

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDAC-
TIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN

J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

MET MEDEWERKING VAN

Dr. H. J. E. BETH
DEVENTER

Dr. E. J. DIJKSTERHUIS
OISTERWIJK

Dr. G. C. GERRITS
AMSTERDAM

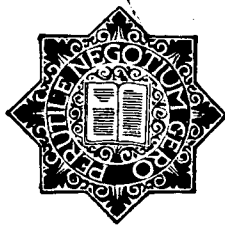
Dr. B. P. HAALMEIJER
AMSTERDAM

Dr. D. J. E. SCHREK
UTRECHT

Dr. P. DE VAERE
BRUSSEL

Dr. D. P. A. VERRIJP
ARNHEM

5e JAARGANG 1928/29, Nr. 1



P. NOORDHOFF — GRONINGEN

Prijs per Jg. van 18 vel f 6.—. Voor inteekenaars op het
Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde en Christiaan Huygens f 5.—.

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken, verschijnt in zes tweemaandelijksche afleveringen, samen 18 vel druks. Prijs per jaargang *f* 6.—. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6.—) of op „Christiaan Huygens” (*f* 10.—) zijn ingeteekend, betalen *f* 5.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Het honorarium voor geplaatste artikelen bedraagt *f* 20.— per vel.

De prijs per 25 overdrukken of gedeelten van 25 overdrukken bedraagt *f* 3,50 per vel druks *in het vel gedrukt*. Gedeelten van een vel worden als een geheel vel berekend. Worden de overdrukken buiten het vel verlangd, dan wordt voor het afzonderlijk drukken bovendien *f* 6.— per vel druks in rekening gebracht.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

I N H O U D.

	Blz.
Dr. D. P. A. VERRIJP, Over de Meetkundige Oplossing van de vergelijking $a \sin x + b \cos x = c$	1
Dr. D. P. A. VERRIJP, Nomenclatuurcommissie voor de Wiskunde	4
U. PH. LELY, Een wijze van behandeling der Logarithmen van rekenkundige getallen	5
Dr. J. G. v. D. PUTTE, Eigenschappen over de deelbaarheid	12
Prof. Dr. FRED. SCHUH, Axiomatische behandeling der Meetbare en onmeetbare verhoudingen van grootheden	14
Ingekomen boeken	47
Uit Buitenlandsche Tijdschriften	48

 De redactie heeft het genoegen in deze aflevering het portret te geven van Prof. Dr. J. A. BARRAU; zij hoopt de portretten van al onze hoogleraren den intekenaars achtereenvolgens te kunnen aanbieden.

OVER DE MEETKUNDIGE OPLOSSING VAN DE VERGELIJKING $a \sin x + b \cos x = c$

DOOR

Dr. D. P. A. VERRIJP.

De meetkundige of grafische oplossingen, die men in de leerboeken der gonio- en trigonometrie (b.v. van WIJDENES of van mij zelf) vindt, verschillen in den grond niet-veel. In de laatste jaren volg ik bij mijn onderwijs een beschouwing, die deze oplossing van een meer algemeen standpunt behandelt. Ik begin nl. met op te schrijven de vergelijking

$$a \cos(x + \alpha) + b \cos(x + \beta) + c \cos(x + \gamma) + d \cos(x + \delta) + \dots = p,$$

waarbij we ons b.v. tot vier termen kunnen beperken en herinner dan aan de beide belangrijke stellingen:

I. De projectie van een gebroken lijn op een rechte is gelijk aan de projectie van het lijnstuk, dat de uiteinden der gebroken lijn verbindt.

II. De projectie van een lijnstuk op een willekeurige rechte is gelijk aan de lengte van het lijnstuk (positieven of negatieven toestand behoorlijk in aanmerking genomen), vermenigvuldigd met den cosinus van den hoek, dien de positieve richting van het lijnstuk vormt met de positieve richting van de lijn van projectie.

Ofschoon het geen vereischte is, doen wij toch aan de algemeenheid niet te kort, indien we $a, b, c, d, \dots$ (ook, als men wil, p) alle positief nemen. Immers, mocht dit niet het geval zijn, dan kunnen we zoo'n factor toch wel positief maken; men kan toch b.v. voor $-3 \cos(x + 60^\circ)$ schrijven: $+3 \cos(x + 240^\circ)$.

Toch zou ook dit positief maken wel kunnen nagelaten worden. Ik raad het echter den leerlingen aan, met het oog op minder kans van het maken van vergissingen.

Neem nu vooreerst x bekend, dan moet de projectie OP van de gebroken lijn $OABCD$ (zie fig. 1, γ is voor variatie eens

negatief genomen) op $X^-OX^+ = p$ zijn. Daarbij zal voor positieve p die projectie op OX^+ , voor negatieve op OX^- liggen.

Is x onbekend, dan trekke men in willekeurige richting OT , maak $OA = a$, zoodat $\angle TOA = \alpha$, trek $AT' \parallel OT$, maak $AB = b$, zoodat $\angle T'AB = \beta$ enz., beschrijf op OD als middellijn een cirkel, vervolgens trekt men met O als middelpunt en de volstreckte waarde van p als straal een cirkelboog, die (laten we

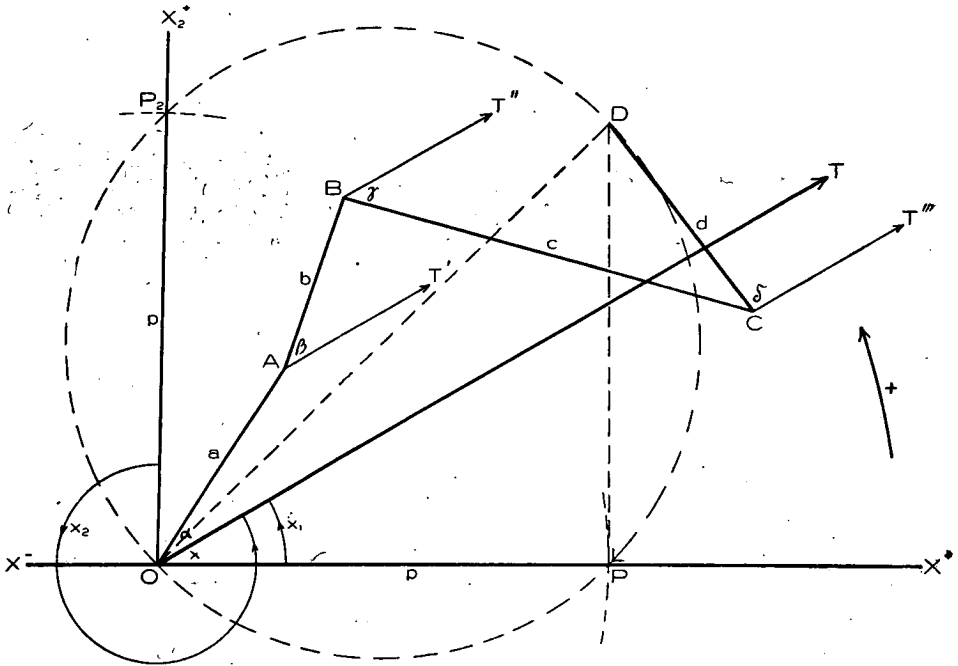


Fig. 1.

aannemen) den vorigen cirkel in $P_1(P)$ en P_2 snijdt, dan zijn de hoeken P_1OT en P_2OT ($+k \times 2\pi$, k geheel of nul) de gevraagde hoeken x_1 en x_2 , indien p positief is. Is p negatief, dan vormen de verlengden van P_1O en P_2O met OT die hoeken.

De voorwaarde der oplossing is blijkbaar:

$$(\text{proj. } OD \text{ op } OT)^2 + (\text{proj. } OD \text{ op een lijn } \perp OT)^2 \geq p^2$$

of

$$(\sum a \cos \alpha)^2 + (\sum a \sin \alpha)^2 \geq p^2.$$

Verder heeft men: $\text{tg } TOD = \frac{\sum a \sin \alpha}{\sum a \cos \alpha} = \text{tg } \varphi$, waarbij $\angle TOD = \varphi$ een hulphoek der goniometrische oplossing is.

NOMENCLATUURCOMMISSIE VOOR DE WISKUNDE.

L. S.

Op de Algemeene Bijeenkomst van Wiskunde-leeraren van 1928 is een motie aangenomen, waarin de wenschelijkheid werd geuit tot het instellen van een „Nomenclatuurcommissie”. De gezamenlijke Vereenigingen (Groepen) hebben in deze commissie aangewezen de heeren TH. B. BLOTEN (Amsterdam), P. VAN LENT (Eindhoven), J. H. SCHOGT (Amsterdam) en ondergeteekende. Verder heeft de commissie als leden geassumeerd den voorsteller der motie, den heer D. VAN DANTZIG (Rotterdam) en dr. E. J. DIJKSTERHUIS (Oisterwijk). Hoewel de commissie met haar werkzaamheden nog niet is aangevangen, zoo komt het haar voor, dat het wenschelijk is, dat reeds vóór het begin daarvan eventueele meeningen van verschillende docenten omtrent nomenclatuur of notatie aan de leden kenbaar worden gemaakt. Ondergeteekende zal daarom gaarne schriftelijk dergelijke meeningen vernemen.

Arnhem, Sept. 1928.

D. P. A. VERRIJP.

EEN WIJZE VAN BEHANDELING DER LOGARITHMEN VAN REKENKUNDIGE GETALLEN

DOOR

U. PH. LELY.

In het fraaie boek „Elementar-Mathematik von höherem Standpunkt aus” schrijft Prof. Dr. F. KLEIN, dat de behandeling der logarithmen bij het middelbare of voorbereidend hooger onderwijs zoo geschikt zou kunnen steunen op de merkwaardige eigenschap, dat $\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{x} dx = \int_{ax_1}^{ax_2} \frac{1}{x} dx$.

In het volgende worde onderzocht, hoe de behandeling zou kunnen zijn en welke voordeelen zij biedt.

We beschouwen de functie $y = \frac{1}{x}$, waarin x en y rekenkundige getallen zijn, en stellen haar grafisch voor op de gewone manier met rechthoekige coördinaatassen. De grafische voorstelling bestaat uit een tak van een gelijkzijdige hyperbool; de andere tak is niet aanwezig, daar slechts rekenkundige waarden van x en y in aanmerking komen.

De opmerking, boven vermeld, komt nu neer op de eigenschap, dat het oppervlak begrensd door een deel der krommè, door een deel der x -as en door twee ordinaten y_1 en y_2 gelijk is aan een analoog oppervlak begrensd door de ordinaten y_1' en y_2' , indien de bijbehorende abscissen x_1 , x_2 en x_1' , x_2' dezelfde verhouding hebben. Vormen toch de vier grootheden x_1 , x_1' , x_2 , x_2' een evenredigheid en is de verhouding $x_1' : x_1 = a$, dan kan men de figuur van het tweede oppervlak laten ontstaan uit de eerste door de ordinaten van de eerste figuur a malen te verkleinen; door deze bewerking ontstaat een derde oppervlak, dat a malen zoo klein is als het eerste; vervolgens wordt de nieuwe figuur met dezelfde ordinaten, echter met de bijbehorende abscissen a malen zoo groot. Zoo krijgen we het tweede oppervlak terug;

dit is blijkbaar a malen zoo groot als het derde en dientengevolge gelijk aan het eerste (zie fig. 1). Op deze eigenschap berust nu verder alles. In het volgende worde zij aangehaald als Eig. I.

We trekken nu de ordinaat bij $x=1$ en die bij $x=a$ en noemen het door die ordinaten begrensde oppervlak $O_{1,a}$. We veronderstellen $a > 1$. Het oppervlak begrensd door de ordinaten bij $x=a$ en $x=b$, waarbij $b > a$ is, noemen we $O_{a,b}$.

Voor het oppervlak $O_{1,ab}$ behoorende bij het product van a en b , hebben we de merkwaardige stelling

$$O_{1,ab} = O_{1,a} + O_{1,b} \quad \dots \dots \dots (II)$$

Immers volgens Eig. I is $O_{1,a} = O_{b,ab}$; beide leden der gelijkheid met $O_{1,b}$ vermeerderend vindt men:

$$O_{1,a} + O_{1,b} = O_{1,b} + O_{b,ab} = O_{1,ab},$$

waarmede het bewijs is geleverd (zie fig. 2).

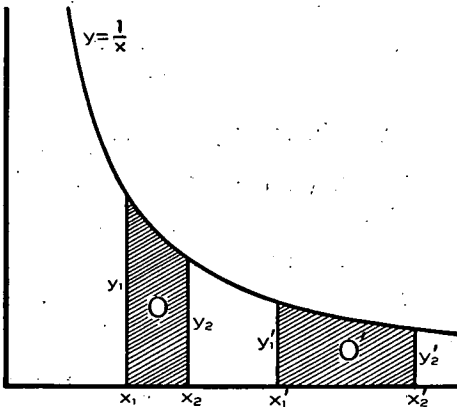


Fig. 1.

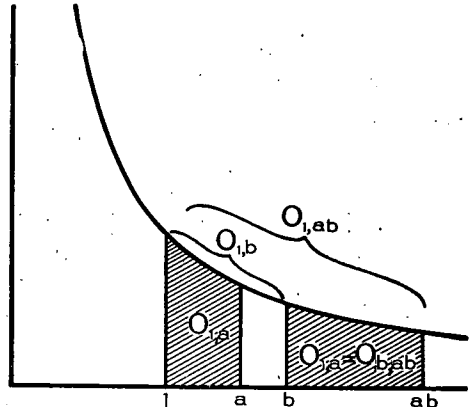


Fig. 2.

Thans kiezen we een bepaald rekenkundig getal $g > 1$, en beschouwen het bijbehorende oppervlak $O_{1,g}$ als oppervlakte-eenheid. De oppervlakken worden aangegeven met rekenkundige getallen. We definiëren nu:

Def. 1. Het oppervlak $O_{1,a}$ heet de logarithme van a met het grondtal g ; $a \geq 1$ en $g > 1$. We noteeren de logarithme met ${}_g \log a$.

De definitie definieert ${}_g \log x$ als een continue, monotoon dalende, in het geheele gebied van $x=1$ tot $x=\infty$ eenduidige functie van x , zoodat gelijke rekenkundige getallen gelijke logarithmen hebben en omgekeerd.

In het bijzonder geldt: ${}_g\log g = O_{1,g} = 1$ (III); en ook ${}_g\log 1 = O_{1,1} = 0$ (IV). Met de aangegeven notatie en definitie wordt Eig. II:

$${}_g\log a + {}_g\log b = {}_g\log ab \quad (a \geq 1, b > 1, g > 1) \text{ (II')}.$$

De Eig. II' kan niet worden volgehouden, indien of $a < 1$ en > 0 of $b \leq 1$ en > 0 of als zoowel a als b tusschen deze grenzen liggen. Dan blijkt dadelijk, dat de Eig. II' logaritmen van getallen < 1 en > 0 niet kan definiëren.

Zij bijv. $b < 1$ en $> \frac{1}{a}$. Dan is $ab > 1$, maar $< a$ dus ook $\log a > \log ab > 0$. Eig. II' zegt $\log a + \log b = \log ab$; was nu $\log b$ een rekenkundig getal, dan zou de som van twee rekenkundige getallen kleiner zijn dan elk der gesommeerde getallen, hetgeen met de axiomata der rekenkunde in strijd is.

Misschien is het echter mogelijk door verruiming van def. 1 een stelsel te vinden, waarin Eig. II' kan worden volgehouden voor getallen > 0 en < 1 , waarmede dan tevens de logaritmen dezer getallen gedefinieerd worden. We vervangen nu definitie 1 door een nieuwe:

Def. 1'. Het oppervlak $O_{1,a}$ wordt aangegeven door een *algebraisch* getal. Dit getal is *positief* als $a > 1$. Is g een bepaald rekenkundig getal > 1 , dan is het oppervlak $O_{1,g}$ behoorende bij g de positieve oppervlakte-eenheid. Het oppervlak $O_{1,a}$ behoorende bij een rekenkundig getal $a > 1$ noemen we de *logarithme van a met het grondtal g* .

Ook deze definitie definieert de logarithme van een rekenkundig getal als continue, monotone en eenduidige functie van het getal.

We definiëren nu de logarithme van een rekenkundig getal < 1 zoodanig, dat zij voldoet aan Eig. II'. Deze definitie is def. 2. De vraag is, of deze definitie in strijd is met def. 1', en ook wat de benedenste grens is van het rekenkundige getal, waarvoor zij nog de logarithme definieert. Laat c een getal zijn > 1 . Volgens Eig. II' hebben we

$${}_g\log c + {}_g\log \frac{1}{c} = {}_g\log c \cdot \frac{1}{c} = {}_g\log 1 = 0,$$

of

$${}_g\log \frac{1}{c} = 0 - {}_g\log c = -{}_g\log c. \quad (\text{V})$$

Door bij wijze van definitie Eig. II' vol te houden voor de nog niet gedefinieerde logarithmen van rekenkundige getallen < 1 , worden deze logarithmen, mede met behulp van def. 1' gedefinieerd. Zij voldoen dan aan Eig. V, waarin c een eindig rekenkundig getal is, zoodat $\frac{1}{c} > 0$; in woorden luidt Eig. V:

De logarithme van een rekenkundig getal < 1 en > 0 is het negatieve van de logarithme van het omgekeerde.

Men kan nu omgekeerd te werk gaan en de laatste eigenschap (V) als definitie stellen, en vervolgens Eig. II' bewijzen voor alle logarithmen. Maar dan is het organische weg. We houden ons dus aan def. 2, met de aanvulling, dat het rekenkundige getal > 0 moet zijn:

Def. 2': De logarithme van een rekenkundig getal > 0 en < 1 is een algebraïsch getal, zoodanig, dat zij voldoet aan Eig. II'.

Thans toonen we algemeen aan met def. 2' en Eig. V

$$s\log \frac{a}{b} = s\log a \cdot \frac{1}{b} = s\log a + s\log \frac{1}{b} = s\log a - s\log b \quad \text{VI}$$

hetgeen nu geldt voor a en $b > 0$.

Een wat andere weg kan deze zijn: Volgens Eig. I is voor $b > a$

$$O_{a,b} = O_{1,\frac{b}{a}}; \text{ of } O_{1,b} - O_{1,a} = O_{1,\frac{b}{a}} \text{ of } s\log b - s\log a = s\log \frac{b}{a}.$$

Houdt men nu bij wijze van definitie deze betrekking ook vol voor $a > b$ en definieert met de logarithmen van getallen > 1 als positieve algebraïsche getallen, dan is voor $b = 1$ in 't bijzonder $s\log 1 - s\log a = s\log \frac{1}{a}$ of $0 - s\log b = s\log \frac{1}{b}$, waarmee de negatieve logarithme eveneens gedefinieerd is.

In elk geval, de logarithmen der rekenkundige getallen van 0 tot ∞ zijn continue, monotone en eenduidige functies der getallen.

Thans zijn de machten aan de orde. Men heeft bijvoorbeeld volgens Eig. II':

$$s\log a^3 = s\log a \cdot a \cdot a = s\log a + s\log a + s\log a = 3 s\log a;$$

of in 't algemeen als n een rekenkundig geheel getal is, > 1 ,

$$s\log a^n = n s\log a, \quad \text{(VII)}$$

wat door volledige inductie kan worden bewezen.

In 't bijzonder geldt $s\log g^n = n$ (VIII), een bij 't gewone rekenen veel gebruikte betrekking.

Eigenschap VII, geldend voor een macht van a , waarbij de exponent n een geheel getal is > 1 , willen we nu ook volhouden voor de gevallen dat n een andere waarde heeft. Daarmede worden de oneigenlijke machten gedefinieerd, zooals we zien zullen. We definiëren dus:

Def. 3. De macht van een rekenkundig getal, waarvan de exponent een rekenkundig getal is, is een zoodanig getal dat aan Eig. VII voldaan is.

Wat geeft dit voor de gevallen $n=1$, $n=0$, $n=\frac{p}{q}$, waarbij $\frac{p}{q}$ een onvereenvoudigbare breuk is?

Voor $n=1$ vonden we nu volgens deze definitie

$${}_s\log a^1 = 1 \quad {}_s\log a = {}_s\log a,$$

waaruit volgt, dat aan a^1 de beteekenis van a moet worden gehecht:

$$a^1 = a. \quad \dots \quad (IX)$$

Voor $n=0$ vinden we voorts

$${}_s\log a^0 = 0 \quad {}_s\log a = 0 = {}_s\log 1$$

of

$$a^0 = 1, \quad \dots \quad (X)$$

zoodat aan a^0 de beteekenis van 1 moet worden gehecht.

Is $n=\frac{p}{q}$ dan is volgens Eig. VII en def. 3:

$${}_s\log a^{p/q} = \frac{p}{q} {}_s\log a,$$

of vervolgens beide leden der gelijkheid met q vermenigvuldigende:

$$q {}_s\log a^{p/q} = p {}_s\log a,$$

of volgens Eig. VII ${}_s\log (a^{p/q})^q = {}_s\log a^p$ of $(a^{p/q})^q = a^p$,

of

$$a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}. \quad \dots \quad (XI)$$

zoodat de oneigenlijke macht van a als wortelvorm kan worden opgevat.

Eindelijk gaan we na of de exponent beteekenis zou kunnen hebben als deze een algebraisch getal is. Daartoe definiëren we eerst de macht, waarvan de exponent een positief algebraisch getal is.

Def. 4: We verstaan onder a^{+n} , waarin $+n$ een positief getal is hetzelfde als $a^{+|n|}$,
en voorts

Def. 5: Machten van rekenkundige getallen, waarvan de exponenten negatief zijn, zijn algebraïsche grootheden, welke voldoen aan Eig. VII.

Laat nu $-m$ een negatief getal zijn dan is

$$g \log a^{-m} = -m g \log a = -g \log a^m = g \log \frac{1}{a^m}, \quad (\text{XII})$$

waaruit volgt, dat $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$.

Aldus zijn op ongedwongen wijze gebroken en negatieve exponenten en ook de exponenten 0 en 1 ingevoerd volgens eenzelfde schema. Het invoeren van onmeetbare getallen kan geen extra moeilijkheden geven; daartoe is slechts noodig irrationeele waarden voor oppervlakken toe te laten.

Ten slotte nog een betrekking om het exponentieele karakter van de logarithme voor den dag te brengen: Wat is $x = g^{\log a}$?

Volgens Eig. VII heeft men $\log x = \log g^{\log a} = \log a \cdot \log g = \log a \cdot 1 = \log a$ of $x = a$. Met andere woorden: De logarithme van a met het grondtal g is de exponent van de aan a gelijk zijnde oneigenlijke macht van g (Eig. XIII). Bij de gebruikelijke behandeling wordt van deze eigenschap uitgegaan, hier is zij het slot van het geheel.

De natuurlijke logarithmen komen nu van zelf voor den dag. De oppervlakte-eenheid is dan het vierkant met de zijden gelijk aan de lengte-eenheid. Reeksontwikkelingen voor de natuurlijke logarithmen kunnen dan ook zonder moeite worden aangegeven, en wel aanschouwelijk; dit thema, meestal voor de middelbare school een ondoorgrondelijke kost bij de gebruikelijke behandeling der logarithmen, is bij de aangegeven wijze van behandeling een gemakkelijk te begrijpen iets. De leerlingen zien iets van de perspectief der hoogere wiskunde.

Behalve het meer zich bewegen in de lijn der historische ontwikkeling door gebruik te maken van de eigenschappen van de hyperbool, en behalve ook het feit, dat de gaping tusschen de definities, bij de hoogere wiskunde in gebruik, en de bij het middelbare onderwijs gangbare geringer wordt, heeft het aan-

schouwelijke van den opzet didactisch groote waarde. Een mijner leerlingen van de III^e klasse van het gymnasium, matig voor wiskunde, riep uit: „Hoe interessant”, een meeningook door anderen bevestigd. Gebroken en negatieve exponenten waren nog niet behandeld; zonder moeite werd de invoering ervan begrepen. Er wordt dan iets gevoeld van het elegante van de methoden der algebra.

Den Haag, Mei 1928.

U. PH. LELY.

EIGENSCHAPPEN OVER DE DEELBAARHEID

DOOR

Dr. J. G. v. D. PUTTE.

§ 1. We leiden in 't volgende de bekende eigenschappen van over de deelbaarheid af, door gebruik te maken van de volgende twee eigenschappen:

I. Als men 2 getallen met eenzelfde getal vermenigvuldigt, dan wordt ook de G.G.D. met dat getal vermenigvuldigd.

II. Men kan de G.G.D. van 3 getallen bepalen, door eerst de G.G.D. van 2 van die getallen te bepalen, daarna de G.G.D. van dit getal en het 3e getal.

We stellen de G.G.D. van a en b voor door (a, b) .

De eigenschappen I en II kunnen we dan als volgt opschrijven:

$$\text{I. } (pa, pb) = p(a, b).$$

$$\text{II. } (a, b, c) = ((a, b), c) = (a, (b, c)).$$

§ 2. Als $a \times b$ deelbaar is door c en b en c zijn onderling ondeelbaar, dan is a deelbaar door c .

$$\text{Geg.: } \begin{cases} (ab, c) = c. \\ (b, c) = 1. \end{cases} \quad \text{Te bew.: } (a, c) = c.$$

Bewijs: Uit 't geg. en I volgt $(ab, ac) = a$.

Nu is:

$$(ab, ac, c) = ((ab, ac), c) = (a, c). \quad \dots \quad (1)$$

Maar ook:

$$(ab, ac, c) = (ab, (ac, c)) = (ab, c) = c \text{ volgens 't geg. } (2)$$

Uit (1) en (2) volgt dus $(a, c) = c$.

§ 3. Is c onderling ondeelbaar met a en b , dan is c ook onderling ondeelbaar met ab .

$$\text{Geg.: } (a, c) = 1 \quad \dots \quad (3). \quad \text{Te bew.: } (ab, c) = 1.$$

$$(b, c) = 1 \quad \dots \quad (4).$$

Bewijs: Uit (3) volgt $(ab, bc) = b$.

Nu is: $(ab, bc, c) = ((ab, bc), c) = (b, c) = 1$ volgens (4).
 Maar ook: $(ab, bc, c) = (ab, (bc, c)) = (ab, c)$,
 dus is $(ab, c) = 1$.

§ 4. Als c deelbaar is door a en b , terwijl a en b ond. ond. zijn, dan is c deelbaar door ab .

Geg.: $(a, c) = a$. . . (5) *Te bew.*: $(ab, c) = ab$.

$(b, c) = b$. . . (6)

$(a, b) = 1$. . . (7).

Bewijs: Uit (5), (6) en (7) volgt $(ab, bc) = ab$; $(ab, ac) = ab$ en $(ac, bc) = c$.

Nu is $(ac, bc, ab) = ((ac, bc), ab) = (c, ab)$.

Maar ook $(ac, bc, ab) = (ac, (bc, ab)) = (ac, ab) = ab$,
 dus $(c, ab) = ab$.

§ 5. De G.G.D. van a en b , is dezelfde als die van a en bc , mits c ond. ond. is met a .

Geg.: $(a, b) = p$. . . (8) *Te bew.*: $(a, bc) = p$.

$(a, c) = 1$. . . (9).

Bew.: Uit (9) volgt $(ab, bc) = b$.

Nu is $(a, ab, bc) = (a, (ab, bc)) = (a, b) = p$.

Maar ook: $(a, ab, bc) = ((a, ab), bc) = (a, bc)$, dus $(a, bc) = p$.

§ 6. Het product van twee getallen is gelijk aan het product van hun G.G.D. en hun K.G.V.

Geg.: $(a, b) = d$ en 't K.G.V. van a en b is v .

Te bew.: $a \times b = d \times v$.

Bew.: Zij $v = pa = qb$, waarbij $(p, q) = 1$.

Uit $(a, b) = d$, volgt $(av, bv) = d \times v$.

Nu is $(av, bv) = (aqb, bpa) = ab(p, q) = ab$, dus $ab = dv$.

AXIOMATISCHE BEHANDELING DER MEETBARE EN ONMEETBARE VERHOUDINGEN VAN GROOTHEDEN,

EEN TOEPASSING VAN DE THEORIE VAN HET ONMEETBARE GETAL
OP MEETKUNDIGE EN NATUURKUNDIGE GROOTHEDEN,

DOOR

Prof. Dr. FRED. SCHUH.

INLEIDING.

1. In dit geschrift onderstellen we de theorie van het positieve onmeetbare (of liever positieve reële) getal bekend, in het bijzonder de theorie van DEDEKIND. Volgens die theorie is een positief reëel getal een *snede in de positieve meetbare getallen*, d. w. z. een zoodanige verdeeling der positieve meetbare getallen in twee klassen, dat geen dier klassen leeg is en ieder getal van een dier klassen (*hooge klasse*) grooter is dan ieder getal der andere klasse (*lage klasse*). Heeft de hooge klasse geen kleinste getal en de lage klasse geen grootste getal, dan heet de snede *onmeetbaar* of *irrationaal*; ze wordt dan beschouwd als een positief *onmeetbaar* of *irrationaal getal*. Een positief meetbaar getal a wordt geïdentificeerd met twee meetbare sneden, nl. met de snede, waarbij de hooge klasse gevormd wordt door de meetbare getallen, die $> a$ zijn, en met de snede, waarbij de hooge klasse gevormd wordt door de meetbare getallen, die $\geq a$ zijn.

Met de sneden in de positieve meetbare getallen wordt in de theorie van DEDEKIND een optelling en een vermenigvuldiging gedefinieerd, benevens een relatie grooter en kleiner. Hierbij wordt aangetoond, dat deze definities op de positieve reële getallen kunnen worden overgedragen en dan aansluiten aan die voor de positieve meetbare getallen; dit laatste wil zeggen, dat de nieuwe definities, toegepast op twee meetbare getallen, tot dezelfde resultaten voeren als de oude. Aangetoond wordt dan verder, dat na de uitbreiding van het getalbegrip tot de positieve

reële getallen de bekende grondeigenschappen behouden gebleven zijn en dat nog steeds iedere aftrekking, waarbij het aftrektal grooter is dan de aftrekker, en iedere deeling mogelijk en on-dubbelzinnig is; hieruit volgt, dat men met de nieuwe getallen mag rekenen als met positief meetbare. De theorie wordt dan afgesloten met het bewijs van de stelling van de bovenste grens, welke stelling zegt, *dat iedere niet-leege naar boven begrensde verzameling van getallen een bovenste grens heeft*. Voor meerdere bijzonderheden verwijzen we naar SCHUH, Het getalbegrip, in het bijzonder het Onmeetbare getal, met toepassingen op de Algebra, de Differentiaal- en de Integraalrekening, Hoofdst. IV.

2. In de volgende Hoofdstukken bespreken we eenige algemeene eigenschappen van *grootheden*, zooals die in de meetkunde of natuurkunde (mechanica) voorkomen; als voorbeelden noemen we lengte, oppervlak, tijd, massa, hoeveelheid electriciteit. Bij wijze van axioma's kennen we aan die grootheden eigenschappen toe, waarvan de juiste beteekenis in ieder bepaald geval nog nader moet worden vastgesteld, maar waarop in een bespreking, die op allerlei soorten van grootheden van toepassing is, niet verder behoeft te worden ingegaan. Ook moet in ieder bepaald geval worden nagegaan of de axioma's, die we in het volgende aannemen, vervuld zijn (of liever te aanvaarden zijn). Is dit zoo, dan zijn ook de conclusies, die we uit de axioma's zullen trekken, voor dat geval geldig. Op het al of niet gelden der opgestelde axioma's hebben de wiskundige beschouwingen geen vat, tenzij het er om gaat die axioma's uit een ander stel axioma's af te leiden, zooals bij de meetkundige beschouwingen van n^o. 86—105. De wiskundige beschouwingen kunnen zich slechts bezig houden met het trekken van conclusies uit de axioma's en het vaststellen, dat uit de ingevoerde axioma's geen met elkaar in strijd zijnde conclusies te trekken zijn (*niet-strijdigheid der axioma's*).

In Hoofdst. I worden de axioma's opgesteld, die dienen om tot een theorie der verhoudingen van onderling meetbare grootheden te geraken, en worden uit die axioma's verschillende op grootheden betrekking hebbende stellingen afgeleid. In Hoofdst. II wordt de theorie der meetbare verhoudingen ontwikkeld, terwijl in Hoofdst. III het axioma van ARCHIMEDES en de theorie der onmeetbare verhoudingen behandeld worden. Hoofdst. IV bevat

beschouwingen over de niet-strijdigheid en onafhankelijkheid der opgestelde axioma's en over de continuïteit en volledigheid van het stelsel grootheden.

In Hoofdst. V wordt in het kort de toepassing der theorie op massa's besproken en uitvoeriger de toepassing op de meetkunde voor het geval, dat de grootheden lengten van segmenten van rechten zijn. We hebben ons hierbij op het standpunt gesteld, *dat de meetkunde op de axioma's van HILBERT wordt opgetrokken*. Uit die axioma's worden dan de door ons voor grootheden opgestelde axioma's afgeleid.

In Hoofdst. VI wordt de alleen uit historisch oogpunt belangrijke theorie van EUCLIDES (steunende op een scherpe door hem gegeven definitie van gelijkheid van twee verhoudingen) behandeld, terwijl in Hoofdst. VII getoond wordt hoe die theorie tot een, zij het ook gebrekkige, theorie van het onmeetbare getal kan voeren.

In Aanhangsel I en II wordt een zuiver arithmetische theorie van het positieve onmeetbare getal ontwikkeld, die op een anderen gedachtengang berust dan de bestaande theorieën. Het wezenlijke van die theorie is, *dat door het meer op den voorgrond stellen van de stelling van de bovenste grens de definities van optellen en vermenigvuldigen van reële getallen onafhankelijk gemaakt worden van de gekozen definitie van een reël getal*. In Aanhangsel III wordt de op de door EUCLIDES gegeven definitie steunende theorie van het onmeetbare getal aan den nieuwen gedachtengang aangepast.

Opgemerkt zij nog, dat dit geschrift als een aanvulling te beschouwen is van het boven geciteerde leerboek over het onmeetbare getal, waarin we ons uitsluitend op zuiver arithmetisch standpunt gesteld hebben, hetgeen b.v. meebracht, dat van de bekende meetkundige invoering der goniometrische functies moest worden afgezien en deze door een zuiver arithmetische behandeling dier functies moest worden vervangen.

HOOFDSTUK I.

ALGEMEENE EIGENSCHAPPEN VAN GROOTHEDEN.

3. Definitie van vergelijkbare grootheden. Heeft men een stelsel grootheden, dan noemt men die grootheden *vergelijkbaar*



SIR ISAAC NEWTON 1642-1727

P. NOORDHOFF
TE GRONINGEN

geeft uit de

WISKUNDIGE WERKEN

van de navolgende schrijvers :

Prof. Dr. J. A. Barrau

Prof. Dr. H. Bremekamp

Prof. Dr. L. E. J. Brouwer

C. A. Cikot

Dr. J. G. van den Corput

Prof. Dr. P. v. Geer

Dr. B. Gonggrijp
N. L. W. A. Gravelaar
J. van de Griend
F. M. Jaeger
P. Jansen
Dr. J. Kors
Prof. Dr. J. C. Kapteyn
J. J. van Laar
C. L. Landré
Prof. G. Mannoury
Dr. P. Molenbroek
W. A. W. Moll
H. Offerhaus Ezn.
Prof. Dr. Ch. H. van Os
Prof. Dr. A. J. v. Pesch
Prof. Dr. Jul. Petersen
Dr. O. Postma
Prof. Dr. J. G. Rutgers
Dr. G. Schaake
Prof. Dr. G. Schouten
Dr. D. J. E. Schrek
Prof. Dr. Fred. Schuh
H. Siersma
Th. Stieltjes
Prof. Dr. M. J. van Uven
H. G. A. Verkaart
H. L. Vernhout
J. Versluys
Dr. W. L. van de Vooren
Prof. Dr. Hk. de Vries
Prof. Dr. R. Weitzenböck
W. H. Wisselink
D. B. Wisselink
P. Wijdenes
P. Wijdenes & Dr. D. de Lange
Prof. Dr. J. Wolff
Prof. Dr. W. van der Woude

(ook wel gelijksoortig), als bij ieder tweetal A, B der grootheden één en slechts één der drie volgende betrekkingen geldt:

$$A = B, \quad A > B, \quad A < B. \quad (1)$$

Hierbij beteekent $A = B$ hetzelfde als $B = A$, terwijl $A > B$ hetzelfde beteekent als $B < A$. De relatie „gelijk” is dus commutatief; de relaties „grooter” en „kleiner” zijn dit echter niet.

In het bijzonder geldt $A = B$ steeds, als A en B dezelfde grootheid aanwijzen; m. a. w. $A = A$. Stellen A en B dezelfde grootheid voor, dan zeggen we ook, dat A en B identiek zijn, hetgeen we schrijven als $A \equiv B$ (of $B \equiv A$). Identiteit is dus een bijzonder geval van gelijkheid.

Welke beteekenis aan *gelijk*, *grooter* of *kleiner* moet worden gehecht, dient in ieder voorkomend geval (dus voor lengten, voor massa's, enz.) afzonderlijk te worden vastgesteld.

4. Behalve de eigenschap, die in n^o. 3 ter definieering van het begrip „vergelijkbaar” gediend heeft, kennen we aan vergelijkbare grootheden nog enkele andere eigenschappen toe, die de rol van axioma's spelen en in het volgende zullen worden opgesomd. Met behulp van de axioma's kan dan de eigenschap van n^o. 3 ten deele bewezen worden, nl. *dat de laatste twee der betrekkingen (1) niet gelijktijdig kunnen gelden*. Het volgende deel der eigenschap van n^o. 3 wordt dan als axioma aangenomen:

Axioma I. *Bij twee grootheden A en B geldt steeds minstens één der drie betrekkingen (1), terwijl $A = B$ steeds geldt, als A en B identiek zijn. Is $A = B$, dan geldt $A > B$ niet.*

5. **Algemeene grootheden.** Als axioma nemen we verder aan:

Axioma II. *Is $A = B$ en $B = C$, dan is $A = C$ (transitiviteit der gelijkheid van grootheden).*

De geldigheid van dit axioma is van zelf sprekend in het geval, dat een der beide gelijkheden $A = B$, $B = C$ identiteit beteekent.

6. De *commutativiteit* en *transitiviteit* der relatie „gelijk” stellen ons in staat het stelsel der vergelijkbare grootheden te verdeelen in *verzamelingen van gelijke grootheden*. Hierbij zijn twee grootheden gelijk of ongelijk, al naar gelang ze tot dezelfde verzameling of tot verschillende verzamelingen behooren.

Tot een verzameling van gelijke grootheden geraakt men aldus. Zij A een bepaalde grootheid. We vormen nu de *verzameling van alle grootheden B , die aan $A = B$ voldoen*; tot die

verzameling behoort ook A , wegens $A = A$. Is C een bepaalde tot die verzameling behorende grootheid, dan is $A = C$, dus ook $C = A$; is B een willekeurige grootheid der verzameling, dan is $A = B$, waaruit men, in verband met $C = A$, tot $C = B$ besluit. Omgekeerd besluit men uit $C = B$ en $A = C$, op grond van de commutativiteit en transitiviteit der gelijkheid, tot $A = B$. Hieruit blijkt, *dat de verzameling der grootheden, die bij gegeven A aan $A = B$ voldoen, dezelfde is als de verzameling der grootheden, die aan $C = B$ voldoen, waarin C een grootheid van eerstgenoemde verzameling is* (zoodat C aan $A = C$ voldoet). Dit resultaat beteekent, *dat alle grootheden der verzameling dezelfde rol spelen*; door iedere er toe behorende grootheid is de verzameling volledig aangewezen, terwijl de verzameling uit iedere er toe behorende grootheid op dezelfde wijze wordt afgeleid.

Is D een grootheid, die niet tot de uit A afgeleide verzameling behoort, dan voert D op dezelfde wijze als boven tot een verzameling. Deze verzameling heeft met de uit A afgeleide geen enkele grootheid gemeen. Is nl. E een grootheid der uit D afgeleide verzameling, dus $D = E$, dan behoort E niet tot de uit A afgeleide verzameling, daar anders ook D tot de uit A afgeleide verzameling zou behooren.

7. *De verzameling van alle grootheden, die aan een bepaalde grootheid gelijk zijn*, noemen we een **algemeene grootheid**. In tegenstelling daarmee noemen we de vroeger beschouwde grootheden ook **bijzondere grootheden**. *Een algemeene grootheid is dus een verzameling van gelijke bijzondere grootheden*. Door iedere dier bijzondere grootheden is de algemeene grootheid aangewezen. We noemen iedere dier bijzondere grootheden een **representant van de algemeene grootheid**. Spreken we in het volgende kortweg van grootheid, dan is daarmee steeds een bijzondere grootheid bedoeld.

Een bijzondere grootheid stellen we door een cursieve hoofdletter voor, een algemeene grootheid door een vette rechte hoofdletter. Is A een bijzondere grootheid, dan wijzen we de algemeene grootheid, waarvan A een representant is, door **A** aan.

8. Bij twee algemeene grootheden **A** en **B** beteekent gelijkheid, *dat A en B dezelfde representanten hebben*; m. a. w. $A = B$ beteekent, *dat de algemeene grootheden A en B geheel dezelfde zijn* (dus dezelfde verzameling van bijzondere grootheden zijn).

Bij algemeene grootheden beteekent dus gelijkheid hetzelfde als identiteit. De *transitiviteit der gelijkheid van algemeene grootheden* wordt daarmede van zelf sprekend en behoeft dus niet door een axioma te worden vastgesteld.

9. Optelbare grootheden. Als de vergelijkbare grootheden A en B aan een bepaalde voorwaarde voldoen, *zijn A en B tot één enkele grootheid te vereenigen, die de som van A en B genoemd wordt en door $A + B$ wordt voorgesteld. We noemen de grootheden A en B dan optelbaar.*

Wat onder optelbaar te verstaan is en wat in geval van optelbaarheid van A en B onder de som $A + B$ te verstaan is, moet in ieder bepaald geval (dus bij iedere soort grootheden) afzonderlijk worden vastgesteld. Zijn b.v. de grootheden lengten van lijnsegmenten (segmenten van een rechte), dan zijn twee grootheden optelbaar, *als de twee segmenten tot een zelfde rechte behooren en een eindpunt gemeen hebben, dat tusschen de beide andere eindpunten gelegen is; onder de som der lijnsegmenten is dan te verstaan het lijnsegment, dat de niet gemeenschappelijke eindpunten der beide oorspronkelijke segmenten tot eindpunten heeft; m. a. w. ligt het punt Q op een rechte tusschen de punten P en R , dan is $PQ + QR = PR$ (zie n^o. 96).* Zijn de grootheden massa's van lichamen, dan wil optelbaar zeggen, dat de twee massa's geen massadeeltje gemeen hebben; de som der beide grootheden krijgt men dan door beide lichamen tot één lichaam te vereenigen (of vereenigd te denken).

10. We stellen nu de volgende axioma's op:

Axioma III. *Zijn A en B optelbaar, dan is $A + B = B + A$ (commutativiteit der optelling van grootheden).*

Axioma IV. *Zijn A en B gegeven grootheden, dan kan men steeds de grootheid A' zoo bepalen, dat $A = A'$ is en A' en B optelbaar zijn.*

Axioma V. *Zijn A en B optelbaar en A' en B' ook, terwijl $A = A'$ en $B = B'$ is, dan is $A + B = A' + B'$.*

In het bijzonder is dus $A + B = A' + B$, als A' en B optelbaar zijn, en $A + B = A + B'$, als A en B' optelbaar zijn; in beide gevallen worden A en B optelbaar ondersteld, terwijl in het eerste geval $A = A'$ ondersteld is en in het tweede geval $B = B'$. Algemeen kan worden opgemerkt, dat, zoodra van $A + B$ gesproken wordt, dit geacht wordt de onderstelling in te sluiten, dat A en B optelbaar zijn.

11. Optelling van algemeene grootheden. De axioma's IV en V maken, *dat de optelling van optelbare grootheden op de door die grootheden gerepresenteerde algemeene grootheden kan worden overgedragen.*

Onderstel, dat **A** en **B** twee (al of niet verschillende) *vergelijkbare algemeene grootheden* zijn, waarmede natuurlijk bedoeld is, *dat de representanten van A en die van B vergelijkbaar zijn.* Is **A** een representant **A**, dan volgt uit axioma IV, *dat men de representant B van B zoo kan kiezen, dat A en B optelbaar zijn.* De som $A + B$ representeert dan een algemeene grootheid. Volgens axioma V verandert die algemeene grootheid niet, als men **A** door een andere representant **A'** van **A** en **B** door een andere representant **B'** van **B** vervangt, mits zoo, dat **A'** en **B'** optelbaar zijn; dan is nl. $A + B = A' + B'$. Hetzelfde geldt natuurlijk, als men slechts **A** door een andere representant van **A** of slechts **B** door een andere representant van **B** vervangt.

De door $A + B$ gerepresenteerde algemeene grootheid hangt dus alleen van de algemeene grootheden A en B af en niet van de keus van de representanten A en B dier algemeene grootheden.

De op de aangegeven wijze uit **A** en **B** afgeleide algemeene grootheid noemen we de **som der algemeene grootheden A en B**; deze som stellen we door $A + B$ voor. Men heeft dus dienaangaande de volgende definitie:

Zijn A en B vergelijkbare algemeene grootheden, dan is $A + B$ de algemeene grootheid, die gerepresenteerd wordt door $A + B$, waarin A een willekeurige representant van A en B een willekeurige representant van B is, mits zoo gekozen, dat A en B optelbaar zijn.

12. Uit het voorgaande volgt:

Iedere twee vergelijkbare algemeene grootheden A en B (hetzij gelijk of ongelijk) voeren door optelling tot één enkele algemeene grootheid $A + B$.

Uit axioma III volgt onmiddellijk:

Men heeft $A + B = B + A$ (commutativiteit der optelling van algemeene grootheden).

Als axioma nemen we nu verder nog aan:

Axioma VI. *Men heeft $(A + B) + C = A + (B + C)$ (associativiteit der optelling van algemeene grootheden).*

13. Uit de associativiteit en commutativiteit der optelling van algemeene grootheden volgt onmiddellijk de geldigheid voor

algemeene grootheden van de *algemeene associatieve en commutatieve eigenschap* der optelling met een willekeurig aantal termen (zie SCHUH, Theoretische-Rekenkunde of Elementaire Theoretische Rekenkunde, deel I, n^o. 50—56).

Voor $A + A$ schrijft men ook $2A$. Evenzoo is $3A = A + A + A$. Algemeener is onder nA , waarin n een natuurlijk getal en A een algemeene grootheid is, te verstaan de som van n gelijke algemeene grootheden A , hetgeen ook kan worden aangegeven door $1 \cdot A = A$ en de formule (van n op $n + 1$):

$$(n + 1)A = nA + A.$$

Uit de algemeene associatieve en commutatieve eigenschap der optelling van algemeene grootheden volgen verder de beide *distributieve eigenschappen der vermenigvuldiging van een natuurlijk getal en een algemeene grootheid*:

$$(m + n)A = mA + nA, \quad (2)$$

$$n(A + B) = nA + nB. \quad (3)$$

Door volledige inductie is (2) uit te breiden tot:

$$(n_1 + n_2 + \dots + n_p)A = n_1A + n_2A + \dots + n_pA \quad (4)$$

en (3) tot:

$$n(A_1 + A_2 + \dots + A_p) = nA_1 + nA_2 + \dots + nA_p. \quad (5)$$

Door in (4) $n_1, n_2, \dots, n_p$ alle gelijk aan n te nemen, vindt men:

$$(pn)A = p(nA). \quad (6)$$

Door in (5) $A_1, A_2, \dots, A_p$ alle gelijk aan A te nemen, vindt men:

$$n(pA) = p(nA), \quad (7)$$

een formule, die, in verband met $pn = np$, ook onmiddellijk uit (6) volgt.

Door herhaalde toepassing van (3) en (4) kan men nog andere formules afleiden, als:

$$(m + n)(A + B + C) = mA + nA + mB + nB + mC + nC.$$

De uitbreiding tot het geval, dat de eene factor van het product de som van een willekeurig aantal natuurlijke getallen is en de andere factor de som van een willekeurig aantal algemeene grootheden, ligt voor de hand.

14. Grooter en kleiner bij algemeene grootheden. We stellen de volgende axioma's op:

Axioma VII. Zijn A en B optelbare grootheden, dan is $A + B > A$,

Axioma VIII. Voldoen de vergelijkbare grootheden A en B aan $A > B$, dan kan men steeds de grootheden B' en C zoo bepalen, dat $B' = B$ en $A = B' + C$ is.

Zijn de grootheden lijnsegmenten, dan is axioma VIII niets anders dan het afpassen van het kleinste lijnsegment op het grootste (waarover nader in n^o. 157).

Axioma IX. Is $A > B$ en $B = B'$, dan is $A > B'$.

15. Onderstel, dat de grootheden A en B gegeven zijn en dat men de grootheden B' en C zoo kan bepalen, dat $B' = B$ en $A = B' + C$ is. Volgens axioma VII is dan $A > B'$, waaruit men in verband met axioma IX tot $A > B$ besluit. In verband met axioma VIII heeft men dus:

Tusschen de grootheden A en B bestaat dan en alleen dan de betrekking $A > B$, als men de grootheden B' en C zoo kan bepalen, dat $B' = B$ en $A = B' + C$ is.

16. Onderstel, dat $A > B$ en $A = A'$ is. Volgens axioma VII kan men dan B' en C zoo bepalen, dat $B' = B$ en $A = B' + C$ is. Volgens axioma II is dan $A' = B' + C$, zoodat $A' > B'$ is. In verband met axioma IX besluit men hieruit tot $A' > B$. We vinden dus:

Is $A > B$ en $A = A'$, dan is $A' > B$.

17. Uit de stelling van n^o. 16 leidt men, in verband met axioma IX af:

Is $A > B$ en geldt $A = A'$ en $B = B'$, dan is $A' > B'$.

Immers uit het onderstelde en axioma IX volgt, dat $A > B'$ is, waaruit in verband met de stelling van n^o. 16 volgt, dat $A' > B'$ is. In de hiermede bewezen stelling ligt zoowel het axioma IX als de stelling van n^o. 16 als bijzonder geval opgesloten, nl. als de gevallen $A \equiv A'$ resp. $B \equiv B'$.

18. De stelling van n^o. 17 drukt uit, dat de betrekking grooter tusschen bijzondere grootheden niet verandert, als men beide grootheden (of een van beide) door daaraan gelijke grootheden vervangt. Dit maakt, dat men de betrekking grooter van de bijzondere grootheden op de daardoor gerepresenteerde algemeene grootheden kan overdragen. Men krijgt zoo de volgende definitie:

Zijn A en B vergelijkbare algemeene grootheden; dan beteekent $A > B$, dat $A > B$ is, waarin A een representant van A is en B

een representant van B , onverschillig hoe men die representanten kiest.

19. Stellingen betreffende grooter en kleiner bij algemeene grootheden. Het axioma VII is aldus op algemeene grootheden over te dragen:

Zijn A en B vergelijkbare algemeene grootheden, dan is $A + B > A$.

Immers zijn A en B optelbare representanten van A resp. B , dan is $A + B$ een representant van $A + B$. Het gestelde volgt nu uit $A + B > A$.

20. Ook het axioma VIII is op algemeene grootheden over te dragen, aldus:

Voldoen de vergelijkbare algemeene grootheden A en B aan $A > B$, dan kan men steeds de algemeene grootheid C zoo bepalen, dat $A = B + C$ is.

Dit kan met de stelling van n^o. 19 worden samengevat tot:

Tusschen de algemeene grootheden A en B bestaat dan en alleen dan de betrekking $A > B$, als men de algemeene grootheid C zoo kan bepalen, dat $A = B + C$ is.

21. Onderstel, dat de algemeene grootheden A , B en C aan $A > B$ en $B > C$ voldoen. Volgens n^o. 20 kan men dan de algemeene grootheden D en E zoo bepalen, dat $A = B + D$ en $B = C + E$ is. Volgens axioma VI is dan:

$$A = B + D = (C + E) + D = C + (E + D),$$

waaruit men (in verband met de stelling van n^o. 19) tot $A > C$ besluit. Men heeft dus:

Voldoen de algemeene grootheden A , B en C aan $A > B$ en $B > C$, dan is $A > C$ (transitiviteit der betrekking grooter tusschen algemeene grootheden).

Uit deze stelling volgt, dat men ook uit $A > B$ en $B > C$ tot $A > C$ kan besluiten (transitiviteit der betrekking grooter tusschen bijzondere grootheden).

22. Uit het laatste deel van axioma I volgt, dat $A = B$ de betrekking $A > B$ uitsluit. Evenzoo sluiten natuurlijk $A = B$ en $A < B$ elkaar uit, daar $A = B$ ook als $B = A$ en $A < B$ ook als $B > A$ te schrijven is.

Uit de transitieve eigenschap van n^o. 21 volgt, dat ook $A > B$ en $A < B$ elkaar uitsluiten. Uit $A > B$ en $B > A$ zou nl. volgen $A > A$, in strijd met $A = A$. Men heeft dus:

Bij twee vergelijkbare algemeene grootheden A en B geldt steeds één en slechts één der betrekkingen:

$$A = B, \quad A > B, \quad A < B.$$

Dit kan natuurlijk ook voor bijzondere grootheden worden uitgesproken. Het axioma I kan dus zoo worden aangevuld, *dat ook $A > B$ en $A < B$ elkaar uitsluiten.*

23. Zijn m en n natuurlijke getallen en is $n > m$, dan kan men het natuurlijke getal p zoo bepalen, dat $n = m + p$ is. Is A een algemeene grootheid, dan is dus volgens (2):

$$nA = (m + p)A = mA + pA.$$

Volgens n^o. 19 besluit men hieruit tot $nA > mA$. Men heeft dus: *Is A een algemeene grootheid en zijn m en n natuurlijke getallen, die aan $n > m$ voldoen, dan is $nA > mA$.*

Door een redeneering uit het ongerijmde volgt hieruit, *dat men uit $nA = mA$ tot $n = m$ en uit $nA > mA$ tot $n > m$ besluiten kan.*

24. Onderstel, dat A , B en C vergelijkbare algemeene grootheden zijn en dat $A > B$ is. Men kan dan de algemeene grootheid D zoo bepalen, dat $A = B + D$ is (zie n^o. 20). Men heeft dan volgens axioma VI:

$$A + C = (B + D) + C = (D + B) + C = D + (B + C) = (B + C) + D,$$

waaruit men tot $A + C > B + C$ besluit. Men heeft dus:

Zijn A, B en C vergelijkbare algemeene grootheden en is $A > B$, dan is $A + C > B + C$.

25. Uit de stelling van n^o. 24 kan men op bekende wijze verschillende andere stellingen afleiden. Vooreerst noemen we:

Zijn A, B, C en D vergelijkbare algemeene grootheden en is $A > C$ en $B > D$, dan is $A + C > B + D$.

Men heeft nl. $A + C > B + C$ en $B + C > B + D$, dus $A + C > B + D$ (zie n^o. 21).

De laatste stelling is op voor de hand liggende wijze (door volledige inductie) tot sommen met een willekeurig aantal termen uit te breiden. Door de termen van een zelfde som alle gelijk te nemen, vindt men:

Is $A > B$ en n een natuurlijk getal, dan is $nA > nB$.

Door een redeneering uit het ongerijmde volgt hieruit:

Is n een natuurlijk getal en $nA = nB$, dan is $A = B$.

Uit $A > B$ of $A < B$ volgt nl. $nA > nB$ resp. $nA < nB$, beide in strijd met het onderstelde, zoodat $A = B$ als eenige mogelijkheid overblijft.

VAN P. WIJDENES.

UITGAVEN VAN P. NOORDHOFF TE GRONINGEN.

Alle mogelijke inlichtingen omtrent wiskundige studie, alsmede omtrent te gebruiken boeken bij alle soorten van onderwijs worden gratis verstrekt door P. Wijdenes, Amsterdam Z. Jac. Obrechtstraat 88. Tel. 27119.

GRATIS EN FRANCO

ONTVANGT IEDER VAN:

P. NOORDHOFF
TE GRONINGEN

Volledige catalogus A.

Catalogus B van schoolboeken.

" *C van studieboeken.*

" *D van leermiddelen.*

" *Versluys.*

}
Wiskunde
en Natuurkunde.

Volledige Catalogus van uitgaven over alle vakken.

Proefnummers van het

Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde,

Christiaan Huygens en Euclides.

P. WIJDENES TE AMSTERDAM Z.

JAC. OBRECHTSTRAAT 88 — TEL. 27119

Wenken en Boekenlijst Wiskunde L. O.

Het Examen KI en KV met boekenlijst;

ook alle gewenschte inlichtingen omtrent

wiskundige studie en keuze van leerboeken.

Evenzoo bewijst men uit het ongerijmde:

Is n een natuurlijk getal en $nA > nB$, dan is $A > B$.

26. Uit de stelling van n^o. 24 volgt, dat de algemeene grootheid C , genoemd in de eerste stelling van n^o. 20, door de betrekking $A = B + C$ geheel bepaald is. Had men nl. ook $A = B + C'$ en was b.v. $C > C'$, dan was $B + C > B + C'$, in strijd daarmede, dat zoowel $B + C$ als $B + C'$ aan A gelijk is. De eerste stelling van n^o. 20 kan dus als volgt worden aangevuld:

Voldoen de algemeene grootheden A en B aan $A > B$, dan kan men steeds, en op slechts één manier, de algemeene grootheid C zoo bepalen, dat $A = B + C$ is (mogelijkheid en ondubbelzinnigheid der aftrekking van een algemeene grootheid van een grootere algemeene grootheid).

De aanvulling houdt in, dat men uit $B + C = B + C'$ tot $C = C'$ besluiten kan.

HOOFDSTUK II.

MEETBARE VERHOUDINGEN VAN GROOTHEDEN.

27. **Verhouding van onderling meetbare algemeene grootheden.** Onderstel, dat de algemeene grootheden A en B voldoen aan:

$$bA = aB, \quad (8)$$

waarin a en b natuurlijke getallen zijn. Is c een natuurlijk getal, dan volgt uit (8):

$$c(bA) = c(aB),$$

waarvoor in verband met (6) geschreven kan worden:

$$(cb)A = (ca)B.$$

Hieruit blijkt, dat de betrekking (8) blijft bestaan, als men a en b beide met een zelfde natuurlijk getal vermenigvuldigt (dus als men a en b door ca resp. cb vervangt).

Is aan (8) voldaan en is c een gemeene deeler van a en b , dan kan men de natuurlijke getallen a' en b' zoo bepalen, dat $a = ca'$ en $b = cb'$ is. Volgens (6) is dan:

$$c(b'A) = c(a'B),$$

waaruit men, in verband met de voorlaatste stelling van n^o. 25, tot $b'A = a'B$ besluit. Dit beteekent, dat de betrekking (8)

blijft bestaan, als men a en b beide door een zelfde natuurlijk getal deelt.

Uit het voorgaande blijkt, dat (8) geldig blijft, als men a door a_1 en b door b_1 vervangt, mits zoo, dat $a_1 : b_1 = a : b$ is. Men kan het bewijs hiervan ook aldus inkleeden. Is $a_1 : b_1 = a : b$, dan is $a_1 b = ab_1$, dus volgens (8), in verband met (6) en (7):

$$\begin{aligned} a(b_1 A) &= (ab_1) A = (a_1 b) A = \\ &= a_1(bA) = a_1(aB) = a(a_1 B). \end{aligned}$$

Op grond van de voorlaatste stelling van n^o. 25 besluit men hieruit tot:

$$b_1 A = a_1 B. \quad (9)$$

Op soortgelijke wijze blijkt, dat men uit (8) en (9) tot $a_1 : b_1 = a : b$ kan besluiten. Uit (8) en (9) volgt nl.:

$$\begin{aligned} (a_1 b) A &= a_1(bA) = a_1(aB) = \\ &= a(a_1 B) = a(b_1 A) = (ab_1) A, \end{aligned}$$

waaruit volgt $a_1 b = ab_1$ (zie de opmerking aan het eind van n^o. 23).

Uit het voorgaande blijkt, dat, als (8) geldt, dan en alleen dan aan (9) voldaan is, als $a_1 : b_1 = a : b$ is.

28. Uit het in n^o. 27 gevondene volgt, dat het al of niet gelden van (8) (bij gegeven algemeene grootheden A en B) alleen van de waarde van het quotiënt $a : b$ afhangt en niet van de wijze, waarop de natuurlijke getallen a en b gekozen zijn (met een gegeven waarde als quotiënt) en dat aan (8) voor hoogstens één waarde van $a : b$ voldaan is. Geldt (8), dan noemt men $a : b$ de **verhouding** der algemeene grootheden A en B en schrijft dit als:

$$A : B = a : b. \quad (10)$$

Hiermede is niets anders bedoeld dan (8).

Dat er natuurlijke getallen a en b bestaan, waarvoor aan (8) voldaan is, drukt men ook uit door te zeggen, dat de algemeene grootheden A en B **onderling meetbaar** zijn.

Opgemerkt zij, dat er bij gegeven a , b en B slechts één algemeene grootheid A bestaan kan, waarvoor aan (10) voldaan is. Is nl. aan (8) voldaan en is A' een algemeene grootheid, die $> A$ of $< A$ is, dan is $bA' > bA$ resp. $< bA$ (zie de tweede stelling van n^o. 25), zoodat volgens (8) $bA' > aB$ resp. $< aB$ is en dus niet voldaan is aan $bA' = aB$. Door a , b en B is de aan (10) voldoende algemeene grootheid A dus bepaald, hetgeen nog niet zeggen wil, dat er bij willekeurig gegeven a , b

en **B** steeds een aan (10) voldoende algemeene grootheid **A** is (vergelijk n^o. 69).

29. Stelt men $a : b = v$, waarin v dus een *positief meetbaar getal* is, dan kan men voor (10) ook schrijven:

$$\mathbf{A : B = v.} \quad (11)$$

Dit schrijft men ook als:

$$\mathbf{A = vB.} \quad (12)$$

Volgens het in n^o. 28 gevondene is de aan (12) voldoende algemeene grootheid **A** door het meetbare getal v en de algemeene grootheid **B** volledig bepaald, zoodat $v\mathbf{B}$ één bepaalde algemeene grootheid voorstelt. Op de vraag of men hierin v en **B** willekeurig kan kiezen, gaan we in n^o. 67—69 nader in.

Is v een natuurlijk getal, dan is (12) met de vroegere betekenis van $v\mathbf{B}$ (zie n^o. 13) in overeenstemming. Dan is nl. $v = v : 1$, zoodat men in (8) $a = v$ en $b = 1$ kan nemen. Hierdoor gaat (8) in (12) over.

30. **Stellingen betreffende meetbare verhoudingen.** Onderstel, dat de algemeene grootheden **A** en **B** aan (11) en de algemeene grootheden **C** en **B** aan

$$\mathbf{C : B = w}$$

voldoen, waarin v en w positieve meetbare getallen zijn. Deze getallen zijn op één noemer te brengen, zoodat v als $a : b$ en w als $c : b$ te schrijven is. Men heeft dan (8) en

$$\mathbf{bC = cB.} \quad (13)$$

Is $v > w$, dan is $a > c$, dus (volgens de stelling van n^o. 23) $a\mathbf{B} > c\mathbf{B}$. In verband met (8) en (13) besluit men hieruit tot $b\mathbf{A} > b\mathbf{C}$, dus (volgens de laatste stelling van n^o. 25) tot $\mathbf{A} > \mathbf{C}$. We vinden dus:

*Dat de verhouding **A : B** groter is dan de verhouding **C : B** beteekent hetzelfde als dat $\mathbf{A} > \mathbf{C}$ is.*

Men kan dit ook zoo uitdrukken, dat $v\mathbf{B} > w\mathbf{B}$ is, als $v > w$ is, en omgekeerd (v en w meetbaar en positief). Dat men niet alleen uit $v > w$ tot $v\mathbf{B} > w\mathbf{B}$ kan besluiten, maar ook omgekeerd, blijkt door een redeneering uit het ongerijmde.

31. Onderstel weer, dat aan (8) en (13) voldaan is. Dan is:

$$\mathbf{bA + bC = aB + cB,}$$

dus volgens (2) en (3):

$$\mathbf{b(A + C) = (a + c)B.}$$

Dit is ook te schrijven als:

$$(A + C) : B = (a + c) : b. \quad (14)$$

Daar $(a + c) : b = (a : b) + (c : b)$ is, voert (14) tot:

$$(A + C) : B = (A : B) + (C : B). \quad (15)$$

Dit doet zien, dat men de verhoudingen $A : B$ en $C : B$ van onderling meetbare algemeene grootheden mag optellen volgens denzelfden regel als de bij getallen geldende.

Men kan (15), door $A = vB$, $C = wB$ te stellen, ook aldus in formule brengen:

$$vB + wB = (v + w)B,$$

waarin v en w positieve meetbare getallen zijn.

32. Grootste gemeene maat. Onder een *gemeene maat* van twee algemeene grootheden A en B verstaat men een zoodanige algemeene grootheid M , dat zoowel A als B door vermenigvuldiging van M met een natuurlijk getal ontstaat. Is

$$A = aM, \quad B = bM, \quad (16)$$

dan is volgens (7):

$$bA = b(aM) = a(bM) = aB,$$

zoodat aan (8) voldaan is. *Hebben dus A en B een gemeene maat, dan zijn A en B onderling meetbaar.*

33. Zij g de G.G.D. van a en b en

$$a = ga', \quad b = gb'. \quad (17)$$

Voor (16) kan men dan volgens (6) schrijven:

$$A = (ga')M = a'(gM), \quad B = (gb')M = b'(gM),$$

zoodat ook gM een gemeene maat van A en B is. Stellen we gM door G voor, dan is:

$$A = a'G, \quad B = b'G, \quad (18)$$

waarin a' en b' onderling ondeelbaar zijn.

Weet men omgekeerd, dat (16) en (18) gelden, en is slechts bekend, dat a' en b' onderling ondeelbaar zijn (zoodat men niet weet, dat $G = gM$ is), dan besluit men uit (16) tot (8) en uit (18) tot $b'A = a'G$. Volgens n^o. 27 is dan $a : b = a' : b'$. Daar a' en b' onderling ondeelbaar zijn, besluit men hieruit tot (17), waarin g de G.G.D. van a en b is. Uit (16) en (18) volgt dan verder:

$$a'G = A = aM = (ga')M = a'(gM).$$

Hieruit besluit men (in verband met de voorlaatste stelling van n^o. 25) tot $G = gM$. De gemeene maat G van A en B ontstaat dus door de gemeene maat M met een natuurlijk getal te vermenigvuldigen.

Is $g > 1$, dan is $gM > M$, dus $G > M$. Hieruit blijkt, dat G de grootste der gemeene maten van A en B is. Deze wordt de **grootste geméene maat** (G.G.M.) van A en B genoemd. We vinden dus:

Hebben de algemeene grootheden A en B een gemeene maat, dan hebben ze ook een grootste gemeene maat. Is die G , dan is aan (18) voldaan, waarin a' en b' onderling ondeelbare natuurlijke getallen zijn; is omgekeerd aan (18) voldaan, terwijl a' en b' onderling ondeelbaar zijn, dan is G de G.G.M. van A en B . Is M een gemeene maat van A en B , dan is er een natuurlijk getal g , waarvoor $G = gM$ is, terwijl ook omgekeerd M een gemeene maat van A en B is, als aan $G = gM$ (g een natuurlijk getal) voldaan is.

Dit laatste blijkt daaruit, dat uit (18) en $G = gM$ volgt:

$$A = (ga') M, \quad B = (gb') M.$$

34. Bewijs, dat onderling meetbare algemeene grootheden een grootste gemeene maat hebben. In n^o. 32 is gebleken, dat A en B onderling meetbaar zijn, als ze een gemeene maat hebben. We toonen nu aan, dat omgekeerd de algemeene grootheden A en B een gemeene maat hebben, als ze onderling meetbaar zijn, dus als er natuurlijke getallen a en b zijn, waarvoor aan (8) voldaan is. Daar het, zooals in n^o. 27 gebleken is, slechts op de verhouding $a : b$ aankomt, kan worden ondersteld, dat a en b onderling ondeelbaar zijn.

We nemen aan, dat $A \geq B$ is; in dat geval is $a \geq b$. Is $b = 1$, dan gaat (8) over in $A = aB$. Daar $B = 1 \cdot B$ is, is B dan een gemeene maat van A en B en wel de grootste gemeene maat, daar a en 1 onderling ondeelbaar zijn (zie de stelling van n^o. 33).

We onderstellen vervolgens, dat $b > 1$ is. In dat geval is a niet door b deelbaar, wegens de onderlinge ondeelbaarheid van a en b , zoodat dan $a > b$ is. Door a door b te deelen, vindt men:

$$a = q_1 b + r_1 \quad (1 \leq r_1 < b).$$

Hieruit volgt, in verband met (8):

$$bA = (q_1 b + r_1) B = (q_1 b) B + r_1 B, \quad (19)$$

dus $bA > (q_1b)B = b(q_1B)$, dus $A > q_1B$. Volgens de eerste stelling van n^o. 20 kan men dus de algemeene grootheid R_1 zoo bepalen, dat

$$A = q_1B + R_1$$

is. Hierdoor gaat (19) over in:

$$b(q_1B + R_1) = (q_1b)B + r_1B,$$

dus, volgens (3) en (6), in:

$$(q_1b)B + bR_1 = (q_1b)B + r_1B,$$

waaruit men, in verband met de stelling van n^o. 26, tot

$$bR_1 = r_1B \quad (20)$$

besluit. Is $r_1 = 1$, dan gaat (20) over in $bR_1 = B$, waardoor (8) wordt:

$$bA = a(bR_1) = b(aR_1),$$

Men heeft dan dus:

$$A = aR_1, \quad B = bR_1,$$

zoodat R_1 een gemeene maat van A en B is, en wel de G.G.M. wegens de onderlinge ondeelbaarheid van a en b (zie de stelling van n^o. 33).

Is $r_1 > 1$, dan is b niet door r_1 deelbaar (daar b en r_1 onderling ondeelbaar zijn). De deeling van b door r_1 levert:

$$b = q_2r_1 + r_2 \quad (1 \leq r_2 < r_1).$$

In verband met (20) heeft men dus:

$$r_1B = (q_2r_1 + r_2)R_1 = r_1(q_2R_1) + r_2R_1, \quad (21)$$

dus $r_1B > r_1(q_2R_1)$, dus $B > q_2R_1$. Men kan dus de algemeene grootheid R_2 zoo bepalen, dat

$$B = q_2R_1 + R_2$$

is, waardoor (21) voert tot:

$$r_1R_2 = r_2R_1. \quad (22)$$

Is $r_2 = 1$, dan gaat (22) over in $R_1 = r_1R_2$, waardoor (20) geeft $B = bR_2$ en (8) $A = aR_2$. In dat geval is dus R_2 een gemeene maat van A en B (en wel de G.G.M.).

Is $r_2 > 1$, dan deelen we r_1 door r_2 . Is dan:

$$r_1 = q_3r_2 + r_3 \quad (1 \leq r_3 < r_2),$$

dan vindt men uit (22):

$$r_2R_1 = (q_3r_2 + r_3)R_2 = r_2(q_3R_2) + r_3R_2, \quad (23)$$

dus $r_2 \mathbf{R}_1 > r_2 (q_3 \mathbf{R}_2)$, dus $\mathbf{R}_1 > q_3 \mathbf{R}_2$. Bepaalt men $\mathbf{R}_3$ zoo, dat

$$\mathbf{R}_1 = q_3 \mathbf{R}_2 + \mathbf{R}_3$$

is, dan wordt (23):

$$r_2 \mathbf{R}_3 = r_3 \mathbf{R}_2. \quad (24)$$

Is $r_3 = 1$, dan vindt men achtereenvolgens uit (24), (22), (20) en (8):

$$\mathbf{R}_2 = r_2 \mathbf{R}_3, \quad \mathbf{R}_1 = r_1 \mathbf{R}_3, \quad \mathbf{B} = b \mathbf{R}_3, \quad \mathbf{A} = a \mathbf{R}_3.$$

Nu is dus $\mathbf{R}_3$ een gemeene maat van $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ (en wel de G. G. M.).

Is $r_3 > 1$ en gaat men zoo door met

$$r_2 = q_4 r_3 + r_3 \quad (1 \leq r_4 < r_3),$$

enz., dan zal men eindelijk een rest 1 bereiken, daar de natuurlijke getallen r_1, r_2, r_3 , enz. voortdurend kleiner worden en twee opvolgende onderling ondeelbaar zijn. Men geraakt zoo tot een gemeene maat $\mathbf{G}$ van $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$, waarvoor aan

$$\mathbf{B} = b \mathbf{G}, \quad \mathbf{A} = a \mathbf{G} \quad (25)$$

voldaan is; wegens de onderlinge ondeelbaarheid van a en b is $\mathbf{G}$ tevens de G.G.M. van $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ (zie de stelling van n^o. 33). We vinden dus:

Zijn de algemeene grootheden $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ onderling meetbaar, dan hebben ze een gemeene maat. Voldoen $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ aan (8), waarin a en b onderling ondeelbare natuurlijke getallen zijn, dan voldoet de grootste gemeene maat $\mathbf{G}$ van $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ aan (25). Is aan (8) voldaan, terwijl a en b onderling deelbaar zijn, dan voldoet de grootste gemeene maat $\mathbf{G}$ van $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ aan (18) met.

$$a' = a : g, \quad b' = b : g,$$

waarin g de G.G.D. van a en b is (zoodat a' en b' onderling ondeelbaar zijn).

HOOFDSTUK III.

ONMEETBARE VERHOUDINGEN VAN GROOTHEDEN.

35. Axioma van Archimedes. We beschouwen nu het geval, dat $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ vergelijkbare algemeene grootheden zijn, maar voor geen enkel paar natuurlijke getallen a en b aan (8) voldaan is. De algemeene grootheden $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ worden dan **onderling onmeetbaar** genoemd. Volgens n^o. 32 hebben $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ dan geen gemeene maat.

Wegens de onderlinge onmeetbaarheid van A en B is $A = B$ uitgesloten. We nemen nu eerst het geval, *dat $A > B$ is*. Men kan dan de natuurlijke getallen a en b zoo bepalen, dat

$$bA > aB \quad (26)$$

is; daaraan is nl. o.a. voldaan, als men $a = b = 1$ neemt.

Ten einde zekerheid te krijgen, dat a en b zoo bepaald kunnen worden, dat

$$bA < aB \quad (27)$$

is, wordt het volgende axioma opgesteld:

Axioma X. *Voldoen de algemeene grootheden A en B aan $A > B$, dan kan men steeds een zoo groot natuurlijk getal n bepalen, dat*

$$nB > A \quad (28)$$

is¹⁾ (*axioma van ARCHIMEDES*).

Voldoet n aan (28), dan is door $a = n$, $b = 1$ aan (27) voldaan.

We beschouwen vervolgens het geval, *dat $A < B$ is*; dan is door $a = b = 1$ aan (27) voldaan, terwijl uit het axioma X volgt, dat a en b zoo bepaald kunnen worden, dat (26) geldt. *In ieder geval kan men dus de natuurlijke getallen a en b zoo bepalen, dat (26) geldt, en ook zoo, dat (27) geldt.*

36. Verhouding van onderling onmeetbare algemeene grootheden. Onderstel, *dat aan (26) voldaan is en dat a_1 en b_1 natuurlijke getallen zijn, waarvoor $a_1 : b_1 \leq a : b$ is, dus:*

$$ab_1 \geq a_1b.$$

Uit (26) volgt dan:

$$b(b_1A) = b_1(bA) > b_1(aB) = (ab_1)B \geq (a_1b)B = b(a_1B),$$

dus $b(b_1A) > b(a_1B)$. Hieruit volgt:

$$b_1A > a_1B. \quad (29)$$

Aan (26) blijft dus voldaan, als men a door a_1 en b door b_1 vervangt. In het bijzonder geldt (29), als $a_1 : b_1 = a : b$ is. Hieruit blijkt, *dat het al of niet gelden van (26) alleen van de waarde van het meetbare getal $a : b$ afhangt* (en niet van a en b afzon-

¹⁾ Dit geldt natuurlijk ook, als $A \leq B$ is, maar behoeft dan niet door een axioma te worden vastgesteld. Voor $A \leq B$ is b.v. door $n = 2$ aan (28) voldaan. Ook behoeft het axioma slechts te worden uitgesproken voor het geval, dat A en B onderling onmeetbaar zijn; geldt nl. (8), dan is aan (28) voldaan, als $n > a : b$ is,

LOSSE BANDEN voor den afgeloopen
jaargang verkrijgbaar bij den Uitgever
P. NOORDHOFF te GRONINGEN à f1.25.

Ook losse banden verkrijgbaar voor den 3den Jaargang van
Bijvoegsel à f 1.25.

Wie heeft ze nog liggen en wil ze wel kwijt? Bericht
verzocht met opgave van den verlangden prijs aan
P. WIJDENES, Jac. Obrechtstraat 88
Amsterdam Zuid.

- I. Mittheilungen für die Mitglieder der Hamburgischen Gesellschaft zur Verbreitung der mathematischen Wissenschaft, nos. 1—26, autographie, Hamburg, 1873—1880.
- II. Oeffenschool der Mathematische Wetenschappen, Amsterdam, Deel 1, 2 st., 1770.
- III. Wiskundige Verhandelingen van het Genootschap te Amsterdam, Deel 1, no. 1, 1817.
- IV. Mengelwerk van uitgeleezene en andere wis- en natuurkunnidige verhandelingen, Amsterdam, Deel 1—2, 1796, 1816.
- V. De Beoefenaar der Wiskunde, Tijdschrift voor reken-, stellen meetkunde, Schoonhoven, Deelen 1—6, 1865—1870; alleen 4, 5 en 6 zijn ook voldoende.
- VI. Wiskunstig Mengelwerk in eene aaneenschakeling van uitgeleezene voorstellen, met derzelve ontbindingen, Deel 1—2, 1798, 1802.
- VII. Wiskundige Oeffeningen, 2 deelen, 1806, 1809.
- VIII. Archief voor Wiskunde. Maandschrift voor allen, die zich op de hoogere gedeelten toeleggen, Oostburg, Deel 1—3, 1867—1869.
- IX. Der gemeinnützige mathematische Liebhaber, Hamburg, 4 Teile, 1767—1769.
- X. Verslagen van het verhandelde op de Wetenschappelijke vergaderingen van het Wiskundig Genootschap, 1842—1852, Amsterdam, 1856.
- XI. Magazijn voor de Rekenkunst, Breda, Deel 1—7, 1828—1835.
- XII. Tijdschrift voor Wis- en Natuurkunde, Amsterdam, 1852.
- XIII. Tijdschrift voor Wis-, Natuur-, en Werktuigkunde, Deel 1—6, Amsterdam, 1860—65.

XIV. Tijdschrift ter bevordering der Mathematische Wetenschappen, Deel 1—6, Purmerend, 1823—28.

XV. Bijdragen tot Beoefening der Zuivere Wiskunde, Deel 1—5, Purmerend, Zaltbommel, 1829—1833.

XVI. Mathematische Liefhebberijen, Purmerend, Deel 9—17, 1861—1869.

XVII. Tijdschrift voor Vormleer, Rekenkunde en de Beginselen der Wiskunde. Groningen, Deel 1—4, 1878—1882.

derlijk). Uit het gelden van (29), als (26) geldt en $a_1 : b_1 < a : b$ is, blijkt verder, dat (26) geldig blijft, als men het meetbare getal $a : b$ door een kleiner positief meetbaar getal vervangt.

Evenzoo hangt natuurlijk het al of niet gelden van (27) alleen van de waarde van $a : b$ af, terwijl (27) (zoo geldig) geldig blijft, als men $a : b$ door een grooter meetbaar getal vervangt.

37. We beschouwen nu de verzameling V der positieve meetbare getallen $a : b$, waarvoor aan (26) voldaan is. Volgens het in n^o. 35 gevondene is er een positief meetbaar getal c , dat tot V behoort, en een positief meetbaar getal d , dat niet tot V behoort. Een meetbaar getal $> d$ behoort dan evenmin tot V , zooals in n^o. 36 gebleken is. De verzameling V is dus niet leeg en naar boven begrensd, zoodat ze volgens een bekende stelling (zie SCHUH, Het getalbegrip, in het bijzonder het Onmeetbare getal, § 111 en 155) een bovenste grens heeft; deze noemen we v . Daar de getallen van V positief en $\leq v$ zijn, is v een positief getal.

Het getal v is door de algemeene grootheden A en B volledig bepaald. We noemen nu v de *verhouding van A tot B* en schrijven dit als

$$A : B = v, \quad (30)$$

of ook als $A = vB$. Men heeft dus de volgende definitie:

Met (30) is bedoeld, dat v de bovenste grens is van de verzameling der getallen $a : b$, waarin a en b natuurlijke getallen zijn, waarvoor aan (26) voldaan is.

38. De in n^o. 37 van de verhouding $A : B$ gegeven definitie is ook van toepassing, als A en B onderling meetbaar zijn. Is nl. aan (8) voldaan, dan voldoen de natuurlijke getallen a' en b' aan

$$b'A > a'B, \quad (31)$$

als $a' : b' < a : b$ is, blijktens

$$b(b'A) = b'(bA) = b'(aB) = (ab')B > (a'b)B = b(a'B).$$

Evenzoo leidt men uit (8) af, dat

$$b'A < a'B,$$

is, als $a' : b' > a : b$ is. De verzameling der getallen $a' : b'$, waarvoor aan (31) voldaan is, is dus dezelfde als die der positieve meetbare getallen, die $< a : b$ zijn. Die verzameling heeft dus $a : b$ als bovenste grens. De definitie van n^o. 37 voert dus, als A en B onderling meetbaar zijn, tot de formule (10), die in n^o. 28 ter definieering van de verhouding $A : B$ gediend heeft.

39. Onmeetbaarheid der verhouding van onderling onmeetbare algemeene grootheden. We toonen eerst de volgende stelling aan:

Zijn a en b natuurlijke getallen, die aan (26) voldoen, dan kan men steeds de natuurlijke getallen a_1 en b_1 zoo bepalen, dat

$$a_1 : b_1 > a : b \quad (32)$$

is en aan (29) voldaan is.

Volgens (26) en de eerste stelling van n^o. 20 kan men de algemeene grootheid **C** zoo bepalen, dat

$$bA = aB + C \quad (33)$$

is. Volgens axioma X kan men het natuurlijke getal n zoo bepalen, dat

$$nC > B \quad (34)$$

is. Uit (33) en (34) volgt dan:

$$\begin{aligned} (nb) A &= n(bA) = n(aB + C) = n(aB) + nC = \\ &= (na) B + nC > (na) B + B = (na + 1) B. \end{aligned}$$

Neemt men nu $a_1 = na + 1$ en $b_1 = nb$ (waarmede aan (32) voldaan is), dan is dus aan (29) voldaan.

Men heeft natuurlijk ook:

Zijn a en b natuurlijke getallen, die aan (27) voldoen, dan kan men steeds de natuurlijke getallen a_1 en b_1 zoo bepalen, dat voldaan is aan:

$$a_1 : b_1 < a : b, \quad b_1 A < a_1 B. \quad (35)$$

40. De eerste stelling van n^o. 39, die uitdrukt, dat de in n^o. 37 beschouwde verzameling *V* geen grootste getal heeft, geldt (blijkens het bewijs) ook, als **A** en **B** onderling meetbaar zijn. Voor dat geval is echter het in n^o. 39 gegeven bewijs niet noodig. Is dan nl. v de verhouding **A** : **B** (zoodat v meetbaar is), dan is aan (26) voldaan, als $a : b < v$ is (zie n^o. 38). Men heeft nu slechts a_1 en b_1 zoo te nemen, dat $a : b < a_1 : b_1 < v$ is, om te bereiken, dat aan (32) en (29) voldaan is.

Op soortgelijke wijze kan men de tweede stelling van n^o. 39 aantoonen voor het geval, dat **A** en **B** onderling meetbaar zijn.

41. Uit de stellingen van n^o. 39 kan men afleiden, dat de verhouding **A** : **B** een onmeetbaar getal is, als **A** en **B** onderling onmeetbaar zijn.

Onderstel, dat de in n^o. 37 gedefinieerde verhouding v der onderling onmeetbare algemeene grootheden **A** en **B** meetbaar

is; voor ν kan men dan schrijven $a : b$. Daar (8) wegens de onderlinge onmeetbaarheid van **A** en **B** is uitgesloten, geldt (26) of (27).

Onderstel eerst, dat (26) geldt. Men kan dan de natuurlijke getallen a_1 en b_1 zoo bepalen, dat aan (29) en (32) voldaan is. Wegens (29) is $a_1 : b_1$ een getal der verzameling V van n^0 . 37. Volgens (32) is $a_1 : b_1$ dan een getal van V , dat grooter is dan de bovenste grens $a : b$ van V , hetgeen in strijd is met de definitie van bovenste grens.

Vervolgens onderstellen we, dat (27) geldt. Men kan dan a_1 en b_1 zoo bepalen, dat aan (35) voldaan is. Daar dan $a_1 : b_1$ kleiner is dan de bovenste grens $a : b$ van V , is er (volgens de definitie van bovenste grens) een getal $a_2 : b_2$ van V , dat $> a_1 : b_1$ is. Volgens het in n^0 . 36 gevondene *behoort een getal, dat kleiner is dan een getal van V , eveneens tot V* . Volgens $a_1 : b_1 < a_2 : b_2$ is dus $a_1 : b_1$ een getal van V , zoodat aan (29) voldaan is. Dit is echter in strijd met de tweede ongelijkheid (35).

In ieder geval voert dus de onderstelling $\nu = a : b$ tot een ongerijmdheid, zoodat we vinden:

De verhouding van twee onderling onmeetbare algemeene groot-heden is een onmeetbaar getal.

Men kan dit ook zoo formuleeren, *dat uit de meetbaarheid der verhouding $A : B$ de onderlinge meetbaarheid van **A** en **B** volgt*. Dit doet, in verband met het in n^0 . 32 en 34 gevondene, zien, *dat bij twee algemeene grootheden het onderling meetbaar zijn, de aanwezigheid van een gemeene maat en het meetbaar zijn der verhouding op hetzelfde neerkomen*.

42. Zij ν de onmeetbare verhouding der onderling onmeetbare algemeene grootheden **A** en **B**. Is $a : b > \nu$, dan is $a : b$ geen getal van de verzameling V van n^0 . 37, zoodat niet aan (26), dus aan (27) voldaan is (daar (8) wegens de onderlinge onmeetbaarheid uitgesloten is) Is $a : b < \nu$, dan heeft V een getal, dat $> a : b$ is, zoodat $a : b$ eveneens een getal van V is en dus aan (26) voldaan is (zie n^0 . 36). Dat aan (27) voldaan is voor $a : b > \nu$ en aan (26) voor $a : b < \nu$, geldt blijkens het in n^0 . 38 gevondene ook, als ν meetbaar is (dus als **A** en **B** onderling meetbaar zijn); in dat geval geldt (8), als $a : b = \nu$ is. Zoowel in geval van onderlinge onmeetbaarheid als in dat van onderlinge meetbaarheid heeft men dus:

Is v de verhouding der algemeene grootheden A en B , dan voldoen de natuurlijke getallen a en b aan (8), (26) of (27), al naargelang $a:b=v$, $a:b < v$ of $a:b > v$ is. Het eerste is alleen mogelijk, als A en B onderling meetbaar zijn.

Dit doet zien, dat de in n^0 . 37 beschouwde verzameling V gevormd wordt door de positieve meetbare getallen, die $< v$ zijn.

Voor $a=b=1$ gaat (26) in $A > B$ en (27) in $A < B$ over. In de stelling ligt dus opgesloten, dat $A > B$ of $A < B$ is, al naargelang $v > 1$ of $v < 1$ is.

43. Verband met de theorie van het onmeetbare getal volgens Dedekind. In n^0 . 37 is de verhouding $A:B$ gedefinieerd als de *bovenste grens van een bepaalde verzameling van meetbare getallen*. We hebben dit gedaan om de behandeling der verhouding van algemeene grootheden onafhankelijk te maken van een bepaalde theorie van het onmeetbare getal; de *stelling van de bovenste grens*, waarop we ons in n^0 . 37 beroepen hebben, komt nl. in iedere theorie van het onmeetbare getal voor (als sluitsteen).

Men kan echter ook aansluiting zoeken aan een bepaalde theorie van het onmeetbare getal en dan komt de theorie van DEDEKIND in de eerste plaats in aanmerking. We kunnen de positieve meetbare getallen $a:b$ in twee klassen verdeelen, die der getallen, waarvoor aan (26) voldaan is (*lage klasse*), en die der getallen, waarvoor aan (27) voldaan is (*hooge klasse*). Er is hoogstens één positief meetbaar getal $a:b$ niet ingedeeld, nl. dat, waarvoor aan (8) voldaan is; dit getal (dat alleen aanwezig is, als A en B onderling meetbaar zijn) kan naar willekeur in de lage of in de hooge klasse worden ondergebracht.

Volgens n^0 . 35 is geen der beide klassen leeg, terwijl uit het in n^0 . 36 gevondene volgt, dat ieder positief meetbaar getal, dat kleiner is dan een getal van de lage klasse, eveneens tot de lage klasse behoort. De bovengenoemde indeeling der positieve meetbare getallen is dus een *snede van DEDEKIND*, dus een positief reëel getal volgens de theorie van DEDEKIND. Stellen we dit door v voor, dan wordt v ook de *verhouding der algemeene grootheden A en B* genoemd. Dit is met de in n^0 . 37 gegeven definitie van verhouding in overeenstemming, daar het door de snede van DEDEKIND voorgestelde reële getal de bovenste grens van de getallen der lage klasse is.

44. Zijn **A** en **B** onderling meetbaar en is door de natuurlijke getallen a en b aan (8) voldaan, dan wordt de lage klasse gevormd door de positieve meetbare getallen, die $a : b$ zijn, en de hooge klasse door de meetbare getallen, die $a : b$ zijn, behoudens dat het getal $a : b$ zelf tot een der beide klassen gerekend wordt. De snede van DEDEKIND is dan dus aan het meetbare getal $a : b$ gelijk, zoodat nu $a : b$ de verhouding **A : B** is. Dit is in overeenstemming met de in n^o. 28 van verhouding gegeven definitie.

45. *Dat de verhouding **A : B** (dus de in n^o. 44 gedefinieerde snede van DEDEKIND) onmeetbaar is, als **A** en **B** onderling onmeetbaar zijn*, volgt weer uit de stellingen van n^o. 39. Daar nu niet aan (8) kan worden voldaan, zijn door (26) en (27) alle positieve meetbare getallen $a : b$ in twee klassen ondergebracht. Uit de eerste stelling van n^o. 39 blijkt, *dat er bij ieder getal van de lage klasse een grooter getal is aan te wijzen, dat ook tot de lage klasse behoort*, terwijl uit de tweede stelling van n^o. 39 volgt, *dat er voor ieder getal van de hooge klasse een kleiner getal bestaat, dat eveneens tot de hooge klasse behoort*. Dit kan ook zoo worden uitgedrukt, *dat de lage klasse geen grootste getal en de hooge klasse geen kleinste getal heeft*, hetgeen niets anders is dan de voorwaarde voor onmeetbaarheid van de snede van DEDEKIND.

46. **Eigenschappen van verhoudingen van algemeene grootheden.** Is v de verhouding der algemeene grootheden **A** en **B**, dan voldoen de natuurlijke getallen a en b aan (26) of aan (27), al naar gelang $a : b < v$ of $a : b > v$ is (zie de stelling van n^o. 42). Men kan dit ook zoo uitdrukken, dat aan (26) of aan (27) voldaan is, al naar gelang $b : a > 1 : v$ of $b : a < 1 : v$ is. Bijgevolg is $1 : v$ de bovenste grens van de verzameling der getallen $b : a$, waarvoor aan (27) voldaan is.

Volgens de definitie van n^o. 37 is ook de verhouding **B : A** de bovenste grens van de verzameling der getallen $b : a$, die aan (27) voldoen. Die verhouding is dus $1 : v$, zoodat we vinden:

*Zijn **A** en **B** vergelijkbare algemeene grootheden, dan zijn de verhoudingen **A : B** en **B : A** elkaars reciproke waarde.*

In formule luidt dit:

$$(\mathbf{A} : \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{B} : \mathbf{A}) = 1.$$

Ook kan men de stelling aldus uitspreken:

Is $A = vB$, dan is $B = \frac{1}{v}A$.

Zijn A en B onderling meetbaar, dan volgt de stelling ook onmiddellijk uit de in n^o. 28 gegeven definitie, in verband met

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1.$$

47. Stelt men zich op het standpunt van n^o. 43, waarbij de verhouding $A : B$ als een snede van DEDEKIND gedefinieerd wordt, dan wordt de stelling van n^o. 46 bewezen door op te merken, dat een overgang van $A : B$ op $B : A$ daarop neerkomt, dat (van hoogstens één getal afgezien) de getallen der lage klasse vervangen worden door de reciproke waarden van de getallen der hoge klasse en de getallen der hoge klasse door de reciproke waarden van de getallen der lage klasse. Dit nu is niets anders dan de wijze, waarop in de theorie van DEDEKIND uit een snede een andere snede wordt afgeleid, die gelijk is aan de reciproke waarde der oorspronkelijke snede.

48. Volgens de stellingen van n^o. 25 en de formule (7) besluit men (als n een natuurlijk getal is) uit (26) tot:

$$b(nA) > a(nB) \quad (36)$$

en omgekeerd. Uit (26) volgt nl.:

$$b(nA) = n(bA) > n(aB) = a(nB),$$

terwijl uit (36) volgt:

$$n(bA) = b(nA) > a(nB) = n(aB),$$

waaruit men tot (26) besluit. In verband met de in n^o. 37 of 43 gegeven definitie van verhouding heeft men dus:

Is n een natuurlijk getal, dan zijn de verhoudingen $A : B$ en $(nA) : (nB)$ gelijk. Men kan dit ook aldus uitdrukken:

Is $A = vB$, dan is $nA = v(nB)$ en omgekeerd, waarin n een natuurlijk getal is.

Dit geeft de formule:

$$n(vB) = v(nB). \quad (37)$$

49. Zij $A : B = v$ en $C : B = w$. Voldoen de natuurlijke getallen d en e aan $d : e < v + w$, dan is $d : e$ te schrijven als de som van een positief meetbaar getal, dat $< v$ is, en een positief

meetbaar getal, dat $< w$ is; die meetbare getallen zijn dan op één noemer b te brengen en dus als $a:b$ en $c:b$ te schrijven. Men heeft dan:

$$\frac{d}{e} = \frac{a}{b} + \frac{c}{b}, \quad \frac{a}{b} < v, \quad \frac{c}{b} < w.$$

Volgens de stelling van n^o. 42 is dan:

$$bA > aB, \quad bC > cB;$$

in verband met de eerste stelling van n^o. 25 volgt hieruit:

$$b(A + C) = bA + bC > aB + cB = (a + c)B,$$

dus $b(A + C) > (a + c)B$, dus wegens $(a + c):b = d:e$:

$$e(A + C) > dB. \quad (38)$$

Op geheel soortgelijke wijze besluit men uit $d:e > v + w$ tot:

$$e(A + C) < dB.$$

Hieruit blijkt, dat $v + w$ de bovenste grens is der getallen $d:e$, waardoor aan (38) voldaan is, zoodat $v + w$ de verhouding $(A + C):B$ is. We vinden dus:

Zijn A, B en C vergelijkbare algemeene grootheden, dan is:

$$(A + C):B = (A:B) + (C:B).$$

We laten het aan den lezer over het bewijs te herhalen voor het geval, dat de verhoudingen als sneden van DEDEKIND gedefinieerd worden.

50. De stelling van n^o. 49 is ook aldus te formuleeren:

Is $A = vB$ en $C = wB$, dan is $A + C = (v + w)B$.

Dit is aldus in formule te brengen:

$$vB + wB = (v + w)B, \quad (39)$$

hetgeen een uitbreiding is van (2) tot willekeurige positieve reële getallen.

Op voor de hand liggende wijze is (39) tot een som met een willekeurig aantal termen uit te breiden, aldus:

$$v_1B + v_2B + \dots + v_nB = (v_1 + v_2 + \dots + v_n)B,$$

waarin $v_1, v_2, \dots, v_n$ positieve reële getallen zijn. Door $v_1, v_2, \dots, v_n$ alle gelijk te nemen, wordt dit:

$$n(vB) = (nv)B. \quad (40)$$

In verband met (37) volgt uit (40) nog:

$$v(nB) = (nv)B. \quad (41)$$

In deze formules is n een natuurlijk getal en v een positief reëel getal.

51. Zijn B en D onderling meetbaar en is

$$dB = bD,$$

waarin b en d natuurlijke getallen zijn, dan kan de stelling van n^o. 49 dienen om de som der verhoudingen $A : B$ en $C : D$ als één enkele verhouding te schrijven. In verband met de stelling van n^o. 48 is dan nl.:

$$\begin{aligned}(A : B) + (C : D) &= (dA : dB) + (bC : bD) = \\ &= (dA : dB) + (bC : dB) = (dA + bC) : dB.\end{aligned}$$

52. Uit de stelling van n^o. 49 leidt men af:

Is $A > C$, dan is $A : B > C : B$ en omgekeerd.

Is nl. $A > C$, dan kan men voor A schrijven $C + D$ (zie n^o. 20), zoodat

$$A : B = (C + D) : B = (C : B) + (D : B)$$

is. Hieruit volgt, dat $A : B > C : B$ is.

Is omgekeerd $A : B > C : B$, dan besluit men uit het ongerijmde tot $A > C$. Uit $A \leq C$ zou nl. volgen $A : B \leq C : B$.

53. Uit de stelling van n^o. 52 volgt verder:

Is $A : B = C : B$ dan is $A = C$.

Was nl. $A > C$ of $A < C$, dan zou daaruit, in verband met de stelling van n^o. 52 volgen, dat $A : B > C : B$ resp. $A : B < C : B$ was.

De stelling doet zien, dat de algemeene grootheid A door de algemeene grootheid B en de waarde der verhouding $A : B$ volledig bepaald is. Dit beteekent, dat voor twee verschillende algemeene grootheden A en A' niet aan $A = vB$ en $A' = vB$ voldaan kan zijn, dus dat vB één bepaalde algemeene grootheid voorstelt. Met het voorgaande is echter niet bedoeld, dat er bij een willekeurig gekozen algemeene grootheid B en een willekeurig gekozen positief reëel getal v steeds een algemeene grootheid A bestaat, waarvoor $A : B = v$ is (nader hierover in n^o. 67 en 68).

In verband met de stelling van n^o. 46 blijkt verder, dat er bij een gegeven algemeene grootheid A en een gegeven positief reëel getal v hoogstens een algemeene grootheid B bestaat, waarvoor $A : B = v$ is. Immers de laatste betrekking is ook als $B : A = 1 : v$ te schrijven.

54. Verdere eigenschappen van verhoudingen van algemeene grootheden. Zij

$$A : B = v, \quad C : D = v. \quad (42)$$

Zijn a en b twee natuurlijke getallen, die aan $a : b < v$ voldoen, dan is:

$$bA > aB, \quad bC > aD,$$

dus:

$$b(A + C) = bA + bC > aB + aD = a(B + D),$$

dus:

$$b(A + C) > a(B + D). \quad (43)$$

Evenzoo besluit men uit $a : b > v$ tot:

$$b(A + C) < a(B + D).$$

De natuurlijke getallen a en b , waarvoor aan (43) voldaan is, zijn dus dezelfde als die, waarvoor $a : b < v$ is, waaruit men besluit tot:

$$(A + C) : (B + D) = v. \quad (44)$$

We vinden dus:

Zijn de verhoudingen $A : B$ en $C : D$ gelijk, dan zijn die ook gelijk aan de verhouding $(A + C) : (B + D)$.

55. Voor (42) kan men schrijven:

$$A = vB, \quad C = vD$$

en voor (44):

$$A + C = v(B + D).$$

Dit geeft de formule:

$$vB + vD = v(B + D), \quad (45)$$

hetgeen een uitbreiding is van (3) tot een willekeurig positief reëel getal. *De formules (39) en (45) zijn de beide distributieve eigenschappen der vermenigvuldiging van een algemeene grootheid met een positief reëel getal.*

De formule (45) is door volledige inductie uit te breiden tot

$$vB_1 + vB_2 + \dots + vB_n = v(B_1 + B_2 + \dots + B_n).$$

Door $B_1, B_2, \dots, B_n$ alle gelijk te nemen, vindt men de formule (37) terug.

56. Zij

$$A : B = v, \quad B : C = w. \quad (46)$$

Voldoen de natuurlijke getallen d en e aan $d : e < vw$, dan is $d : e$ te schrijven als het product van een positief meetbaar getal, dat $< v$ is, en een positief meetbaar getal, dat $< w$ is; die twee meetbare getallen zijn als $a : b$ en $b' : c$ te schrijven. Men heeft dan:

$$\frac{d}{e} = \frac{a}{b} \frac{b'}{c} = \frac{ab'}{bc}, \quad \frac{a}{b} < v, \quad \frac{b'}{c} < w,$$

Volgens (46) is dan (in verband met de stelling van n^o. 42):

$$bA > aB, \quad cB > b'C,$$

waaruit in verband met de tweede stelling van n^o. 25 volgt:

$$(bc)A = c(bA) > c(aB) = a(cB) > a(b'C) = (ab')C,$$

dus $(bc)A > (ab')C$, dus:

$$eA > dC. \quad (47)$$

Op soortgelijke wijze besluit men uit $d : e > vw$ tot:

$$eA < dC.$$

Bijgevolg is vw de bovenste grens der getallen $d : e$, waarvoor aan (47) voldaan is, zoodat

$$A : C = vw \quad (48)$$

is. Men heeft dus:

Zijn A, B en C vergelijkbare algemeene grootheden, dan is:

$$(A : B) \cdot (B : C) = A : C. \quad (49)$$

De stelling van n^o. 46 ligt hierin als een bijzonder geval opgesloten. Voor $A = C$ gaat nl. het tweede lid van (49) in $A : A$, d.i. in 1 over.

57. Voor (46) en (48) kan men schrijven:

$$A = vB, \quad B = wC, \quad A = (vw)C.$$

De stelling van n^o. 56 kan dus ook aldus in formule worden gebracht:

$$v(wC) = (vw)C, \quad (50)$$

waarin v en w willekeurige positieve reële getallen zijn.

De vroeger gevonden formules (40) en (41) liggen in (50) als bijzonder geval opgesloten, nl. (40) als het geval, dat in (50) v een natuurlijk getal is, en (41) als het geval, dat w een natuurlijk getal is.

De formule (50) is te beschouwen als de *associatieve eigenschap der vermenigvuldiging van een algemeene grootheid met een positief reëel getal*, voor het geval, dat twee der drie factoren reële getallen zijn en de derde factor een algemeene grootheid is.

58. Zijn B en D onderling meetbaar, dan kan de stelling van n^o. 56 dienen om het product der verhoudingen $A : B$ en $D : C$ als één verhouding te schrijven. Zijn nl. b en d natuurlijke

getallen, waarvoor $dB = bD$ is, dan is volgens de stelling van n^o. 48:

$$(A : B) \cdot (D : C) = (dA : dB) \cdot (bD : bC) = \\ = (dA : dB) \cdot (dB : bC) = dA : bC.$$

59. De stelling van n^o. 56 voert tot de volgende formule:

$$vA : vB = A : B, \quad (51)$$

die een uitbreiding is van de stelling van n^o. 48 tot het geval, dat n door een willekeurig positief reëel getal v wordt vervangen. De geldigheid van (51) blijkt daaruit, dat (51), door $A : B = w$ te stellen (waarvoor $A = wB$ wordt), overgaat in $v(wB) : vB = w$, dus in:

$$v(wB) = w(vB), \quad (52)$$

hetgeen een onmiddellijk uitvloeisel is van (50).

De formule (51) voert tot:

$$(A : B) \cdot C = (C : B) \cdot A. \quad (53)$$

Door $A = vB$, $C = wB$ te stellen, gaat (53) nl. over in $vC = wA$, dus in de formule (52), die uit (50) is voortgevloeid.

Dat (53) niets anders is dan (52) of (51), blijkt ook daaruit, dat (53) tengevolge van $C = wB$ overgaat in $(A : B)(wB) = wA$, dus in $wA : wB = A : B$; omgekeerd gaat dit, door $w = C : B$ en $wB = C$ te stellen, in (53) over.

60. De stelling van n^o. 56 kan ook aldus in formule worden gebracht:

$$v(B : C) = vB : C. \quad (54)$$

Door nl. $A : B = v$ te stellen, waardoor $A = vB$ wordt, gaat (49) in (54) over; hiermede is bewezen, dat (49) geldt, als (54) geldt. Door omgekeerd in (54) $vB = A$ te stellen, waardoor $v = A : B$ wordt, gaat (54) in (49) over; hiermede is dan bewezen, dat (54) geldt, als (49) geldt.

61. De stelling van n^o. 56 voert verder nog tot de formules:

$$(A : B)(C : D) = (A : D)(C : B), \quad (55)$$

$$vA : wB = \frac{v}{w}(A : B). \quad (56)$$

Het bewijs hiervan laten we aan den lezer over. Opgemerkt zij, dat (51) en (54) in (56) liggen opgesloten, nl. als de gevallen $v = w$ resp. $w = 1$.

Ook volgt uit de stelling van n^o. 56 nog:

Is $A : B = C : D$, dan is ook $A : C = B : D$.

Ook hiervan laten we het bewijs aan den lezer over (zie n^o. 66, waar de stellingen van dit nummer op eenvoudiger wijze bewezen worden).

62. Eenheid en maatgetallen. Heeft men een stelsel vergelijkbare algemeene grootheden, dan kan men één dier algemeene grootheden als *eenheid* aannemen; zij deze *E*. Heeft men nu:

$$A : E = \alpha,$$

dan wordt α het *maatgetal* der algemeene grootheid *A* genoemd.

Volgens het in n^o. 53 gevondene is de algemeene grootheid *A* door haar maatgetal α volledig bepaald, waarbij natuurlijk ondersteld is, dat de eenheid *E* bekend is. Volgens het aan het eind van n^o. 42 opgemerkte is $\alpha > 1$ of $\alpha < 1$, al naar gelang $A > E$ of $A < E$ is.

Volgens n^o. 37 wordt de algemeene grootheid met maatgetal α door αE voorgesteld.

Opgemerkt zij, dat men het maatgetal α ook kan toekennen aan iedere bijzondere grootheid, die de algemeene grootheid *A* representeert.

63. Volgens de stelling van n^o. 56 heeft men:

$$(A : E) \cdot (E : B) = A : B,$$

waarvoor volgens de stelling van n^o. 46 ook geschreven kan worden:

$$(A : E) : (B : E) = A : B. \quad (57)$$

Zijn α en β de maatgetallen van *A* resp. *B* met *E* als eenheid, dan gaat (57) over in:

$$A : B = \alpha : \beta.$$

In woorden luidt dit:

De verhouding van twee algemeene grootheden is gelijk aan het quotiënt van de maatgetallen dier algemeene grootheden.

Hierin ligt opgesloten, dat de verhouding der maatgetallen van twee vergelijkbare algemeene grootheden onafhankelijk is van de keus der eenheid.

64. Zij α het maatgetal der algemeene grootheid *A* met *E* als eenheid en α' het maatgetal van *A* met *E'* als eenheid. Volgens (57) heeft men dan:

$$(E : A) : (E' : A) = E : E'. \quad (58)$$

Volgens de stelling van n^o. 46 is:

$$E : A = 1 : \alpha, \quad E' : A = 1 : \alpha',$$

waardoor (58) overgaat in:

$$\alpha' : \alpha = E : E'. \quad (59)$$

Is ε het maatgetal van E' met E als eenheid en ε' het maatgetal van E met E' als eenheid, dan is:

$$\varepsilon = E' : E, \quad \varepsilon' = E : E', \quad \varepsilon\varepsilon' = 1.$$

Voor (59) kan men dus schrijven:

$$\alpha' = \varepsilon' \alpha = \frac{\alpha}{\varepsilon}.$$

In woorden luidt dit:

Vervangt men de eenheid E door de eenheid E' , dan worden alle maatgetallen met eenzelfde positief reëel getal vermenigvuldigd. Dit getal is het maatgetal van E met E' als eenheid en ook de reciproke waarde van het maatgetal van E' met E als eenheid.

Bij vervanging van de eenheid E door de eenheid E' worden alle maatgetallen vergroot of verkleind, al naar gelang $E' < E$ of $E' > E$ is. In het eerste geval is nl. $\varepsilon' > 1$, in het tweede geval $\varepsilon' < 1$.

65. Uit de stelling van n^o. 49 volgt onmiddellijk:

Het maatgetal van de som van twee algemeene grootheden is gelijk aan de som van de maatgetallen dier grootheden.

In formule luidt dit:

$$\nu E + w E = (\nu + w) E, \quad (60)$$

waarin E de eenheid voorstelt. De formule (60) is niets anders dan (39), als men daarin B door E vervangt.

Uit de laatste stelling volgt verder:

Van twee verschillende vergelijkbare algemeene grootheden heeft de grootste het grootste maatgetal.

Dit is weer niets anders dan de stelling van n^o. 52, als men daarin B door de eenheid E vervangt.

66. Met behulp van maatgetallen kan men verschillende formules betreffende verhoudingen van algemeene grootheden met groot gemak bewijzen. Daartoe vervangt men iedere in die formule optredende algemeene grootheid door de met het bijbehorende maatgetal vermenigvuldigde eenheid, waarbij een verhouding van twee algemeene grootheden in die der maatgetallen overgaat (zie n^o. 63). Voor de herleiding kan men dan nog van de formule (60) en de formule

$$\nu (wE) = (\nu w) E = w (\nu E)$$

gebruik maken.

Als voorbeeld nemen we eerst de formule (53), die met maatgetallen geschreven luidt:

$$(\alpha : \beta) \cdot (\gamma E) = (\gamma : \beta) \cdot (\alpha E);$$

voor het eerste lid is te schrijven $\left(\frac{\alpha}{\beta} \gamma\right) E$, voor het tweede lid $\left(\frac{\gamma}{\beta} \alpha\right) E$, waaruit de gelijkheid van beide leden blijkt.

Als tweede voorbeeld nemen we de formule (55), die daarbij overgaat in:

$$(\alpha : \beta) (\gamma : \delta) = (\alpha : \delta) (\gamma : \beta),$$

welke laatste betrekking tusschen getallen klaarblijkelijk juist is, daar beide leden gelijk zijn aan $\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$.

Als derde voorbeeld nemen we (56), waarvoor geschreven kan worden:

$$v(\alpha E) : w(\beta E) = \frac{v}{w} (\alpha : \beta) = \frac{v\alpha}{w\beta};$$

voor het eerste lid kan geschreven worden $(v\alpha) E : (w\beta) E$, dus $(v\alpha) : (w\beta)$, zoodat men weer een juiste betrekking tusschen getallen krijgt.

De juistheid der laatste stelling van n^o. 61 volgt daaruit, dat $\alpha : \beta = \gamma : \delta$ ook te schrijven is als $\alpha : \gamma = \beta : \delta$. Op geheel dezelfde wijze toont men aan, dat uit $A : B > C : D$ volgt $A : C > B : D$ en omgekeerd.

Als een voorbeeld, waarbij (60) toegepast wordt, nemen we:

Is $A : B = C : D$, dan is $(A + C) : (B + D) = A : B$ en omgekeerd.

Het eerste lid der tweede evenredigheid is $(\alpha E + \gamma E) : (\beta E + \delta E)$, waarvoor te schrijven is $(\alpha + \gamma) E : (\beta + \delta) E$, dus $(\alpha + \gamma) : (\beta + \delta)$. De beide in de stelling genoemde evenredigheden zijn dus te schrijven als $\alpha : \beta = \gamma : \delta$ en $(\alpha + \gamma) : (\beta + \delta) = \alpha : \beta$, waarvan inderdaad de eene een gevolg is van de andere.

Zooals deze voorbeelden doen zien, worden de verschillende eigenschappen op eenvoudige wijze tot de overeenkomstige eigenschappen betreffende reële getallen teruggebracht.

(Het vervolg van dit artikel verschijnt in Christiaan Huygens.)

INGEKOMEN BOEKEN.

P. WIJDENES	Beknopte Algebra II	4e druk	gec. f	1,70
"	Antwoorden op idem	2e druk	-	0,60
"	Beknopte Meetkunde I	5e druk	gec.	1,70
W. H. WISSELINK	Vraagst. Meetkunde I	21e druk	-	0,50
P. WIJDENES	Algebra v. M.U.L.O. II B	8e druk	geb.	2,25
"	Rekenboek v. M.U.L.O. I	5e druk	gec.	1,60
"	Meetkunde v. M U.L.O. I	10e druk	geb.	1,40
"	idem	II 5e druk	"	1,50
"	Meetkunde voor het Nijverheids- onderwijs		"	1,95
"	Algebra voor idem		gec.	1,50
H. J. VANDER PLOEG	Rekenen voor idem		"	1,30
Dr. FRED. SCHUH en Dr. J. G. RUTGERS,	Compendium der Hoogere Wiskunde IV		geb.	15,50
Dr. FRED. SCHUH,	Supplement 1927 op het tweede deel van de vraagstukken over differentiaal- en integraalrekening en over analytische en beschrijvende meetkunde			0,75
Dr. P. MOLENBROEK en Drs. J. MULDER,	Leerboek der Natuurkunde II		gec.	5,75
BROMBACHER en NAUTA,	Natuurkunde (Mechanica en 't belangrijkste over vloeistoffen, gassen en warmte)		"	2,—
Dr. G. C. GERRITS,	Het onderwijs in de natuur- kunde aan de H. B. S. (overdruk uit „Euclides”)			0,40
Dr. J. G. RUTGERS,	Inleiding tot de Analytische Meetkunde, I, Het platte vlak		geb.	6,50
W. LIETZMANN,	Aus der Mathematik der Alten			RM 1,80

(Van eenige dezer werken volgt bespreking in de volgende aflevering).

UIT BUITENLANDSCHE TIJDSCHRIFTEN.

In *The Mathematics Teacher*, XXI, 2 (February 1928) schrijft Vera Sanford over Extraneous Details:

„It has been the writer's experience that these verbal details have a greater appeal to immature pupils than to older ones. Yet any generalization of this sort must be discounted by the popularity of Raymons Weeks' Boy's Own Arithmetic. Consider the following cases, for example:

„On the Manakin Road lives a Dog who barks for 40 minutes whenever someone goes by at night. What is the smallest number of passers-by that will keep him barking all night? Allow $10\frac{1}{2}$ hours.”

„Mrs. Superbià MacManus, age unknown, having little to do, joined the Browning Club of MacIvorsville. On her way to attend the second fortnightly meeting for December she slipped and fell in front of the well known Tonsorial Parlors of Lonnie Frazell, and had to return home for repairs. She was 43 minutes late in arriving at the meeting. During every $1\frac{1}{3}$ minutes of the time she was late, one-sixteenth of her character disappeared. How much remained?”

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDAC-
TIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN

J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES



4e JAARGANG 1927/28

P. NOORDHOFF — GRONINGEN

Dezer dagen verschijnt:

Beknopte Driehoeksmeting

door

P. WIJDENES

4e druk

Prijs gec. f 2.25

Dezer dagen verschijnt de tweede gewijzigde druk van:

HANDELSREKENEN

door

A. A. D. BOUWHOF en J. C. LAGERWERFF

Prijs f 2.90

UIT HET VOORBERICHT

De welwillende en opbouwende critiek hebben het ons mogelijk gemaakt, verschillende veranderingen aan te brengen, die naar wij hopen, even zoo vele verbeteringen zullen zijn.

Zoo is o. m. het hoofdstuk „metaalhandel” gesplitst in „goud en zilver” zoodat desgewenscht de zilverhandel niet behandeld behoeft te worden.

In verband met de plaats gevonden stabilisaties is het hoofdstuk „muntwezen” bijgewerkt.

Hoewel het o. i. practisch van weinig waarde is, hebben vraagst. der laatste praktijkexamens ons aanleiding gegeven het hoofdstuk „effecten” uit te breiden met het onderdeel: „invloed van de loopende rente op den koers”.

UITGAVEN VAN P. NOORDHOFF TE GRONINGEN

STUDIEBOEKEN VOOR WISKUNDE L.O.

P. WIJDENES, **Lagere Algebra**, Deel I — 2e druk gebonden f5.50; deel II — 2e druk gebonden f8.50. Antwoorden en Uitwerkingen I f2.—, II f2.—. Aanvulling bij de Uitwerkingen van deel II f0.40.

P. WIJDENES, **Leerboek der Goniometrie en Trigonometrie** 3e druk — gebonden f4.75. Antwoorden en Uitwerkingen f2.—.

Dr. P. MOLENBROEK, **Leerboek der Vlakke Meetkunde** 6e druk, bewerkt door P. Wijdenes. Gebonden f6.50.

Dr. P. MOLENBROEK, **Leerboek der Stereometrie** 7e verbeterde druk. Gebonden f5.—. Uitwerkingen 2e druk f2.25.

H. G. A. VERKAART, **Gids voor het Examen Wiskunde L.O.** 2e vermeerderde en verbeterde druk f3.90, gebonden, f4.50.

H. G. A. VERKAART **Schriftelijke Examens Wiskunde L.O.** 1921 — 1926, met de uitvoerige en volledige Uitwerkingen f1.40.

J. VERSLUYS, **Tafel H** — Groote tafel. Geb. f2.50.
Abonnement op het

Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde, onder redactie van
H. G. A. VERKAART en P. WIJDENES.
6 tweemaandelijksche afl., geïllustreerd f6.—.

UITGAVEN VAN P. NOORDHOFF TE GRONINGEN
Postgiro 6593

Vraag P. Wijdenes, Amsterdam (Z), Jac. Obrechtstraat 88 om volledige inlichtingen omtrent wiskunde L.O., K I en KV en om voorlichting bij de keuze van studieboeken en van schoolboeken bij alle soorten van onderwijs.