Für zwei zusammenliegende Gegenstände gibt es ein Experiment: Ein viereckiger Stein ist einen Fusz von der Erde entfernt. Unter ihm ruht ein Pfeilerstein. Hängt man nun einen Seidenfaden darüber auf und lässt ihn bis zu dem viereckigen Steine reichen, so geht er nicht tiefer, denn da wird er aufgehalten. Leimt man den

Faden an den Stein und hebt diesen fort, so ist das ein Tragen durch Hängenlassen. Zerreiszt der Faden, so ist das die Folge der Zugkraft. Erfolgt keine Veränderung und wechselt nur der Name, so redet man von Stützen."

Hier heeft Mo Ti dus willen aangeven druk, veerkracht en zwaartekracht.

Alvorens met de bespreking van wiskundige werken verder te gaan, wilde ik eerst even het getallensysteem behandelen. Voor het rekenen bezigde men bamboestaafjes, waarmede de getallen van 1 tot 5 als volgt werden weergegeven:

| || ≡ ||| ||||

En van 5 tot 9:

⊥ ⊥⊥ ⊥⊥⊥ ⊥⊥⊥⊥

Men stelde dus de getallen < 5 voor door evenveel verticale staafjes als eenheden, en de getallen > 5 door 1 horizontaal staafje = 5, plus verticale staafjes. Voor de tientallen plaatste men de staafjes juist andersom:

— = ≡ ≡ ≡ ⊥ ⊥ ⊥ ⊥

Deze getallen werden, evenals de onze, horizontaal gelezen. Aanvankelijk werd de plaats, waar wij een nul zouden zetten, opengelaten; later werd vermoedelijk van uit Indië een klein cirkeltje ingevoerd. Negatieve getallen werden voorgesteld door roode stokjes, positieve door zwarte. Volgens dit systeem schreef men het getal 864:

⊥⊥⊥ ⊥ ||||

Het meest uitgebreide werk is de Chiu Chang Suan Ching, het Boek der Arithmetica in Negen Afdeelingen, waarvan talrijke commentaren over zijn. Het ligt buiten het bestek van dit artikeltje, elk van deze afdeelingen, hoe interessant zij overigens ook zijn, nader te bespreken. Den belangstellende zij verwezen naar de in noot 1 vermelde werken. Ik doe slechts eenige grepen er uit: Het oppervlak van een driehoek is gelijk basis $\times$ halve hoogte; Het oppervlak van een trapezium is gelijk de halve som van de evenwijdige zijden $\times$ hoogte; Bij een berekening van het cirkeloppervlak geven zij voor π 3; Bewerkingen met breuken; Inhoud van verschillende lichamen; etc. etc.

De laatste afdeeling is gewijd aan den rechthoekigen driehoek. De 24 opgaven, hier gegeven, kunnen alle worden opgelost met het theorema van Pythagoras. In het wiskundig jargon dat men gebruikte, noemde men de beide rechthoekszijden *ku* en *kiü*, en de hypotenusa *hsien* (is gelijk: snaar, koord).

Een zoo'n vraagstuk luidt:

„Er is een bamboe van 10 voet hoog; men breekt den top, zóó dat de afstand van het neergebogen eind tot den stam 3 voet bedraagt. Gevraagd wordt de hoogte van de breuk.”

$$\text{Opl.: } X = \frac{10}{2} - \frac{3^2}{2 \times 10}$$

De oude Chineezzen blijken groote vaardigheid te hebben bezeten in het trekken van den vierkantswortel. Deze bewerking noemden zij *k'ai fang* (= het openen van het vierkant).

Ik kan mij niet weerhouden hier een oud Chineesch vraagstuk aan te halen.

„Een vrouw was bezig borden te wasschen in een rivier, toen een ambtenaar, die toezicht op het water moest houden, haar vroeg: „Hoe komen al deze schotels hier?” De vrouw antwoordde: „Omdat er een groot feest gevierd is.” Vervolgens vroeg de ambtenaar, hoeveel gasten er waren geweest. „Ik weet niet, hoeveel gasten er geweest zijn,” was het antwoord, „maar 2 gasten hadden telkens 1 schotel tusschen zich in voor de rijst; elke 3 hadden een schotel voor soep; elke 4 hadden een schotel voor vleesch, en er waren in het geheel 65 schotels.”

„Methode: Leg de 65 schotels op een rij, en vermenigvuldig ze met 12, zoodat we 780 krijgen. Als wij nu door 13 deelen, verkrijgen wij het antwoord.”

Ten slotte noem ik hier nog eenige werken uit een latere periode, nl. de *Hai Tao Suan Ching* of wel „Boek der Arithmetica van het Eiland der Zee”, en de *Wu Ts'ao Suan Ching*, die beide reeksen opgaven bieden, met soms zonderlinge oplossingen. Als van vele oude Chineesche werken is de tekst vaak corrupt.

Wij zien dus, hoe ondanks een weerbarstige taal de oude Chineesche wiskunstenaars toch er in slaagden in hun geliefkoosde studie bevredigende resultaten te verkrijgen. Het is uiterst belangwekkend eens na te gaan, hoe dezelfde wetten benaderd werden door een

ander volk. Ik hoop er in geslaagd te mogen zijn door dit beknopt overzicht U te overtuigen van het vermogen tot abstraheeren en generaliseeren der oude Chineezzen, en Uw belangstelling op te wekken voor een methode en denkwijze, anders dan de eigene. Immers niet alleen docendo, doch ook *comparando* discimus.

DE BEHANDELING DER COMPLEXE GETALLEN

DOOR

H. J. E. BETH.

In een voordracht, gehouden in de Derde bijeenkomst van Wiskunde-leeraren te Utrecht, heb ik de ontwikkeling van het getalbegrip bij het Middelbaar en Voorbereidend Hooger onderwijs in vogelvlucht behandeld; een kort verslag vindt men in het „Weekblad voor Gymnasiaal en Middelbaar Onderwijs” van 4 April 1928. Daarbij zijn, zooals vanzelf spreekt, de complexe getallen ter sprake gekomen; de bij de discussie gestelde vragen deden bij mij het plan ontstaan, bij een andere gelegenheid eenigszins uitvoerig op dit gewichtige punt terug te komen.

Het zal wel bekend zijn, dat er van verschillende zijden op aangedrongen wordt, de complexe getallen geheel van het programma af te voeren; ik acht dit streven volkomen verklaarbaar. Als men nl. bedenkt, wanneer ze gewoonlijk worden ingevoerd (in het algemeen onmiddellijk vóór de behandeling der vierkantsvergelijkingen, omdat men wel eens denkt, dat ze daarbij niet gemist kunnen worden), en daarbij overweegt, hoe de leerlingen op dat tijdstip veelal tegenover het getalbegrip staan, dan is het aanstonds begrijpelijk, dat de behandeling der complexe getallen slechts op teleurstelling kan uitloopen; en het juiste begrip zal in de volgende jaren niet vanzelf ontstaan.

De gangbare methode toch om de complexe getallen in te voeren, bestaat hierin, dat we de leerlingen mededeelen, dat het eenigszins onaangenaam is, te moeten zeggen, dat de vergelijking $x^2 = a$ dan eens wèl, dan eens nièt twee wortels heeft, nl. wèl, als a positief is, nièt, als a negatief is; en dat men daarom doet, alsof een negatief getal ook een, ja zelfs twee, vierkantswortels heeft, doch deze imaginair noemt. De kritisch aangelegde leerling legt zich bij deze rede-neering *niet* neer; hij meent, dat, als een vergelijking géén wortels heeft, het altijd verkeerd is, te doen alsof zij er wèl had; en hij laat

zich niet overtuigen door den zonderlingen naam, die men voor deze aangelegenheid heeft bedacht; de minder kritisch aangelegde geeft zich bij het hooren van den naam aanstonds gewonnen.

Het is duidelijk, dat de ondervindingen, die de leerling bij de vroegere uitbreidingen van het getalgebied heeft opgedaan, hem thans weinig kunnen baten. De vroegere uitbreidingen liggen voor hem in zoo ver verleden (en zijn ze bij den tegenwoordigen stand van het wiskunde-onderwijs wel tot zijn begrip doorgedrongen?), dat er niets is, waarmede hij de zooeven geschetste handelwijze zou kunnen vergelijken.

Men draagt den leerling voorts op, ieder imaginair getal dadelijk te schrijven in den vorm van een produkt van een „gewoon” getal en het geheimzinnige symbool i , en vertelt hem, dat zulke getallen allerlei verbindingen met elkaar en met gewone getallen kunnen ondergaan; dat men daarbij altijd doet, alsof i een gewone factor was, maar dat men i^2 ; zoodra dit optreedt, vervangt door -1 .

Het *rekenen* met de complexe getallen heeft van dit oogenblik af voor de leerlingen geenerlei moeilijkheid meer; maar hun begrip is *niet verrijkt*, en zij zullen hun leven lang in die getallen iets zeer geheimzinnigs blijven zien, en iets, dat veel denkbeeldiger is dan al het denkbeeldige, waarmede zij in de wiskunde hebben kennis gemaakt.

Men maakt het heelemaal niet beter, door er de leerlingen voortdurend aan te herinneren, dat zij vooral geen „werkelijke” betekenis aan die getallen mogen toekennen:

Maar zelfs, indien de invoering van nul en de negatieve getallen en die van de gebroken getallen met zorg zou hebben plaats gevonden, indien dus de leerlingen er terdege van doordrongen waren, dat het het streven om een of andere bewerking onbeperkt uitvoerbaar te maken is, dat telkens tot verruiming van het getalgebied noopt, dan geloof ik nog, dat de invoering der complexe getallen niet in de 3de klasse zou behooren plaats te hebben. Het best schijnt mij nog steeds, dat in de 4de klasse de irrationale getallen behandeld worden, en dat eerst in de 5de klasse de complexe aan de orde komen.

Men moet niet meenen, dat men, door in de 3de klasse de complexe getallen niet te behandelen, een strenge bespreking van de vierkantsvergelijkingen onmogelijk zou maken, of dat men zich daarbij op een minder hoog standpunt zou plaatsen. De behande-

ling kan even correct geschieden als volgens de algemeen gangbare methode, maar de uitspraken luiden hier en daar eenigszins anders. Bij de oplossing der vierkantsvergelijking

$$ax^2 + bx + c = 0$$

zou men als volgt te werk gaan. Vermeerder de beide leden der vergelijking met $\frac{b^2 - 4ac}{4a}$, zoodat zij wordt:

$$ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

of:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Er kunnen zich thans 3 gevallen voordoen:

1°. $b^2 - 4ac > 0$. De uitdrukking in het tweede lid is steeds gelijk aan het vierkant van een getal p , zooals we althans aanneemelijk-gemaakt hebben; en we kunnen de vergelijking als volgt schrijven:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = p^2$$

of:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - p^2 = 0.$$

of, enz.

En het resultaat is, dat de vergelijking in het onderstelde geval twee, van elkaar verschillende, wortels heeft.

2°. $b^2 - 4ac = 0$. De vergelijking wordt thans

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0.$$

Daar alleen het getal nul, in het vierkant gebracht, het getal nul oplevert, wordt aan de vergelijking alleen voldaan door

$$x = -\frac{b}{2a}$$

De vergelijking heeft één wortel; men onthoude zich ervan, te zeggen, dat zij twee gelijke wortels heeft.

3°. $b^2 - 4ac < 0$. Aan de vergelijking

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

is thans door geen enkele waarde van x te voldoen. Immers is het

eerste lid een vierkant, dus steeds positief of gelijk aan nul, maar het tweede lid is volgens onderstelling negatief.

De vergelijking heeft géén wortel.

Het teeken van den discriminant geeft dus de beslissing, of een vierkantsvergelijking 2 wortels, 1 wortel of géén wortel heeft.

Tegen deze wijze van doen is geen enkel wetenschappelijk bezwaar in te brengen; een didactisch bezwaar evenmin. De vraag is eenvoudig: *in welk getalgebied zoekt men de wortels der vergelijking*. Zoekt men ze in het reële gebied, wat mij in de 3de klasse het best lijkt, dan heeft een vierkantsvergelijking met negatieven discriminant géén wortels; zoekt men ze in het getallenvlak, dan heeft diezelfde vergelijking twee complexe wortels.

Door in het reële gebied te blijven, brengt men eigenlijk de grāphische voorstellingen, waarbij men zich toch ook beperkt tot reële waarden der veranderlijken, beter tot haar recht. Immers, de parabool, die de graphiek is der kwadratische functie, heeft met de X-as twee punten, één punt of géén punt gemeen. Het schijnt mij in het laatste geval toch weinig gewenscht te spreken van: twee imaginaire punten gemeen. Immers zal men op hetzelfde oogenblik in de meetkundeles voortgaan met te zeggen, dat een rechte lijn met een cirkel twee punten gemeen heeft, één of géén.

Dat onszelfen deze wijze van uitdrukken eenigszins vreemd schijnt en in den beginne zelfs wat onbehagelijk aandoet, is te verklaren uit het feit, dat wij ons bij de studie in de analytische meetkunde hebben voelen opdringen in de richting van het even zwaar tellen van het imaginaire en het reële, en dat we bij dat gelijkelijk tellen het verschil tusschen beide wel met een soevereine minachting zijn gaan behandelen. Houdt echter die minachting niet vaak de erkenning van onwetendheid in; is niet in vele gevallen die scheiding tusschen het reële en het imaginaire het moeilijkst, tevens het belangrijkste, bij een meetkundig probleem?

Men zal inzien, dat de zooeven geschetste wijze van behandeling der vierkantsvergelijkingen wel op een dieper gelegen vraag (nl. die omtrent het getalgebied, waarin men de wortels zoekt) berust, maar toch op een slechts uiterlijk verschil in resultaat neerkomt; en dat de geheele theorie en de toepassingen, geen andere wijziging hebben te ondergaan, dan gelegen is in deze: dat men spreekt van géén wortels in de plaats van twee complexe, en van één wortel in plaats van twee samenvallende.

Het is misschien nuttig op te merken, dat men op andere punten blijkbaar lang niet zoo scrupuleus is als bij de vierkantsvergelijkingen.

Zoo vinden we algemeen en zonder restrictie de uitspraak: Negatieve getallen hebben geen logarithme (men denkt hierbij steeds aan een positief getal als grondtal). Deze uitspraak is juist, zoolang men de logarithmen zoekt in het reële gebied; zij verliest haar geldigheid, als men zijn getalgebied reeds tot het getallenvlak heeft uitgebreid. Men zou *dan* moeten zeggen: negatieve getallen hebben geen reële logarithme. Evenzoo zegt men: van alle hoeken ligt de sinus tusschen $+1$ en -1 , tegen welke uitspraak hetzelfde bezwaar zou zijn aan te voeren.

Al deze bezwaren vallen weg, indien men zich tot het reële bepaalt, en niet tot de uitbreiding van het getalgebied overgaat. Over de moeilijkheden, die in de 3de kl. ontstaan, doordat ook de uitbreiding van het getalgebied tot het reële gebied nog niet kan plaats vinden, spreek ik thans niet. Men zou het reële gebied als logisch eindpunt voor de ontwikkeling van het getalbegrip kunnen beschouwen, omdat daar nog de orde-relatie bestaat; bij de verdere uitbreiding van het gebied gaat de relatie „groter” en „kleiner” verloren. Maar men verheft zich toch wel tot een veel hoger standpunt, wanneer men ook tot deze laatste uitbreiding overgaat, bij welke het beginsel van de permanentie der formeele wetten kan gehandhaafd blijven; en ik ben overtuigd, dat men deze schoone gelegenheid om het inzicht op vele punten te verdiepen, niet mag laten voorbijgaan. Men behoeft het ook niet na te laten, omdat het te moeilijk zou zijn; deze stof biedt geen nieuwe moeilijkheid, die te groot zou zijn voor de leerlingen eener 5de klasse, met wie de vroegere uitbreidingen van het getalgebied degelijk zijn behandeld.

Als inleiding zal men weder terug gaan tot de reeks der natuurlijke getallen en er de leerlingen goed van doordringen, dat de invoering der gebroken getallen vroeger heeft plaats gevonden (hoewel eenigzins bedekt) door ze te beschouwen als paren van natuurlijke getallen. Men heeft toen afgesproken, twee zulke breuken of „paren” $\frac{a}{b}$ en $\frac{c}{d}$ gelijk te noemen, indien voldaan is aan de gelijkheid $ad = bc$. Uit deze definitie kon toen gemakkelijk de stelling bewezen worden, die we noodig hebben om breuken te

kunnen vereenvoudigen, en om meerdere breuken gelijknamig te kunnen maken. Daarna kon het „grooter” en „kleiner” in het gebied der natuurlijke getallen en breuken besproken worden; kon de optelling en de vermenigvuldiging in dat getalgebied gedefinieerd worden, enz.

Na deze inleiding zal het den leerlingen niet vreemd voorkomen, indien we zeggen, dat we thans een tweetal reële getallen, wederom in bepaalde volgorde geschreven, als „getal” gaan beschouwen, en dat we aan zulk een „paar” den naam van *complex getal* zullen geven. Zij weten reeds, dat de naam of het onder of naast elkaar schrijven nog niet veel te beteekenen heeft, en dat het er op aankomt, hoe we definiëren zullen de gelijkheid van die getallen en de optelling en de vermenigvuldiging van die getallen; en dat ons daarna vooral belang inboezemt de vraag, of de wetten, die gelden voor de bewerkingen met de reële getallen, voor de nieuwe getallen geldig blijven.

Twee complexe getallen (a, b) en (c, d) zullen gelijk heeten, indien voldaan is aan de beide voorwaarden $a = c$ en $b = d$; hierbij valt het op, dat voor het gelijk zijn van twee gebroken getallen aan slechts één voorwaarde behoefde te worden voldaan, terwijl voor de gelijkheid van twee complexe getallen twee voorwaarden moeten vervuld zijn (bij zulke vergelijkingen zien we over het hoofd het verschil, dat de beide getallen, die een gebroken getal samenstellen, natuurlijke getallen zijn; de getallen die een complex getal samenstellen, zijn reël). Dat de gelijkheid van twee complexe getallen krachtens de definitie het bestaan van *twee* gelijkheden tusschen reële getallen met zich brengt, is een omstandigheid, waarop men moeilijk met genoeg nadruk de aandacht kan vestigen.

Als de som der complexe getallen (a, b) en (c, d) definiëren we het complexe getal $(a + c, b + d)$, waardoor het schijnt, alsof de nieuwe paren (de complexe getallen) van eenvoudiger karakter zullen worden als de oude paren (de breuken). Hierop volgt teleurstelling, indien als produkt van dezelfde getallen gedefinieerd wordt het getal $(ac - bd, ad + bc)$. Men kan er hier op wijzen, dat men zulke, zonderling schijnende, definities niet geeft om de zaak wat moeilijker te maken; maar dat men ervoor moet zorgen, dat de gewone eigenschappen, die we voor de verbindingen der reële getallen geleerd hebben, hier geldig blijven.

Men zal goed doen, alvorens verder te gaan, de definities der

beide bewerkingen op een aantal getallenvoorbeelden te laten toepassen en daarbij vooral niet te vergeten de gevallen, dat een of beide getallen van een of beide paren nul zijn. Daarna kan men de afspraak maken, dat het reële getal p zal worden voorgesteld door het complexe getal $(p, 0)$. Deze wijze van doen heeft voor de leerlingen niets bevreemdends, daar zij immers bij de invoering der gebroken getallen de natuurlijke getallen óók zagen optreden als bijzonder geval voor zulk een paar; alleen was daar het tweede getal de eenheid, terwijl hier het tweede getal de nul is. Zooals zij dáár zagen dat de optelling en vermenigvuldiging van natuurlijke getallen slechts bijzondere gevallen waren van die bij gebroken getallen, of liever: dat de optelling en de vermenigvuldiging van de gebroken getallen een uitbreiding is van die der natuurlijke getallen, zoo zullen zij hier zien, dat de optelling en de vermenigvuldiging der complexe getallen uitbreidingen zijn van de overeenkomstige bewerkingen bij de reële getallen. Deze opmerking is van fundamenteel belang, omdat eruit blijkt, dat de invoering der nieuwe getallen als een uitbreiding van het oude getalgebied kan worden beschouwd.

Het bewijs van de grondeigenschappen van optelling en vermenigvuldiging geeft geen enkele moeilijkheid. Daarna is het echter aan te bevelen, zoo spoedig mogelijk over te gaan tot het invoeren van de gebruikelijke schrijfwijze, waardoor het rekenen met de nieuwe getallen in belangrijke mate vereenvoudigd wordt.

Om tot die schrijfwijze te komen kunnen we opmerken, dat zoowel de definitie van de optelling der complexe getallen als die der vermenigvuldiging eenigzins den indruk maakt alsof we hier met de optelling en met de vermenigvuldiging van twee tweetermen te doen hebben. We kunnen echter een complex getal op een voor de hand liggende wijze als een tweeterm, d.w.z. als de som van twee getallen schrijven, nl.

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b).$$

Deze schrijfwijze ligt voor de hand, waar we de eerste term $(a, 0)$ als een reël getal leerden kennen en we elk getal van de gedaante $(0, b)$ kunnen schrijven als het produkt van het reële getal b en het getal $(0, 1)$. Alleen ter verdere vereenvoudiging der schrijfwijze stellen we het getal $(0, 1)$ voor door de enkele letter i ; uit hetgeen ik boven reeds opmerkte zal men inzien, waarom ik de keuze van die letter i niet nader zou willen toelichten.

De definitie der vermenigvuldiging leert, dat

$$(0,1) \times (0,1) = (-1,0) = -1 \text{ is.}$$

We schrijven dus voortaan $a + bi$ in de plaats van (a, b) .

Het gemak van de nieuwe schrijfwijze is nu hierin gelegen, dat we voor de optelling en de vermenigvuldiging der complexe getallen niet de nieuwe definities behoeven te gebruiken, maar daarbij de voor de gewone getallen geleerde rekenwijzen toepassen, en i^2 , zoodra het optreedt, vervangen door -1 .

We zullen hierna de aftrekking en deeling invoeren van complexe getallen, haar grondeigenschappen aantonen, en ten slotte de gevolgtrekking maken, dat men met de complexe getallen geheel mag rekenen als met de reële. Hoewel ten overvloede wil ik hierbij nog opmerken, dat men dit *rekenen* vooral niet moet verwaarloozen.

Nadat aldus de uitbreiding van het getalgebied is tot stand gebracht, zal men tot de oplossing der vierkantsvergelijkingen in het verruimde gebied overgaan, en dus de stelling bewijzen, dat elke vierkantsvergelijking twee wortels heeft. Men zal daartoe eerst de vergelijking met reële coëfficiënten beschouwen, en opmerken, dat de vroeger uitgesproken bewering, dat de vergelijking

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

geen wortel heeft in het geval dat $b^2 - 4ac < 0$ is, juist is, indien we ons blijven beperken tot het gebied der reële getallen, doch haar geldigheid verliest, zoodra we ons in het verruimde gebied gaan bewegen. Er behooren dan bij elk negatief getal twee getallen, wier vierkant gelijk is aan dat getal, zooals gemakkelijk ingezien wordt. Er bestaat geen reden voor, zich te beperken tot de vierkantsvergelijkingen met reële coëfficiënten. De vergelijkingen met complexe coëfficiënten geven van zelf aanleiding tot de beschouwing van den vierkantswortel van een complex getal. De oplossing der vergelijking $(x + yi)^2 = a + bi$, waarin a en b reël zijn, in reële waarden van x en y , zal men wel tot getallencoëfficiënten beperken. Vervolgens zal men natuurlijk nagaan, welke bijzonderheid de complexe wortels vertoonen, indien de coëfficiënten der gegeven vierkantsvergelijking reël zijn.

Het spreekt vanzelf, dat, waar men vroeger heeft moeten nalaten op de binomiaalvergelijkingen in te gaan, men dit gedwongen verzuim thans zal kunnen goed maken; het zou jammer zijn, indien men

het achterwege liet, zulks met het oog op de fraaie interpretatie, die de aanstonds te bespreken meetkundige behandeling van deze zaken geeft.

Ik zou thans tot de meetkundige voorstelling van de complexe getallen willen overgaan. Zij komt voor de leerlingen niet onverwacht. Het feit, dat een complex getal door twee reële getallen bepaald is, doet bij hen, in verband met hetgeen zij van coördinatenleer weten, het vermoeden rijzen, dat die complexe getallen op de punten van een vlak zijn af te beelden. Dit vermoeden ontstaat vooral gemakkelijk, indien van den aanvang af bij de ontwikkeling van het getalbegrip de getallenrechte als hulpmiddel is gebruikt, zooals ik in mijn boven reeds aangehaalde voordracht heb aanbevolen. Nadat de voorstelling van het complexe getal $a + bi$ besproken is, waarbij a en b de coördinaten voor een rechthoekig Cartesiaansch stelsel zijn, kan men uit de figuur de transformatieformules afleiden voor den overgang van Cartesiaansche op poolcoördinaten

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos \varphi = \frac{a}{r},$$

waardoor de schrijfwijze $r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ voor een complex getal gerechtvaardigd is. Het ligt thans m.i. voor de hand, van de nieuwe schrijfwijze vooreerst gebruik maken om het theorema van de Moivre voor geheele positieve waarden van den exponent te bewijzen, waaruit dan op de voor de leerlingen zoo verrassende wijze de formules voor sinus en cosinus van veelvouden van hoeken voor den dag komen. In de tweede plaats wordt de oplossing der binomiaalvergelijkingen opnieuw aan de orde gesteld; het blijkt thans, dat haar oplossing, van welken graad de vergelijking ook zij, niet de minste moeilijkheid oplevert. Op de velerlei oefenstof, die tot het onderwerp van de goniometrische behandeling verder nog behoort, zal ik niet ingaan. Men zal toch wel reeds den indruk ontvangen hebben, dat de behandeling der complexe getallen niet behoeft te bestaan in een opeenvolging van abstracte beschouwingen, maar dat het onderwerp op de meest natuurlijke wijze aanleiding geeft tot nieuwe en belangwekkende oefenstof. Bovendien echter doet het de leerlingen misschien meer dan eenig ander onderwerp gevoelen, dat de verschillende onderdeelen der wiskunde niet gescheiden naast elkaar staan.

Men heeft, nu de meetkundige voorstelling der nieuwe getallen

gegeven is, een goede gelegenheid, in te gaan op een vraag, die nog niet aan de orde gesteld is, maar die wellicht toch reeds bij de leerlingen gerezen is. Bij de invoering der complexe getallen is nl. herhaaldelijk een vergelijking gemaakt met de invoering der gebroken getallen. Maar bij de breuken zijn we reeds spoedig overgegaan tot de vergelijking van de breuken onderling en van de breuken met de geheele getallen, dus tot het „grootter” en „kleiner” begrip. De bedoelde vraag nu is: wanneer zullen we een complex getal grootter noemen dan een ander? Door nu de getallenrechte en het getallenvlak te hulp te roepen, maken we dadelijk duidelijk, dat het „grootter dan” en „kleiner dan”, dat op de getallenrechte „rechts gelegen van” en „links gelegen van” beteekende, in het vlak geen beteeckenis meer heeft. We zouden wel zoo iets kunnen invoeren, door de moduli der complexe getallen te vergelijken, maar stuiten dan aanstonds op het bezwaar, dat gelijkheid van modulus niet voldoende is om te besluiten tot de gelijkheden $a = c$, $b = d$, die voor de gelijkheid der complexe getallen noodzakelijk zijn krachtens definitie. Bovendien echter zou deze beschouwing van „grootter” en „kleiner” geen uitbreiding mogen heeten, zooals men aanstonds inziet, van het „grootter” en „kleiner” in het gebied der reële getallen.

De meetkundige optelling van complexe getallen brengt vanzelf de optelling van vrije vectoren in het platte vlak in herinnering; men toont aan, dat de definitie met de algebraïsche samenvalt (waarbij men het best de oorspronkelijke schrijfwijze $a + bi$ gebruikt), doch bewijst ten overvloede de geldigheid der grondeigenschappen uit de figuur.

Voorts definieert men meetkundig de vermenigvuldiging van twee complexe getallen en laat zien, dat deze wederom met de algebraïsche samenvalt, hetgeen het eenvoudigst gaat door de schrijfwijze $r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ te gebruiken. Hierbij kunnen we erop wijzen, dat blijkbaar de meetkundige interpretatie van de vermenigvuldiging met een complex getal identiek is met de gelijkvormigheidstransformatie. De „vermenigvuldiging” uit de vlakke meetkunde blijkt dan eigenlijk te zijn: vermenigvuldiging met een reëel getal.

Hiermede is elke berekening met complexe getallen tot een meetkundige constructie in het platte vlak teruggebracht. Men zal weder zijn voorbeelden en toepassingen uit een rijken voorraad kunnen kiezen. Zeker zal men niet mogen verzuimen, de meetkundige oplossing der binomiaalvergelijkingen te behandelen; maar ook de andere on-

derwerpen, die besproken zijn, zullen zooveel mogelijk meetkundig worden geïnterpreteerd.

Men zal wel opgemerkt hebben, dat in de geschetste behandeling der complexe getallen het imaginaire niet in overmaat aanwezig is, en dat de leerlingen, die op een degelijke wijze in de verschillende uitbreidingen van het getalgebied zijn ingewijd, met deze laatste uitbreiding niet te groote moeite behoeven te hebben. Immers, moeilijkheden van geheel nieuw karakter zijn hierin voor hen niet gelegen. Het platte vlak is toch ook niet in erger mate denkbeeldig dan de rechte lijn! ¹⁾

Wanneer ik echter zeg, dat de moeilijkheid voor de leerlingen niet te groot wordt, dan ga ik van de onderstelling uit, dat de behandeling in de vorige klassen behoorlijk is voorbereid; het schijnt van belang, dat nog eens met nadruk op te merken. Men heeft met de behandeling der complexe getallen in de 3de klasse blijkbaar vrij algemeen droeve ervaringen opgedaan; in het begin van dit opstel heb ik gepoogd, dat te verklaren. Maar men zal ook in de 5de klasse niet veel méér succes hebben, indien niet de vroegere uitbreidingen van het getalgebied, in de eerste klasse beginnend, zorgvuldig behandeld zijn.

Indien men deze zaken, hoe voorzichtig ook in aansluiting aan de reeds voorhanden begrippen besproken, voor de jeugdige leerlingen te moeilijk vindt, dan zal een behandeling van de irrationale getallen in de 4de klasse en van de complexe in de 5de op teleurstelling moeten uitloopen.

Men zal vragen, of de behandeling der complexe getallen op de aangegeven wijze niet veel tijd kost. Het antwoord op deze vraag moet bevestigend luiden. De opstellers van het concept-leerplan, dat in dit tijdschrift meermalen besproken is, gaven blijk dit in te zien, door bijna al den tijd, dien zij in de 5de klasse voor algebra en goniometrie te zamen beschikbaar achtten, voor de behandeling der complexe getallen te bestemmen (alleen staan nog voor algebra de allereerste beginselen der integraalrekening vermeld, die echter later voor een groot deel zijn weggevallen). Die tijd is echter ook zeker voldoende, indien men zich weet te matigen; men kan de bedoelde

¹⁾ Moge de nomenclatuur-commissie (zie afl. 1, pag. 4) erin slagen, de benamingen „imaginair” en „reëel” door betere te vervangen!

onderwerpen rustig behandelen, en daarbij het rekenwerk behoorlijk tot zijn recht laten komen. Men heeft daarbij een voortdurende herhaling van vroeger behandelde onderwerpen, die veel leerzamer is dan het doorwerken van welke verzameling van examenvraagstukken ook!

DE OPLOSSING VAN DE VERGELIJKING VAN DEN EERSTEN GRAAD MET TWEE ONBEKENDEN.

In $ax + by = c$ heeft men tweetallen getallen (x_i, y_i) te zien, die voor x en y in de plaats gesteld het eerste lid c maken; er zijn oneindig veel stellen (x_i, y_i) , nl. de cartesische coördinaten van alle punten der rechte $ax + by = c$. Wenscht men onder deze stellen slechts die, waarvan x_i en y_i geheele getallen zijn, dan beperkt men het aantal; men vraagt immers enkel naar de roosterpunten van de rechte $ax + by = c$ (roosterpunten zijn punten met geheele coördinaten); de coëfficiënten kunnen zóó zijn, dat de rechte geen enkel roosterpunt bevat. Eischt men nog, dat x_i en y_i geheel en positief zijn, dan heeft men voor de twee grootheden x en y drie voorwaarden, waaraan men niet altijd kan voldoen.

We zullen nu nagaan, hoe men de geheele waarden vindt en daartoe beginnen met de klassieke oplossing, nl. door middel van een kettingbreuk. Als men $\frac{a}{b}$ in een kettingbreuk ontwikkelt

met de naderende breuken $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3}, \dots, \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}, \frac{p_n}{q_n} = \frac{a}{b}$, dan is $p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^n$; even een voorbeeld:

$\frac{238}{71}$ ontwikkelen we als volgt in een kettingbreuk:

$$\begin{array}{r} 71 \overline{) 238} \quad (3 \\ \underline{213} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 25 \overline{) 71} \quad (2 \\ \underline{50} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 21 \overline{) 25} \quad (1 \\ \underline{21} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \overline{) 21} \quad (5 \\ \underline{20} \end{array}$$

$$1 \overline{) 4} \quad (4$$

$\frac{238}{71} = \{3, 2, 1, 5, 4\}$; de naderende breuken zijn

	3	2	1	5	4
$\frac{1}{0}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{57}{17}$	$\frac{238}{71}$

We hebben dus

$$238 \times 17 - 71 \times 57 = -1; -1,$$

1) 4(4 omdat $n = 5$ is.

Door doelmatige keuze der teekens van x en y heeft men nu bijzondere oplossingen van de vier vergelijkingen

$$238x - 71y = -1, \text{ nl. } 17 \text{ en } 57;$$

$$238x - 71y = 1, \text{ nl. } -17 \text{ en } -57;$$

$$238x + 71y = -1, \text{ nl. } 17 \text{ en } -57;$$

$$238x + 71y = 1, \text{ nl. } -17 \text{ en } 57.$$

De ontwikkeling van a/b in een kettingbreuk eischt, dat a en b onderling ondeelbaar zijn, in dit geval voldoen aan $ax \pm by = \pm 1$ noemer en teller van de voorlaatste naderende breuk, genomen met de passende teekens. Laten we ons bepalen bij $ax - by = 1$ met de bijzondere waarden (x_0, y_0) , zoodat $ax_0 - by_0 = 1$ is, en $a(cx_0) - b(cy_0) = c$; aan $ax - by = c$ voldoen dus cx_0 en cy_0 ; evenzoo voor de andere teekenverbindingen.

Hebben we dus op te lossen $238x - 71y = 61$, dan vinden we $x = 61 \times (-17)$ en $y = 61 \times (-57)$ als bijzondere waarden.

We kunnen hieraan het volgende toevoegen: als (x_i, y_i) voldoen aan $ax - by = c$, dan is

$$ax - by = ax_i - by_i;$$

$$a(x - x_i) = b(y - y_i);$$

$(x - x_i) : (y - y_i) = b : a$, zoodat $x - x_i$ en $y - y_i$ opvolgend kunnen worden voorgesteld door bt en at en $x = x_i + bt, y = y_i + at$; voor $ax + by = c$ geldt $x = x_i + bt, y = y_i - at$.

De oplossing van $ax \pm by = \pm c$ met kettingbreuken loopt dus als volgt:

1) ontwikkel a/b in een kettingbreuk; noemer en teller van de laatste breuk, die vóór $\frac{a}{b}$ voorkomt, geven, voorzien van de juiste teekens, x_i en y_i van $ax \pm by = \pm 1$;

2) bereken cx_i en cy_i ;

3) $x = cx_i + bt, y = cy_i \pm at$;

4) kies zoo mogelijk t zóó, dat men voor x en y waarden krijgt, die niet te groot zijn.

We zullen dit met een voorbeeld toelichten en lossen volledig op met alle bewerkingen de vergelijking:

$$738x + 515y = 197;$$

$$515 \overline{) 738} (1$$

$$515$$

$$\underline{223} \overline{) 515} (2$$

$$446$$

$$\underline{69} \overline{) 223} (3$$

$$207$$

$$\underline{16} \overline{) 69} (4$$

$$64$$

$$\underline{5} \overline{) 16} (3$$

$$15$$

$$197$$

$$\underline{97}$$

$$1379$$

$$\underline{1773}$$

$$19109$$

$$197$$

$$\underline{139}$$

$$1773$$

$$\underline{591}$$

$$\underline{197}$$

$$27383$$

$$515 \overline{) 19109} (37 \quad 738 \overline{) 27383} (37; \quad n = 37.$$

$$\underline{1545}$$

$$\underline{3659}$$

$$\underline{3605}$$

$$54$$

$$\underline{2214}$$

$$\underline{5243}$$

$$\underline{5166}$$

$$77$$

1	2	3	4	3	5	
1	1	3	10	43	139	738
0	1	2	7	30	97	515

$$n = 6.$$

$$738 \times 97 - 515 \times 139 = 1;$$

aan de vergelijking voldoen nu

$$\begin{cases} x = 197 \times 97 + 515t \\ y = 197 \times (-139) - 738t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 19109 + 515t \\ y = -27383 - 738t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 19109 + 515t \\ y = -27383 - 738t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 19109 + 515t \\ y = -27383 - 738t \end{cases}$$

Om de getallen 19109 en 27383

1) 5(5 wat terug te brengen tot kleinere,

kiest men t bv. $t' - n$, waarbij

n door deeling wordt gevonden;

$$\text{We vinden nu } \begin{cases} x = 54 + 515t' \\ y = -77 - 738t' \end{cases}$$

Voor het middelbaar onderwijs, dat terecht de kettingbreuken niet behandelt, moet men een anderen weg inslaan; men ging vroeger als volgt tewerk.

Daar x en y geheel moeten zijn en het eerste lid van $515y = 197 - 728x$ deelbaar is door 515, moet ook het tweede deelbaar zijn door 515; dit tweede lid splitsen we in een 515-voud en de rest:

$$515y = -515x + 197 - 223x; \text{ dus is } 197 - 223x \text{ ook een 515-voud.}$$

$$y = -x + \frac{197 - 223x}{515}; \text{ stel deze breuk gelijk aan het geheele}$$

getal a , dan is

$$197 - 223x = 515a$$

$$223x = 197 - 515a = 223 - 446a - (26 + 69a);$$

$$x = 1 - 2a - \frac{26 + 69a}{223}; \text{ stel de breuk } b;$$

$$26 + 69a = 223b;$$

$$69a = -26 + 223b = 207b + 16b - 26;$$

$$a = 3b + \frac{16b - 26}{69}; \text{ stel de breuk } c \text{ (vereenvoudi-}$$

gingen breng ik opzettelijk niet aan);

$$16b - 26 = 69c;$$

$$16b = 26 + 69c = 16 + 64c + 10 + 5c;$$

$$b = 1 + 4c + \frac{10 + 5c}{16}; \text{ stel de breuk } d;$$

$$5c + 10 = 16d;$$

$$5c = -10 + 16d + d;$$

$$c = -2 + 3d + \frac{d}{5}; \text{ stel de breuk } \frac{d}{5} = e, \text{ dus } d = 5e$$

teruggaande vindt men nu:

$$c = -2 + 3(5e) + e = -2 + 16e;$$

$$b = 1 + 4(-2 + 16e) + 5e = -7 + 69e;$$

$$a = 3(-7 + 69e) + (-2 + 16e) = -23 + 223e;$$

$$x = 1 - 2(-23 + 223e) - (-7 + 69e) = 54 - 515e;$$

$$y = -(54 - 515e) + (-23 + 223e) = -77 + 738e.$$

Vervangt men e door $-t'$, dan hebben we dezelfde waarden als bij de eerste oplossing.

Men ziet in deze oplossing vele zelfde getallen als bij de eerste; ook hier treft men alle getallen aan van den algorithmus van EUCLIDES, nl. 223, 69, 16 en 5; men deelt immers ook hier telkens den kleinsten der coëfficiënten op den grootsten; bovendien verschijnen hier de getallen van denzelfden algorithmus van $223 : 197$, zoodat men reeds de dubbele bewerking heeft als met de kettingbreuk; dit is niet het grootste bezwaar echter; het ergste is wel, dat men door de teruggaande bewerking de coëfficiënten 738 en 515 opv. bij y en x terugvindt; getallen, die al van te voren vaststaan; leerlingen vinden het gewoonlijk vrij vreemd, dat ze terugkomen en als men deze methode volgt en het bewijst, dan doet men feitelijk iets minderwaardigs en in elk geval wordt de wiskunde mishandeld en geen leerling krijgt met deze werktuigelijke manier een behoorlijk inzicht.

Het is daarom veel leerzamer de behandeling als volgt in te richten.

Als we moeten oplossen $ax + by = c$ en (x_0, y_0) is een bijzondere oplossing, dan is $ax + by = ax_0 + by_0$, dus

$$a(x - x_0) = b(y_0 - y), \text{ dus } (x - x_0) : (y - y_0) = b : -a,$$

zoodat $x - x_0$ en $y - y_0$ kunnen worden voorgesteld door bt en $-at$; men heeft dus $x - x_0 = bt$, $y - y_0 = -at$ en $\begin{cases} x = x_0 + bt, \\ y = y_0 - at. \end{cases}$

Werkt men bovendien met grafieken (deze gebruiken we ter verluchting van de algebra, niet omgekeerd), dan kan men laten zien, dat één roosterpunt voldoende is om ze alle te kennen; de richtings-coëfficiënt is immers $-a/b$, zoodat het volgende roosterpunt b eenheden verder naar rechts ligt en $-a$ naar boven. — Men behoeft dus slechts één bijzondere oplossing te weten om in algemeenen vorm x en y te noemen; dat beteekent een groote besparing van arbeid vergeleken bij de tweede manier en bovendien een heldere voorstelling. Kan men uit het hoofd een bijzondere oplossing vinden, b.v. van $3x + 4y = 17$, waaraan voldoen 7 en -1 , dan is men dadelijk klaar, nl. $x = 7 + 4t$, $y = -1 - 3t$; ook 3 en 2 zijn goed natuurlijk, dan $x = 3 + 4t$, $y = 2 - 3t$; in geen geval volge men de regels voor de oplossing. Als de coëfficiënten wat groot zijn, dan zoek men op de volgende manier een stel bijzondere waarden.

1) $738x + 515y = 197$;

$$\begin{array}{r} 515x \\ \hline \end{array}$$

2) $223x + 515a = 197$
 $\begin{array}{r} 446a \quad 223 \\ \hline \end{array}$

3) $223b + 69a = -26$
 $\begin{array}{r} 207b \\ \hline \end{array}$

4) $16b + 69c = -26$
 $\begin{array}{r} 64c \quad -32 \\ \hline \end{array}$

197—738x is een 515-voud; trek een 515-voud af, nl. 515x; men houdt een 515-voud over, noem dit 515a.

Nu is de eerste term van

$$223x + 515a = 197$$

een 223 voud; van 515a en 197 trekken we beide een 223-voud af; trek nu weer een 69-voud af, enz.

16d + 5c = 6; aan deze voldoet nu $c = -2$; verg. 4) geeft $b = 7$; verg. 3) geeft (we nemen de volle becijfering op) voor $a = -23$; deze waarde zetten we in 2) en becijferen

$$\begin{array}{r} 223 \\ 7 \\ \hline 1561 \\ 26 \\ \hline 69) 1587(23 \\ 138 \\ \hline 207 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 515 \\ 23 \\ \hline 1545 \\ 1030 \\ \hline 11845 \\ 197 \\ \hline 223) 12042(54, \\ 1115 \\ \hline 892 \end{array}$$

zoodat $x_0 = 54$ is; verder heeft men $y_0 = -77$; de oplossing is dus

$$\begin{cases} x = 54 + 515t \\ y = -77 - 738t \end{cases}$$

Ook bij deze oplossing komen getallen te voorschijn, die de algorithmus van EUCLIDES levert voor de verhouding 738:515; dat *kan* niet anders en daar ontkomt men niet aan; in zooverre is de grond van alle die manieren volmaakt dezelfde; maar toch is er genoeg reden om voortaan de derde wijze van oplossen te volgen; en wel, omdat deze vooraf laat uitkomen een goed begrip van de zaak (wat is de oplossing anders dan de parametervoorstelling van de rechte lijn op cartesische coördinaten, waarvan dus de richtings-coëfficiënt bekend is, zoodat het er slechts om gaat om één bijzondere oplossing te vinden?) en daarna de oplossing samenvat in een kort schema. De eerste manier kunnen we bij het onderwijs niet volgen; de tweede is erg werktuiglijk bij volslagen gemis aan inzicht en zij is bovendien bewerkelijk, omdat men getallen terugzoekt, die er al staan. Bij de eerste manier kan men geenerlei bekorting aanbrengen, daar anders de gebruikte eigenschap van de kettingbreuk niet meer geldt; bij de tweede gaat dat wel; men kan als het zoo uitkomt, de bovenrest bij de deeling nemen en factoren van tweetermen buiten haakjes zetten, bv. $a = 3b + \frac{16b - 26}{69}$ staat er;

men zette liever $a = 3b + 2 \times \frac{8b - 13}{69}$; verderop staat er $10 + 5c$;

we zetten $5(2 + c)$; men kan daardoor dikwijls eenige vereenvoudiging aanbrengen; dit geldt echter mede ten volle van de derde manier; de vergelijking 4) is $16b + 69c = -26$; omdat 16 en 26 even zijn, moet c ook even zijn; we zeggen dus: stel $c = 2c'$ en we deelen door 2, aldus:

$$2 \frac{16b + 69c = -26}{8b + 69c' = -13}, \text{ stel } c = 2c'$$

$$\begin{array}{r} 72c' \quad -16 \\ \hline \end{array}$$

$8d - 3c' = 3$, waaruit $c' = -1$ en $c = -2$ ($d = 0$, maar dat schrijven we niet eens op, omdat dit onnoodig is). Het kan geen kwaad, nog eens een paar voorbeelden geheel uit te werken.

$$1) \begin{array}{r} 7x - 12y = 31 \\ - 14y \quad 28 \\ \hline 7a + 2y = 3 \end{array}$$

Hieraan voldoet

$$y_0 = -2$$

en $x_0 = 1$; we vinden

$$x = 1 + 12t$$

$$y = -2 + 7t.$$

Ik hoop, dat niemand bezwaar heeft tegen het zien van een bijzondere oplossing van $7a + 2y = 3$; waar men reeds in de 1^e klas de ontbinding van $x^2 + 2x - 63$ uit het hoofd eischt, is deze manier van doen zeker gerechtvaardigd; zoo men wil, kan men natuurlijk verder gaan tot er niets meer te doen is; ik acht dat steeds uit den booze. Zoo eisch ik bv. steeds bij het opzoeken van log 254,235 dat ze nemen log 254,2 + $\frac{1}{8}$

van het verschil van de getallen 518 en 535 opv. onder de 2 en de 3 en weiger het gebruik der zijrij.

$$2) 19x + 25y + 371 = 0$$

$$19y + 380$$

$$3 \frac{19a + 6y - 9 = 0; \text{ stel } a = 3a'}{19a' + 2y - 3 = 0;}$$

hieraan voldoet $y_0 = -8$; dan is $x_0 = -9$; de oplossing is

$$\begin{cases} x = -9 + 25t \\ y = -8 - 19t. \end{cases}$$

$$3) 87x - 113y = 1001$$

$$- 87y \quad 957$$

$$2 \frac{87a - 26y = 44; \text{ stel } a = 2a'}{87a' - 13y = 22}$$

$$91a' \quad 26$$

$$4a' + 13b = 4; \quad a' = 1; \quad a = 2; \quad y_0 = 5; \quad x_0 = 18; \text{ we}$$

hebben de oplossing $\begin{cases} x = 18 + 113t \\ y = 5 + 87t \end{cases}$

4) In de rekenkunde komen herhaaldelijk onbepaalde vergelijkingen voor, bv. een veelvoud van een getal onderling ondeelbaar met 10 kan men laten eindigen op elk willekeurig stel cijfers; we vragen nu naar een veelvoud van 389, dat eindigt op 090603; we lossen op

$$389x - 1\,000\,000y = 90603$$

$$\dots\dots\dots^1) \quad \dots\dots^2)$$

$$2 \frac{389a - 270y = -34; \text{ stel } a = 2a'}{389a' - 135y = -17}$$

$$405a'$$

$$16a' + 135b = 17$$

$$128b \quad 16$$

$$16c + 7b = 1; \quad b = 7; \quad a' = -58,$$

$a = -116$, $y_0 = -167$, $y = -167 + 389t$ of $y = 222 + 389t$; 222 090 603 is dus een 389-voud, hoeveel maal hindert bij dit niet. De getallen bij 1) en 2) met stippels aangegeven, behoeven niet te worden uitgerekend; de onderrest of de bovenrest bij deeling door 389 is genoeg; men vindt die als volgt:

$$389) 1\,000\,000 (2570; \quad 389) 90603 (233$$

778	778
222 0	1280
194 5	1167
27 50	1133
27 23	1167
270	- 34

Dit geldt natuurlijk voor elke volgende verkleining der cofactoren evenzeer; voor het middelbaar onderwijs breng ik deze vereenvoudiging echter liever niet aan.

Nu heb ik wel de stelling uitgesproken, dat men het veelvoud kan laten eindigen op elke groep cijfers, maar dit niet bewezen; de zaak is echter eenvoudig; als van $ax + by = c$ de coëfficiënten a en b onderling ondeelbaar zijn, dan zijn er steeds geheele getallen, die voldoen aan deze vergelijking; bij de oplossing vervangt men a en b door het kleinste, zeg b , en de rest r_1 bij deeling van a op b ; met b en r_1 handelt men op dezelfde wijze; a en b zijn onderling ondeelbaar, dus komt men zeker op een herleide vergelijking met cofactoren 1 en r_k ; dus bv. $f + r_k g = h$; hieraan voldoet de bijzondere oplossing $f = h$, waarna men e, d, c, b, a, x_0 en y_0 kan berekenen. Dit is het bewijs, dat behoort bij de derde manier van oplossen, ook bij de tweede (in de meeste boeken, die deze nog volgen, ontbreekt het echter); bij de klassieke oplossing met een kettingbreuk ligt het daarin, dat ieder gebroken a/b , waarvan a en b onderling ondeelbaar zijn, kan ontwikkeld worden in een kettingbreuk.

Om het vlugge van de derde manier te vertoonen, nemen we nog eens een voorbeeld, ontleend aan het handelsrekenen, waarbij men dikwijls (in de examensommen tenminste) groote getallen krijgt.

5) Gouden tientjes hebben een gewicht van 6,72 gram en een gehalte 0,9; dukaten hebben een gewicht van 3,494 gram en een gehalte $\frac{59}{60}$. Hoeveel gouden tientjes en hoeveel dukaten

moet men samensmelten, opdat men uit het mengsel sovereigns kan slaan? Sovereigns hebben een netto-gewicht van 7,3224 gram.

We smelten samen x gouden tientjes met een fijn gewicht van $6,72 \times x \times 0,9$ en y dukaten, wegende netto $3,494 \times y \times \frac{59}{60}$; samen moet dit zijn een veelvoud van 7,3224, zeg $7,3224z$. De vergelijking is dus (het deelen door z is onnoodig; op school zou ik het wel doen):

$$\begin{array}{rcl}
 6,72 \times x \times \frac{9}{10} + 3,494 \times y \times \frac{59}{60} & = & 7,3224z \\
 \hline
 181,44x + 103,073y & = & 219,672z \quad \times 30 \\
 \hline
 181440x + 103073y & = & 219672z \quad \times 1000 \\
 648 \quad \hline
 280x + 103073y' & = & 339z \quad \text{De G.G.D. van} \\
 & & 103040y' \quad 280z \quad \text{181440 en 219672 is} \\
 & & & \text{648, stel } y = 648y'. \\
 \hline
 280a + 33y' & = & 59z \\
 264a & & 66z \\
 \hline
 16a + 33b & = & -7z \\
 & & 32b \\
 \hline
 16c + b & = & -7z;
 \end{array}$$

hieraan voldoet $b = -7z$; verder is $a = 14z$, $y' = -117z$; $y_0 = -75816z$ en $x_0 = 43071z$; men vindt dus

$$\begin{cases} x = (43071 + 103073t)z \\ y = (-75816 - 181440t)z. \end{cases}$$

Voor geen enkele waarde van t krijgt men voor x en y positieve geheele getallen, zooals men voor de oplossing wel verwachtte.

De beide laatste voorbeelden zouden, als men ook de coëfficiënten van x en y nog moest zoeken, zeker heel wat meer gecijfer hebben gevorderd.

De derde manier van oplossen (ook voor hen, die de kettingbreuken machtig zijn) is de eenvoudigste en wel om deze vier redenen:

- 1) men berekent niet de twee getallen, die al van te voren vaststaan;
- 2) duidelijk komt het verband uit met de grafiek van $ax + by = c$;
- 3) overbrengen van termen van het eene naar het andere lid is geheel onnoodig;
- 4) door het opstellen van een vast schema, dat zelfs bij de grootste

getallen te overzien is, wordt de oplossing belangrijk verkort.

Het was niet mijn bedoeling om de onbepaalde vergelijkingen te behandelen; vandaar dat ik niet gesproken heb over positieve waarden, over het al of niet bestaan daarvan, over het aantal oplossingen, noch over stelsels van 2 verg. met 3 onb., van 1 verg. met 3 onb., enz. Slechts was mijn doel te laten zien, dat de algorithmus van EUCLIDES den grond vormt van de oplossing, hoe die ook wordt ingekleed, maar dat de derde oplossing verreweg de eenvoudigste is in de uitvoering.

Het is niet heelemaal waar, dat men steeds dien algorithmus moet gebruiken; men kan nl. ook gebruik maken van de stelling van FERMAT of van EULER; de eerste luidt: als a ond. ond. is met p en p priem is, dan is $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$; de tweede: als a ond. ond. is met n , dan is $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$, waarin $\varphi(n)$ de indicator is van n , dat is: het aantal getallen, niet grooter dan n en onderling ondeelbaar met n .

Nemen we nu de vergelijking $7x - 12y = 31$, dan luidt deze als congruentie

$12y \equiv -31 \pmod{7}$; we lossen deze op:

$$5y \equiv -3 \pmod{7};$$

$$5^5 y \equiv -3 \cdot 5^5 \pmod{7}$$

$$y \equiv -3 \cdot 5^5 \equiv -2 \pmod{7}.$$

$$\begin{cases} y = -2 + 7t \\ x = 1 + 12t. \end{cases}$$

Nu is $5^6 \equiv 1 \pmod{7}$; vermenigvuldig dus beide leden met 5^5 ;

$$5^3 \equiv -1$$

$$5^2 \equiv 4$$

$$5^5 \equiv -4, \text{ dus } -3 \cdot 5^5 \equiv 12 \equiv -2.$$

Een tweede voorbeeld is $25x + 68y = 319$; in congruentievorm

$$68y \equiv 319 \pmod{25}.$$

$$-7y \equiv -6 \pmod{25}$$

$$7y \equiv 6 \pmod{25}; 7^{\varphi(25)} = 7^{20} \equiv 1 \pmod{25}$$

$$7^{20} y \equiv 6 \cdot 7^{19} \pmod{25};$$

$$y \equiv 6 \cdot 7^{19} \pmod{25};$$

$$y \equiv 8 \pmod{25}$$

$$\begin{cases} y = 8 + 25t \\ x = -9 - 68t \end{cases}$$

$$7^2 \equiv -1$$

$$7^{16} \equiv 1$$

$$7^3 \equiv -7$$

$$7^{19} \equiv -7; 6 \cdot 7^{19} \equiv -42 \equiv 8.$$

Deze oplossingen zijn in zooverre waard om te kennen, dat het bewijs voor het bestaan van oplossingen niet anders is, dan de genoemde stelling van EULER, waarvan die van FERMAT een bijzonder geval is. Men heeft er gewoonlijk heel wat gecijfer bij, meer dan op de derde manier; daarom geef ik ook geen voorbeelden met grootere getallen.

P. W.

BOEKBESPREKINGEN.

Prof. Dr. J. G. Rutgers. Inleiding tot de Analytische Meetkunde. Eerste deel. Het platte vlak. 2de druk. Deel 7 van Noordhoff's Verzameling van wiskundige werken. 364 blz. en 119 figuren in den tekst; geb. f 6.50. voor int. op Chr. Huygens, N. T. v. Wiskunde en Euclides f 5.50.

De eerste druk van dit werk is verschenen in 1923 en het pleit zeker voor de goede bruikbaarheid, gevolg van dezelfde hoedanigheid, dat reeds in 1928 de tweede druk noodig was; het werk is uitermate geschikt voor de acte KI, waarvan het de eischen volkomen dekt en voor studenten aan de Technische Hoogeschool, terwijl zeker ook vele eerstejaars studenten aan de Universiteiten er de eerste kennismaking met de Analytische Meetkunde uit kunnen opdoen; deze moeten er echter naast hebben het werk van Prof. Wolff, en beide laten volgen door het magistrale werk van Prof. Barrau.

De tweede druk onderscheidt zich van den eersten doordat nu de figuren in den tekst zijn opgenomen, door de opneming verder van de hyperbool van Apollonius en de rationale krommen, even zóovele verbeteringen. Het aantal drukfouten en rekenfouten in de antwoorden is tot een minimum teruggebracht; een paar zijn den dans nog ontsprongen; som 16, blz. 38 heeft hetzelfde antwoord als som 15; uit som 16 komt $y^2 - ax + a^2 = 0$; formule 50, blz. 46 moet luiden $y^2 = 2px + p/a x^2$; in plaats van $\lambda \neq \infty$ op blz. 64 zag ik liever λ eindig, maar smaken verschillen; $bx^2 + ay^2 = abx$, als ellips aangeduid bij som 92, is dit alleen, als a en b gelijk teeken hebben, laat men het woord ellips weg, dan is het in orde; in som 215 moet staan B (0, a); is het antwoord van som 251 wel goed? (zie N. T. v. W., Jg. XV, blz. 176); is het de bedoeling geweest op blz. 57, regel 3, een kromme van den vierden graad te geven, die ontaardt in 2 dubbelrechten door den oorsprong?

Gaarne zou ik nog een paar wenschen uiten voor den volgende druk. Het zijn deze: 1) de formules voor de transformatie van het eene stelsel op het andere als volgt te geven:

$$\begin{aligned}x &= k_1 \bar{x} + k_2 \bar{y} \\ y &= l_1 \bar{x} + l_2 \bar{y},\end{aligned}$$

hierin zijn (k_1, l_1) en (k_2, l_2) opv. de coördinaten van de punten op de eenheid van afstand tot 0 van de nieuwe x -as en de nieuwe y -as; men onthoudt ze heel eenvoudig: k_1 en k_2 , de abscissen, komen voor bij de omzetting van de abscis, l_1 en l_2 , de ordinaten, bij die van de ordinaat, de afleiding is zeer gemakkelijk en de toepassing ook.

2) § 5, nr. 113, blz. 187 kan m.i. eenvoudiger met determinanten, hetgeen ook geldt voor een deel van § 8, nr. 134, blz. 225.

De vraagstukken zijn voor KI over het geheel iets te eenvoudig en de kandidaten voor die acte doen zeker goed den raad van den

schrijver, gegeven in het voorbericht, te volgen en de opgaven van die examens uit Van Breen alle door te werken; zij moeten daarbij bestudeeren de model-oplossingen van Prof. Schuh, die jaarlijks verschijnen in het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde.

Aan het slot kunnen we niet nalaten te zeggen, dat de schrijver uitstekend geslaagd is bij het volbrengen van de taak, die hij zich heeft gesteld en dat hij vele studeerenden zeer aan zich verplicht heeft door zijn helderen schrijfrant, verlucht met vele mooie figuren. De uitgever heeft, zijn gewoonte getrouw, gezorgd voor een mooien druk op stevig papier, een sterken band en een zeer lagen prijs.

P. W.

Dr. Fred. Schuh en Dr. J. G. Rutgers, *Compendium der Hoogere Wiskunde*. Vierde deel. Groningen, P. Noordhoff, 1928. 531 blz. geb. f 15.50.

Van het vierde deel van het *Compendium der Hoogere Wiskunde* is thans het tweede stuk gereed gekomen, bevattende de differentiaal-vergelijkingen, zoodat het vierde deel compleet is. Ik verwijs naar de aankondiging van het eerste stuk in den vierden jaargang van dit tijdschrift op bladzijde 213, en wil nogmaals de hoop uitspreken, dat de overige deelen van dit buitengewoon nuttige werk binnen niet te langen tijd het licht mogen zien.

J. H. S.

Ergänzungshefte zu W. Lietzmann's *Mathematischem Unterrichtswerke*. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner.

4. *Aus der Mathematik der Alten*, von Dr. W. Lietzmann, 1928, 65 bladz., RM. 1.80.

In den vierden jaargang van dit tijdschrift, bldz. 272, heb ik Lietzmann's *Ueberblick über die Geschichte der Elementarmathematik* besproken (waarvan sedert een tweede druk verschenen is). Als aanvulling hierop zijn twee bloemlezingen ontworpen, de eene getiteld „*Aus der Mathematik der Alten*”, met ondertitel: „*Quellen zur Arithmetik, Planimetrie, Stereometrie und zu ihren Anwendungen*”, is thans verschenen, de andere „*Aus der neueren Mathematik*”; is in bewerking. Er bestaat tegenwoordig blijkbaar groote belangstelling voor zulke bloemlezingen: The American Mathematical Monthly van April 1928 vermeldt dat The Carnegie Corporation een som van \$ 10000 geschonken heeft voor de „preparation of a series of Source Books in the History of the Sciences”. Het werkje van Dr. Lietzmann geeft op een paar uitzonderingen na stukken van auteurs uit de oudheid (Plato, Diophantus, Euclides, Archimedes, Apollonius, Hero, e. a.), alle vertaald; ook een betrekkelijk recent citaat (1847) uit het Engelsch is vertaald, alleen de aanhalingen uit de werken van oude Duitsche auteurs zijn in de oorspronkelijke spelling meegedeeld. Verklarende aantekeningen zijn weinig in getal en gering van omvang, de Schrijver heeft het geven van verklaringen aan den leeraar willen overlaten. Het boekje bevat stukken over rekenkunde, planimetrie en stereometrie en een paar stukken over toepassing der meetkunde in het landmeten (Hero) en in de sterrenkunde (Ptolemaëus).

J. H. S.

Paul Deltour, Meetkunde voor Middelbare Scholen
Namur, Maison d'Éditions Ad. Wesmael-Charlier. (Soc.
An.), 1928. 299 bladz., 20 francs.

Het werkje is eene vertaling door Dr. Paul de Vaere, van een in het Fransch geschreven boekje van den heer Deltour, getiteld *Éléments de Géométrie à l'usage des écoles moyennes*. Het vertoont in den graad van exactheid veel overeenkomst met de goede Nederlandsche schoolboeken; voor de lezers van dit tijdschrift is eene opsomming der verschilpunten misschien het belangwekkendst. Een verschilpunt wordt gevormd door de volgorde, waarin de onderwerpen worden behandeld: rechte lijnen, hoeken, loodlijnen, driehoeken, congruentie van driehoeken, evenwijdige rechten, vierhoeken, symmetrie; onderlinge ligging van rechte lijnen en cirkels, bogen en koorden, middelpunts- en omtrekshoeken; evenredigheid van lijnstukken, constructies voor de middenevenredige, quadratuurvraagstukken, verdeling in uiterste en middelste reden, eigenschappen van den koordenvierhoek, voorbeeld van onderling onmeetbare lijnstukken; convexe regelmatige veelhoeken.

Nadat deze onderwerpen behandeld zijn op eene wijze, die, zooals ik reeds zeide, in hoofdzaak met de hier te lande gebruikelijke overeenkomt, verandert de wijze van voorstelling plotseling. In een hoofdstuk over het „meten van enkele meetkundige figuren” worden de formules voor lengte van cirkelomtrek en cirkelbogen, oppervlakte van cirkelsectoren en segmenten, oppervlakte en inhoud van prisma, pyramide, kegel, cylinder en bol zonder bewijs medegedeeld.

Evenals de Fransche boeken eindigt het boek met eenige mededelingen over het landmeten.

J. H. S.

N. J. Schons, *Traité d'algèbre élémentaire*. Namur, la
Procure (S. C.), Bruxelles, P. Paelinck, Gembloux, J.
Duculot.

Première partie, 1927; 402 bldz., 20 francs.

Seconde partie, 1928; 306 bldz., 20 francs.

Het *Traité d'algèbre élémentaire* van den heer Schons is blijkens het voorbericht bestemd voor twee afdeelingen der Belgische Athenea, die goed vergeleken kunnen worden met ons gymnasium B en H. B. S. met 5-jarigen cursus B.¹⁾ Deze scholen zijn zesjarig; het eerste deel van het werk omvat de leerstof voor het 2e, 3e en 4e studiejaar, het tweede deel die voor de hogere klassen. Het eerste deel omvat precies de onderwerpen, die hier te lande behandeld worden volgens de tegenwoordige regeling (geen onbepaalde vergelijkingen en geen permutatieleer, enz.), het tweede deel geeft onderwerpen, die op onze programma's niet voorkomen, namelijk theorie der irrationeele getallen, kettingbreuken, permutatieleer en binomium, determinanten en lineaire vergelijkingen, limieten, continuïteit, oneindig voortlopende

¹⁾ De redactie hoopt spoedig in staat te zijn, een artikel op te nemen over de organisatie van het Belgische M. O., speciaal met het oog op het wiskunde-onderwijs.

reeksen, exponentieele en logaritmische functie, differentiaalrekening, maxima enz., complexe getallen.

Wanneer men uitsluitend naar de leerboeken mocht oordeelen, zou men tot de conclusie moeten komen, dat het algebra-onderwijs in België op vrij wat hooger peil staat dan te onzent. Dit zou vooral blijken als men nagaat, hoe bijvoorbeeld de deeling van veeltermen behandeld wordt, en als men opmerkt, welk een ruime plaats de behandeling der ongelijkheden inneemt. In het algemeen kan men zeggen, dat de theorie in het eerste deel degelijk behandeld is, en dat de verhouding tusschen theorie en vraagstukken goed is, zoodat de vraagstukken, al is hun aantal (816) niet gering, toch geen hinderlijk overwicht hebben.

Zooals begrijpelijk is, draagt de behandeling der leerstof van het tweede deel (met zijne 288 vraagstukken) een meer theoretisch karakter. Volgens het programma moet het boek in één jaar door-gewerkt worden (in de hoogste klasse worden geen nieuwe onderwerpen uit de algebra behandeld); ik moet bekennen, dat ik niet goed inzie hoe dat mogelijk is. In die klasse zijn 7 uren voor wiskunde uitgetrokken. (Een vergelijking der programma's leert, dat in België meer tijd wordt besteed aan wiskunde dan te onzent, maar veel minder aan de natuurwetenschappen).

Ik kan de boeken van den heer Schons in de aandacht mijner collega's aanbevelen. Als eerlang de hervorming van het algebra-onderwijs aan onze scholen langzamerhand zal beginnen, kunnen de Nederlandsche leeraren er genoeg nuttige wenken uit ontvangen om de geringe uitgave van 40 Belgische franken loonend te doen zijn.

J. H. S.

Prof. Dr. A. D. Fokker, Inleiding tot de golvings- en de quantum-mechanica. De Erven Loosjes, Haarlem, 1928.

Deze inleiding, in een drietal Zaterdagmiddag-voordrachten in Teijler's Stichting te Haarlem gehouden, verscheen reeds vroeger in de Archives du Musée Teijler en is thans bij de Erven Loosjes te Haarlem afzonderlijk verkrijgbaar gesteld.

Na een korte bespreking van de analogie van de voortplanting van golven en stralen met de beweging van deeltjes, — waarbij o. a. de golflengte berekend wordt, die gedacht zou moeten worden bij een om de kern van een waterstofatoom in een cirkel zich bewegend electron, — wordt nagegaan, welke golfvergelijking men aan een dynamisch probleem kan toevoegen, wanneer de kanonische bewegingsvergelijkingen bekend zijn. Vervolgens worden de toepassingen op een harmonischen oscillator en op het waterstofatoommodel besproken, waarna een hoofdstuk aan den correspondentieregel en de matrixrekening gewijd wordt. Enkele slotbeschouwingen besluiten het boekje, dat tenslotte nog van een litteratuur-opgave voorzien is.

Het boekje kan als een te waardeeren leidraad bij de bestudeering van het onderwerp beschouwd worden.

Gs.

Dr. P. Molénbroek en Drs. J. Mulder, Leerboek der Natuurkunde voor Hoogere Burgerscholen en Gymnasia. Noordhoff, Groningen, 1928.

Het meest opmerkelijke van dit leerboek is wel, dat het als uitgangspunt van het natuurkundig onderwijs niet het experiment stelt, maar veelal de theoretische behandeling. Zoo worden de moleculair-hypothesen voorop gesteld, waaruit dan het begrip druk, enz. en later eenige eigenschappen der warmte verklaard worden; uit het beginsel van Huygens, niet met behulp van het experiment, worden de wetten van terugkaatsing en breking van het licht afgeleid; aan het „Geluid” gaat de wiskundige behandeling der trillingen vooraf, de wet van Ohm komt door middel van analogie uit warmte- en vloeistofstroming te voorschijn. In strijd met het beginsel: het experiment zij uitgangspunt, de natuurkunde worde als experimenteele wetenschap onderwezen, — door de Commissie-Fokker nog onlangs uitdrukkelijk bij het natuurkunde-onderwijs vooropgesteld, wordt hier de leergang ontwikkeld.

Het boek is overigens duidelijk geschreven en van vele ophelderende figuren voorzien. Bovendien geeft een aantal vraagstukken gelegenheid zich in het behandelde nader in te werken. Enkele verouderde toestellen en methoden hadden beter weggelaten kunnen worden (o. a. de areometer van Nicholson, een ouderwetsche brandspuit, de ijscalorimeter van Bunsen, de roostercompensatieslinger, de fotometers van Bouguer en van Bunsen). Gs.

Brombacher en Nauta, Natuurkunde. Noordhoff, Groningen, 1928.

Dit boekje, bestemd voor hen, die zich voorbereiden voor het Mulo-examen B, munt uit door de heldere uiteenzetting der leerstof, waarbij de lezer meermalen door vragen op de moeilijkheden opmerkzaam gemaakt wordt. Een groot aantal figuren en foto's verduidelijken den tekst, waaronder verscheidene, die op het dagelijksch leven of de moderne techniek betrekking hebben. Gs.

BIJDRAGE TOT DE KENNIS VAN PRACTISCHE ONDERWIJSRESULTATEN IN VROEGERE TIJDEN.

Het onderwijs heeft tegenwoordig een slechte pers. Beroeps- en amateurpaedagogen, ouders en andere opvoeders vertellen ons dat toch eigenlijk niet veel van de zaak deugt. Ook al is men weinig geneigd dit te ontkennen, kan het misschien ter afwisseling geen kwaad eens een ander geluid te doen hooren, zij het slechts indirect door te wijzen op resultaten van vroeger.

In het belangwekkende dagboek van Samuel Pepys, ambtenaar aan de Engelsche admiraliteit, leest men onder 4 Juli 1662 het volgende: „Comes Mr. Cooper, mate of the Royall Charles, of whom I intend to learn mathematiques, and do begin with him to-day, he being a very able man, and no great matter, I suppose, will content him. After an houre's being with him at arithmetique, my first attempt being to learn the multiplication-table: then we parted till to-morrow”.

Pepys was toen 29 jaar oud. Hij had zijn, laat ons zeggen middelbare, opleiding genoten aan de St. Paul's school te London, een der bekende public schools. Daarna had hij aan de universiteit te Cambrigde gestudeerd en het gebracht tot B.A. en M.A. In 1662 schijnt hij de leemten in zijn kennis der rekenkunde flink te hebben aangevuld, althans de heer Cooper kwam nog herhaaldelijk. Ten slotte vond Pepys het zoo leuk dat hij op zijn beurt trachtte de arithmetische ontwikkeling van zijn vrouw op soliede basis te brengen. Deze laatste onderneming echter schijnt geen succes te zijn geworden.

Voor 18 Augustus 1662 begint het dagboek als volgt: „About seven o'clock, took horse, and rode to Bowe, and there staid at the King's Head, and eat a breakfast of eggs, till Mr. Deane, of Woolwich, and I rid into Waltham Forest, and there we saw many trees of the King's a-hewing; and he showed me the whole mystery of off-square, wherein the King is abused in the timber that he

buys, which I shall with much pleasure be able to correct. We rode to Illford, and there, while dinner was getting ready, he and I practised measuring of the tables and other things, till I did understand measuring of timber and board very well".

Lord Braybrooke, die het dagboek voor de eerste editie (1825) annoteerde, merkt hierbij op dat „*off-square*” blijkbaar een vergissing is en bedoeld wordt „*half-square*”, welke laatste uitdrukking hij toelicht door het volgende citaat uit Leybourn's *Complete Surveyor*, 3rd. edition, London 1674: „Before I proceed, I must needs detect one grand and too common an error; for most artificers, when they meet with squared timber whose breadth and depth are unequal, they usually add the breadth and depth together, and take the half for a mean square, and so proceed. This indeed though it be always an error, yet it is not so great when the difference of the breadth and depth is not much; but, if the difference be great, the error is very obnoxious either to buyer or seller”.

Deze uiteenzetting is m.i. nog niet bijzonder helder, maar uit een voorbeeld dat Leybourn laat volgen blijkt dat men voor het oppervlak van een rechthoek gewoonlijk nam het kwadraat der halve som van twee opeenvolgende zijden. Daar dit nooit te weinig is, geeft de toevoeging „*or seller*” te denken. Om de nagedachtenis van Leybourn recht te doen, moet echter vermeld worden dat hij in het toelichtende voorbeeld laat zien dat de koper in het nadeel is.

Dat Pepys in verband met deze kwestie het woord „*mystery*” gebruikt en zijn practische oefeningen in afwachting van het diner, wettigen wel eenigzins het vermoeden dat hij, althans vóór 18 Augustus 1662 heel weinig begrip van inhoudsbepaling had, om van rekenkundige en meetkundige middenevenredigen nog maar te zwijgen.

In verband met het voorgaande zal men allicht opmerken dat onderwijsresultaten niet slechts afhangen van het onderwijs zelf, maar ook van de leerlingen. Wat nu Pepys betreft, staat wel vast dat hij niet de eerste de beste was. Algemeen wordt hij erkend als een der bekwaamste ambtenaren, die de Engelsche admiraliteit ooit heeft gehad. In zijn dagboek maakt hij altijd een schranderen, vaak ook wel een geslepen indruk. Voor wiskunde moge hij dan al vrij weinig aanleg hebben gehad, van de bovengenoemde rekenlessen heeft hij in verschillende functies wel degelijk profijt ge-

trokken. Naast een enorme werkkraft bezat hij een breede belangstelling. Hij was lid der Royal Society, van welk lichaam hij in 1684 voorzitter werd. Niemand minder dan Newton gaf zich de moeite hem eenige onderdeelen der kansrekening uiteen te zetten.

Wij zijn circa twee en een halve eeuw van Pepys verwijderd, terwijl hij ongeveer 2000 jaar na het bereiken van het hoogtepunt der Grieksche wetenschap leefde. Overweging van dit feit kan misschien bijdragen tot de meening dat voor paniekstemming betreffende het hedendaagsche onderwijs, althans wat de practische resultaten aangaat, mogelijk geen aanleiding bestaat.

B. P. H.

HET LIMIETBEGRIIP IN HET MIDDELBAAR ONDERWIJS

DOOR

J. H. SCHOGT.

Er is tegenwoordig eene sterke strooming op te merken, om het limietbegrip onder de leerstof van hoogere burgerschool en gymnasium op te nemen. Dit is alleszins begrijpelijk, want noch in de wiskunde, noch in de natuurwetenschappen komt men ver zonder limietbeschouwingen, en wanneer men ernaar streeft de verschillende onderdeelen der leerstof zoo nauwgezet mogelijk in hun onderling verband te behandelen, wordt men vanzelf gevoerd tot de bespreking van de limieten en hare eigenschappen.

Nu vormen de limietbeschouwingen ongetwijfeld een voor de leerlingen zeer moeilijk hoofdstuk, en men heeft groote moeite, hun het rechte begrip bij te brengen; na eenige pogingen meen ik erin geslaagd te zijn, de moeilijkheden, die zich aanvankelijk voordeden, eenigermate te overwinnen. Misschien kan ik eenigen lezers van dienst zijn door de mededeeling van de wijze, waarop ik, naar ik meen met eenig succes, het limietbegrip met mijne leerlingen behandel.

De gebruikelijke algebraboeken geven weinig steun. Ten eerste zijn er verscheidene die foutieve definities geven, en ten tweede geven bijna alle te weinig toepassingen. In verreweg de meeste boeken komt het limietbegrip alleen ter sprake bij de oneindig voortlopende meetkundige reeksen; de toepassingen op het gebied der kinematica en der meetkunde worden gewoonlijk in de leerboeken op zoodanige wijze behandeld, dat van eenig verband met de beschouwingen, bij de meetkundige reeksen gehouden, weinig blijkt. Dit lijkt mij verkeerd; ik heb getracht, voor de leerlingen duidelijk te doen uitkomen, dat eenzelfde soort beschouwingen voorkomt bij de behandeling der oneindig voortlopende meetkundige reeksen, bij die der differentiaalquotienten in de kinematica en bij sommige meetkundige onderwerpen, zooals de lengte van cirkelbogen, en vele inhoudsbepalingen in de stereometrie.

Bij de behandeling der limietdefinitie kan men met voordeel gebruik maken van de omstandigheid, dat eene zekere voorstelling van het limietbegrip bij de leerlingen reeds aanwezig is. Er zullen er niet veel zijn, die op de vraag: Wat is de limiet van

$$2, 2\frac{1}{2}, 2\frac{3}{4}, 2\frac{7}{8}, \dots \text{?}$$

het antwoord schuldig blijven. Het komt er nu op aan, uit deze voorstelling de limietdefinitie te ontwikkelen. De eerste poging is steeds, dat het essentieele erin gezocht wordt, dat de getallen „steeds dicht bij het getal 3 komen”. Dat deze eigenschap het getal 3 nog niet tot limiet der rij stempelt blijkt gemakkelijk, daar de getallen ook steeds dicht bij 4 komen. Men brengt de leerlingen dan gemakkelijk tot het inzicht, dat 3 de limiet is, omdat de getallen der reeks niet alleen steeds dicht, maar ook onbeperkt dicht bij 3 komen, met andere woorden, dat het verschil van de termen der reeks met het getal 3 in absolute waarde kleiner dan elk positief getal gemaakt kan worden, als men maar ver genoeg voortschrijdt in de reeks. Dit leidt tot de volgende definitie:

Eene oneindig voortlopende reeks van getallen

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$$

heeft tot limiet het getal A, als bij elk positief getal ε een rangnummer n kan worden gevonden, zoodat

$$|A - a_n| < \varepsilon,$$

Aan deze definitie voldoet het getal 3 in het oorspronkelijke voorbeeld. Nu noodig ik de leerlingen uit, de reeks zoo te wijzigen, dat 3 voor hun gevoel de limiet niet meer is, maar toch de eigenschap die in bovenstaande definitie is geëischt, blijft behouden. Zelf geef ik dit voorbeeld:

$$2, 10, 2\frac{1}{2}, 10, 2\frac{3}{4}, 10, 2\frac{7}{8}, 10, \dots$$

Uit de klasse komt steeds het voorstel, de termen afwisselend van het minteeiken te voorzien:

$$2, -2\frac{1}{2}, 2\frac{3}{4}, -2\frac{7}{8}, \dots$$

Uit deze, gemakkelijk met andere te vermeerderen, voorbeelden blijkt, dat opdat 3 de limiet der rij zal zijn, de getallen der rij niet alleen onbeperkt tot 3 moeten naderen, maar dat zij ook niet weer mogen terugspringen, dus dat, bij elk positief getal ε een term moet zijn te vinden, zoodat alle volgende in absolute waarde minder dan

ε van 3 verschillen. Daarmede is dan de limietdefinitie gevonden:

Eene oneindig voortlopende rij van getallen

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots a_n, \dots$$

heeft tot limiet het getal A , als bij elk positief getal ε een natuurlijk getal p kan worden gevonden, zoo dat voor elke waarde van n , grooter dan p ,

$$|A - a_n| < \varepsilon.$$

Dit wordt daarna op de bekende wijze geïllustreerd met behulp der rechte lijn, waarop de getallen worden voorgesteld door de punten, die die getallen tot abscissen hebben.

Nadat de limietdefinitie aldus is besproken, en aangetoond is, dat eruit volgt, dat eene oneindig voortlopende rij van gelijke getallen datzelfde getal tot limiet heeft, behandel ik de volgende stellingen:

1. Eene oneindig voortlopende rij van getallen heeft nooit meer dan eene limiet.
2. Is $\lim a_n = A$ en $\lim b_n = B$, dan is $\lim (a_n + b_n) = A + B$.
3. Is $\lim a_n = A$, dan is $\lim (ca_n) = cA$, als c een getal is, dat constant is, d. w. z. onafhankelijk van n .
4. Is $\lim a_n = A$ en $\lim b_n = B$, dan is $\lim (a_n b_n) = AB$.
5. Is $\lim a_n = A$ en $\lim b_n = B$, dan is $\lim (a_n : b_n) = A : B$, mits $B \neq 0$.
6. De limiet van eene oneindig voortlopende rij van getallen, die alle grooter zijn dan zeker getal, is niet kleiner dan dat getal.
7. Bestaan voor elke waarde van n de betrekkingen

$$a_n \leq x_n \leq b_n$$

en is $\lim a_n = \lim b_n = A$, dan is ook $\lim x_n = A$.

Van deze stellingen deel ik de nummers 4 en 5 zonder bewijs mede, van alle andere geef ik bewijzen. Deze bewijzen vertoonen veel overeenkomst, ik zal mij in dit artikel tot het bewijs van de eerste stelling beperken. Ik laat dit bewijs voorafgaan door eene aanschouwelijke toelichting. Het bestaan van twee limieten eener getallenrij zou beteekenen het bestaan van twee punten A en B op de getallenlijn, zoodat van zekeren term af alle termen der reeks binnen twee intervallen om A en B liggen, welke intervallen buiten elkander gekozen kunnen worden. De onmogelijkheid hiervan is direct duidelijk.

Het bewijs geef ik daarna in den volgenden vorm.

Onderstelde. $\lim a_n = A$; $B \neq A$.

Gestelde. B is niet limiet der getallenrij a_n .

Bewijs. Voor elke waarde van n geldt de betrekking

$$(B - a_n) - (A - a_n) = B - A \quad (1)$$

Daar nu steeds

$$|(B - a_n) - (A - a_n)| \leq |B - a_n| + |A - a_n| \quad (2)$$

is, eveneens voor elke waarde van n

$$|B - a_n| + |A - a_n| \geq |B - A| \quad (3)$$

Kiest men nu een positief getal ε , zoo dat $2\varepsilon < |B - A|$, dan is a fortiori

$$|B - a_n| + |A - a_n| > 2\varepsilon, \text{ voor alle waarden van } n. \quad (4)$$

Nu is er, volgens het onderstelde, bij dat getal ε een natuurlijk getal p te vinden, zoodat voor elke waarde van n , die grooter is dan p , $|A - a_n| < \varepsilon$; op grond van de betrekking (4) is dan $|B - a_n|$ grooter dan dat getal ε voor alle waarden van n , die grooter zijn dan p . Het is dan dus niet mogelijk, bij dat getal ε een ander natuurlijk getal q te vinden, zoodat voor alle waarden van n , die grooter zijn dan q , $|B - a_n| < \varepsilon$, en dus heeft het getal B niet de eigenschap, die het volgens de limiet-definitie behoeft, om eene limiet der getallenrij a_n te zijn.

Dit bewijs wordt door de leerlingen niet gemakkelijk gevonden. Nu is het merkwaardig, en mijns inziens voor den docent uiterst leerzaam, op te merken, waar de moeilijkheid zit. De eigenlijke limietbeschouwing wordt nog wel begrijpelijk geacht, maar als moeilijkste punt wordt steeds bovenstaande betrekking (2) aange-
wezen. Ook bij de bewijzen van de andere stellingen ¹⁾ is het steeds het analogon der betrekking (2), die de moeilijkheid veroorzaakt. Toen mij dit eenmaal duidelijk geworden was, heb ik den leerlingen den weg tot de limietstellingen kunnen effenen, door hun een kort dictaatje te geven over de absolute waarden van reële getallen, waarin stellingen als

$$|a \times b| = |a| \times |b|$$

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

$$|a - b| \leq |a| + |b|$$

¹⁾ De bewijzen van eenige dezer stellingen vindt men b.v. in mijne *Beginnelsen der Theoretische Mechanica*; zij zijn niet alle onberispelijk.

besproken worden. Dit was te verwachten, want het is bekend, dat men de behandeling van eene stelling vergemakkelijkt, door het bewijs van een „lemma” niet in dat van de hoofdstelling in te vlechten, maar afzonderlijk te geven. Deze quaestie lijkt mij eene aardige illustratie van de meening, dat de moeilijkheden, die zich bij de behandeling van hoogere onderwerpen voordoen, vaak zijn te wijten aan onvoldoende behandeling van eenvoudige zaken, die behooren vooraf te gaan. De stellingen over absolute waarden komen in geen enkel mij bekend Nederlandsch algebraboek voor. ¹⁾).

Meer dan deze algemeene stellingen over limieten behandel ik niet; wel vermeld ik de stelling, dat eene oneindig voortlopende rij van getallen, waarvan elk volgend niet kleiner is dan het voorafgaande, maar die alle kleiner zijn dan zeker getal, eene limiet heeft; ik maak daarbij aannemelijk, dat het bewijs op eene theorie der irrationeele getallen moet berusten.

Zullen de behandelde stellingen werkelijk het eigendom der leerlingen worden, dan is het niet voldoende, ze te bewijzen, maar dan moeten zij ook toegepast kunnen worden. Nu is het aantal keeren, dat de leerling gelegenheid heeft, eene of meer der stellingen toe te passen, gelukkig volstrekt niet gering. Bij de beginselen der differentiaalrekening komen zij vrijwel alle te pas, sommige meer dan een keer, zelfs als men zich beperkt tot het differentieeren van veeltermen, sinus en cosinus, sommen, producten en quotienten. Maar ook in de vlakke meetkunde kan men de limietstellingen herhaaldelijk toepassen, namelijk wanneer men eené eenigszins bevredigende behandeling wil geven van de lengte van cirkelbogen, en de oppervlakte van cirkelsectoren. Ik zal dit niet behandelen, omdat ik kan verwijzen naar mijne, dezer dagen verschijnende, „Beginnelsen der Vlakke Meetkunde”.

¹⁾ Wel vindt men ze in het, op blz. 134 van deze aflevering besproken, algebraboek van SCHONS.

Zoo juist verscheen :

LEERBOEK DER VLAKKE MEETKUNDE

door Dr. B. P. HAALMEIJER

EERSTE DEEL *f* 2.10, geb. *f* 2.50

TWEEDE DEEL *f* 2.10, geb. *f* 2.50

Uit het voorbericht:

Bij de samenstelling van dit werkje heb ik het standpunt ingenomen dat de tijd is gekomen om het zwaartepunt van ons onderwijs in de planimetrie te verleggen van de vraagstukken naar de theorie. Voor zelfonderricht van beginnelingen zijn deze boekjes niet bedoeld. Met de strengheid meen ik te zijn gegaan tot een maximum voor leerlingen van 12 tot 16 jaar. Naar uiterste consequentie in zake de toepassing van een zekere mate van strengheid heb ik niet gestreefd. Soms is een enkel punt iets nader belicht, terwijl andere kwesties die daarvoor evenzeer in aanmerking komen, zijn voorbijgegaan. Wel heb ik getracht de eischen langzaam aan iets op te voeren.

Aangaande speciale onderwerpen het volgende:

De behandeling van eenige vrij lastige stellingen aangaande cirkels behoort formeel vooraf te gaan aan de eerste constructies. Men vindt deze behandeling dan ook in hoofdstuk III. Persoonlijk schipper ik hier en stel vrijwel de geheele behandeling van den cirkel uit tot na die van hoofdstuk XII.

Wat betreft het trekken en stippelen van onderdeelen in constructie-teekeningen is geen vaste regel gevolgd. Waarschijnlijk is de juiste om alles te trekken, behalve datgene wat bij het bewijs wordt toegevoegd.

Bij de behandeling van werkstukken heb ik, althans in het begin, maar stilzwijgend aangenomen dat de constructie steeds gelukt en ben er dan bij de discussie op teruggekomen. In orde is dit natuurlijk niet, maar het leek mij met het oog op de duidelijkheid goed niet te breedvoerig te zijn. Didaktische overwegingen geven steeds den doorslag. Zeer duidelijk geschiedde dit bij de invoering der verhouding van twee lijnstukken, twee hoeken, enz.

Wat betreft de limietbepaling en de toepassing hiervan bij de algemeene raaklijn-definitie en de invoering van oppervlak en omtrek van den cirkel, moet ik bekennen bij mijn onderwijs nog in het stadium van proefnemingen te verkeerren.

Aanwijzingen voor het oplossen van vraagstukken zijn niet gegeven. Het leek mij beter deze zaak aan de docenten over te laten. Enkele nummers zijn vet gedrukt, n.l. van die vraagstukken welke men vaak in de theorie behandeld vindt.

UITGAVE VAN P. NOORDHOFF TE GRONINGEN.

Zoo juist verscheen:

BEGINSELEN DER VLAKKE MEETKUNDE

EEN LEERBOEK VOOR BEGINNERS OVEREENKOMSTIG DE
HEDENDAAGSCHE INZICHTEN IN DE EUCLIDISCHE MEETKUNDE

samengesteld door J. H. SCHOOT

PRIJS f 3.90 - GEBONDEN. f 4.40

OEFENINGEN IN DE VLAKKE MEETKUNDE

in aansluiting aan de Beginselen der Vlakke Meetkunde

Prijs f 2.25

Uit het voorbericht:

Ik heb getracht in dit boek een leergang aan te bieden, die op bescheiden wijze rekening houdt, met wat in de laatste decennien op het gebied der vlakke meetkunde is tot stand gebracht. In het algemeen heb ik er naar gestreefd, de bewijzen en verdere beschouwingen zoo te geven, dat zij tot strengere betoogen kunnen worden aangevuld, maar dat het niet noodig is ze voor meergevorderden door geheel andere te vervangen. Vaak heb ik uitdrukkelijk vermeld wat aan de aanschouwing ontleend is, dit betreft vooral eigenschappen van ligging.

De theorie der evenwijdigheid heb ik behandeld volgens Euclides; zijne fraaie methode is hier te lande geheel in onbruik geraakt en nagenoeg vergeten, en mijns inziens met geen enkel voordeel, door eene hoogst gebrekkige vervangen. De congruentie is behandeld zonder gebruik te maken van het verplaatsen van figuren, het resultaat is niet in alle opzichten bevredigend. In verband met de, naar ik hoop spoedig op handen zijnde, wijzigingen van het wiskunde-onderwijs overeenkomstig de plannen der commissie-Beth, heb ik hoofdstukken opgenomen over trigonometrie en over de kegelsneden; de paragraphen na hoofdstuk VI, waarin trigonometrie wordt gebruikt, zijn met een * gemerkt. In het hoofdstuk over kegelsneden is de grootst mogelijke soberheid betracht.

In hoofdzaak geeft dit boek de behandeling, die ik reeds sedert eenige jaren den leerlingen voorzet.

Ik heb mij met kracht verzet tegen den drang, die heden ten dage door personen uit onderwijskringen, zoowel als door buitenstaanders wordt uitgeoefend, om de essentiële moeilijkheden der wiskunde weg te laten of te verdoezelen. Ik heb overal gestreefd naar exactheid en binnen redelijke grenzen ook naar strengheid van redeneering.

UITGAVE VAN P. NOORDHOFF TE GRONINGEN.