

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDAC-
TIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN

J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

MET MEDEWERKING VAN

Dr. H. J. E. BETH
DEVENTER

Dr. E. J. DIJKSTERHUIS
OISTERWIJK

Dr. G. C. GERRITS
AMSTERDAM

Dr. B. P. HAALMEIJER
AMSTERDAM

Dr. D. J. E. SCHREK
UTRECHT

Dr. P. DE VAERE
BRUSSEL

Dr. D. P. A. VERRIJP
ARNHEM

4e JAARGANG 1927/28, Nr. 6



P. NOORDHOFF — GRONINGEN

Prijs per Jg. van 18 vel f 6.—. Voor intekenaars op het
Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde en Christiaan Huygens f 5.—.

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken, verschijnt in zes tweemaandelijksche afleveringen, samen 18 vel druks. Prijs per jaargang *f* 6.—. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6.—) of op „Christiaan Huygens” (*f* 10.—) zijn ingeteekend, betalen *f* 5.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Het honorarium voor geplaatste artikelen bedraagt *f* 20.— per vel.

De prijs per 25 overdrukken of gedeelten van 25 overdrukken bedraagt *f* 3,50 per vel druks *in het vel gedrukt*. Gedeelten van een vel worden als een geheel vel berekend. Worden de overdrukken buiten het vel verlangd, dan wordt voor het afzonderlijk drukken bovendien *f* 6.— per vel druks in rekening gebracht.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

I N H O U D.

	Blz.
F. SCHUH, Naschrift op het naschrift van den Heer WIJDENES . . .	241
CH. M. VAN DEVENTER, Plato's bekendheid met irrationeele verhoudingen . . .	242
E. J. DIJKSTERHUIS, De historische behandelingswijze van de axiomata der mechanica van Newton	245
G. C. GERRITS, Het Onderwijs in de Natuurkunde aan de Hoogere Burgerschool	256
Boekbespreking	269
Ir. O. H. STUIVER c.i., Over den vorm $\frac{0}{0}$ in de Algebra	274
Inhoud van den vierden jaargang	278

 De redactie heeft het genoegen in deze aflevering het portret te geven van Prof. Dr. FRED. SCHUH; zij hoopt de portretten van al onze hoogleeraren den intekenaars achtereenvolgens te kunnen aanbieden.

NASCHRIFT OP HET NASCHRIFT VAN DEN HEER WIJDENES.

Ik geloof, dat de Heer Wijdenes en ik het geheel eens zijn. Er bestaat voor het M. O. inderdaad slechts één methode om een stel lineaire vergelijkingen op te lossen, die der gelijkwaardige stelsels, maar toch wordt het wel in leerboeken zoo voorgesteld, dat er verschillende methoden zijn, die dan allerlei namen krijgen. Ik heb willen te kennen geven, dat die, als oplossingsmethoden gepresenteerd, moeten worden verworpen, al hebben ze dan ook eenige waarde voor het omvormen van een stelsel tot een gelijkwaardig stelsel. Ik heb in mijn artikel aangegeven dit te doen door een onbekende uit een der vergelijkingen op te lossen en in de overige vergelijkingen te substitueeren. Daaraan heeft men genoeg. Natuurlijk is het wel goed er op te wijzen, dat het soms voordeelig is, ter vermindering van breuken, de vergelijking, waarin gesubstitueerd wordt, eerst met een zeker constant getal te vermenigvuldigen, maar om aan zulk een kleinigheid den naam te geven van de methode van dit of dat lijkt mij overdreven; daardoor wordt in het oog der leerlingen een kleinigheid tot iets zeer belangrijks gemaakt. Stelt men het zoo voor, dat een onbekende x uit de eene vergelijking wordt opgelost en in een andere gesubstitueerd, dan komt de gelijkwaardigheid veel duidelijker uit, doordat men de vergelijking, waaruit x is opgelost, ook in het nieuwe stelsel opneemt (zoodat men de gesubstitueerde uitdrukking weer door x kan vervangen en zoo terug kan gaan naar het oorspronkelijke stelsel). Het zou m. i. niets hinderen, zoo de leerlingen geen andere methoden kenden om van het eene stelsel tot het andere te geraken. Doet men de methode van het met bepaalde getallen vermenigvuldigen en optellen aan enkele getallenvoorbeelden voor, dan doen de leerlingen dat wel na en zien ze wel, dat het eigenlijk hetzelfde is als uit de eene vergelijking oplossen en in de andere substitueeren. En doen ze het niet na, maar volgen ze steeds den weg van het oplossen en substitueeren (die toch niet noemenswaard langer is), dan hindert het nog niets. Ik blijf er dus bij, dat die andere methoden (die, zooals de Heer Wijdenes terecht zegt, moeten beschouwd worden als de methoden om tot een gelijkwaardig stelsel te geraken, maar toch vaak als oplossingsmethoden worden gepresenteerd) vrijwel waardeloos zijn. Dat „vrijwel” geeft aan, dat er nu en dan wel een klein voordeeltje in gelegen kan zijn van den door mij in mijn artikel geschetsten weg af te wijken.

F. Schuh.

PLATO'S BEKENDHEID MET IRRATIONEELE VERHOUDINGEN

DOOR

Ch. M. VAN DEVENTER.

In PLATO's geschriften heeft men vier plaatsen aangewezen ¹⁾ als getuigen van zijn bekendheid met *irrationeele* verhoudingen. Van die vier toonen er twee die bekendheid maar terloops (*Politeia*, VIII, 546 B—C; *Hippias Major*, 303C); uit de derde, *Theaetetus*, 147D—148B, spreekt echter een bijzondere aandacht, en dat is voor de geschiedenis der wiskunde gelukkig, want het vierde getuigstuk is niet zonder bezwaar aan de andere te hechten.

Over dit vierde (*Leges*, VII, 819D—820D) gaat de volgende korte beschouwing.

In EVA SACHS' *Die Fünf Platonischen Körper* ²⁾ p. 169 vlgg., vindt men dit brok vertaald en uitvoerig behandeld, waarbij de schrijfster rekening houdt met C. RITTER's *Commentar zu den Gesetzen* en H. VOGT ³⁾ Ik voor mij wijk van EVA SACHS af in opvatting van de termen *metreta* en *ametreta*, (820D), die voor haar *rationeel* en *irrationeel* beteekenen, voor mij echter *meetbaar* en *onmeetbaar* in den meer algemeenen zin, door SACHS' beschouwing zelve voor den geheelen passus aangewezen. Zoodat, naar mijn meening, PLATO den passus afsluit met de opmerking: „het is ook een vraag, hoe de aard is der verhouding van *meetbare* grootheden onderling en *onmeetbare* grootheden onderling.” Men zou ARISTO-

¹⁾ HEINRICH VOGT, Die Entwicklungsgeschichte des Irrationellen nach Plato und anderen Quellen des 4. Jahrhunderts. — Bibliotheca Mathematica (Z. f. Gesch. d. math. W.) 3e Folge, X. Bd. (1909—1910), blz. 97—155, in het bijzonder bldz. 98.

²⁾ Philologische Untersuchungen, 24es Heft. Berlin, Weidmannsche Buchh., 1917.

³⁾ Verg. noot 1. — A. E. TAYLOR, *A Commentary on Plato's Timaeus*, (1928), p. 156, ziet ook in de *Epinomis*, 990 d. e., bekendheid met irrationeele verhoudingen aangewezen.

TELES' eerste hoofdstuk van *Metaphysika*, boek X, als een antwoord op het eerste deel der vraag kunnen opvatten.

Inderdaad lijkt de geheele passus mij te handelen over *twee* soorten van meetbaarheid of onmeetbaarheid, waarvan de eerste de *irrationeele* verhoudingen raakt, en de tweede de onmeetbaarheid van *ongelijksoortige* grootheden. Over de eerste nu valt later wat te zeggen, over de tweede brengt EVA SACHS, in samenwerking met C. RITTER, een merkwaardig inzicht aan, dat ik eerst bespreken wil.

PLATO schijnt nl., naar een eersten blik op zijn woorden (820A slot—820B begin) de logische strengheid zoo zeer te willen handhaven, dat hij het als een fout beschouwt om de breedte en de lengte van een lichaam onderling te meten, en lengte en breedte met diepte: de afmetingen zouden, als onderling ongelijksoortige grootheden, onderling onmeetbaar zijn ¹⁾. Dit ultra-logicisme nu behoeft men echter niet aan te nemen, zoo men met SACHS en RITTER gelooft, dat de termen *breedte* en *diepte*, in zeker verband voorkomend, bij PLATO ook kunnen beteekenen breedte *hebbend*, diepte *hebbend*, zoodat breedte dan staat voor *vlak* en diepte voor *lichaam*. Gaat men hierin mee met SACHS en RITTER, dan maakt PLATO zich warm over een fout der leeken, die een *vlak* in grootte willen beoordeelen naar de grootte van den *omtrek*, en een lichaam naar oppervlakte, en aldus *ongelijksoortige* grootheden onderling meten wilden.

Werd die fout dan door leeken gemaakt? Ja, zij werd gemaakt, en zeker niet door minwaardige leeken alleen. Want de geweldige THUCYDIDES taxeert (VI, 1, 2) de *grootte* van Sicilië naar den *tijd van omvaren*, en die daad kwam in de antieke wereld zelf als fout tot een zekere vermaardheid. Ook groote eerbied voor PLATO gedooft ons te gelooven, dat hij zelf in zijn jongen tijd óók vervallen is in een fout, die men wel een *oer-fout* noemen kan, en daarom met dubbele kracht tegen die fout waarschuwt.

Aanvaardt men de schoone onderstelling van RITTER en SACHS, dan is het grootste deel van den passus bevredigend opgehelderd, maar op eene wijze, die niets voor bekendheid met het *irrationeele* getuigt.

¹⁾ Aristoteles, *Metaph.* X 1, schijnt naar eersten blik hetzelfde te bedoelen.

Evenwel heeft, zooals ik zei, de passus nog een ander brok, waarin men *wel* voeling met het *irrationeele* kan ontwaren.

De Atheensche spreker stelt eerst het bestaan van lengte, breedte en diepte vast, en vraagt dan aan den medespreker KLEINIAS of die *allen* onderling meetbaar zijn, en wel lengte met lengte, en breedte met breedte, enz. Zeer goed, antwoordt KLEINIAS. En de Athener vraagt dan weer:

„Maar als sommige van hen noch zeer goed, noch matig goed kunnen gemeten worden, doch een deel wel en een ander deel niet, terwijl gij meent dat zij *allen* kunnen gemeten worden, — hoe staat het dan met u ten opzichte van deze zaken?” Klaarblijkelijk zeer slecht, antwoordt KLEINIAS.

Aldus een zakelijk getrouwe vertaling van den tekst, en de lezer zal wel begrijpen, waar het aan hapert: er staat iets *verwards*; de bedoeling, die men meent te zien doorschijnen, is niet zuiver uitgedrukt. Als de meetbaarheid in *sommige* gevallen op geen wijze bestaat, kan men niet als nadere bepaling laten volgen, dat zij er soms wel, soms niet is, en dat doet PLATO toch.

Een zeer voorzichtig man zou geneigd zijn om dit brok geheel buiten beschouwing te laten. Het is echter niet ongeoorloofd om hier, zooals meermalen bij PLATO, een *losse zegging* te onderstellen; een zegging, die niet onnauwkeurig is door *slordigheid*, doch door de behoefte om een langen zin korter te maken, om zekere herhalingen uit te sparen. En wanneer men die *losse zegging* aanvaardt, wordt de bedoeling:

„Maar als de meetbaarheid niet in *alle* gevallen, met veel of met weinig moeite, kan optreden, doch in sommige gevallen wel, in andere niet, terwijl gij meent dat zij voor *alle* gevallen bestaat, — hoe enz.”

Laat men deze opvatting toe, dan kan men in dat brok aanwijzing op irrationeele verhoudingen zien, in welken zin men de woorden lengte en breedte ook verstaat.

En zoo zou de passus der *Leges* ten slotte ook getuigstuk voor PLATO's bekendheid met het *irrationeele* zijn. Maar, zooals men ziet, een *gaaf* getuigstuk is hij niet, en daarom dan ook is de passus van den *Theaetetus* dubbel welkom ¹⁾.

CH. M. VAN DEVENTER.

¹⁾ Het is mij een voldoening te kunnen mededeelen, dat Dr. E. J. Dijksterhuis het in hoofdzaak met deze mededeeling eens is.

DE HISTORISCHE BEHANDELINGSWIJZE VAN DE AXIOMATA DER MECHANICA VAN NEWTON.¹⁾

In het *Leerboek der Theoretische Mechanica* van J. H. Schogt worden de axiomata van de Newtonsche Mechanica niet langer, zooals vroeger gebruikelijk was, in meer of minder nauwe aansluiting aan Newton's *Principia* ingevoerd, maar volgens de meer moderne opvatting, die het gebruik van het woord kracht in de axiomata zelve vermijdt en dus alleen spreekt over de versnellingen, die stoffelijke punten onder elkaars invloed of, liever, in elkaars tegenwoordigheid verkrijgen. Het voordeel van deze methode is, dat ze zich beperkt tot het geven van een kinematische beschrijving van de te bestudeeren bewegingsverschijnselen en dat ze daardoor zich onthoudt van het wekken van de illusie, als zouden die verschijnselen door de invoering van een hypothetische kracht als „oorzaak van een verandering in bewegingstoestand” tevens dynamisch worden verklaard. Men kan nu de vraag stellen, of dit voordeel niet wordt opgeheven door het didactische bezwaar, dat de formuleering van de axiomata veel abstracter wordt, dan wanneer men daarin van de vooraf aangebrachte begrippen kracht en massa gebruik maakt. Dit bezwaar bestaat echter alleen, indien en voorzover men meent, dat een onzuivere redeneering in het onderwijs menigmaal de voorkeur verdient boven een zuivere, een meening, die zooals bekend mag worden ondersteld, ons huidige onderwijs in wis- en natuurkunde in hoogere mate beheerscht, dan met haar juistheidsgehalte in overeenstemming is. Het leerboek der Mechanica van J. H. Schogt is echter geheel op het tegenovergestelde beginsel gebouwd; de schrijver is van meening, dat van leerlingen eener

¹⁾ Dit artikel bevat de eenigszins uitgewerkte voordracht, door den schrijver gehouden op de algemeene vergadering van leeraren in wiskunde te Utrecht op 24 Maart 1928. Voor het bewijs van de uitgesproken historische beweringen moge verwezen worden naar zijn werk *Val en Worp. Een bijdrage tot de Geschiedenis der Mechanica van Aristoteles tot Newton*. Groningen (Noordhoff) 1924.

vierde klasse H. B. S. geëischt mag worden, dat ze zich van den aanvang af een zekere mate van strengheid in hun spreken en denken over de *Mechanica* eigen zullen maken en dat de didactische moeilijkheden, die aan de vervulling van dien eisch onafscheidelijk verbonden zijn, moeten worden overwonnen en niet vermeden.

In de hier volgende mededeeling wordt nu verslag gedaan van een poging, om dat doel te bereiken, voorzoover het de verklaring van de axiomata voor werking op afstand betreft, door aan de behandeling van deze axiomata, zooals het leerboek ze geeft, een historische inleiding te laten voorafgaan.

De mechanica van Newton vormt een van die betrekkelijk zeldzame gevallen, waarin het zonder voorbehoud didactisch raadzaam is, den leerling in groote trekken nog eens de fasen te laten doorloopen, waardoor het menschelijk denken zich van vage begrippen en onzuivere redeneeringen tot een wetenschappelijk inzicht heeft opgewerkt. Men kan namelijk telkens weer opmerken, dat de axiomata van de mechanica, in schrille tegenstelling tot die van de meetkunde van Euclides, die voor het onontwikkelde denken een zoo hoogen graad van evidentie hebben, dat er een vrij hoog peil van mathematische ontwikkeling noodig is, om zelfs maar de mogelijkheid van een van de Euclidische afwijkende meetkunde in te zien, voor het natuurlijke denken een paradox karakter bezitten, dat ze eerst na vrij lange kennismaking verliezen en dat de onjuiste voorstellingen, die aan het verwerven van het juiste inzicht in hun beteekenis in den weg staan, nog steeds dezelfde zijn, als die men in de primitieve stadia van de historische ontwikkeling der *mechanica* aantreft. Dit voert er vanzelf toe, in de overwinning dier onjuiste voorstellingen de historische methode te volgen.

Tot juist begrip van de zaak mogen hier enkele mededeelingen voorafgaan over de omstandigheden, waarin de bedoelde proef genomen werd. Ze werd uitgevoerd met een vijfde klasse van acht leerlingen, die in de derde klasse reeds in de natuurkundelessen een vrij uitvoerigen elementaire cursus in mechanica hadden meegemaakt en die dus met de kinematische en dynamische grondbegrippen al eenigszins vertrouwd waren geraakt, terwijl ze in de vierde klasse onderwijs in kinematica hadden ontvangen volgens het leerboek van Schogt. De historische behandelingswijze van de ontwikkeling der *Dynamica* maakte deel uit van een breeder opgezetten historischen cursus over *Astronomie* en *Mechanica* samen, die in

de laatste twee maanden van de vierde klasse in de vereenigde uren voor Kosmographie en Mechanica begonnen was. In dezen cursus was eerst het een en ander besproken over de physica van Aristoteles, daarna was uitvoerig het stelsel van Ptolemaios behandeld, vervolgens de stelsels van Copernicus en Tycho Brahe en de verdediging van de Copernicaansche opvattingen door Galilei. Hoewel overheerschend astronomisch van aard, gaf deze opzet reeds aanleiding, ook de oudere fasen van ontwikkeling der mechanica in het licht te stellen; vooreerst is immers het systeem van Ptolemaios in zijn physische opvattingen (blijkend uit de weerlegging van het denkbeeld eener aardbeweging) geheel op de Aristotelische mechanica met haar onderscheiding tusschen natuurlijke en tegennatuurlijke bewegingen en haar gemis aan inzicht in de traagheidsverschijnselen gebaseerd; vervolgens toonen de argumenten, waarmee Galilei de tegenstanders van Copernicus tracht te weerleggen een reeds veel meer ontwikkelde phase van mechanisch denken, waarin echter de Aristotelische invloed nog lang niet uitgewerkt blijkt te zijn. Men komt er zoo vanzelf toe, van den aanvang af astronomie en mechanica tot een geheel te versmelten. De behoefte daaraan wordt trouwens na Galilei nog sterker, omdat men eerst door beschouwing van beide te samen de groote lijnen te zien krijgt, die de ontwikkeling der mathematische natuurwetenschappen in de 17e eeuw vertoont en die men als volgt zou kunnen schetsen:

Copernicus.

(astronomisch tegen Ptolemaios, physisch nog onder invloed van Aristoteles).

Galilei.

bestrijdt de Grieksche leer der valbeweging; ontwikkelt de kinematica der valbeweging.

Kepler.

bestrijdt de Grieksche leer der eenparige hemelbewegingen; ontwikkelt de kinematica der planetenbeweging.

Newton.

dynamische synthese, waarin valbeweging en planetenbeweging onder één gezichtspunt worden samengevat.

We hebben nu, ons beperkende tot de geschiedenis der mechanica, hoofdzakelijk te maken met de lijn Galilei-Newton. De behandeling van het centrale mechanische probleem uit den aanvang der 17e eeuw, dat der valbeweging, is bij hem nog zuiver kinematisch. Het is een van zijn groote verdiensten geweest, dat hij heeft beseft, dat alle speculaties over de vraag, door welke oorzaak de lichamen

vallen, onvruchtbaar moesten blijven, zoolang men niet wist, hoe ze vallen. Hij heeft er zich bewust toe beperkt, dit laatste te onderzoeken en in de voorrede van den derden Dag der *Discorsi* vindt men het zelfs duidelijk uitgesproken, dat hij zich beschouwt als wegbereider voor een dieper dringende wetenschap, zooals die in de Mechanica van Newton inderdaad is ontstaan. In Galilei's werken komen weliswaar ook dynamische beschouwingen voor, maar als men deze aandachtig beschouwt, blijkt hij, wat het krachtbegrip betreft, nog geheel op het peripatetische standpunt van de evenredigheid van kracht en snelheid te staan, terwijl het eenige moderne dynamische beginsel, dat bij hem begint op te treden, de traagheidswet, alleen geformuleerd wordt voor bewegingen zonder weerstand op het oppervlak van de bolvormige aarde.

Nog tijdens Galilei's leven en onmiddellijk daarna komt nu echter de vraag naar de oorzaak der versnelde valbeweging steeds meer op den voorgrond. Men wil begrijpen, waarom de lichamen versneld vallen, d. w. z. men wil op grond van onderstellingen, die men evident of plausibel acht, bewijzen, dat bij valbeweging uit rust de verkregen snelheid evenredig is met de eerste macht, de afgelegde weg evenredig met de tweede macht van den daaraan besteden tijd. In die onderstellingen heeft men de kiem van de latere axiomata der Mechanica.

Voor een historische inleiding tot die axiomata kwamen nu natuurlijk in de eerste plaats die beschouwingen in aanmerking, waarbij de onderstellingen, waarop de redeneering wordt gebouwd, zoo duidelijk mogelijk worden uitgesproken. Daarom werden achtereenvolgens behandeld de methode waardoor Beeckman in 1618, dus nog voor het verschijnen van de *Discorsi* tot de valwetten is gekomen en de afleiding van die wetten, die Huygens geeft in zijn *Horologium Oscillatorium*. Van beide volgt hier een korte uiteenzetting in moderne formuleering.

Beeckman beschouwt de kracht, die het lichaam doet vallen, de zwaarte, niet langer als een continu werkende kracht, maar als een periodieke stootkracht van zeer hooge frequentie. Stelt men haar periode (dus den tijd tusschen twee stooten) t en de plotselinge snelheidsvermeerdering van het vallende lichaam bij elken stoot v , dan ontstaat dus aan het begin der beweging een snelheid v , waardoor het lichaam in den nu volgenden tijd t een weg $v.t.$ aflegt. Aan het einde van dien tijd wordt de snelheid plotseling vermeer-

derd tot $2v$. Zoo voortgaande vinden we voor den weg, afgelegd in den tijd $t_1 = n \cdot t$. vanaf het begin der beweging

$$v \cdot t(1 + 2 + \dots + n) = \frac{n(n+1)}{2} vt$$

en voor den weg in den tijd $t_2 = 2nt$

$$\frac{2n(2n+1)}{2} vt.$$

Deze wegen verhouden zich als

$$(n+1) : (4n+2).$$

Wanneer we nu de periode der stootkracht steeds kleiner denken, zoodat n tot oneindig nadert, gaat de stootkracht bij de limiet over in een continu werkende kracht en de verhouding der wegen nadert tot de verhouding $1 : 4$, d. w. z. de wegen verhouden zich als de quadraten der tijden.

De meeste van de gronden, waarop deze redeneering steunt, worden door Beeckman in den loop van het betoog als overtuigende argumenten aangevoerd; van een voorafgaande, expliciete formulering van een klein aantal grondslagen, waarvan de aanvaarding door den lezer geëischt wordt, is nog geen sprake. Uitdrukkelijk als uitgangspunt uitgesproken wordt alleen het traagheidsbeginsel:

Ieder ding, dat eenmaal in beweging verkeert, komt nooit tot rust, tenzij door een uitwendige belemmering. En hoe zwakker de belemmering is, des te langer blijft het in beweging.

Overigens moet men natuurlijk bij de beoordeeling van de uiteenzettingen van Beeckman bedenken, dat hij geen wetenschappelijke verhandeling schreef, die voor publicatie bestemd was, maar dat hij slechts in zijn Journaal de beschouwingen te boek stelde, die hem invielen.

Bij Huygens treft men al wel vooropgestelde axiomata aan, die bij hem den naam van Hypotheses voeren. Zij luiden als volgt:

I. *Indien de zwaarte niet bestond en de lucht de beweging der lichamen niet belemmerde, zou ieder lichaam een eenmaal verkregen beweging met eenparige snelheid langs een rechte lijn voortzetten.*

II. *Nu heeft echter de werking der zwaarte, waaruit deze dan ook moge ontstaan, ten gevolge, dat ze een beweging uitvoeren, die samengesteld is uit de eenparige beweging, die ze in deze of gene richting bezaten, en uit de beweging omlaag, die afkomstig is van de zwaarte.*

III. *En ieder van deze beide bewegingen kan afzonderlijk worden beschouwd en de eene wordt door de andere niet belemmerd.*

Hierop volgt nu als eerste stelling:

Een vallend lichaam krijgt in gelijke tijden gelijke snelheidstoenames en de wegen in opvolgende gelijke tijden vanaf het begin der beweging afgelegd, nemen voortdurend met eenzelfde bedrag toe.

Bewijs: Stel, dat het lichaam in het eerste tijdsdeel valt van A naar B en dat het op grond van de dan verkregen snelheid in het tweede tijdsdeel in D zou komen (Hyp. I). Zij $AB = p$ en $BD = q$. Dan wordt wegens de hypothesen II en III in het tweede tijdsdeel afgelegd een weg $BE = BD + DE$ waarbij $DE = AB$ dus een weg $q + p$. Ook wordt $V_E = 2 \cdot V_B$, omdat de zwaarte in het tweede tijdsdeel dezelfde snelheid voortbrengt als in het eerste. We vinden zoo in het derde tijdsdeel:

op grond van de snelheid aan het begin

$$\text{een weg } 2.BD. = 2 q.$$

op grond van de werking van de zwaarte

$$\text{een weg } AB. = p.$$

$$\text{Totaal } 2q + p.$$

terwijl de snelheid aan het eind wordt $3 \cdot V_B$.

Zoo voortgaande vinden we voor den weg in het n^e tijdsdeel $(n-1) q + p$.

Hij bewijst nu verder, dat $q = 2p$ is. Dit geschiedt met behulp van een principe, dat als volgt te formuleeren is:

Wanneer wegen, in opvolgende gelijke tijden afgelegd, een zekere verhouding hebben, moet die verhouding onafhankelijk zijn van de grootte der gekozen tijdsdeelen. Hieruit volgt:

Weg in $(3^e + 4^e)$ tijdsdeel: Weg in $(1^e + 2^e)$ tijdsdeel = Weg in 2^e tijdsdeel: Weg in 1^e tijdsdeel.

$$\text{Dit geeft } \frac{5q + 2p}{q + 2p} = \frac{q + p}{p} \text{ dus } q = 2p.$$

We hebben nu voor den weg in n tijdsdeelen

$$p + (q + p) + \dots [(n-1)q + p] = p[1 + 3 + 5 + \dots (2n-1)] = n^2 p.$$

Dus is de afgelegde weg evenredig met het kwadraat van den tijd.

Deze afleiding is natuurlijk in vele opzichten belangrijk en ook buiten het verband, waarin het nu ter sprake kwam, is er alles voor te zeggen, de leerlingen met dergelijke redeneeringen van de groote physici uit het verleden bekend te maken. De dingen worden er zooveel frisscher door, als men teruggaat tot de tijden, waarin ze nog nieuw waren. Daarbij komt, dat deze redeneering speciaal

nog zoo typeerend is voor Huygens, die graag elk afzonderlijk onderwerp, dat hij aanpakt, door een bijzondere vernuftige kunstgreep de baas wordt (men denke b.v. aan de afleiding van de botsingswetten).

Op de bespreking van de afleiding van de valwetten moest nu echter ook de critiek volgen en wel op de volgende punten:

1. Huygens neemt zonder bewijs en zonder hypothese aan, dat het lichaam in opvolgende gelijke tijden (en niet b.v. over opvolgende gelijke wegen) gelijke snelheidstoenames verkrijgt.

2. Evenzoo, dat er tusschen wegen in opvolgende gelijke tijdsdeelen afgelegd, een verhouding bestaat, onafhankelijk van den tijd.

De eerste van deze twee fouten is zeer levenskrachtig gebleven; men kan haar tot op heden in verschillende leerboeken voor Mechanica terugvinden.

Intusschen was nu echter duidelijk geworden, in welken zin men van hypothesen, axiomata of postulaten kan spreken, die aan de mechanica ten grondslag worden gelegd. Het is een onderschuiven van fundamenteen aan een klaar gebouw, dat in de lucht zweeft, niet het leggen van grondslagen, waarop men vervolgens een gebouw optrekt, m.a.w. het is axiomatica a posteriori, niet a priori. Tevens was nu gebleken, dat het meest fundamenteele postulaat, de evenredigheid van snelheid en tijd, bij Huygens nog ontbrak.

Door de bespreking van de methode van Huygens was nu een voldoende basis verkregen om tot de behandeling van het begin van de *Principia* van Newton over te kunnen gaan. Eerst werden behandeld de eerste twee van de Axiomata sive Leges Motus, de traagheidswet in zijn algemeene en correcte formuleering, waarvan in onze leerboeken vaak slechts een vermindering is overgebleven, en de wet, die de uitwerking van een kracht bepaalt:

I. *Ieder lichaam volhardt in zijn toestand van rust of rechtlijnige eenparige beweging, behalve voorzoover het door de inwerking van krachten gedwongen wordt, dien toestand te wijzigen.*

II. *De verandering in de hoeveelheid beweging is evenredig met de werkende kracht en geschiedt langs de lijn, volgens welke de kracht werkt.*

Daar de leerlingen eenige kennis van vectorrekening en van de beginselen van de differentiaalrekening bezaten, kon de laatste wet worden uitgedrukt in de formule

$$\underline{K} = \frac{d}{dt}(m \underline{v}).$$

Het werd nu vooreerst duidelijk, dat hierdoor het probleem, dat eeuwenlang zoo onoplosbaar had geleken, de vraag namelijk, hoe een constante bewegingsoorzaak een groeiende snelheid kan voortbrengen, was opgelost. Is nl. K constant, dan is $m \underline{v}$ evenredig met t en hieruit volgt, volgens de methodes van Galilei, dat s evenredig is met t^2 , verder de wet der oneven getallen. De gevonden oplossing komt nu echter hierop neer, dat er eigenlijk een generalisatie van de te bewijzen stelling als postulaat is genomen. Er kon op gewezen worden, dat het zoo wel moest gaan; men zal nooit de stelling, dat een constante kracht een eenparig versnelde beweging voortbrengt, logisch kunnen bewijzen, wanneer men niet kan uitgaan van een definitie van kracht. Die definitie had tot dusver steeds ontbroken; expliciet heeft Newton haar ook niet, maar impliciet definieert hij eigenlijk het begrip kracht in zijn tweede axioma. Dat daarna de afleiding van de valwet zoo eenvoudig wordt, volgt alleen uit het feit, dat als evident werd aangenomen, dat de zwaarte een constante kracht is.

Het probleem blijkt dus meer te zijn verschoven dan opgelost. Immers nu komt vanzelf de vraag naar den oorsprong der zwaarte en naar de rechtvaardiging van de aanname, dat ze constant is.

Om die vraag op te lossen, werd nu Newton's gravitatiehypothese ingevoerd, waardoor het mogelijk wordt, valbeweging en planetenbeweging als uitwerking van eenzelfde kracht te zien en tevens te begrijpen, in hoeverre de zwaarte van een lichaam als een constante kracht mag worden behandeld. Speciaal met het oog op de ontwikkeling der mechanica kwam nu de bekende verificatie van de verhouding van de versnelling van de maan in haar baan om de aarde (cirkelvormig ondersteld) en van de versnelling van den vrijen val ter sprake. Daarnaast werd het belangrijke experiment besproken, waarmee Newton aantoonde, dat de versnelling van den vrijen val onafhankelijk is van de soort der lichamen. Hij deed dit door waarnemingen aan slingers van gelijke lengte, waarvan het slingerlichaam bestond uit een doosje van bepaalde afmetingen; daarin werden gelijke gewichten van verschillende stoffen gedaan; uit de gelijkheid van de slingertijden werd afgeleid, dat g onafhankelijk is van den aard der stof. Het is van belang, hierop te wijzen; immers het zou denkbaar zijn, dat de evenredigheid van massa en gewicht wel voor elke stof bestond, maar dat de evenredigheidsfactor van den aard der stof afhing. Iets dergelijks is b.v., zij het

dan ook in andere termen, nog door Galilei in zijn eerste onderzoekingen ondersteld.

Bij de bespreking van de gravitatiehypothese werd het derde axioma van Newton ingevoerd:

De actie is steeds tegengesteld en gelijk aan de reactie; of wel: de onderlinge werkingen van twee lichamen zijn steeds gelijk en naar tegengestelde kanten gericht.

Na voltooiing van deze bespreking kon nu de aandacht worden gevestigd op de volgende punten:

1. Wat is nu eigenlijk een kracht? Het antwoord moest luiden, dat een kracht voor Newton de onbekende oorzaak is van een verandering van de snelheid van een beweging in grootte, in richting of in beide; van die oorzaak zien wij alleen de uitwerking en deze wordt gemeten door het differentiaalquotient van mv naar t , dus door het product van massa en versnelling. Het is dan echter duidelijk, dat men, inplaats van te zeggen, dat twee stoffelijke punten krachten op elkaar uitoefenen, die versnellingen veroorzaken, even goed kan zeggen, dat ze in elkaars aanwezigheid versnellingen krijgen. Men kan dus het woord „kracht” weglaten.

2. Newton definieert massa als product van volume en dichtheid, terwijl hij onder dichtheid toch wel niets anders kan hebben verstaan dan massa per volume-eenheid.

Door deze beide punten uitvoerig te bespreken, konden de leerlingen worden voorbereid op de formuleering van de axioma's, waarin het woord kracht wordt weggelaten, terwijl de massa's van twee stoffelijke punten worden ingevoerd als omgekeerde verhoudingsgetallen van de versnellingen, die ze in elkaars aanwezigheid krijgen. Tevens was gemakkelijk duidelijk te maken, dat het niet noodig is, de algemeene gravitatiehypothese van Newton onder de axiomata op te nemen, maar dat men haar kon generaliseeren tot het axioma, dat de versnellingen, die twee stoffelijke punten onder elkaars invloed krijgen, tegengesteld gericht zijn langs hun verbindinglijn, terwijl de verhouding van die versnellingen niet afhangt van den afstand en van de snelheden der stoffelijke punten.

Om nu te kunnen komen tot de axiomata uit het leerboek van Schogt was het nog noodig, uitvoeriger over de Traagheidswet te spreken.

Hoewel namelijk het voorkomen hiervan in het systeem van Newton historisch geheel gemotiveerd is, kan het schijnen, alsof

het daarin (en a fortiori in een moderne formuleering) logisch kan worden gemist. Ten aanzien van het systeem van Newton is deze meening werkelijk verdedigd door Mach. Volgens hem is de traagheidswet overbodig, omdat wanneer kracht evenredig is met versnelling, voor $K = 0$ ook $a = 0$ wordt, waaruit volgt, dat de beweging eenparig rechtlijnig is. Deze opvatting lijkt echter onjuist. Uit de stelling toch, dat een stoffelijk punt een versnelling heeft, als er een kracht op werkt, kan logisch onmogelijk volgen, wat er gebeurt, als er geen kracht op werkt. Het zou denkbaar zijn, dat, zooals men in de Scholastiek aannam, een aan alle uitwendige invloeden onttrokken lichaam langzamerhand door verzwakking van het inwendig bewegend vermogen zijn snelheid zou verliezen, dat het lichaam als het ware moe zou worden. Deze mogelijkheid wordt in het systeem van Newton uitgesloten door de traagheidswet.

In het moderne systeem van axioma's beteekent ze echter nog veel meer. Ze postuleert ten eerste, evenals bij Newton, dat een stoffelijk punt niet anders een versnelling kan krijgen dan door aanwezigheid van andere stoffelijke punten; ze legt ten tweede vast, dat de functie van den afstand, die de versnellingen bepaalt, waarvan in het tweede axioma sprake is, tot nul moet naderen, als de afstand tot oneindig nadert. Ten derde echter is het een existentiepostulaat voor vaste assenstelsels, die ze tevens definieert.

De noodzakelijkheid van de omschrijving van het vaste assenstelsel is natuurlijk aan leerlingen altijd eenigszins moeilijk duidelijk te maken. Het valt echter mee, wanneer zij van den aanvang af in den geest van het leerboek van Schogt zijn opgevoed, dus geleerd hebben, niet over beweging te spreken zonder vermelding van een assenstelsel, ten opzichte waarvan de beweging wordt beschouwd. Toch blijft dit een moeilijk punt, vooral omdat men hier geen eenvoudige historische inleiding kan geven.

Volledigheidshalve volgen hier nu nog de axiomata voor de werking op afstand, zooals Schogt ze geeft:

I. *Er bestaan assenstelsels met de eigenschap, dat elk stoffelijk punt, dat oneindig ver verwijderd is van alle andere stoffelijke punten, in rust of in eenparige rechtlijnige beweging is t.o.v. die assenstelsels.*

Zulke assenstelsels worden aangeduid als vast.

II. *Wanneer twee stoffelijke punten M en M' een eindigen onderlingen afstand hebben, maar oneindig ver verwijderd zijn van*

alle andere stoffelijke punten, dan heeft t.o.v. een vast assenstelsel M een versnelling a en M' een versnelling a' , welke versnellingen in de lijn MM' tegengesteld gericht zijn. Hare verhouding $\frac{a}{a'}$ hangt niet af van den afstand en van de snelheden van M en M' .

Hierna volgt de bepaling, dat de verhouding $\frac{a}{a'}$ den naam van *relatieve massa* van M' t.o.v. M zal dragen.

Om uit te drukken, dat de massa van een stoffelijk punt beschouwd wordt als een onveranderlijke eigenschap, die de uitwerking van alle invloeden beheerscht, die dit stoffelijke punt van andere stoffelijke punten ondergaat en die het op deze uitoefent, volgt nu het contractieaxioma voor relatieve massa's:

III. Zijn M_1 , M_2 , en M_3 drie stoffelijke punten en zij

de relatieve massa van M_2 t. o. v. M_3						μ_{23}	
"	"	"	"	M_3	"	M_1	μ_{31}
"	"	"	"	M_1	"	M_2	μ_{12}

dan bestaat de betrekking

$$\mu_{23} \cdot \mu_{31} \cdot \mu_{12} = 1.$$

Ten slotte wordt het superpositieaxioma opgesteld, waarvan de eerste formulering reeds werd aangetroffen in de derde hypothese van Huijgens:

IV. Wanneer een stoffelijk punt M zich bevindt op eindige afstanden van de stoffelijke punten $M_1, M_2, \dots, M_n$, en van alle overige stoffelijke punten oneindig ver verwijderd is, heeft het ten opzichte van een vast assenstelsel eene versnelling, die gelijk is aan de vectorsom der versnellingen, welke het punt t.o.v. een vast assenstelsel zou hebben, indien het achtereenvolgens alleen van M_1 , alleen van M_2 , enz. een eindigen afstand had.

Zooals vanzelf spreekt, geeft het leerboek bij deze axiomata de nauwkeurige omschrijving (of althans de aansporing aan den lezer, deze zelf aan te vullen) van de beteekenis van de afkorting „oneindig ver verwijderd van andere stoffelijke punten”.

E. J. Dijksterhuis.

HET ONDERWIJS IN DE NATUURKUNDE AAN DE HOOGERE BURGERSCHOOL.

Opmerkingen naar aanleiding van het Rapport over het natuurkunde-onderwijs, uitgebracht aan het Bestuur van de Nederlandsche Natuurkundige Vereeniging.

Door het Bestuur van de Nederlandsche Natuurkundige Vereeniging werd in het najaar van 1926 een Commissie samengesteld, die in opdracht kreeg „het formuleeren van zoodanige aanbevelingen betreffende den omvang en de behandelingswijze van de leerstof van het natuurkunde-onderwijs en de eindexamens, voornamelijk aan gymnasia en hogere burgerscholen, als tot bevordering, eventueel verbetering, van dat onderwijs zouden kunnen strekken.”

De resultaten, waartoe deze Commissie gekomen is, zijn in een rapport neergelegd, dat onlangs verschenen is ¹⁾ en dat tot titel draagt: „Het onderwijs in de natuurkunde aan gymnasia, hogere burgerscholen en lycea”.

In het volgende mogen enkele opmerkingen gemaakt worden betreffende de wenschen der Commissie, voorzooover deze betrekking hebben op het natuurkunde-onderwijs aan de hogere burgerscholen.

De aanbevelingen der Commissie worden door haar in het kort als volgt geresumeerd:

I. Zij stelt voor de stof te verdeelen in een gedeelte, dat als noodzakelijke kern moet worden gesteld (aangegeven in een reeks onderwerpen, vermeld als „minimum van verplichte kennis”) en een tweede groep van onderwerpen, door de Commissie genoemd, waaruit de docent, ter aanvulling van de „kern” een keuze zal kunnen doen.

¹⁾ Bij J. B. Wolters. — Groningen en Den Haag, 1928.

II. Zij stelt voor, geleidelijk, practische oefeningen in den cursus in te schakelen, waarmee ook bij het eindexamen rekening zal worden gehouden.

III. In de eindexamen-regeling stelt zij geen verandering voor.

Zij stelt voor, dat bij het algemeen schriftelijk eindexamen der hogere burgerscholen de taken zullen worden gekozen uit het algemeen noodzakelijk als kern gestelde gedeelte en dat over de aanvullende onderwerpen en over de practisch uitgevoerde metingen zal worden gevraagd op het mondeling examen, waarvoor slechts vrijstelling worde verleend, indien voor het schriftelijk werk minstens 8 is toegekend.

IV. Zij stelt voor, de leerstof op andere wijze over de klassen der hogere burgerschool te verdeelen dan thans gebruikelijk is.

V. Wat de mechanica betreft, stelt de Commissie voor, dat de inductief-experimenteele grondlegging der mechanica in den natuurkunde-cursus worde opgenomen, zoodat het onderwijs der rationeele mechanica daarin haar grondslag vinden kan. Daartoe worde aan de natuurkunde toegevoegd het tweetal uren, thans voor mechanica in de vierde klasse uitgetrokken. In de vijfde klasse worde de mechanica afzonderlijk in twee uren onderwezen.

Deze voorstellen I tot en met V acht de Commissie aanstonds voor verwezenlijking vatbaar.

VI. Met het oog op de toekomstige ontwikkeling van het onderwijs dringt de Commissie aan op het scheppen van de mogelijkheid voor docenten om een cursus uit te werken, die consequent verdeeld zal zijn in twee ronden, de eerste ter elementaire demonstratie en discussie der verschijnselen, de tweede ter bevestiging en verdieping der kennis en ontwikkeling van begrip van het wijder verband der natuurwetten. Zij biedt een ontwerp voor zulk een cursus aan.

VII. Bij een algemeene herziening van het schoolplan wenscht de Commissie op de lycea en hogere burgerscholen ook in de lagere klassen aan de natuurkunde een plaats gegeven te zien.

Al wordt dit bij voorstel VI niet in het bijzonder opgemerkt, het is blijkbaar de meening der Commissie, dat ook dit voorstel niet direct voor verwezenlijking vatbaar is. Uit de toelichting blijkt ook, dat de voorstellen VI en VII nauw samenhangen.

Ook zonder nadere kennisname van de toelichting bij de voorstellen I—V is het duidelijk, dat de Commissie zich vergist, wan-

neer ze deze „aanstonds voor verwezenlijking vatbaar” acht.

Met IV en V is dit toch geenszins het geval, omdat voor de verwezenlijking van deze beide wenschen een herziening van het leerplan, vastgesteld bij Kon. Besl. van 16 Juni 1920, noodig zou zijn. Immers, het voorstel V houdt in een wijziging van de uren-tabel, die in art. 2 van dit Kon. Besl. is vastgelegd, terwijl voorstel IV slechts verwezenlijkt zou kunnen worden, indien art. 4 gewijzigd werd.

En zoo vereischt voorstel III wijziging van het Kon. Besl. van 12 Juni 1920, betreffende het eindexamen der hogere burgerscholen, en wel in het bijzonder van art. 12.

Dat de natuurkunde als experimenteele wetenschap onderwezen dient te worden, hierover zijn wij het in de laatste tientallen jaren allen eens geworden, al blijkt dan ook wel eens de praktijk zoo te zijn, dat hier en daar het experiment nog niet een centrale plaats inneemt. Daarom is het toe te juichen, dat de Commissie dit nog eens uitdrukkelijk vooropstelt.

En tevens merkt ze daarbij op, dat we de hulp der wiskunde niet mogen afwijzen. Waar in de laatste jaren wel eens getracht is de wiskunde grootendeels uit het natuurkunde-onderwijs weg te dringen, is deze uitspraak alleszins op haar plaats.

Wanneer de Commissie dan tot haar eigenlijke voorstellen overgaat, stelt ze voorop — zooals in I uitgedrukt is — de leerstof te schiften in de beide reeds genoemde groepen van onderwerpen, zoowel om daardoor voldoende tijd over te houden om aandacht te kunnen schenken aan de natuurkundige methode als met het oog op de behandeling van onderwerpen, die betrekking hebben op de jongere ontwikkeling der natuurwetenschap.

Ook tegen dit beginsel zullen wel geen bezwaren ingebracht worden. Van belang is evenwel de wijze, waarop de bedoelde schifting plaats heeft, welke onderwerpen onder de „noodzakelijke kern” gebracht worden. De Commissie heeft, om de meening der leeraren hieromtrent te leeren kennen, in December '27 aan alle natuurkunde-leeraren als voorloopig resultaat harer besprekingen een lijst van onderwerpen toegezonden, die zij in de kern wenschte opgenomen te zien. Door 132 leeraren werden haar betreffende deze lijst opmerkingen toegezonden, „waarvan zij bij de vaststelling (in haar Verslag) partij heeft kunnen trekken.” Het is opmerkelijk, — door

de Commissie wordt dit niet gereleveerd, — dat blijkbaar al deze opmerkingen tezamen geen invloed op de meening der Commissie hebben gehad: het resultaat, de in het Verslag gepubliceerde lijst, komt geheel overeen met het concept¹⁾. Het ware wel gewenscht geweest, dat de Commissie in haar zeer uitgebreid verslag ook iets omtrent de toegezonden opmerkingen had meegedeeld.

Ook omtrent voorstel II zal wel weinig verschil van meening bestaan. Wel algemeen zal men het eens zijn met deze uitspraak der Commissie:

„Het is volstrekt niet te ontkennen, dat met goed ingericht en goed gegeven natuurkunde-onderwijs, waarbij de leeraar de leerlingen onophoudelijk in de les betreft, en waarbij de leeraar goed experimenteert, ook goede resultaten zijn te bereiken. Maar toch is het duidelijk, dat *eigen ervaringen*, het *zelf doen der dingen* andere indrukken in de ziel achterlaat dan het zien doen of het hooren zeggen door een ander.”

En ook met deze:

„De gewone les, waarbij de leeraar zijn ideeën heuristisch ontwikkelt, bepaalt den gang van het onderwijs en blijft hoofdzak. Overal, waar het *wenschelijk* en *mogelijk* is, worden de practische oefeningen in den gang van het onderwijs ingeschoven, waarbij de leerlingen het probleem, door den leeraar met hen gesteld, tot oplossing brengen.”

Van belang voor een eventueele invoering zijn natuurlijk de kosten, die deze meebrengt (ook de kosten van aanschaffing der eerste benodigde instrumenten), het aanwezig zijn van geschikte ruimte en vooral de tijd, die eraan besteed moet worden.

Daarom zal van een dwingend voorschrijven voorloopig geen sprake kunnen zijn. Bovendien zou dit ook allerm minst gewenscht zijn. Indien kosten en ruimte geen bezwaren zijn, zal men de practische oefeningen facultatief, bijv. voor de 5e klasse, kunnen instellen. Of dit ook niet eens de meest geschikte definitieve vorm zal zijn? ²⁾

¹⁾ Met uitzondering van onderwerpen uit de mechanica, die met het oog op het eventueel overbrengen van uren voor de mechanica naar die voor de natuurkunde, voorloopig naar de „kern” zijn overgebracht.

²⁾ Bij de lijst van scholen, waar het practisch werken werd ingevoerd, zouden waarschijnlijk nog wel enkele andere vermeld kunnen worden, ook wel die, waar gedurende eenigen tijd practisch gewerkt werd en waar men dit onderwijs weer afschafte.

Van meer ingrijpenden aard dan het vorige is de andere verdeling van de leerstof, die de Commissie voorslaat, zooals in voorstel IV is uitgedrukt.

Wanneer de Commissie betoogt, dat elk hoofdstuk der natuurkunde eenvoudige en moeilijke onderwerpen bevat en het dus voor de leerlingen het meest doelmatig is eenvoudige onderwerpen, zoo mogelijk, in de 3de klasse te behandelen, dan zal men hiermee ongetwijfeld instemmen.

Een groote moeilijkheid voor den beginnenden leerling zijn de abstracte begrippen, die in de kinematica en de dynamica ter sprake komen, ook wanneer men deze leerstof tot het eenvoudigste beperkt. Reeds jaren geleden werden deze onderwerpen dan ook door enkelen onzer niet in den aanvang van het natuurkunde-onderwijs behandeld, maar later. Te Amsterdam liet het programma voor natuurkunde, dat aan de gem. H. B. S. en van 1905 af gelijkkluidend was, daartoe den leeraar de vrijheid en van deze vrijheid is destijds dan ook gebruik gemaakt. In 1916 werd het „normaal-programma” voor de Rijks H. B. S. en vastgesteld. In dezen leergang worden de kinematica en de dynamica niet genoemd; in het programma voor de vijfde klasse stond vermeld: „Arbeid in verband met warmte en electriciteit”. De redactie van den leergang was daardoor een zoodanige, dat de behandeling van bewegingen, arbeid en arbeidsvermogen van de 3de klasse naar een hogere verschoven kon worden en zelfs de indruk kon worden gevestigd, dat aan een zoodanige verschuiving de voorkeur gegeven moest worden, al liet ze ook de mogelijkheid kinematica en dynamica in den aanvang te behandelen.

Eenige Haagsche leeraren betoogden het ongewenschte van deze verschuiving. Een polemiek, aangaande deze aangelegenheid in het Weekblad voor Gymn. en Middelb. Onderwijs gevoerd ¹⁾, eindigde met een aanwijzing van hoogerhand, dat in het rijksprogramma geenszins de bedoelde leergang naar voren was gebracht en dat ook in de 3de klasse dienden te worden besproken bewegingen, arbeid en arbeidsvermogen.

En toen in 1920 het Kon. Besl. van 16 Juni verscheen, waarin een leerplan voor alle hogere burgerscholen wordt vastgesteld, werd de vrijheid, die het programma van 1916 toch nog wel liet, teniet

¹⁾ Weekbl. voor Gymn. en Middelb. Onderwijs, 12e jaargang, no. 47, 48, 49, 50 en 51.

gedaan. In dit Kon. Besl. toch luidt het leerplan voor de 3de klasse: „Iets over krachten, beweging, arbeid en arbeidsvermogen. Vloeistoffen en gassen. Warmte.” Daarin wordt de behandeling van de kinematica en de dynamica in de 3de klasse dus voorgeschreven.

De Commissie huldigt de opvatting, dat een verschuiving gewenscht is. Het is duidelijk, dat deze verschuiving in strijd is met het thans van kracht zijnde Kon. Besl. betreffende het leerplan der hogere burgerscholen. Hier faalt dus de Commissie, — het is reeds opgemerkt, — wanneer ze meent, dat de door haar voorgestelde leerstofverdeeling zoo aanstonds zou kunnen worden ingevoerd.

De behandeling van de kinematica en de dynamica (en daardoor die van de calorische machines en de moleculaire beschouwingen) wenscht de Commissie van de 3de naar het begin van de 4de klasse te verplaatsen. De tijd, die aldus vrij komt, wenscht ze benut te zien door de behandeling van „Licht tot en met de optische instrumenten” in de 3de klasse.

Maar hierdoor wordt ongetwijfeld het programma van die klasse overladen; een behoorlijke behandeling van deze vrij omvangrijke leerstof zal in die klasse niet mogelijk zijn.

Voor de 4de klasse schrijft de Commissie, behalve de reeds genoemde onderwerpen, voor: „Moeilijker onderwerpen uit de mechanica. Trillingsleer. Geluid. Magnetisme en electrostatica.” Voor de 5e klasse blijven dan over: „Electrodynamica. Licht als trillingsverschijnsel. Spectrum. Electromagnetische golven. Atoomwereld.”

Bij deze leerstof en behandelingswijze, — waarbij de Commissie uitgaat van een urentabel als de thans vigeerende van 4, 3 en 3 uren, resp. in klasse III, IV en V, — zou zoowel van de leerlingen der 3de als van die der 5de klasse te veel gevergd worden. De totale hoeveelheid leerstof, die de Commissie behandelt wenscht te zien, is dan ook uitgebreider dan die, welke thans (bij hetzelfde aantal uren) algemeen behandeld wordt.

Toch zij opgemerkt, dat, al is de uitwerking van het beginsel: het brengen van eenvoudiger leerstof naar de 3de, van meer ingewikkelde naar de 4de en 5de klasse, niet een heel gelukkige, dit beginsel zelf alle aanbeveling verdient. De verplaatsing van eenvoudige kinematica en dynamica naar het begin der 4de klasse is een zeer gelukkige. Wanneer het gelukt daarvoor in de plaats in klasse III iets van magnetisme en electrische stroomen te brengen, zou aan de belangrijkste wenschen, die men ten opzichte van het

natuurkunde-programma stellen kan (en die de Commissie ook stelt), tegemoet gekomen zijn. Aldus zou een leergang verkregen zijn, die in hooge mate aanbeveling verdienen zou boven de thans in het Kon. Besl. van 1920 voorgeschreven behandeling der leerstof.

Wenschen, die moeilijker in vervulling zullen gaan, acht de Commissie de voorstellen VI en VII ¹⁾. Voorstel VI houdt in de behandeling der natuurkunde in twee leerkringen, voorstel VII het doceeren van dit vak ook in de lagere, de eerste en tweede, klassen der hoogere burgerschool.

Een verdeeling der leerstof in twee leerkringen maakt het inderdaad mogelijk eenvoudige onderwerpen voorop te stellen en de meer ingewikkelde later te behandelen, terwijl met de behandeling van natuurkundige onderwerpen in de 1e en 2e klasse der H. B. S. verwezenlijkt kan worden, dat de leerlingen op jongen leeftijd vertrouwd raken met begrippen en eenigszins wegwijz worden in onderwerpen, o.a. die op electrisch gebied, waarin eenigen van hen dan al groote belangstelling toonen.

Nu brengt een behandeling in twee leerkringen mee, dat men bij den tweeden leerkring meermalen een onderwerp meer fundamenteel zal behandelen, dat in allereersten aanleg reeds in den eersten leergang behandeld is. Dit heeft tot gevolg, dat men begrippen, in den eersten kring ontwikkeld, bij de tweede behandeling zal moeten opfrisschen. Ongetwijfeld heeft dit voordeelen, maar ook bezwaren. Het is duidelijk, dat men aldus meer tijd beschikbaar zal moeten hebben om dezelfde leerstof door te gaan dan bij directe behandeling. Of, heeft men denzelfden tijd beschikbaar; dan zal men bij een concentrische behandeling minder kunnen afdoen. Wie onzer wel eens zoo'n behandelingswijze beproefd heeft, heeft dit ervaren.

Het is duidelijk, dat dit bezwaar zich in nog sterkere mate voordoet, wanneer we de beschikbare lesuren voor natuurkunde verdeelen over de vijf klassen in plaats van over de drie hoogste. Met de minder ontwikkelde leerlingen in de lagere klassen zullen we minder snel kunnen voortgaan. Of, bij deze behandelingswijze zullen we bij een zelfde aantal lesuren de leerstof nog meer moeten inkrampen.

¹⁾ Het is bevreemdend, dat de Commissie omtrent deze voorstellen geen onderzoek instelde naar de meening der leeraren.

De Commissie is blijkbaar weinig hiervan doordrongen. Dit blijkt te meer, wanneer we haar „schets van een leerprogramma in twee rondes” inzien. In deze schets toch vinden we onderwerpen vermeld, die zelfs bij de huidige regeling der uren (het aantal is hetzelfde), niet behandeld worden (afgezien natuurlijk van de opsomming der onderwerpen uit de mechanica, die in verband met den wensch, dat de beide uren voor de mechanica uit de 4de klasse onder de natuurkunde gebracht zullen worden, hier vermeld staan).

De lijst onderwerpen maakt ook den indruk met weinig inzicht in de moeilijkheden, die de behandeling aan de leerlingen biedt, te zijn samengesteld. Dit treedt b.v. sterk aan het licht, wanneer we zien, dat de Commissie „trillingen” en „geluid” wenscht te doen behandelen, nog voordat „beweging” en „snelheid”, kortom de kinematica en de dynamica, ter kennis van de leerlingen zijn gebracht.

Als onderwerpen, die in den eersten leerkring voorop gesteld worden, vinden we: Schaduw en licht, Beeldvorming door vlakke spiegels, Beeldvorming door holle spiegels, Convergeerend vermogen van holle spiegels, Brekingsindex, Totale reflectie, Prisma, Bolle lenzen, Beeldvormingen, enz.

Dit zijn dus de onderwerpen, die geschikt geacht worden in den aanvang van de eerste klasse onderwezen te worden, of, wanneer de behandeling der natuurkunde in de tweede klasse aanvangt, in het begin van die klasse. (De Commissie stelt zich de behandeling het liefst voor: aan de hogere burgerschool de eerste ronde in de klassen I, II, III met resp. 1, 2 en 2 uren, of in de klassen II en III met resp. 2 en 3 uren, de tweede ronde in de klassen IV en V met resp. 4 en 3 uren; 2 uren van de huidige lessen in mechanica, in klasse IV, zijn bij deze verdeeling onder de natuurkunde-lessen gedacht).

Nu is een behandeling van de beeldvorming in den vlakken spiegel, waarmee dus in den aanvang der eerste klasse begonnen zou moeten worden, niet wel mogelijk zonder kennis van de congruentie van driehoeken, een kennis, waarover de leerlingen in den aanvang der eerste klasse natuurlijk nog geenszins beschikken. Voor de constructie van het spiegelbeeld van een eenvoudig voorwerp of zelfs van een lichtpunt in een vlakken spiegel is de kennis van de constructie van de loodlijn uit een punt op een rechte lijn een vereischte. Reeds de elementaire behandeling van de beeldvorming door een hollen spiegel, —

tenzij men op de vijfjarige hogere burgerschool zich met apodictische mededeelingen wenscht tevreden te stellen, — vereischt de kennis van de eigenschap van de deellijn van een hoek in een driehoek, een meetkundige eigenschap, die in de tweede klasse behandeld wordt; van een eenigszins bevredigende behandeling van de beeldvorming door holle spiegels (en natuurlijk evenzeer door bolle) kan dus geen sprake zijn. Het begrip brekingsindex kan men desnoods aanbrengen zonder goniometrische kennis. Maar dit begrip en dat omtrent totale reflectie aan te brengen, wanneer de leerlingen tennaastebij niets, althans nog zeer weinig, van de meetkunde kennen, is niet mogelijk. Tenzij, alweer, men onderwijs zonder inhoud wenscht te geven.

Een behandeling van de eenvoudigste verschijnselen van het licht, — men merke wel op, dat de Commissie deze als het eenvoudigste van het natuurkunde-onderwijs vooropstelt, — zonder de kennis van congruentie en gelijkvormigheid van driehoeken, in het algemeen zonder de kennis van die eenvoudige eigenschappen van de algebra en de meetkunde, welke in de eerste en de tweede klasse der hogere burgerschool wordt aangebracht, is een behandeling zonder eenige diepte. Ze komt neer op het aankweeken van oppervlakkigheid.

Op een vijfjarige hogere burgerschool, waarvan het einddiploma ten slotte het jus promovendi voor de B-faculteiten der Universiteit en voor de Technische Hoogeschool verleent, zal men met zulk onderwijs geen genoegen kunnen nemen. Integendeel, het is plicht zich te verzetten tegen een poging, — wanneer die eens in ernst ondernomen zou worden — dergelijk onbeteekenend onderwijs in de eerste en de tweede klasse der hogere burgerschool te brengen.¹⁾

Natuurkunde-onderwijs, dat eenigen inhoud zal hebben, is zonder kennis van de elementaire eigenschappen van de algebra en de meetkunde niet mogelijk. Daardoor kan met dit onderwijs niet vóór de derde klasse een aanvang gemaakt worden.

Of, wanneer men de natuurkunde in de derde klasse doet aanvangen, een behandeling in twee ronden, — zooals die, waarvan de

¹⁾ Nadat dit geschreven en gezet was, is door het Bestuur der Nederlandsche Natuurkundige Vereeniging een dergelijke poging in een adres aan den Minister van Onderwijs inderdaad gewaagd. Een raadplegen van de betrokken leeraren werd daarbij niet noodig geacht.

Commissie in haar voorstel VI spreekt, — nog te verwezenlijken en gewenscht is, is een vraag, die de Commissie niet duidelijk behandelt. Wel worden in algemeene termen de voordeelen eener concentrische behandeling besproken, waardoor men den indruk krijgt, dat de Commissie haar voorstel VI, ook afgescheiden van VII, wenscht aan te bevelen. Een blik in de „Schets van een leerprogramma in twee ronden” vestigt evenwel spoedig de overtuiging, dat een dergelijke leergang toch niet voor de drie hoogste klassen der hogere burgerschool bedoeld zal zijn.

Thans zij nog iets opgemerkt omtrent voorstel V der Commissie: „Wat de mechanica betreft, worde de inductief-experimenteele grondlegging der mechanica in den natuurkunde-cursus opgenomen, zoodat het onderwijs der rationeele mechanica daarin haar grondslag vinden kan. Daartoe worde aan de natuurkunde toegevoegd het tweetal uren, thans voor mechanica in de vierde klasse uitgetrokken. In de vijfde klasse worde de mechanica afzonderlijk in twee uren onderwezen.”

Dat de huidige indeeling van het mechanica-onderwijs in hooge mate onbevredigend is, zal algemeen worden erkend. Het facultatief stellen der mechanica in de 5de klasse is in 1920 een fout geweest. Hoe het bovendien mogelijk was aan de 4de klasse een halven leergang voor te schrijven, dus voor de leerlingen, die dit onderwijs in de 5de klasse niet meer zullen volgen, dit zoo abrupt af te breken, is onbegrijpelijk. Na deze misvattingen maakte men zich van de omschrijving van het onderwijs in de 5de klasse af met de woorden: „Herhaling en uitbreiding van het in de vorige klasse behandelde.” Een meer onbeduidend programma voor een leervak is niet denkbaar.

Door dit alles is een vak van beteekenis, dat den grondslag vormt voor natuurwetenschappelijke en technisch-wetenschappelijke studie, practisch aan de natuurwetenschappelijke vorming der hogere burgerschool onttrokken.

In dezen onbevredigenden toestand wenscht de Commissie verbetering te brengen door in het natuurkunde-onderwijs een experimenteel-natuurkundig georiënteerde behandeling der mechanica in de vierde klasse te brengen en den hierdoor gelegden grondslag te doen dienen voor een wiskundig-georiënteerde behandeling in de 5de klasse. In verband met de uitbreiding, die de taak van het

natuurkunde-onderwijs aldus zou krijgen, stelt de Commissie voor: de twee thans aan de mechanica bestede uren der vierde klasse voor de natuurkunde te bestemmen; twee uren in de vijfde klasse kunnen dan nog aan de z.g. rationeele, de meer wiskundig georiënteerde, mechanica gewijd blijven.

Wanneer de Commissie daarbij opmerkt: „degelijk onderwijs daarin blijft van belang o.a. voor de natuurwetenschappelijke propaedeuse van allen, wier onderwijs niet met dat op de H. B. S. m. 5-j. c. eindigt”, dan ligt de vraag voor de hand, of de Commissie inderdaad van meening is, dat met twee uren in de week in één cursus, die in September begint en reeds in Mei eindigt, een degelijk resultaat in de niet zoo eenvoudige, wiskundig georiënteerde mechanica bereikt kan worden ¹⁾.

De „Commissie voor de Wiskunde” (Commissie-Beth), waarmee de Commissie der Natuurkundige Vereeniging een bespreking hield over de verhouding van natuurkunde- en mechanica-onderwijs, kreeg uit de gevoerde besprekingen den indruk, „dat een inleidend mechanica-onderwijs, zooals de Commissie-Fokker zich dat voorstelt, een zoo voldoende basis kan geven voor verdergaand mechanica-onderwijs, dat zij geen bezwaar heeft een deel van den door haar voor mechanica beschikbaar geachten tijd aan de natuurkunde af te staan.”

De Commissie voor de Wiskunde is daarbij van meening, dat geen afstand kan worden gedaan van het onderwijs in de rationeele mechanica in klasse IV; haar meerderheid verklaart zich bereid één uur (van de vier uren) aan de natuurkunde af te staan onder voorwaarde, „dat de integrale uitvoering van het door de Commissie voor de Natuurkunde ontwikkelde programma voor mechanica-onderwijs op empirisch-inductieven grondslag als onderdeel van het onderwijs in natuurkunde gewaarborgd worde.”

Heeft de Commissie voor de Wiskunde wel een juist inzicht gehad in de beteekenis van de experimenteel-natuurkundig georiënteerde

¹⁾ Op een vergadering der Natuurkundige Vereeniging, onlangs onder voorzitterschap van prof. Coster gehouden, werd door het bestuur dier Vereeniging bepleit het geheele aantal mechanica-uren bij de natuurkunde in te lijven, en eventueel een uur daarvan aan de kosmografie te wijden; dit voorstel werd door de vergadering aangenomen. Ook deze inlijving werd in het reeds genoemde adres aan den Minister van Onderwijs bepleit, eveneens zonder nadere raadpleging der betrokken leeraren en zonder nader overleg met de Commissie-Beth.

mechanica, toen zij zich bereid verklaarde één van de vier mechanica-uren daarvoor aan de natuurkunde af te staan?

De mechanica is dat deel van de natuurwetenschap, dat zich grootendeels aan het experimenteele onderzoek onttrokken heeft; op scherpe definities en nauwkeurig opgestelde hypothesen is de mechanica gebouwd. Haar methode is niet meer de physische, die de Commissie bij het natuurkunde-onderwijs voorstaat: het experiment zij uitgangspunt en sta in het centrum van de beschouwing. Wanneer we deze onderwijsmethode bij de mechanica toepassen, wordt aan dit leervak geweld aangedaan, nog afgezien daarvan, dat lesproeven, die ons tot de begrippen snelheid, versnelling, eenparig versnelde beweging, enz. moeten voeren, nòch den docent, nòch onze leerlingen, — door het ontbreken van die exactheid, die juist hier een onvoorwaardelijke eisch is, — ooit bevredigen.

Langs empirischen weg te komen tot het begrip eenparig versnelde beweging en daardoor tot dat van versnelling, een experimenteele versnellingsbepaling langs verschillende hellingen uit te voeren, extrapolatie tot 90° (vrijen val) en tot 0° (inertie) daarbij toe te passen, de parabolische baan van een kogeltje onder invloed van den vrijen val en een eenparige beweging experimenteel vast te stellen, een empirisch onderzoek naar de versnelde en vertraagde beweging langs een slingerbaan, — zooals de Commissie wenscht, — zijn proeven, die veel tijd kosten en weinig resultaat opleveren: ze doen het begrip slechts vaag tot den leerling komen.

Ook indien men den tijd daartoe beschikbaar had, zou een dergelijke behandeling der mechanica niet de gewenschte zijn. Hoeveel te meer is dit het geval, nu men daartoe een (of zelfs twee) uren van het onderwijs aan de rationeele mechanica zou moeten onttrekken en daardoor aan de leerlingen het rustig verkrijgen van inzicht in de wiskundige behandeling der mechanica zou onthouden.

Inderdaad, de behandeling van de mechanica op empirisch-inductieven grondslag met opoffering van den tijd, die anders aan de behandeling der rationeele mechanica gewijd zou worden, is niet gerechtvaardigd. Ze houdt in een verlaging van het onderwijspeil der hogere burgerschool.

Dat bij het natuurkunde-onderwijs in Duitschland op de middelbare scholen ook in de lagere klassen natuurkunde-onderwijs ge-

geven wordt, dat daar dit onderwijs in concentrische leergangen wordt gedoceerd en de mechanica eerst op empirisch-inductieven grondslag, is wel bekend¹⁾. Wat dit laatste betreft, de oppositie tegen de „Kreide- und Schwammphysik” deed in het andere uiterste vervallen: ingewikkelde experimenten werden soms uitgedacht om de leerlingen begrippen bij te brengen of van eigenschappen te overtuigen, die langs anderen weg eenvoudiger en scherper tot hen konden komen.

De Commissie, die haar verder gaande wenschen blijkbaar in hoofdzaak geformuleerd heeft in verband met het leerplan der Duitse Oberrealschule, heeft daarbij over het hoofd gezien, dat de Nederlandsche onderwijstoestanden zoo geheel anders zijn dan de Duitse en wij daardoor met een geringer aantal lesuren aan onze hoogere burgerschool veel moeten bereiken, zooals in vroegere jaren ook veel daarmee bereikt is.

Het natuurkunde-onderwijs aan de Nederlandsche natuurwetenschappelijke onderwijsinrichting dient een eigen karakter te hebben, dient niet een navolging te zijn van een buitenlandsch instituut, maar een voorbeeld daarvoor.

Vóór eenige jaren zijn door de Regeering aan deze onderwijsinrichting te betreuren misvattingen begaan. Aan de herstelling hiervan dient gearbeid te worden; wij dienen er voor te waken, dat aan de destijds teweeggebrachte verzwakking van de kernvakken der school niet een nieuwe worde toegevoegd. De Vereeniging, wier doel het is de wetenschappelijke beoefening der natuurkunde aan te moedigen en te bevorderen, zij op haar hoede.

En mogen vooral zij, die als mannen van wetenschap beter dan anderen weten, hoezeer slechts liefde voor een vak en intensieve arbeid daarin ons tot de kern ervan doen doordringen en vertrouwd doen worden met alle bijzonderheden en eigenaardigheden daarvan, bedenken, dat ook toewijding aan het onderwijs en werkzaamheid op dat gebied vereischten zijn om over de moeilijkheden daarvan een oordeel te kunnen uitspreken.

Amsterdam, Juni 1928.

G. C. Gerrits.

¹⁾ Het doet eenigszins ouderwetsch aan de Commissie Grimsehl, Poske en Hahn naar voren te zien brengen; dit zou 20 jaar geleden up to date geweest zijn.

Ondergeteekende, abonné op

„Christiaan Huygens”

„N. T. voor Wiskunde” *)

„Euclides” (het vroegere Bijvoegsel)

verzoekt toezending van een exemplaar:

SCHUH en RUTGERS, Compendium der hoogere Wiskunde

Vierde deel, Tweede stuk, tegen den verminderden prijs à f 4.50. (Gewone prijs is f 6.00)

Vierde deel, Eerste en tweede stuk samen geb. à f 13.00. (Gewone prijs is f 15.50)

RUTGERS, Inleiding tot de Analytische Meetkunde

Eerste deel: Het platte Vlak. Gebonden à f 5.50 (Gewone prijs is f 6.50)

door bemiddeling van den boekhandel

direct per post.

Naam:

Woonplaats:

*) Ieder abonné heeft slechts recht op 1 ex. en mits besteld voor 1 Oct. 1928

BESTELKAART VOOR BOEKWERKEN.

Binnenland

1½ cts.

Aan de N.V. Erven P. NOORDHOFF's

Uitgeverszaak

POSTBUS 39

GRONINGEN.

Postbus . . . No. 39.
Giro Ned. Bank No. 1858.
Post giro . . . No. 6593.

BOEKBESPREKING.

Electronen en Atomen. Handleiding ter aanvulling van het Middelbaar en Voorbereidend Hooger Onderwijs in Natuur- en Scheikunde door Dr. C. H. Sluiter. Groningen. P. Noordhoff. 1928. f 1.40.

Het onderwijs in natuurkunde kan niet levend blijven, wanneer het niet de ontwikkeling der natuurkundige wetenschap op een constanten en liefst niet al te kleinen afstand volgt. Wie deze opmerking beaamt, zal ongetwijfeld met groote ingenomenheid het verschijnen begroeten van het hierboven aangekondigde werkje, dat in een helder geschreven overzicht van 51 bladzijden een inleiding geeft in de moderne atoomtheorie, die gedacht is als aanvulling op de in het M. en V. H. O. gebruikelijke leerboeken, waarin dit onderwerp veelal nog weinig tot zijn recht komt.

Na een kort inleidend hoofdstuk over de theorie der stralingsquanta (de schrijver gebruikt hiervoor het woord „photonen”, dat wel eens een terminologisch succes zou kunnen beteekenen) geeft Hoofdstuk II een uiteenzetting van den oorspronkelijken vorm van de theorie van Bohr, waarin voor het waterstofatoom de noodige berekeningen (die van de baandiameters en van de Rijdsbergconstante) worden uitgevoerd, terwijl de bespreking van de atomen met hooger atoomnummer uit den aard der zaak een meer refereerend karakter draagt. In Hoofdstuk III wordt met behulp van de verkregen inzichten het periodiek systeem besproken; Hoofdstuk IV beschouwt de chemische affiniteit in het licht der nieuwe leer. In Hoofdstuk V worden de verschillende soorten van spectra behandeld, in Hoofdstuk VI de toepassing van de theorie van de Bohr op de botsingen tusschen electronen en atomen. Het slothoofdstuk VII is aan de bespreking van de atoomkernen gewijd. Ten slotte volgt in 18 alinea's een overzichtelijke samenvatting van de verkregen resultaten.

De wijze, waarop de schrijver zijn taak heeft vervuld, verdient allen lof. Uit verschillende korte opmerkingen en orienteerende besprekingen krijgt men den indruk, dat hij ook de nieuwste ontwikkeling der atoomtheorie met aandacht volgt. Het is duidelijk, dat dit zijn werk niet gemakkelijker heeft gemaakt. Hij verstaat echter de kunst, zijn betoog zoo te formuleeren, dat het wetenschappelijk bevredigend is en toch op de leerlingen een helderen en bevattelijken indruk zal maken.

Wij twifelen er dan ook niet aan, of zijn werkje zal in handen van docenten, die zich gedrongen voelen, het opgroeiend geslacht reeds

vroeg in de denkwijzen der moderne physica in te wijden, op uitnemende wijze aan zijn doel beantwoorden.

E. J. Dijksterhuis.

Het natuurlijk getal in zoo streng mogelijke behandeling door *Dr. Fred. Schuh*, 156 blz. Prijs f 5.90. P. Noordhoff. 1928.

De korte „Inleiding” van dit boek begint aldus: „De bedoeling van dit boek is het begrip „natuurlijk getal” op zoo streng mogelijke wijze te ontwikkelen, zonder dat daarbij van eenige wiskundige voorkennis gebruik gemaakt wordt, dus dit begrip zoo diep mogelijk op te halen, slechts steunende op hetgeen voor ieder betoog noodig is, het zuiver logisch redeneeren.

Door de rekenkunde op deze wijze op te bouwen, blijkt, *dat de wiskunde* (die toch de rekenkunde als uitgangspunt moet nemen) *vrij is van tegenstrijdigheden.*”

In het eerste hoofdstuk worden dan de natuurlijke getallen ingevoerd als „teekens” of later ook als „representanten” daarvan. Het identiteitsbegrip wordt in dit hoofdstuk uitvoerig besproken. In het tweede hoofdstuk wordt het „grooter en kleiner” der natuurlijke getallen behandeld, waarbij zich ook de „volgorde” aansluit. Hoofdstuk III behandelt de toepassing op het tellen, waarbij eerst hoeveelheden in 't algemeen, dan nummerende hoeveelheden en daarna het tellen van een hoeveelheid (waarbij de hoofdeigenschap van het tellen) behandeld wordt. Getallenhoeveelheden en intervallen sluiten dit hoofdstuk. Het vierde hoofdstuk „Verbindingen van twee natuurlijke getallen” vormt de inleiding tot de volgende hoofdstukken, die de bewerkingen van natuurlijke getallen, ook in verband met hoeveelheden, inhouden. Deelbaarheidseigenschappen, ontbinding in priemfactoren, het getal nul (dit laatste: hoofdstuk X) en een „Register” beëindigen het werk, dat ook nog tal van vraagstukken bevat.

Een kritische bespreking van dit werk is niet eenvoudig en dat wel voornamelijk hierom, omdat verschillende schrijvers niet gelijk denken omtrent de fundamenteen der rekenkunde. Dit laatste kan ook wel niet anders: men grijpt hier in de diepste diepten van onze menselijke kennis. Want 't lijkt nu wel heel eenvoudig de natuurlijke getallen als „teekens” te gaan beschouwen, maar deze teekens zijn toch ook „dingen”, gebonden aan onze tijd-ruimte en men kan in een schoolboek nu wel over deze zaak heenglijden, maar of een boek, dat zich voorstelt de rekenkunde zoo diep mogelijk op te halen, dit mag doen, wil ik maar liever niet wagen hier te beslissen. Het komt mij trouwens voor, dat prof. Schuh zich verschillende moeilijkheden volstrekt niet ontveinsd heeft, getuige zijn noot op blz. 13, waarin hij zegt bij het identiteitsbegrip een viertal oordeelen te hebben ingevoerd als „axioma's”. En ik vermoed, dat de schrijver dan toch ook wel zal willen toegeven, dat volgens zijn wijze van behandelen in de „diepte” nog wel meer axioma's zitten.

Ik zou gaarne ten opzichte van de verdere behandeling twee opmerkingen willen maken: § 95 zegt: „Men noemt de *hoeveelheden* A

en B op elkaar afgebeeld, als de elementen van beide hoeveelheden gepaard zijn, d. w. z. als ieder element van A met één en slechts één element van B tot een paar vereenigd is en omgekeerd. Men spreekt dan van *correspondeerende elementen* en van een *(1,1) correspondentie tusschen beide hoeveelheden*". En onmiddellijk hierop volgt § 96: Men zegt, dat de hoeveelheden A en B *gelijkwaardig of equivalent zijn, als ze op elkaar kunnen worden afgebeeld*, dus als een paring der elementen van beide hoeveelheden mogelijk is." Nu vraag ik mij af, waarom aan deze definitie de schrijver niet heeft laten voorafgaan de stelling: *Als één paring der elementen van beide hoeveelheden mogelijk is, dan kan men nimmer tot een falen der paring besluiten*.

Een tweede opmerking, die meer van algemeenen aard is, is deze: Prof. Schuh behoort zeker niet tot de mathematici, die onduidelijk schrijven, dus hij behoeft het zich zeker niet als iets persoonlijks aan te trekken, wanneer ik zeg, dat hij nu niet moet denken, dat zijn boek zich „practisch” laat bestudeeren „zonder eenige wiskundige voorkennis”. O ja, „in theorie” kan hij zijn meening wel volhouden, maar het valt mij zoo sterk bij haast alle mathematici van den tegenwoordigen tijd op, dat zij vergeten, dat hun manier van zeggen zich niet aansluit bij de denkwijze van den „homo novus”, maar bij die van hem, die al heel wat achter den rug heeft!

Overigens kan ik niet anders dan lof voor dit werk hebben, vooral ook hierom, omdat het boek in allerlei opichten *dwingt* over de rekenkundige wetenschap na te denken. Dit komt mij trouwens voor het groote voordeel te zijn van de lectuur van dergelijke boeken door ons „docenten”. Zóó wordt men b.v. wel sterk doordrongen van het feit, dat de wereld, dus ook de wetenschap, geen belangrijker principe kent dan: het *correspondentie-principe*.

D. P. A. V.

Ergänzungshefte zu W. Lietzmann's Mathematischem Unterrichtswerke. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner.

1. Ueberblick über die Geschichte der Elementarmathematik, von Dr. W. Lietzmann. 1926, 68 bldz. RM. 1.80.

2. Technische Aufgaben zur Mathematik, von Dr. M. Hauptmann. 1927, 108 bldz. RM. 3.—.

3. Aufbau und Grundlage der Mathematik, von Dr. W. Lietzmann, 1927, 89 bldz. RM. 2.20.

Het „Mathematische Unterrichtswerk für höhere Knabenschulen” van Dr. W. Lietzmann is een corpus van samenhangende leerboeken voor het Duitsche middelbaar en voorbereidend hooger onderwijs, van sexta tot oberprima. Rekenboeken, theorie en vraagstukkenverzamelingen voor algebra en analyse, evenzoo voor meetkunde, soms in afzonderlijke bewerkingen voor gymnasia en voor Realanstalten, gedeeltelijk oude werken, door den heer Lietzmann en zijne medewerkers herzien, gedeeltelijk oorspronkelijk door dezen samengesteld. Hierop

zijn thans eenige aanvullingsdeeltjes verschenen, die ten doel hebben, tegemoet te komen aan de eischen, die de moderne opvattingen van wiskunde-onderwijs stellen.

Het eerste *Ergänzungsheft* geeft eene beknopte geschiedenis van de lagere wiskunde, waaronder hier verstaan moet worden het gedeelte der wiskunde, dat op de (Duitsche) middelbare scholen onderwezen wordt. Het is bedoeld als een boek voor de leerlingen. Na een kort overzicht van de ontwikkeling der lagere wiskunde gegeven te hebben bespreekt de schrijver achtereenvolgens de geschiedenis van de volgende deelen afzonderlijk: cijferen, rekenkunde, algebra, vlakke meetkunde en stereometrie, trigonometrie, analyse (analytische meetkunde en infinitesimaalrekening) en leer der kegelsneden (elementair-meetkundig, analytisch, en synthetisch-projectief). Het boekje is in zeer aangename trant geschreven, en zal door de leerlingen zeer zeker genoten kunnen worden. Men zou allicht meenen, dat den jeugdigen lezers wel wat te veel geschiedenis opeens voorgezet wordt, maar men moet bedenken, dat in de deelen van het *Unterrichtswerk* reeds herhaaldelijk historische opmerkingen voorkomen, en wel voornamelijk in dezen vorm, dat gevraagd wordt, vraagstukken volgens eene aanwijzing op te lossen op de manier van een bepaalden auteur (bijvoorbeeld: de constructie van eene raaklijn aan een cirkel door een punt buiten dien cirkel, zooals die in de *Elementen* van Euclides, III, 17, voorkomt, wordt medegedeeld, en het bewijs van den leerling verlangd). Zodoende heeft de leerling reeds eenige kennis van historische feiten, als hij het aanvullingsdeeltje ter hand neemt, waarin dan weer telkens naar bepaalde vraagstukken van het *Unterrichtswerk* wordt verwezen.

Er zal wel geen sprake van zijn, dat dit boekje ooit als leiddraad voor het onderwijs in de geschiedenis der wiskunde aan een Nederlandsche school zal worden gebruikt. Maar het lijkt mij aanbevelenswaardig voor schoolbibliotheken. Aangenamer zou het natuurlijk zijn, als er een geschikt Nederlandsch werkje op dit gebied bestond, waarin de Vaderlandsche wiskundegeschiedenis wat naar voren was gebracht ten koste van de algemeene, waar onze spreekwoordelijke Bartjes de plaats vond, die hier aan Adam Riese toekomt, waarin wat meer gesproken werd over Snellius en Stevin, De Wit en Huygens, desnoods ook over Hudde, Van Schooten en Van Swinden. Maar zulk een boekje bestaat er voorzoover ik weet niet, en dus wil ik dit *Ergänzungsheft* toch eens in de aandacht mijner collega's aanbevelen. Het is natuurlijk voor den Duitschen scholier bestemd, en men vindt er dus menige opmerking, die betrekking heeft op bewijzen of constructies, die in Duitschland gebruikelijk zijn en te onzent niet; men vindt er vooral vele opmerkingen over de geschiedenis der in Duitschland gebruikelijke terminologie (hier is de invloed van den in het voorbericht uitdrukkelijk genoemden Tropfke duidelijk merkbaar), ook is de leerstof der Duitsche scholen niet precies die der onze, maar dat alles neemt niet weg, dat het boekje ook voor den belangstellenden Nederlandschen scholier aantrekkelijke en leerzame lectuur biedt.

Het tweede *Ergänzungsheft* bevat toepassingen der wiskunde op technische onderwerpen. Vele vraagstukken zijn van zeer elementairen

aard, de oplossing van andere vereischt een weinig integraalrekening. Voor hogere burgerschool en gymnasium lijkt deze verzameling mij van weinig belang, al zullen misschien sommige ingenieurs-leeraren er aardige problemen ter illustratie hunner wiskundelessen uit kunnen halen, en al zouden enkele leerlingen er misschien gaarne een blik in slaan, al ware het slechts, omdat er onderwerpen in ter sprake komen, die hun aandacht veelal weten te boeien (spoorwegen).

Van zeer veel meer beteekenis, van groot belang zelfs, ook voor het Nederlandsche onderwijs, lijkt mij het derde *Ergänzungsheft*: *Aufbau und Grundlage der Mathematik*. Het is evenals de vorige bedoeld voor den leerling, en bevat eenige onderwerpen, die hem een kijk moeten geven op de grondslagen der wiskunde en op de philosophische quaesties, die daarmee samenhangen. Mochten binnenkort de plannen der commissie-Beth verwezenlijkt worden, en ons onderwijs daardoor wat minder dan thans op de rekentechniek gericht zijn, dan zou dit boek ook hier te lande m. i. zeer goede diensten kunnen bewijzen. Het werkje is verdeeld in vier hoofdstukken: logica, meetkunde, „Arithmetik” (rekenkunde en algebra), en analyse. In het eerste behandelt de schrijver heel enkele dingen uit de (klassieke) logica, de definities, axiomata bewijzen, e. d., wijdt een paar paragraphen aan de meest voorkomende fouten in definities en bewijzen, aan noodzakelijk en voldoende zijn van voorwaarden, omkeering van stellingen, directe en indirecte bewijzen, volledige inductie, enz. In het hoofdstuk over meetkunde komen onder meer ter sprake grondbegrippen als oppervlak, kromme lijn en lengte, het axiomastelsel van Euclides en dat van Hilbert als voorbeeld van een modern stelsel; aan een bekend voorbeeld wordt het belang der axiomata van volgorde voor de meetkundige bewijzen gedemonstreerd. Voorts worden eenige paragraphen gewijd aan het bestaan van niet-Euclidische en meerdimensionale meetkunde. In het derde hoofdstuk wordt o.a. de theorie der irrationale getallen volgens Dedekind besproken en een paar axiomastelsels voor de rekenkunde genoemd, en een enkel woord gezegd over verzamelingsleer; het korte vierde hoofdstuk handelt voornamelijk over de begrippen functie, limietovergang, continuïteit en differentieerbaarheid.

Dit boekje wordt met den meesten aandrang in de aandacht van de lezers van „Euclides” aanbevolen. Het is in zeer duidelijken en bevattelijken trant geschreven en gemakkelijk leesbaar, zoodat iemand, die niet zijne leerlingen een der in het werkje behandelde onderwerpen bespreken wil, er een uitmuntenden leiddraad in vindt, ja zelfs door eenvoudige vertaling een geschikt stukje dictaat verkrijgt. Ook voor schoolbibliotheken lijkt het mij aanbevelenswaardig.

J. H. S.

OVER DEN VORM $\frac{0}{0}$ IN DE ALGEBRA

DOOR

Ir. O. H. STUIVER, c.i.

Als de rationale gebroken algebraïsche functie $\varphi(x) = \frac{f(x)}{F(x)}$ voor $x = a$ den vorm $\frac{0}{0}$ aanneemt, dan is

$$\varphi(x) = \frac{(x-a)f_1(x)}{(x-a)F_1(x)}.$$

We kunnen nu nemen:

1°. $x \neq a$, dus $x - a \neq 0$, dan is $\varphi(x) = \frac{f_1(x)}{F_1(x)}$,

2°. $x = a$, dus $x - a = 0$, dan is $\varphi(x) = \frac{0}{0}$.

Noemen we de waarde, die de functie $\varphi(x)$ aanneemt voor een bepaalde waarde van het argument: de eigenlijke waarde van de functie voor die bepaalde waarde van het argument, dan is

$$\text{de eigenlijke waarde } \varphi(a) = \frac{0}{0} \text{ onbepaald;}$$

$$\text{echter is } \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \frac{f_1(a)}{F_1(a)}.$$

Noemen we de limiet, waartoe de functie $\varphi(x)$ nadert, als het argument nadert tot een bepaalde waarde: de oneigenlijke waarde van de functie voor die bepaalde waarde van het argument, dan is

$$\text{de oneigenlijke waarde } \varphi(a) = \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \frac{f_1(a)}{F_1(a)} \text{ bepaald.}$$

Vervangen we de eigenlijke onbepaalde waarde $\varphi(a)$ door de oneigenlijke bepaalde waarde $\varphi(a)$, dan bereiken we hiermee, dat steeds, voor alle waarden van x , geldt:

$$\varphi(x) = \frac{f_1(x)}{F_1(x)}.$$

Men treft wel aan vraagstukken als: „Wat is de waarde van $\frac{x^2-1}{x^2+4x-5}$ voor $x=1$?” met de volgende „oplossing”:

$$\frac{x^2-1}{x^2+4x-5} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+5)} = \frac{x+1}{x+5};$$

voor $x=1$ is de waarde $\frac{1}{3}$.

Om te beginnen is de eigenlijke waarde van den vorm voor $x=1$ onbepaald. Bedoeld wordt: „Bepaal de oneigenlijke waarde van $\frac{x^2-1}{x^2+4x-5}$ voor $x=1$ ”, d. i.

„Bepaal de limiet van $\frac{x^2-1}{x^2+4x-5}$ voor $x \rightarrow 1$ ”.

Verder is de boven gegeven „oplossing” niet juist, want teller en noemer van de breuk zijn gedeeld door $x-1$, terwijl beschouwd wordt het geval, waarvoor $x=1$ is, m. a. w. teller en noemer zijn door nul gedeeld, hetgeen niet geoorloofd is.

De juiste oplossing is:

de oneigenlijke waarde van $\frac{x^2-1}{x^2+4x-5}$ voor $x=1$ is

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^2+4x-5} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+5)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x+5} = \frac{1}{3}.$$

Bij vergelijkingen met één onbekende, waarbij de onbekende in de noemers van breuken voorkomt, kan het gebeuren, dat het eerste lid $\varphi(x)$ van de op nul herleide vergelijking $\varphi(x)=0$, waarin $\varphi(x) = \frac{f(x)}{F(x)}$ is, voor een bepaalde waarde van x den vorm $\frac{0}{0}$ aanneemt.

De wortels van de vergelijking $\varphi(x)=0$ zijn waarden van x , waarvoor $f(x)=0$ is, maar $F(x) \neq 0$, immers voor die waarden van x gaat de vergelijking $\varphi(x)=0$ over in de getallengelijkheid $0=0$. Men lost dus op $f(x)=0$; die wortels dezer vergelijking, welke $F(x)$ niet nul doen worden zijn de wortels van de vergelijking $\varphi(x)=0$.

Zij

$$f(x) = (x-a)(x-b)\dots(x-n)f_1(x)$$

en

$$F(x) = (x-a)(x-b)\dots(x-n)F_1(x)$$

en $\frac{f_1(x)}{F_1(x)} = 0$ de onvereenvoudigbare gedaante van $\frac{f(x)}{F(x)} = 0$, $a, b, \dots, n$ zijn wortels van $f(x) = 0$, maar ook van $F(x) = 0$, dus niet van $\varphi(x) = 0$. Alle wortels van $f_1(x) = 0$ zijn wortels van $\frac{f_1(x)}{F_1(x)} = 0$. Zijn ze het echter ook van $\varphi(x) = 0$?

We zullen aantonen, dat het antwoord op deze vraag niet steeds, zonder meer, bevestigend is. Beschouwen we daartoe het geval, dat $f_1(x) = (x-n')f_2(x)$, terwijl $n' = n$ is. Omdat $\frac{f_1(x)}{F_1(x)}$ onvereenvoudigbaar is, moet

$$F_1(x) \neq (x-n')F_2(x) \text{ zijn;}$$

$n(=n')$ is een wortel van $f_1(x) = 0$ en niet van $F_1(x) = 0$, dus een wortel van $\frac{f_1(x)}{F_1(x)} = 0$. Onderzoeken we verder of n een wortel is van $\varphi(x) = 0$.

$$\varphi(x) = \frac{(x-a)(x-b)\dots(x-n)(x-n')f_2(x)}{(x-a)(x-b)\dots(x-n)F_1(x)}.$$

De eigenlijke waarde $\varphi(n) = \frac{0}{0}$ is onbepaald, dus n is geen (eigenlijke) wortel van $\varphi(x) = 0$, want als we voor x substitueeren n krijgen we $\frac{0}{0} \neq 0$.

Wel is de oneigenlijke waarde $\varphi(n) = \lim_{x \rightarrow n} \varphi(x) = 0$ bepaald.

Definieeren we de gelijkstelling van een oneigenlijke bepaalde waarde p en een bepaalde waarde p als een oneigenlijke getallengelijkheid, dan kunnen we verder definiëren: een oneigenlijke wortel van een vergelijking is een waarde van de onbekende, die de beide leden van de vergelijking tot een oneigenlijke getallengelijkheid maakt.

Volgens deze opvatting is n een oneigenlijke wortel van de vergelijking $\varphi(x) = 0$, immers voor $x = n$ gaat de vergelijking $\varphi(x) = 0$ over in de oneigenlijke getallengelijkheid $0 = 0$.

Moet worden opgelost de vergelijking

$$\frac{x^2 - 6x + 9}{(x + 5)(x - 3)} = 0$$

waarvan de onvereenvoudigbare gedaante is

$$\frac{x - 3}{x + 5} = 0$$

dan is 3 wel een wortel van die onvereenvoudigbare vergelijking, maar 3 is geen (eigenlijke) wortel van de oorspronkelijke, niet-vereenvoudigde vergelijking, want bij substitutie $x = 3$, wordt het 1^{ste} lid van deze vergelijking $\frac{0}{0}$, dus onbepaald, terwijl het 2^{de} lid van de vergelijking, nul is, dus bepaald. Echter is 3 wel een oneigenlijke wortel van de niet-vereenvoudigde vergelijking, want voor $x = 3$, neemt het eerste lid de oneigenlijke bepaalde waarde nul aan, immers:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{(x + 5)(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x + 5} = 0.$$

Inhoud van den vierden jaargang.

Artikelen.	Blz.
Dr. H. J. E. BETH, Eenvoudige beschouwingen uit de meetkunde van GAUSS	1, 58
F. VEEN, Bijdrage tot de regeling van het wiskunde-onderwijs aan de H. B. S.	25
De universitaire opleiding tot leeraar in wiskunde en aanverwante vakken	41
Ontwerp van een Leerplan voor het Onderwijs in Wiskunde en Werktuigkunde op de H. B. S. met vijfjarigen cursus.	88
P. W., Eenwaardig of meerwaardig?	97
Naschrift van Prof. Dr. J. WOLFF	104
„ „ Prof. Dr. F. SCHUH	105
E. DE HAIRS, Het cultuurhistorisch element in het wiskunde-onderwijs.	106
D. P. A. V., Het z.g. twijfelachtige geval van gelijk- en gelijkvormigheid	118
Ir. D. J. KRUYTBOSCH, De Formule van HERON	127
Dr. E. J. DIJKSTERHUIS, Grieksche wiskunde.	134
S. W. F. MARGADANT, De drievlakshoek	178
D. P. A. V., Eenwaardig of meerwaardig.	179
Dr. F. SCHUH, De waarde van het wiskundig redeneeren	181
Dr. A. KETTNER, Nieuwe methode voor inhoudsberekening van pyramide, boldeelen, enz.	210
Dr. PAUL DE VAERE, Eenwaardig of meerwaardig?	216
Prof. Dr. J. WOLFF, Bewerkingen met breuken en haar verband met verschillende gebieden der wiskunde.	226
P. W., Naschrift op een alinea van het artikel van Prof. SCHUH	238
Dr. F. SCHUH, Naschrift op het naschrift van den heer WYDENES	241
CH. M. VAN DEVENTER, Plato's bekendheid met irrationeele verhoudingen	242
Dr. E. J. DIJKSTERHUIS, De historische behandelingswijze van de axiomata der mechanica van NEWTON.	245
Dr. G. C. GERRITS, Het onderwijs in de Natuurkunde aan de hogere burgerschool	256
Ir. O. H. STUIVER, Over den vorm $\frac{0}{0}$ in de algebra	274

Boekbesprekingen.

	Blz.
P. WIJDENES, Leerboek der Goniometrie en Trigonometrie . . .	34
F. ENRIQUES, Gli Elementi d'Euclide	36
E. RUFINI, Il „metodo" di Archimede	36
F. J. VAES, Leerboek der Stereometrie	38
Dr. M. DE HAAS, Thermodynamika	82
B. P. HAALMEIJER en J. H. SCHOGT, Inleiding tot de leer der Verzamelingen	83
P. JANSEN en G. W. VAN BRINK, Beknopte theorie der reken- kunde met opgaven	120
H. G. FORDER, The Foundations of Euclidean Geometry . . .	122
Dr. J. A. BARRAU, Analytische Meetkunde, II.	125
F. HAUSDORFF, Mengenlehre	125
H. A. KRAMERS en HELGE HOLST, De bouw der atomen . . .	175
Conductibilité électrique des métaux et problèmes connexes .	177
Dr. J. F. DE VRIES, Beknopte mechanica	213
Dr. F. SCHUH en Dr. J. G. RUTGERS, Compendium der hoogere wiskunde IV 1	213
G. L. PARSONS, Elementary Differential Calculus	214
„ Elementary Integral Calculus	214
Dr. P. MOLENBROEK, Leerboek der Stereometrie	215
Dr. C. H. SLUITER, Electronen en Atomen	269
Dr. FRED. SCHUH, Het natuurlijke getal	270
Dr. W. LIETZMANN, Überblick über die Geschichte der Elementar- mathematik	272
Dr. M. HAUPTMANN, Technische Aufgaben zur Mathematik . .	272
Dr. W. LIETZMANN, Aufbau und Grundlage der Mathematik . .	273

Portretten van de Professoren

Dr. J. C. KLUYVER, Dr. JAN DE VRIES, W. H. L. JANSSEN VAN RAAY,
Dr. HK. DE VRIES, Dr. W. A. VERSLUYS, Dr. F. SCHUH.

Zoo juist verscheen:

P. WIJDENES

MEETKUNDE VOOR HET NIJVERHEIDSONDERWIJS

124 blz., 190 figuren met gradenboog en antw.

Prijs geb. f 1.95.

Verschenen:

De derde druk van

P. WIJDENES

NIEUWE SCHOOLALGEBRA

Prijs geb. f 2.25.

Ter perse om heel spoedig te verschijnen:

P. WIJDENES

ALGEBRA VOOR NIJVERHEIDSONDERWIJS
en

REKENKUNDE VOOR NIJVERHEIDSONDERWIJS

Zoo juist verscheen:

DE PROEF OP DE SOM

Reken- en Taalboek voor het 7e leerjaar,

DOOR

A. BROUWER.

Prijs f 0.60.

UITGAVEN VAN P. NOORDHOFF TE GRONINGEN.

Zoo juist verschenen:

COMPENDIUM DER HOOGERE WISKUNDE

DOOR

Dr. Fred. SCHUH

EN

Dr. J. G. RUTGERS

Vierde deel, tweede stuk, Differentiaalvergelijkingen

Prijs f 6.00. Voor abonné's N. T. v. Wisk., Chr. Huygens en Euclides
tot 1 Oct. a.s. **f4.50**

Eerste en tweede stuk samen geb. f 15.50. Voor abonné's
N. T. v. Wisk., Chr. Huygens en Euclides tot 1 Oct. a.s. . **f13.00**

Zoo juist verscheen:

INLEIDING TOT DE ANALYTISCHE MEETKUNDE

DOOR

Dr. J. G. RUTGERS

EERSTE DEEL: HET PLATTE VLAK.

Met meer dan 120 figuren en ruim 250 vraagstukken.
Tweede druk. Prijs geb. f 6.50.

Voor abonné's N.T. v. Wisk., Chr. Huygens en Euclides tot
1 Oct. a.s. 5.50.

UITGAVEN VAN P. NOORDHOFF TE GRONINGEN.