

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDAC-
TIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN
J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

MET MEDEWERKING VAN

Dr. H. J. E. BETH
DEVENTER

Dr. E. J. DIJKSTERHUIS
OISTERWIJK

Dr. G. C. GERRITS
AMSTERDAM

Dr. B. P. HAALMEIJER
AMSTERDAM

Dr. D. J. E. SCHREK
UTRECHT

Dr. P. DE VAERE
BRUSSEL

Dr. D. P. A. VERRIJP
ARNHEM

4e JAARGANG 1927/28, Nr. 5



P. NOORDHOFF — GRONINGEN

Prijs per Jg. van 18 vel f 6.—. Voor inteekenaars op het
Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde en Christiaan Huygens f 5.—.

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken, verschijnt in zes tweemaandelijksche afleveringen, samen 18 vel druks. Prijs per jaargang *f* 6.—. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6.—) of op „Christiaan Huygens” (*f* 10.—) zijn ingeteekend, betalen *f* 5.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Het honorarium voor geplaatste artikelen bedraagt *f* 20.— per vel.

De prijs per 25 overdrukken of gedeelten van 25 overdrukken bedraagt *f* 3,50 per vel druks *in het vel gedrukt*. Gedeelten van een vel worden als een geheel vel berekend. Worden de overdrukken buiten het vel verlangd, dan wordt voor het afzonderlijk drukken bovendien *f* 6.— per vel druks in rekening gebracht.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

I N H O U D.

	Blz.
Prof. Dr. F. SCHUH, De waarde van het wiskundig redeneeren . . .	193
Dr. A. KETTNER, Nieuwe methode voor inhoudsberekeningen . . .	210
Boekbesprekingen	213
Dr. PAUL DE VAERE, Eenwaardig of meerwaardig	216
Prof. Dr. J. WOLFF, Bewerkingen met breuken	226
P. W. Naschrift op blz. 194	238
Prof. Dr. F. SCHUH, Naschrift hierop	241



De redactie heeft het genoegen in deze aflevering het portret te geven van Prof. Dr. W. A. VERSLUYS; zij hoopt de portretten van al onze hoogleeraren den intekenaars achtereenvolgens te kunnen aanbieden.



De **TWEDE** druk van deel II Nieuwe School-Algebra verscheen eind Aug. 1927; de **DERDE** gaat in Juni ter perse. Wie de N. S. Alg. niet kent, wordt verzocht een pres. ex. aan te vragen.—

Verder kan het gebeuren, dat een der vergelijkingen door de substitutie in $0 = 0$ overgaat. Aan die vergelijking wordt door ieder stel waarden der onbekenden voldaan, zoodat die vergelijking uit het stelsel kan worden weggelaten. De vergelijking van het oorspronkelijke stelsel, die tot de vergelijking $0 = 0$ gevoerd heeft, is dan afhankelijk van de overige vergelijkingen van het stelsel.

Ook kan zich het geval voordoen, dat b.v. bij het bereiken van het door (5), (6) en (7) aangewezen stelsel in geen der vergelijkingen (5) de onbekende x_{n-2} voorkomt. In dat geval lossen we een andere, wel in een der vergelijkingen voorkomende (d. w. z. met van 0 verschillende coëfficiënt voorkomende), onbekende op en substitueeren de uitkomst in de overige vergelijkingen (5). Heeft het stelsel (5) oplossingen, dan kan men een oplossing van (5) invullen in (6) en (7), waarna men in (6) aan x_{n-2} een willekeurige waarde kan toekennen en vervolgens x_{n-1} uit (6) kan oplossen; nadat deze waarden van x_{n-2} en x_{n-1} in (7) zijn ingevuld, is x_n uit (7) op te lossen. Het oorspronkelijke stelsel (2) heeft nu dus oneindig veel oplossingen, doordat aan x_{n-2} (en mogelijk ook aan een of meer der overige onbekenden) een willekeurige waarde kan gegeven worden.

De beschreven handelwijze is eveneens van toepassing op p vergelijkingen met q onbekenden, waarbij het onverschillig is of $p = q$, $p > q$ of $p < q$ is. Zoo men in den loop der herleidingen niet stuit op een strijdige vergelijking als $3 = 0$, komt men uit op een bijzonder stelsel of op een stelsel, dat een onvolledig bijzonder stelsel genoemd kan worden en op te vatten is als een bijzonder stelsel, waaruit een of meer vergelijkingen zijn weggelaten; zulk een stelsel is op te lossen na aan één of meer der onbekenden een willekeurige waarde te hebben toegekend.

Als voorbeeld van een onvolledig bijzonder stelsel nemen we:

$$\begin{aligned} L_1(x_1, x_2, x_3) &= 0, & L_2(x_1, x_2, x_3, x_4) &= 0, \\ L_3(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) &= 0, & L_4(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) &= 0, \\ L_5(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}) &= 0, \end{aligned}$$

waarbij de vet gedrukte onbekenden weer in de vergelijkingen met van 0 verschillende coëfficiënten voorkomen. Men kan aan de (nergens vet gedrukte) onbekenden x_1 , x_2 , x_5 , x_8 en x_{10} willekeurige waarden toekennen, waarna men achtereenvolgens de vet gedrukte onbekenden x_3 , x_4 , x_6 , x_7 en x_{10} kan oplossen. Voor het

oplossen dier onbekenden behoeft men natuurlijk niet tot het willekeurig aannemen van x_1, x_2, x_5, x_8, x_9 over te gaan door daarvoor willekeurig verzonnen getallen in de plaats te stellen, maar men kan (wat beter is) volstaan met aan die onbekenden willekeurig gekozen waarden toegekend te denken, waardoor men x_3, x_4, x_6, x_7 en x_{10} uitgedrukt krijgt in x_1, x_2, x_5, x_8 en x_9 . Hiermede zijn dan alle oplossingen van het oorspronkelijke stelsel (dat natuurlijk minstens 5 vergelijkingen bevat) gevonden.

Is het lineaire stelsel tot een volledig of onvolledig bijzonder stelsel teruggebracht, dan is daarmede tevens een hoofddeterminant van de matrix der coëfficiënten van de onbekenden in de oorspronkelijke vergelijkingen gevonden, nl. de determinant, waarvan de kolommen behooren bij de vet gedrukte onbekenden en waarvan de rijen behooren bij die vergelijkingen, waaruit de vergelijkingen van het volledige of onvolledige bijzondere stelsel ontstaan zijn, dus bij die vergelijkingen, welke niet in den loop der herleiding in identiteiten ($0 = 0$) zijn overgegaan. In het bovenstaande voorbeeld is dus de graad van den hoofddeterminant (rang van de matrix, die 5 of meer rijen en 10 kolommen bevat) gelijk aan 5, terwijl die hoofddeterminant zoo gekozen kan worden, dat daarin de bij $x_3, x_4, x_6, x_7, x_{10}$ behorende kolommen voorkomen. Komt b.v. in $L_3 (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \mathbf{x_6})$ ook x_5 met een van 0 verschillende coëfficiënt voor, dan kan men, in plaats van x_5 , ook x_6 willekeurig aannemen en x_5 (in plaats van x_6) oplossen. De hoofddeterminant kan dan ook zoo gekozen worden, dat daarin de bij $x_3, x_4, x_5, x_7, x_{10}$ behorende kolommen voorkomen. Daar het berekenen van determinanten en het opzoeken van een hoofddeterminant uit een matrix door middel van berekening van determinanten een tijdroovend werk is, is de in het voorgaande beschreven methode der gelijkwaardige stelsels in getallenvoorbeelden verre te verkiezen. Voor algemeene discussies blijft natuurlijk de methode met determinanten haar gróote waarde behouden.

Het wil mij voorkomen, dat het aanleeren van de methode der gelijkwaardige stelsels bij het middelbaar onderwijs geen bezwaar kan opleveren. Daartegenover moet men natuurlijk de andere methoden (die eigenlijk geen volledig uitgewerkte methoden zijn, zoo daaraan niet het begrip „gelijkwaardige stelsels” ten grondslag ligt), de methode der egalisatie, de methode der substitutie, of hoe

ze verder mogen heeten, weglaten, als zijnde zonder gelijkwaardigheidsbeschouwingen verder vrijwel waardeloos.

Het zal wel duidelijk zijn, dat het bij de bespreking van de methode ter oplossing van een stelsel lineaire vergelijkingen niet mijn bedoeling geweest is, dat de theorie daarvan aan de leerlingen moet worden voorgezet in den eenigszins abstracten vorm, waarin ik dien heb voorgedragen. Men kan natuurlijk het essentiele der methode even goed aan bepaalde getallenvoorbeelden duidelijk maken; hierbij doet men goed meerdere voorbeelden te behandelen en deze zoo te kiezen, dat de leerlingen ook met de besproken bijzonderheden (strijdigheid en afhankelijkheid) kennis maken, beginnend met een geval, waarbij er evenveel vergelijkingen als onbekenden zijn en zich bij de herleiding geen enkele bijzonderheid voordoet (en waarbij men dus op een volledig bijzonder stelsel uitkomt).

Reeds bij de allereerste kennismaking met het oplossen van lineaire stelsels, dus bij 2 vergelijkingen met 2 onbekenden, kan men de behandelde methode volgen, eerst bij getallenvoorbeelden, waaraan men het algemeene geval en de gevallen van strijdigheid en afhankelijkheid kan demonstreeren; daarop kan men dan de discussie van het stelsel

$$a_1x + b_1y = c_1, \quad a_2x + b_2y = c_2$$

laten volgen, welke discussie verder nog meetkundig kan worden toegelicht. Vervolgens kan men het geval van drie vergelijkingen met drie onbekenden behandelen, om daarna iets omtrent de behandeling van p vergelijkingen met q onbekenden aan de hand van getallenvoorbeelden mede te deelen. Als hoofdzaak dient hierbij steeds het begrip van gelijkwaardigheid op den voorgrond gesteld te worden, meer dan dit in vele schoolboeken geschiedt; als een leerboek, waarin dit begrip reeds vroeg wordt ingevoerd (hetgeen wenschelijk is om het goed tot zijn recht te doen komen) en ten grondslag gelegd wordt aan het oplossen van vergelijkingen, noem ik de Nieuwe School-Algebra van P. WIJDENES.

Na deze eenigszins uitvoerige bespreking van het oplossen van een stelsel lineaire vergelijkingen ga ik over tot de voor de begripsvorming zoo belangrijke logische omkeering van stellingen,

de zoogenaamde contrapositie, en het vormen van omgekeerden van stellingen.

Heeft men een stelling van den vorm: „uit A en B volgt C ”, dan kan men die stelling ook aldus uitspreken: „uit A en niet- C volgt niet- B ”, waarin niet- C de ontkenning van C beteekent. De juistheid dier omzetting blijkt onmiddellijk door een redeneering uit het ongerijmde. Is nl. de eerstgenoemde stelling juist, terwijl A en niet- C gegeven zijn, dan kan B niet gelden, daar men anders uit A en B tot C zou kunnen besluiten, in strijd met het gegeven niet- C . De beide stellingen „uit A en B volgt C ” en „uit A en niet- C volgt niet- B ” houden dus geheel hetzelfde in. Twee dergelijke stellingen, waarvan de eene uit de andere ontstaat door het gestelde met een deel van het onderstelde te verwisselen, gepaard gaande met ontkenning der verwisselde uitspraken, zullen we elkaars logische omkeering noemen.

Feitelijk heeft men in het beschouwde geval niet met twee stellingen, maar slechts met verschillende formuleeringen van een en dezelfde stelling te doen. Het is van belang zich van de mogelijkheid van genoemde omzetting eens en vooral rekenschap gegeven te hebben, opdat men niet in ieder voorkomend geval opnieuw de redeneering uit het ongerijmde behoeft te herhalen; hierdoor spaart men denk-
arbeid uit, overeenkomstig het beginsel van MACH betreffende de oeconomie van het denken.

Als een eenvoudig voorbeeld van contrapositie noem ik de stelling: „In een koordenvierhoek zijn twee overstaande hoeken elkaars supplement” met de logische omkeering: „Zijn in een vierhoek twee overstaande hoeken niet samen 180° , dan is de vierhoek geen koordenvierhoek”. Het deel van het onderstelde, dat aan de verwisseling niet meedoet, is het gegeven, dat men met een vierhoek te doen heeft. Een dergelijk deel van het onderstelde, dat ook na de omzetting tot het onderstelde behoort, zal uit den aard der zaak steeds aanwezig zijn, daar er enkele uitspraken noodig zijn om aan de overige uitspraken of de ontkenningen daarvan beteekenis te geven.

Van belang is de logische omkeering voor het noodig en voldoende zijn van voorwaarden. Is toch een voorwaarde V noodig voor het gelden van een eigenschap E (hetgeen beteekent, dat V uit E volgt), dan is de voorwaarde niet- V voldoende voor de eigenschap niet- E (daar dit beteekent, dat niet- E uit niet- V volgt). Het

is gemakkelijk dit aan eenvoudige voorbeelden (b.v. betreffende kenmerken van deelbaarheid) toe te lichten.

De logische omkeering kan in verband gebracht worden met het vormen van omgekeerden van stellingen. Heeft men een stelling van den vorm: „uit A en B volgt C ”, dan heet de stelling: „uit A en C volgt B ” een omgekeerde van de oorspronkelijke stelling. In sommige gevallen is zulk een omgekeerde stelling eveneens juist (en moet dan afzonderlijk bewezen worden, soms met geheel andere hulpmiddelen dan waarmede de oorspronkelijke stelling bewezen is), in andere gevallen niet. De omgekeerde stelling kan ook in den vorm: „uit A en niet- B volgt niet- C ” worden uitgesproken. Men krijgt zoo slechts verschillende formuleeringen van dezelfde omgekeerde stelling; beide formuleeringen zijn elkaars logische omkeering. Het vormen van een omgekeerde van een stelling bestaat dus in het verwisselen van het gestelde met een deel van het onderstelde, maar is eveneens op te vatten als het vervangen van het gestelde en een deel van het onderstelde door de ontkenningen daarvan. In het bovengenoemde voorbeeld luidt de omgekeerde stelling: „Om een vierhoek, waarbij de som van twee overstaande hoeken 180° is, kan een cirkel beschreven worden”, of ook: „Bij een vierhoek, waarom geen cirkel beschreven kan worden, zijn twee overstaande hoeken niet elkaars supplement”. In dit voorbeeld is de omgekeerde stelling eveneens juist.

Daar men bij het vormen van het omgekeerde van een stelling het gestelde met een deel van het onderstelde heeft te verwisselen, kan men uit een zelfde stelling soms verschillende omgekeerde stellingen vormen, door dit deel van het onderstelde op verschillende wijzen te kiezen. Zoo zegt de stelling van FERMAT, dat $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ is, als p een priemgetal en a niet door p deelbaar is. Een omgekeerde hiervan is, dat a niet door p deelbaar is, als $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ en p priem is; dit omgekeerde is eveneens juist. Een ander omgekeerde zegt, dat p priem is, als $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ en a niet deelbaar door p is; dit omgekeerde is niet juist, zooals $1^3 \equiv 1 \pmod{4}$ doet zien.

Nauw verwant aan de logische omkeering is het volgende. We denken ons een aantal onderstellingen $B_1, B_2, \dots, B_n$ (alle gecombineerd met de onderstelling A , die dient om aan $B_1, B_2, \dots, B_n$ beteekenis te geven), waaruit resp. de conclusies $C_1, C_2, \dots, C_n$ getrokken zijn. De vraag is nu: kan men omgekeerd uit C_1 (steeds

in combinatie met A) terug besluiten tot B_1 , uit C_2 tot B_2 , enz? Het antwoord op deze vraag is bevestigend, als de onderstellingen $B_1, B_2, \dots, B_n$ een volledige opsomming van alle mogelijkheden vormen (dus als minstens één der onderstellingen waar moet zijn) en de conclusies $C_1, C_2, \dots, C_n$ elkaar uitsluiten (hetgeen zeggen wil, dat geen twee der conclusies gelijktijdig waar kunnen zijn). Dat men nu uit A en C_1 tot B_1 kan besluiten, volgt daaruit, dat B_2 niet waar kan zijn, daar uit A en B_2 zou volgen C_2 in strijd met C_1 ; evenmin kan een der onderstellingen $B_3, \dots, B_n$ waar zijn, zoodat B_1 waar moet zijn wegens de volledigheid der onderstellingen $B_1, B_2, \dots, B_n$.

Uit het elkaar uitsluiten van de C 's volgt, dat ook de B 's elkaar uitsluiten; waren nl. B_1 en B_2 gelijktijdig waar, dan waren ook de daaruit afgeleide conclusies C_1 en C_2 gelijktijdig waar, in strijd met het onderstelde. Uit de volledigheid van de B 's volgt ook de volledigheid der C 's; daar nl. een der B 's waar is, is ook de bijbehorende C waar.

Weet men alleen, dat de onderstellingen $B_1, B_2, \dots, B_n$ elkaar uitsluitend en dat de daaruit afgeleide conclusies $C_1, C_2, \dots, C_n$ een volledige opsomming van alle mogelijkheden vormen, dan kan men niet van C_1 terugbesluiten tot B_1 , ook niet, als men bovendien weet, dat de B 's een volledige opsomming vormen of dat de C 's elkaar uitsluiten. Dit blijkt uit de volgende voorbeelden. Heeft men het over natuurlijke gestallen (hetgeen dan de onderstelling A is, die dient om aan de overige uitspraken beteekenis te geven), dan besluit men uit het zijn van een 4-voud tot het even zijn en uit het zijn van een 4-voud + 1 tot het oneven zijn; de B 's (4-voud en 4-voud + 1) sluiten elkaar uit, maar vormen geen volledige opsomming; de C 's (even en oneven) sluiten elkaar uit en vormen een volledige opsomming; terugbesluiten van de C 's tot de B 's (dus van even tot een 4-voud of van oneven tot een 4-voud + 1) kan men niet. Een tweede voorbeeld krijgt men door aan de vorige onderstellingen nog twee onderstellingen toe te voegen, nl. het zijn van een 4-voud + 2 en het zijn van een 4-voud + 3, waaruit de conclusies even resp. oneven te trekken zijn; de B 's (4-voud, 4-voud + 1, 4-voud + 2 en 4-voud + 3) vormen nu een volledige opsomming en sluiten elkaar uit; de C 's (even, oneven, even en oneven) vormen een volledige opsomming, maar sluiten elkaar niet uit; ook nu kan men niet van de C 's terugbesluiten tot de B 's.

Een voor het onderwijs zeer geschikt voorbeeld, waarbij de besproken omzetting kan worden uitgevoerd, is het volgende. Is driehoek ABC in C rechthoekig, scherphoekig of stomphoekig, dan is resp. $c^2 = a^2 + b^2$, $c^2 < a^2 + b^2$, $c^2 > a^2 + b^2$.

De onderstelling A , die dient om aan de overige uitspraken betekenis te geven en aan de verwisseling niet meedoet, houdt in, dat men het over een driehoek heeft. De drie onderstellingen (recht, scherp, stomp) vormen een volledige opsomming, de drie conclusies ($c^2 =, <, > a^2 + b^2$) sluiten elkaar uit. Men mag dus onderstellingen en conclusies verwisselen, dus b.v. uit $c^2 < a^2 + b^2$ besluiten, dat $\angle ACB$ scherp is.

Om misverstand te voorkomen, wil ik er nog op wijzen, dat het geenszins mijn bedoeling is, dat de besproken omzetting in abstracto behandeld moet worden, zonder dat een bepaalde quaestie daartoe van zelf aanleiding geeft. Men kan b.v. de zoo even genoemde eigenschappen van een driehoek benutten om aan de hand daarvan iets omtrent de voorgaande beschouwingen mede te deelen (zonder dat men juist tot het algemeene geval van n onderstellingen met n conclusies behoeft over te gaan). Om het algemeene karakter der omzettingen te doen uitkomen, kan men de zaak toelichten met eenvoudige voorbeelden, die aan andere deelen der wiskunde ontleend zijn.

Voor het onderwijs in de meetkunde is van zeer veel belang de vraag hoe ver men gaan moet met het bespreken der fundamenteen, dus met de axiomatick. Mijn standpunt zou zijn over de axioma's zoo spoedig mogelijk heen te loopen, zonder natuurlijk onzin te vertellen, om, nadat eenige stellingen verkregen zijn, waarop logisch kan worden voortgebouwd, verder zooveel mogelijk strengheid te betrachten. Mijn bedoeling is natuurlijk niet het bespreken van het begrip „axioma” geheel achterwege te laten, maar dit niet te rekenen tot de stof, waarvan men verlangt, dat de leerling ze kan reproduceeren.

M. i. moet in de meetkunde de strengheid vooral daarin uitkomen, dat men zich zoo min mogelijk op de figuur beroept, dat men zich dwingt de figuur in woorden volledig te beschrijven, zonder dat voor enkele onderdeelen naar de figuur verwezen wordt. Het bewijs moet steeds ook zonder figuur geheel te volgen zijn en de figuur moet

aan de hand van het bewijs zelf gemaakt kunnen worden. Af te keuren lijkt mij de vaak in leerboeken gevolgde methode, dat sommige dingen, zooals de beteekenis der letters of de ligging van een bij name genoemd punt, maar uit de figuur moeten worden gezien. Door het bewijs los te maken van de figuur, wint het in logisch opzicht zeer en zal men veel eerder eventueele uitzonderingsgevallen ontdekken dan aan een bepaalde figuur, waar nu eenmaal omtrent sommige dingen een bepaalde keus gedaan is.

Een terugkomen in de 4de klasse op de grondbeginselen der meetkunde acht ik, in tegenstelling met de commissie BETH, niet gewenscht. Niet dat ik zulk een revisie der grondbegrippen, met toevoeging van enkele opmerkingen betreffende niet-Euclidische meetkunde, niet zeer nuttig zou vinden, als er ruimte van tijd was, maar het wil mij voorkomen, dat in zulk een dieper doordringen te veel tijd gaaf zitten, zoo men in die richting iets bereiken wil; bovendien is een geheel onaanvechtbare behandeling op de H. B. S. vrijwel onmogelijk. M.i. is de tijd, die een goede behandeling van de axiomatiek zou vorderen, beter besteed aan differentiaal- en integraalrekening, waarmede ik reeds in den loop der 3de klasse een begin gemaakt zou willen zien, nadat natuurlijk reeds in de 1ste en 2de klasse de grondslagen gelegd zijn door het degelijk bijbrengen van het functiebegrip.

Een ander punt, waarin ik van de commissie BETH in meening verschil, is de opvatting omtrent irrationale vergelijkingen. De commissie beveelt aan deze als gelijkwaardig te beschouwen met de rationale vergelijking; die er uit wordt afgeleid (zie Euclides, 2de Jaarg., blz. 125). Ik zou er daarentegen de voorkeur aan geven de in de vergelijking voorkomende wortelvormen als eenwaardig te beschouwen, zoo de bedoeling is, dat men aan de onbekenden en aan de wortelvormen slechts reële waarden toekent.

Hoewel niet direct de strengheid van behandeling rakende, wil ik nog op iets wijzen, dat mij ook van zeer veel gewicht lijkt. Het betreft de vierkantsvergelijking of liever de kwadratische functie. Bij mijn voortgezet onderwijs heb ik dikwijls gewenscht, dat mijn leerlingen toch maar niet de formule voor de wortels van een vierkantsvergelijking van buiten kenden. Wat men goed doet van buiten te leeren en wat niet, hangt van twee dingen af: de belangrijkheid

der zaak en den tijd; die noodig is om het resultaat terug te vinden. Nu is ongetwijfeld de bedoelde formule belangrijk genoeg om van buiten leeren te rechtvaardigen, maar aan den anderen kant vereischt de afleiding zoo weinig tijd, dat zulk een van buiten leeren overbodig geacht kan worden. Maar niet alleen overbodig, ik acht het van buiten kennen der formule ook schadelijk, als daardoor de weg vergeten wordt, waarlangs het resultaat bereikt wordt, nl. het afsplitsen van een vierkant, of anders gezegd het splitsen in twee vierkanten.

Dit splitsen in vierkanten (dat ook voor de integraalrekening van veel belang is) is de kern van de zaak, geheel overeenkomstig, daarmee, dat de kwadratische functie nog belangrijker is dan de kwadratische vergelijking, of liever, dat de kwadratische vergelijking slechts een der vragen vertegenwoordigt, die men betreffende de kwadratische functie kan stellen.

Een leerling, die slechts weet, dat men de kwadratische functie $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) steeds in den vorm

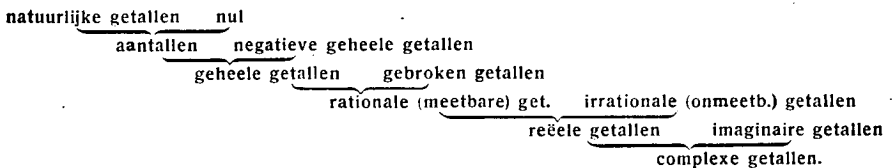
$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

moet brengen, kan alle vragen betreffende de kwadratische functie beantwoorden. Hij kan de extreme waarden der functie bepalen, hij kan de functie in factoren ontbinden, hij kan nagaan voor welke waarden van x de functie positief en voor welke ze negatief is; hij kan met hetzelfde gemak vierkantsongelijkheden als vierkantsvergelijkingen oplossen, zonder dat hij den onnatuurlijken weg volgt eerst de vierkantsongelijkheid met een vierkantsvergelijking in verband te brengen. Een leerling, die betreffende de kwadratische functie slechts paraat heeft de wijze van splitsen in vierkanten, is veel beter toegerust dan een, die de formule voor de wortels prompt weet op te zeggen, maar de herkomst dier formule kwijt is; de laatste kan zich redden, als hij een vierkantsvergelijking moet oplossen, en is er dan misschien iets sneller dan iemand, die slechts het afsplitsen van een vierkant verstaat, maar bij iedere verwante vraag betreffende de kwadratische functie staat hij verlegen. In het programma der commissie БЕТН mis ik dan ook bij de kwadratische functie noode de uitdrukking „splitsen in vierkanten”, al weet ik ook, dat het (wel in het programma vermelde) bepalen der extreme waarden het splitsen in vierkanten impliceert.

Bij het wiskunde-onderwijs moet men voor alles trachten zich toe te leggen op juiste uitdrukkingwijze, op het geven van scherpe definities en het zich goed rekenschap geven van alles wat men zegt, om zodoende zinledigheden, waartoe men door gedachteloos napraten van wat in schoolboeken staat maar al te licht geraakt, te vermijden. Zoo moet men vooral in het begin van de meetkunde geen zinledige definities geven als „een lijn is de grens van een vlak”, definities, waaryan de zinledigheid b.v. duidelijk daaruit blijkt, dat men er zich later nooit op beroept en men zich zelfs niet kan voorstellen, hoe men er zich op zou kunnen beroepen. Men denke zich slechts in, dat in een planimetrisch bewijs voorkomt „en aangezien nu een lijn de grens is van een vlak . . .” om dit toe te geven. Ik wijs in dit verband verder nog op het vaak zinledige gebruik van de uitdrukking „een rechte verlengen”.

Ook moet vermeden worden het gebruik van termen, die in de hogere wiskunde een geheel andere beteekenis hebben. Zoo lees ik b.v. in het ontwerp-leerplan der Haagsche leeraren (zie Euclides, 4de Jaarg., blz. 89) een paar maal de uitdrukking „algebraïsche getallen”, die daar blijkbaar bedoeld is als „positieve en negatieve getallen”, terwijl toch algemeen onder een algebraïsch getal verstaan wordt een reëel getal, dat een wortel is van een hogere machtsvergelijking met geheele coëfficiënten.

Een bekend maken met de nomenclatuur der getallen komt mij hoogst gewenscht voor, maar die nomenclatuur moet dan ook met de in de hogere wiskunde gevolgde in overeenstemming zijn. Tot het vermijden van begripsverwarring in algebra en rekenkunde kan het goed inprenten van de benamingen der verschillende soorten van getallen veel bijdragen. Dit kan op overzichtelijke wijze geschieden in den vorm van het volgende schema, dat tevens een duidelijk overzicht over de verschillende uitbreidingen van het getalbegrip geeft:



Zonder bezwaar kan men dit schema reeds in de eerste klasse mededeelen met de opmerking, dat sommige der daarin genoemde getalsoorten eerst later besproken zullen worden.

Aan de in het schema niet voorkomende uitdrukking „algebraïsche getallen” heeft men (nog afgezien daarvan, dat deze uitdrukking reeds een andere bepaalde beteekenis heeft) geen behoefte.

Het wil mij voorkomen, dat het onderwijs in algebra en rekenkunde er door zou winnen, zoo deze vakken tot één vak werden samengesmolten. Het misverstand zou dan verdwijnen, dat men in de algebra met letters en in de rekenkunde met cijfers rekent. Door de scheiding weg te laten, kan de docent zijn tijd beter verdeelen. Hij kan dan een minimum van tijd besteden aan de evenredigheden, waarvan de theorie vaak veel te veel tot iets zeer belangrijks wordt opgeblazen. Iets anders is natuurlijk de voor de vorming van het functiebegrip zeer belangrijke theorie der evenredige afhankelijkheid en het daaraan aansluitende begrip „samengesteld evenredig”, dat herhaaldelijk in de meetkunde, de mechanica en de natuurkunde voorkomt.

Zoo even wees ik op de wenschelijkheid van correctheid in uitdrukkingswijze, vooral bij het geven van definities. Men hoeft dit echter m.i. niet te overdrijven door zich te veel op taalkundig standpunt te stellen. Een uitdrukking, ook al is die taalkundig niet juist, kan in de wiskunde gebezigd worden, als men zich maar streng aan de daar gegeven definitie houdt. Zoo is er niet veel tegen van een onbestaanbaar getal te spreken, ook al is daarmee niet bedoeld een getal, dat niet bestaat. Bij de uitdrukking „afgeknot prisma” heeft men er zich niet druk om te maken, dat dit geen prisma is, zoo men slechts „afgeknot prisma” als één naam opvat. Trouwens men kan toch ook wel een millionair, die als krantenjongen begonnen is, een gewezen krantenjongen noemen. Iets dergelijks heeft men bij de uitdrukking „continu”. Daar is toch het begrip „continu voor $x = \alpha$ ” en deze geheele uitdrukking wordt gedefinieerd en niet het woord „continu” afzonderlijk. Slordigheid van taal, waaraan geen slordigheid van gedachte verbonden is, acht ik minder erg dan een slordige gedachte, in een keurig verzorgden zin uitgedrukt. Zoo heb ik ook weinig bezwaar tegen uitdrukkingen als: „Een verschil wordt met een getal vermeerderd door den aftrekker er mede te vermeerderen”, of „Een som wordt gedifferentieerd door de termen van de som te differentieeren”. De bedoeling, dat aftrektal ook na de vermeerdering aftrektal blijft en dat de termen ook na de differentiatie als termen van een som zijn op te vatten, spreekt daarbij duidelijk genoeg. Toegegeven moet evenwel worden,

dat een formuleering als: „Het differentiaalquotiënt van een som is gelijk aan de som van de differentiaalquotiënten der termen” te verkiezen is.

Nog een enkel woord over de strengheid van het elementaire onderwijs in Differentiaal- en Integraalrekening. Ik geloof, dat de beschikbare tijd niet toelaat hier groote strengheid te betrachten. Het lijkt mij geen bezwaar toe hier anders, d. w. z. minder streng, te werk te gaan dan in het voorafgaande, waar de leerling in voldoende mate met strengheid van beschouwingswijze heeft kennis gemaakt om te kunnen hebben leeren waardeeren wat dit inhoudt. Men moet dan echter niet trachten de zaak te verdoezelen, maar integendeel op de tekortkomingen in de bewijsvoeringen de aandacht vestigen. De sensatie, enkele dingen door en door begrepen te hebben, heeft de leerling dan toch reeds ondervonden. Die sensatie te kennen en te weten, wat voor volledig begrijpen noodig is, is voor de vorming van niet te onderschatten beteekenis. Een ieder weet wel hoe vlug tot oordeelen, meest in zeer gedecideerden vorm, wordt overgegaan door de velen, die de sensatie iets begrepen te hebben, nooit gekend hebben. Om zijn leerlingen daarvoor te behoeden, daartoe heeft men reeds genoeg gelegenheid gehad. Wanneer men nu in de Differentiaal- en Integraalrekening de moeilijkheden alleen maar aanstipt, kunnen de leerlingen zich toch wel indenken, dat ook die wel te boven te komen zijn, al zien ze natuurlijk nog niet hoe.

Een zoodanige behandeling der Differentiaal- en Integraalrekening, dat daarop aan de Universiteit zou zijn voort te bouwen, acht ik op de H. B. S. onmogelijk. Ik geloof, dat ik hier een andere meening deel dan de commissie BETH, die in haar bespreking van het verslag der Vereeniging van Directeuren zegt, dat zij zich niet kan voorstellen, welke onderwerpen uit de algebra zich in beginsel aan een correcte behandelingswijze zouden onttrekken (zie Euclides, 3^{de} Jaarg., blz. 79). Ik meen, dat er wel degelijk zulke onderwerpen zijn, zonder dat men nog het terrein der Differentiaal- en Integraalrekening behoeft te betreden. Ik noem slechts de theorie der logarithmen, die men toch op de H. B. S. pleegt te behandelen, zonder daaraan een theorie over het invertceeren van een continue monotone functie te laten voorafgaan. Als vanzelf sprekend wordt aangenomen, dat men het grondtal van het logarithmenstelsel tot

een zoodanige macht kan verheffen; dat het gegeven getal wordt opgeleverd. Dergelijke onvolledigheden zijn niet te vermijden, al moet de docent natuurlijk trachten ze tot een minimum te beperken.

Een zeer groot voordeel van de invoering der Differentiaal- en Integraalrekening lijkt mij, dat verschillende inhoudsformules uit de stereometrie dan overgebracht kunnen worden naar de Integraalrekening, waar ze spelenderwijs voor den dag komen. Hierbij komt nog, dat feitelijk de integraalrekening de eenige weg is om op geheel strenge wijze tot oppervlak- en inhoudsformules (zelfs de eenvoudigste als het oppervlak van een driehoek) te geraken.

Men moet echter met de invoering der Differentiaal- en Integraalrekening niet te ver gaan, niet verder dan met het oog op de toepassing op de meetkunde, de mechanica en de natuurkunde noodig is. Veel verzwaring van de leerstof zie ik hierin niet, gezien de omstandigheid, dat anders verkapt differentieeren en integreeren moet voorkomen. De dingen bij zijn naam noemen, maakt de zaak niet moeilijker, maar gemakkelijker.

Na deze uiteenzettingen wil ik nog wijzen op enkele beschouwingen van logischen aard, die zoo hier en daar in het onderwijs kunnen worden ingelascht, b.v. het zich vertrouwd maken met het vormen van ontkenningen. Moet een uitspraak omtrent alle elementen van een zekere verzameling, dus een uitspraak van den vorm: „alle elementen der verzameling V hebben de eigenschap E ”, ontkend worden, dan krijgt men: „de verzameling V heeft minstens één element, dat de eigenschap E niet bezit”. Ontkent men, dat alle negers zwart zijn, dan wil dit zeggen, dat er minstens één neger is, die niet zwart is. Door de ontkenning gaat dus „alle” in „minstens één niet” over; omgekeerd gaat „minstens één” in „alle niet” over. In de wiskunde komt het vaak voor, dat men te ontkennen heeft, dat alle getallen van een zekere verzameling gelijk aan 0 zijn; die ontkenning luidt dan, dat de verzameling minstens één van 0 verschillend getal bezit.

Een mooi voorbeeld van de besproken ontkenning (een voorbeeld, dat echter voor het middelbaar onderwijs niet geschikt is) is het volgende. Een functie $f(x)$ heet continu voor $x = a$, als er bij ieder positief getal ε een zoodanig positief getal δ bestaat, dat door ieder getal x , dat voldoet aan $|x - a| < \delta$, ook voldaan is

aan $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Is deze voorwaarde niet vervuld, dan is $f(x)$ discontinu voor $x = a$. Het is nu gewenscht aan deze definitie van discontinuïteit het ontkenkende karakter te ontnemen. Om dit te bereiken, heeft men te bedenken, dat in de definitie van continuïteit tweemaal ieder (nl. bij ε en x) en éénmaal minstens één (nl. bij δ) voorkomt. Door de ontkenning krijgt men bij ε en x minstens één en bij δ ieder, terwijl $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ door de ontkenning in $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$ overgaat. Men krijgt zoo de volgende definitie van discontinuïteit voor $x = a$: De functie $f(x)$ is discontinu voor $x = a$, als er een zoodanig positief getal ε is, dat men bij ieder positief getal δ een zoodanig getal x kan vormen, dat aan $|x - a| < \delta$ en aan $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$ voldaan is. In dezen vorm is de definitie veel geschikter om in een bepaald voorbeeld discontinuïteit aan te toonen dan wanneer men discontinu slechts gedefinieerd heeft als de ontkenning van continu; of liever, in het laatste geval heeft men dezelfde overwegingen, die tot bovenstaande definitie van discontinuïteit gevoerd hebben, bij ieder bepaald voorbeeld te herhalen. Het eens en vooral uitvoeren der omzetting is dus weer in overeenstemming met het beginsel van de oeconomie van het denken.

Blijkens het omtrent de ontkenning opgemerkte beteekent „Ieder element van een verzameling V heeft de eigenschap E ” hetzelfde als de ontkenning van „Minstens één element van V mist de eigenschap E ”, dus hetzelfde als: „Er is geen element van V , dat de eigenschap E mist”. Aan dit laatste is o.a. voldaan, als de verzameling V geen enkel element bevat, dus als die verzameling leeg is. Is V leeg, dan moet dus de uitspraak „Ieder element van V heeft de eigenschap E ” geacht worden juist te zijn, welken inhoud die eigenschap ook heeft. Zoo kan men b.v. van een onbewoond eiland terecht zeggen: „Alle bewoners van het eiland hebben tien handen”, daar men geen bewoner van het eiland kan aanwijzen, die geen tien handen heeft. Zelfs is het juist, als men zegt, dat de bewoners van het onbewoonde eiland bestaan, zoo men maar niet zegt: „Er bestaan bewoners van het onbewoonde eiland”; het eerste is nl. een uitspraak over de elementen der verzameling, het tweede een uitspraak over de verzameling zelf.

Natuurlijk is het niet mijn bedoeling, dat deze dingen stelselmatig behandeld moeten worden, maar slechts, dat het zijn nut kan hebben daarvan iets te zeggen, als de gelegenheid daartoe zich

voordoeft of als een vraag van een leerling daartoe aanleiding geeft.

Door dergelijke uiteenzettingen, die feitelijk meer tot het gebied der logica behoren, kan de wiskunde-leeraar, die boven zijn stof staat en die, paraat hebbende alles wat voor zijn onderwijs nuttig kan zijn, uit zijn rijkdom put om mee te deelen wat hem op het oogenblik voor zijn klasse het beste lijkt, veel bijdragen tot de logische ontwikkeling zijner leerlingen.

NASCHRIFT.

Ik wil hier nog wijzen op een (in mijn voordracht niet aangeroerd) punt, waarvan mij de bespreking bij het middelbaar onderwijs in wiskunde eveneens van belang lijkt, nl. de wijze, waarop een stelling moet worden aangetoond, die analoog is met een reeds vroeger behandelde stelling, zooals b.v. een stelling betreffende een drievlakshoek (of boldriehoek, wat op hetzelfde neerkomt), die doet denken aan een stelling betreffende een driehoek.

Voor het bewijs van de analoge stelling kan men twee wegen volgen, die men zou kunnen noemen „de methode van het analoge bewijs” en „de methode van het terugbrengen”. Bij eerstgenoemde methode wordt getracht in het bewijs van de vroegere stelling zulke wijzigingen aan te brengen, dat het pasklaar wordt voor de analoge stelling; m.a.w. men tracht de analoge stelling op analoge wijze aan te toonen. Bij de tweede methode bekommert men zich om het bewijs van de vroegere stelling niet, maar tracht men de analoge stelling met behulp van de vroegere stelling te bewijzen; m.a.w. men tracht de analoge stelling tot de vroegere stelling terug te brengen.

In sommige gevallen is de methode van het analoge bewijs, in andere gevallen de methode van het terugbrengen aangewezen. Het komt echter ook wel voor, dat beide methoden met ongeveer hetzelfde gemak tot het doel voeren.

Als voorbeeld noem ik de stelling, dat in een drievlakshoek de drie mediaanvlakken (vlakken door een ribbe en de bissectrice der overstaande zijde) door één rechte gaan. Brengt men een snijvlak aan, dat van de ribben van den drievlakshoek gelijke stukken afsnijdt, dan ontstaat daarin een driehoek met zijn drie medianen, waarmede de stelling door de methode van het terugbrengen is aangetoond. De overeenkomstige stelling be-

treffende de medianen van een driehoek wordt aangetoond met behulp van een rechte evenwijdig aan de basis en twee gelijkvormige driehoeken; daar men op een bol geen evenwijdigheid en geen gelijkvormigheid heeft, is de analoge stelling voor den drievlakshoek (of boldriehoek) niet op analoge wijze aan te toonen.

Als tweede voorbeeld neem ik de stelling, dat in een drievlakshoek de drie bissectricevlakken door één rechte gaan. Deze wordt op analoge wijze bewezen als de overeenkomstige stelling betreffende de bissectrices van een driehoek, door nl. een bissectricevlak door een ribbe te beschouwen als de meetkundige plaats der punten, waarvan de afstanden tot de twee door die ribbe gaande zijden van den drievlakshoek met inachtneming van het teeken gelijk zijn.

Bij de stelling, dat de drie hoogtevlakken van een drievlakshoek door één rechte gaan, is de methode van het terugbrengen de aangewezen. Brengt men nl. een standvlak op een der ribben van den drievlakshoek aan, dan ontstaat daarin (door snijding met de overige vlakken) een driehoek met zijn drie hoogtelijnen. De stelling kan echter ook (hoewel dit minder eenvoudig is) met de methode van het analoge bewijs worden aangetoond, door beschouwing van een boldriehoek, die de hoogtelijnen van den oorspronkelijken boldriehoek tot middelloodlijnen heeft.

Een voorbeeld, waarbij men beide methoden met hetzelfde gemak kan toepassen, levert de stelling betreffende het door één rechte gaan van de drie middelloodvlakken der zijden van een drievlakshoek. Deze stelling kan met de methode van het analoge bewijs worden aangetoond door een middelloodvlak op te vatten als de meetkundige plaats der punten, waarvoor de afstanden tot de rechten, waarlangs twee der ribben van den drievlakshoek vallen, gelijk zijn en waarbij de projecties op die rechten of beide op de ribben, of beide op de verlengden der ribben, of beide in het hoekpunt van den drievlakshoek vallen. Het bewijs is echter ook gemakkelijk te leveren met de methode van het terugbrengen, door nl. een vlak aan te brengen, dat van de ribben van den drievlakshoek gelijke stukken afsnijdt; in dit vlak ontstaat dan een driehoek met de drie middelloodlijnen der zijden.

Wordt het bewijs van een analoge stelling verlangd, dan is het van veel belang te weten, dat men zich in de eerste plaats af moet vragen, welke der beide genoemde methoden in het onderhavige

geval de meeste kans van slagen biedt. Het lijkt mij daarom van belang bij het onderwijs uitdrukkelijk op beide methoden de aandacht te vestigen.

Ook op hooger niveau kan men voorbeelden van analoge stellingen geven, waarop bovenstaande beschouwingen van toepassing zijn. Ik wijs in de eerste plaats op de analogie tusschen bepaalde integralen en sommen van een eindig aantal termen. Bij de stelling

$$\int_a^b \{f(x) + g(x)\} dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

volgt men de methode van het terugbrengen, bij de stelling

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad (a < b)$$

de methode van het analoge bewijs. In de tweede plaats noem ik de zeer ver gaande analogie tusschen de theorie der oneigenlijke bepaalde integralen en die der oneindig voortlopende reeksen, waarbij men de methode van het analoge bewijs volgt. Verder wijs ik nog op de analogie tusschen oneigenlijke bepaalde integralen, waarbij de oneigenlijkheid in het oneindig groot zijn van het integratievak bestaat, en die, waarbij de oneigenlijkheid bestaat in het oneindig groot worden van den integrand bij een der grenzen. Zijn de eigenschappen van de eene soort oneigenlijke bepaalde integralen afgeleid, dan kan men van de andere soort integralen op analoge wijze (dus volgens de methode van het analoge bewijs) de eigenschappen vinden, maar men kan ook de methode van het terugbrengen toepassen door middel van een substitutie, die een oneigenlijke bepaalde integraal van de eene soort in een van de andere soort omzet; zoo gaat de integraal $\int_a^b f(x) dx$, waarbij $f(x)$

oneindig groot wordt voor $x = a$, door de substitutie $x - a = \frac{1}{y}$ over in:

$$\int_{\frac{1}{b-a}}^{\infty} \frac{1}{y^2} f\left(a + \frac{1}{y}\right) dy.$$

De genoemde voorbeelden van analoge stellingen zijn gemakkelijk met andere te vermeerderen. Zoo zou ik nog kunnen wijzen op de analogie tusschen de theorie der lineaire differentiaalvergelijkingen en die der lineaire differentievergelijkingen, waar mij de methode van het analoge bewijs aangewezen lijkt.

NIEUWE METHODE VOOR INHOUDS- BEREKENING VAN PYRAMIDE, BOLDEELEN, ENZ.

DOOR

Dr. A. KETTNER.

Voor de pyramide.

A. In een pyramide brengt men vier met het grondvlak evenwijdige vlakken aan. De onderlinge afstand der vijf evenwijdige vlakken is gelijk. Van beneden naar boven geven wij de oppervlakken der doorsneden dezer vijf vlakken met de pyramide aan door: $G_2 = G$; M_2 ; $G_1 = B_2 = M$; M_1 en $B_1 = B$. (Dat voor eenzelfde oppervlak soms twee of meer letters gekozen zijn is gedaan met het oog op een overzichtelijke bewijsvoering).

Wij toonen nu aan, dat tusschen de genoemde grootheden de volgende betrekking bestaat:

$$G_1 + B_1 + 4M_1 + G_2 + B_2 + 4M_2 = 2(G + B + 4M) \quad (1)$$

Bewijs: Het linkerlid dezer betrekking is allereerst te schrijven als $B + G + 2M + 4M_1 + 4M_2$.

Maar $\sqrt{B_1} + \sqrt{G_1} = 2\sqrt{M_1}$ en $\sqrt{B_2} + \sqrt{G_2} = 2\sqrt{M_2}$ waardoor de voorafgaande som herleid wordt tot $B + G + 2M + (\sqrt{B_1} + \sqrt{G_1})^2 + (\sqrt{B_2} + \sqrt{G_2})^2$ of $B + G + 2M + B_1 + G_1 + 2\sqrt{B_1G_1} + B_2 + G_2 + 2\sqrt{B_2G_2}$ en daar $\sqrt{B_1G_1} + \sqrt{B_2G_2} = \sqrt{BM} + \sqrt{MG} = (\sqrt{B} + \sqrt{G})\sqrt{M} = 2\sqrt{M}$. $\sqrt{M} = 2M$, wordt dus het linkerlid ten slotte $2M + B + G + B + M + M + G + 4M = 2B + 2G + 8M$, q.e.d. Deze beschouwingen gaan onveranderd door, als een der vlakken door den top der pyramide gaat, dus $B = 0$ is.

B. Verdeel nu de hoogte van een pyramide in 2^n gelijke deelen; breng door de deelpunten vlakken evenwijdig met het grondvlak. Beschouw de onderste afgeknotte pyramide, waarvan wij den inhoud aanduiden door P . Noem hiervan de hoogte h , de oppervlakte van grond- en bovenvlak opv. G_1 en B_1 en de oppervlakte van de doorsnede, die de hoogte h loodrecht halveert, M_1 . Nu is zonder meer duidelijk:

$$hB_1 < P < hG_1 \quad (1); \quad hB_1 < \frac{1}{6}h(G_1 + B_1 + 4M_1) < hG_1 \quad (2).$$

Daar voor twee ongelijkheden $a < b < c$ en $a < d < c$ gemakkelijk volgt:

$$a - c + b < d < c - a + b \text{ volgt dus uit (1) en (2):}$$

$$hB_1 - hG_1 + \frac{1}{6}h(G_1 + B_1 + 4M_1) < P < hG_1 - hB_1 + \frac{1}{6}h(G_1 + B_1 + 4M_1).$$

Voor elk der 2^n deelen van de pyramide is een dergelijke betrekking op te stellen. Sommeer al deze ongelijkheden. $\Sigma (hB_1 - hG_1)$ gaat hierbij over in $-hG_1$; $\Sigma (hG_1 - hB_1)$ in hG_1 , daar alle andere termen tegen elkaar wegvallen; P wordt de inhoud van de pyramide; $\Sigma \frac{1}{6}h(G_1 + B_1 + 4M_1)$ gaat door herhaalde toepassing van (1) over in $\frac{1}{6}H(G + B + 4M)$, waarin G de oppervlakte van het grondvlak, M die van het middenvlak, H de hoogte en B de oppervlakte van het „bovenvlak” van de pyramide is, welke laatste grootheid hier natuurlijk nul is. Dus: $-hG_1 + \frac{1}{6}H(G + B + 4M) < \text{inhoud pyramide} < hG_1 + \frac{1}{6}H(G + B + 4M)$. Laat nu n onbepaald toenemen, dan heeft hG_1 tot limiet de waarde 0 en is bewezen:

Inhoud pyramide $= \frac{1}{6}H(G + B + 4M)$, dus $= \frac{1}{3}HG$.

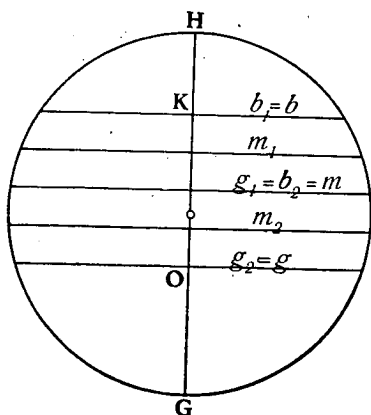
Het spreekt vanzelf, dat de formule $\frac{1}{6}H(G + B + 4M)$ ook den inhoud van de afgeknotte pyramide voorstelt.

Voor de bolschijf. (Het bewijs is geheel analoog met dat voor de pyramide).

A. In een bolschijf brengt men vier met het grondvlak evenwijdige vlakken aan. De onderlinge afstanden van het grondvlak en de vier evenwijdige vlakken zijn gelijk. Van beneden naar boven geven we de stralen van de vijf cirkels aan met $g_2 = g$; m_2 ; $g_1 = b_2 = m$; m_1 en $b_1 = b$.

Tusschen de genoemde groottheden bestaat de betrekking:

$$g_1^2 + b_1^2 + 4m_1^2 + g_2^2 + b_2^2 + 4m_2^2 = 2(g^2 + b^2 + 4m^2) \text{ (II)}.$$



Bewijs: bij de pyramide werd, omdat het zoo eenvoudig is, aangenomen zonder nader bewijs: $\sqrt{B_1} + \sqrt{G_1} = 2\sqrt{M_1}$. Daarvoor komt hier in de plaats de betrekking: $m^2 = \frac{b^2 + g^2}{2} + h^2$, waarin $\frac{1}{2}h$ de afstand der evenwijdige vlakken is.

Bewijs voor deze stelling:

Noem $HK = x$ en $OG = y$, dan is

$$m^2 = (x + h)(y + h) = xy + h(x + y) + h^2; \text{ maar } x(y + 2h)$$

$$= b^2 \text{ en } y(x + 2h) = g^2 \text{ dus } 2xy + 2h(x + y) = b^2 + g^2 \text{ dus:}$$

$$(III) \quad m^2 = \frac{b^2 + g^2}{2} + h^2, \text{ q.e.d.}$$

Het bewijs van (II) kan nu, ook zonder dat op de analogie met het bewijs voor (I) gewezen wordt, met vertrouwen aan den lezer worden overgelaten.

B. Het deel van het bewijs, dat nu behoort te volgen is woordelijk over te nemen van het bewijs onder B voor de pyramide. Men heeft slechts:

het woord *pyramide* te vervangen door *bolschijf*; *onderste afgeknotte pyramide* door *onderste bolschijf*; *gaat volgens I over in* door *gaat volgens II over in*. $\frac{1}{3}HG$ aan het einde vervalt natuurlijk; evenzoo de woorden: *welke laatste waarde hier natuurlijk nul is*. Eindelijk leveren de sommaties $\Sigma(hG_1 - hB_1)$ en $\Sigma(hB_1 - hG_1)$ twee termen. Zoo is dus de formule voor den inhoud van de bolschijf ook: $\frac{1}{6}H(G + B + 4M)$.

Het spreekt vanzelf, dat dezelfde formule ook voor het bolsegment en voor den bol zelf geldt.

Ten slotte rest mij de aangename taak Prof. Dr. J. G. van der Corput te danken niet alleen voor de aanmoediging tot publicatie van dit bewijs maar bovendien voor den correcten limietovergang in het onder B vermelde.

BOEKBESPREKINGEN.

Dr. J. F. de Vries, *Beknopte Mechanica*. Groningen, P. Noordhoff, 1928. 114 bldz. Prijs geb. f 2,25.

Des Schrijvers bedoeling is blijkens het voorbericht, zijnen leerlingen aan de Gemeentelijke Kweekschool voor Onderwijzers te Rotterdam en aan den daaraan verbonden Hoofdacte-cursus een boekje voor te leggen, dat de mechanica elementair behandelt, en tevens gelegenheid geeft, de voor velen zoo moeilijke begrippen van dit vak wat uitgebreider toe te lichten, dan aan de hand der natuurkunde-leerboeken mogelijk is, opdat het ontwikkelende element, dat aan de Mechanica zoo zeer eigen is, wat beter tot zijn recht kan komen.

Het elementaire karakter van het werk komt op tweeërlei wijze tot uiting: ten eerste doordat bij de lezers zeer weinig wiskundige kennis ondersteld is, zoodat bijvoorbeeld de bekende formule $s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ zonder bewijs wordt meegedeeld, en ten tweede doordat het onderzoek der kinematische en dynamische grondbegrippen niet zeer ver is doorgevoerd. Uit dit laatste mag men echter volstrekt niet besluiten, dat het boekje van den heer De Vries de overbekende en vrijwel algemeen aanvaarde dwaasheden zou bevatten, die men in de gebruikelijke mechanica-boeken vindt; integendeel, telkens als didactische overwegingen hem noopten, eene onvoldoende of onvolledige beschouwing te geven, heeft hij zijn lezers daarop met grooten nadruk gewezen.

De lezer, die dit boekje zal hebben doorgewerkt, zal een goed inzicht hebben gekregen in belangrijke mechanische begrippen: de betrekkelijkheid van beweging en van rust, maar ook van snelheid, versnelling, enz., en zal waarschijnlijk niet verstrikt worden in de gewone misvattingen, want de Schrijver wijst met nadruk op de beperkte geldigheid van het zoogenaamde parallelogram van versnellingen, van het traagheidsbeginsel, op de onjuistheid der opvatting, dat eene beweging t. o. v. een assenstelsel „werkelijker” zou wezen dan die t. o. v. een ander, enz.

De heer De Vries heeft, naar ik meen, met het schrijven van dit heldere, van vele werkelijk verduidelijkende voorbeelden voorziene werkje over de beginselen der mechanica, een zeer nuttig werk verricht, en ik hoop ten zeerste, dat velen ervan zullen profiteren. Het is dringend noodig, dat veel bijgeloof en wanbegrip worden opgeruimd, het boekje van den heer De Vries kan daartoe veel bijdragen. Moge het het succes hebben, dat het verdient. J. H. S.

Dr. Fred. Schuh en Dr. J. G. Rutgers, *Compendium der Hoogere Wiskunde*. Vierde deel, eerste stuk. Groningen. P. Noordhoff, 1927. 310 bladz., prijs f 8,50.

Van het Compendium der Hoogere Wiskunde door de Professoren Schuh en Rutgers, een in vele deelen ontworpen werk, dat beoogt, een

kort overzicht te geven van wat men de lagere deelen der hoogere wiskunde zou kunnen noemen, is in 1919 een deel, genaamd het derde, verschenen. Thans ligt het eerste stuk van het vierde deel voor ons. Men kan slechts betreuren, dat het werk in zoo langzaam tempo verschijnt, want het is buitengemeen nuttig, en ik geloof, dat vele wiskundigen met het gereedkomen ervan ten zeerste gebaat zouden zijn. Wat verschenen is, leert ons, dat de onderwerpen, waarmede ieder mathematicus wel eens te maken heeft, maar die hem niet alle steeds in bijzonderheden voor den geest kunnen staan, op zoodanige wijze kort en exact behandeld zijn, dat men in staat is, in enkele oogenblikken de punten, waaromtrent men in het onzekere verkeert, na te slaan.

Het in 1919 verschenen derde deel omvat Differentiaalrekening, Analytische Meetkunde van de Ruimte, en Integraalrekening. Het thans verschenen eerste stuk van het vierde deel bevat Beschrijvende Meetkunde, Differentiaalmeetkunde van het platte vlak (met inbegrip der kinematica) en Differentiaalmeetkunde der Ruimte. De schrijvers beloven ons in het voorbericht, dat spoedig het tweede stuk van het vierde deel zal volgen, bevattende de theorie der Differentiaalvergelijkingen (zoo wel gewone als partieele). Moge het zoo zijn, het wiskundig publiek wacht er met ongeduld op.

J. H. S.

G. Lewingdon Parsons, M. A., *Elementary Differential Calculus*. Cambridge, At the University Press, 1927. 6 shillings. *Elementary Integral Calculus*, 1926, 5 sh.

De Cambridge University Press zendt mij deze werkjes ter aankondiging. Zij bedoelen een middenweg te kiezen tusschen de inleidingen, zooals die in schoolboeken voorkomen, en de behandeling in uitgebreide leerboeken der analyse, waar een groot aantal details de aandacht van de hoofdzaken afleiden. Het deeltje over differentiaalrekening behandelt eenige inleidende opmerkingen over limieten, regels voor het differentieeren, maxima en minima, reeksontwikkelingen, en meetkundige toepassingen, het deeltje over integraalrekening geeft in hoofdzaak de techniek van het integreeren, met toepassing op de berekening van oppervlakten, inhouden, zwaartepunten en traagheidsmomenten, enz.; en ten slotte eenige voorbeelden van differentiaalvergelijkingen.

De werkjes zijn blijkbaar in hoofdzaak gericht op het aanleeren van de techniek, wat niet wegneemt, dat er menige opmerking in voorkomt, die het inzicht in de beteekenis der gebruikte termen veel kan verbeteren. Zoo bijvoorbeeld de beschouwingen over de termen „limiet” en „waarde” in §§ 5 en 6 van het deeltje over differentiaalrekening. Niet steeds heeft de schrijver de duidelijkste formulering gekozen: zoo lijkt mij de limietdefinitie in § 6 noodeloos omslachtig en daardoor onbegrijpelijk voor beginners, terwijl de definities in § 35 van het deeltje over integraalrekening mij zeer bedenkelijk toeschijnen.

Over het geheel genomen wel aardige en bruikbare boekjes, maar in Nederland bestaat aan iets dergelijks geen behoefte.

J. H. S.

Leerboek der Stereometrie, door Dr. P. Molenbroek.
Zevende druk. P. Noordhoff. Groningen 1928. f 5.—.

De behoefte aan een herdruk van het gunstig bekend staande en veel gebruikte leerboek der Stereometrie van Dr. P. Molenbroek heeft den bewerker der zesde uitgave, P. Wijdenes, aanleiding gegeven tot een zorgvuldige herziening van den inhoud en tot een uitbreiding daarvan met verschillende onderwerpen, die door verandering in de wijze van behandeling of in verband met de op het examen KI gestelde eischen noodzakelijk waren geworden. Het boek heeft daardoor zoozeer aan waarde gewonnen, dat er alle reden is, af te wijken van den in dit tijdschrift in het algemeen gevolgden regel, geen herdrukken aan te kondigen.

Naast talrijke detailverbeteringen, nieuwe vraagstukken e. d. valt vooral op de veel ruimere plaats, die aan de bolmeetkunde is toegekend. Daardoor wordt het mogelijk, boldriehoeken en drievlakshoeken in verband met elkaar te behandelen, wat aan beide onderwerpen ten goede komt. In twee latere hoofdstukken, XXII en XXIII, volgt daarna een meer uitvoerige behandeling van de meetkunde op den bol. Nieuw is verder de zorgvuldige bestudeering van de aangeschreven bollen van een viervlak (toegelicht door een zeer duidelijke figuur) en een uitvoerige bespreking van de bollen, die aan de zijden van een scheeven vierhoek raken.

Het keurig uitgevoerde, door overzichtelijke rangschikking der stof en door voortreffelijke figuren uitmuntende werk zal ongetwijfeld weer goede diensten bewijzen als handleiding bij de studie voor de acten Wiskunde L. O. en KI. Als zoodanig laat het inderdaad vrijwel niets te wenschen over.

Hiermede is de beteekenis van het werk echter geenszins uitgeput. Het is niet alleen voor examenstudie bestemd, maar het wil tevens helpen voorzien in de door docenten bij het V. H. en M. O. zoo dringend gevoelde behoefte aan handboeken, waarin de elementaire wiskunde dieper en omvangrijker wordt behandeld dan in de schoolboeken geschieden kan. Zoo het werk beschouwend, kan ik echter niet verzwijgen, dat er nog wel heel wat desiderata zijn overgebleven. Immers evenmin als de Planimetrie van Molenbroek-Wijdenes is de Stereometrie op de hoogte van den tijd, wat de axiomatische fundeering betreft. In beide werken worden terloops enkele axioma's ingevoerd, die in het geheel niet voldoende zijn, om daarop de meetkunde op te bouwen; daarna wordt dan natuurlijk zoo vaak een beroep op de aanschouwing gedaan, dat die enkele axioma's ook wel weg hadden kunnen blijven. In het bijzonder ontbreken alle axioma's en theorema's der volgorde.

Ik hoop, dat de bewerker bij een volgende uitgave deze leemten zal willen aanvullen. Als studieboek voor examens heeft het werk daaraan weliswaar voorloopig geen behoefte, maar als handboek voor leeraren kan het niet langer nalaten, voor een correcten opbouw der meetkunde van het begin af zorg te dragen.

E. J. Dijksterhuis.

EENWAARDIG OF MEERWAARDIG?

(Naar aanleiding van het gelijkbetitelde artikel in *Euclides*,
4de jaargang, nr. 3, blz. 97)

DOOR

DR. PAUL DE VAERE (Brussel).

Herinnerend aan een polemiek, die een goede twintig jaar geleden over die strijdvrage gevoerd werd in het *Wiskundig Tijdschrift* — het feit zelf was mij onbekend, en de argumenten der twee partijen zijn het mij nog steeds — vraagt de Heer *Wijdenes* zich af of er nog belangstelling voor die zaak bestaat. Ik beschik over geen gegevens om daarop te antwoorden, maar wenschte wel, dat die belangstelling, als ze er niet meer is, opnieuw moge gewekt worden.

Ten eerste, omdat ik in het aanbrengen en hanteeren van strenge opvattingen omtrent wortelvormen, al of niet in verband met het oplossen van irrationale vergelijkingen, een gelegenheid zie om onze leerlingen tot nadenken te dwingen en hun te toonen, dat algebra ook wat anders is dan automatisch rekenwerk.

Ten tweede, omdat de Heer W. in zijn artikel en in zijn uitstekkende en zeer verspreide leerboeken een standpunt inneemt, waarmee ik mij niet kan vereenigen — en dat de volgende overwegingen hem misschien zullen doen prijsgeven.

Als ik den oorsprong van ons meeningsverschil opspoor, dan meen ik dien te ontdekken in deze zinsneden op blz. 103: „*waar de Algebra de leer is der constanten en onbekenden houden we vast aan de enge opvatting*” ($\sqrt{a}$ éénwaardig); „*zoodra we met functies en haar nulwaarden te doen krijgen, rekenen we de wortels twee-waardig.*”

Dat kan er bij mij niet door: heeft $\sqrt{x}$, heeft $\sin x$, hebben alle of sommige teekens voor op x uit te voeren bewerkingen, een verschillende beteekenis, naarmate x een constante, een veranderlijke of een onbekende is? De vraag zóó stellen is m. i. ze ontkennend beantwoorden.

Ik beweer: hebben we maar een duidelijk begrip van de beteeke-

nis, die we in elk geval aan $\sqrt{a}$ moeten hechten — d. i. zijn we 't daarover eens geworden — dan volgt daaruit ipso facto en zonder mogelijke discussie of zekere waarde van x al dan niet als oplossing dient te worden opgevat van een vergelijking, waarin vierkantwortels voorkomen.

En nu meen ik — ook zonder er de litteratuur te willen op na slaan — dat er op dat stuk wel zekere internationale conventies bestaan en bindend zijn. Laten we eens zien.

Als $a \neq 0$ is, dan zijn er steeds twee tegengestelde getallen, waarvan het kwadraat a is.

1) Is $a > 0$, dan zijn die getallen reëel; **het positieve wordt voorgesteld door $\sqrt{a}$ of $+\sqrt{a}$** (net als het positieve getal, waarvan de volstreckte waarde 3 is, mag geschreven worden 3 of $+3$); en, bijgevolg, het negatieve door $-\sqrt{a}$.

2) Is $a < 0$, dan zijn die twee getallen zuiver imaginair; **$\sqrt{a}$ of $+\sqrt{a}$ stelt dan datgene voor, waarin de coëfficiënt van i positief is**; $-\sqrt{a}$, bijgevolg, het andere. Zoo is $\sqrt{-9} = 3i$, $-\sqrt{-9} = -3i$.

Ik beschouw — tot bewijs van het tegendeel — deze twee overeenkomsten als internationaal en bindend.

3) Is ten slotte a zuiver imaginair of complex, dan zijn de twee vierkantwortels van a complex; voor zoover mij bekend, stelt $\sqrt{a}$ niet meer speciaal een van beide voor. Onmogelijk zou het niet zijn, ook in dit geval tot een vaste overeenkomst te geraken, en bijv. door $\sqrt{a}$ dien wortel voor te stellen, waarvan de hoofdwaaarde φ van het argument voldoet aan $-\frac{\pi}{2} < \varphi \leq +\frac{\pi}{2}$. Dit zou de definities 1 en 2 als bijzondere gevallen insluiten, en het voordeel opleveren ten eerste, dat $\sqrt{a}$ een éénwaardige uitdrukking wordt; ten tweede, dat bij reeksontwikkeling van $(1+z)^{1/2}$ [voor $|z| < 1$], de som van de aldus bekomen binomiaalreeks steeds de zoo even gedefiniëerde waarde van $\sqrt{1+z}$ zou zijn. [Zie bijv. SCHUH, *Lessen over de Hoogere Algebra*, III, § 301 of *Beknopte Hoogere Algebra*, § 238].

Doch laten we ons alleen houden aan de overeenkomsten, die overal burgerrecht verkregen hebben, en zulke zijn m. i. die vermeld sub 1 en 2. Aan die beide trouwens hebben wij genoeg, want ik meen, dat in het Middelbaar en Voorbereidend Hooger Onderwijs alleen vierkantwortels van reële vormen dienen be-

schouwd te worden; worteltrekken uit niet reële vormen is een vraagstuk, dat pas door het invoeren van de begrippen modulus en argument van een complex getal volledige helderheid kan verkrijgen.

Het niet te versmaden voordeel van onze afspraak is, dat we slechts **éénwaardige** uitdrukkingen en functies te hanteeren krijgen. Mogen we al niet heel blij zijn, als ons Algebra-onderwijs de leer der eenvoudigste *éénwaardige reële* functies van *reële* veranderlijken geworden is? Laten we toch bedenken, met welke omzichtigheid de Wiskunde, in hare hoogere deelen, het begrip „meerwaardige functie” invoert, en ons dan afvragen of we, met dat begrip, geen heldere, vroeger opgewekte denkbelden gaan vertroebelen.

Als ik aan een leerling achtereenvolgens deze drie vragen stel:

- 1) *Bereken $9 + \sqrt{9}$* (Antwoord: 12);
 - 2) *Bereken voor $x = 9$ de waarde van $x + \sqrt{x}$* (Antwoord: 12);
 - 3) *Is $x = 9$ een wortel van $x + \sqrt{x} = 6$* (Antwoord: neen);
- dan zie ik geen kans, zonder van goochelarij beschuldigd te worden, het antwoord op de laatste vraag in een „ja” te doen overgaan.

En mocht ik daarin al slagen, dan bleef, bij mijzelf en bij mijn leerlingen, een onbehaaglijk gevoel over; de indruk, dat sommige symbolen naar willekeur verwrongen worden als het in de kraam te pas komt. Daarin steekt gevaar. Moeten we dag in, dag uit erop wijzen, dat de wiskunde de wetenschap is van het zekere, het absolute, van het „’t is zoo en niet anders”, om dan, door een paar lessen gewijd aan irrationale vergelijkingen, de aldus aangekweekte rotsvaste overtuiging aan ’t wankelen te brengen? Mij dunkt, de jongens zullen hun geloof in de onfeilbaarheid der wiskunde beter behouden als we hun zeggen: $x = 4$ is wel, en $x = 9$ is geen oplossing van $x + \sqrt{x} = 6$; $x = 9$ is een oplossing van $x - \sqrt{x} = 6$. Dat is duidelijk en krachtig; dat is de taal, die onze jongelui dagelijks in de wiskunde-les hooren: de taal der wiskunde. Ik zie daarin een niet te onderschatten argument voor de „enge” opvatting.

Trouwens worden aan de „ruime” opvatting voordeelen, en aan de „enge” nadeelen toegekend; die ik zoo maar niet goedschiks kan erkennen. Zoo moet het betoog op blz. 99 en 100, als ik het goed begriip, bewijzen, dat het op blz. 99 opgegeven vraag-

stuk, naarmate men de enge of de ruime opvatting huldigt, tot drie verschillende of tot één enkele vergelijking voert. Daarop moet ik dadelijk dit antwoorden: geen overeenkomst, 't zij een ruime, 't zij een enge, is in staat ons te ontslaan van de noodzakelijkheid alle mogelijke gevallen (er zijn er vijf: B en $C < 90^\circ$, $B = 90^\circ$, $C = 90^\circ$, $B > 90^\circ$, $C > 90^\circ$) te onderzoeken en in elk geval de vergelijking op te stellen (waarbij éénwaardige wortelvormen moeten gebruikt worden); blijkt het naderhand, dat de vijf aldus gevonden vergelijkingen kunnen samengevat worden in één enkele, mits de wortelvormen als tweewaardig te beschouwen, des te beter; dan worde dit vermeld en worde dit gebruikt bij het rationaal maken en oplossen. [Ik zelf zou schrijven

$$\pm \sqrt{b^2 - x^2} \pm \sqrt{c^2 - x^2} = a,$$

daarbij vermeldend, dat van de vier teekenverbindingen er ééne, — —, dient uitgesloten.] Maar het gaat niet op de vergelijking in één geval op te stellen en dan, geleid door een ongewettigd en blind vertrouwen in de algemeen geldigheid van dit resultaat, te denken: de vergelijking, die we in elk ander geval vinden, zal wel dezelfde zijn, mits tweewaardige opvatting van de wortelvormen. Dit zou in de hoogste mate onwetenschappelijk zijn, en kon wel eens misloopen. Bondig gezegd: de ruime opvatting kan wel dienen om verschillende vergelijkingen (zonder gebruik van het dubbelteeken $\pm$) onder één gedaante samen te vatten en op te lossen; ze kan de redeneeringen, die tot deze verschillende vergelijkingen voeren, niet vervangen.

Bovendien kan men tal van vraagstukken uitdenken, die tot vergelijkingen voeren met éénwaardig op te vatten wortelvormen.

Het vraagstuk: „Bepaal een getal, dat opgeteld bij zijn rekenkundigen wortel de som 6 oplevert” geeft aanleiding tot die onschuldige vergelijking

$$x + \sqrt{x} = 6,$$

die zich als twistappel voordeed, en bij welker oplossing nu voorzeker de enge opvatting dient gehuldigd. Evenzoo bij het vraagstuk: „In een cirkel met straal R een gelijkbeenigen driehoek beschrijven, waarvan basis en hoogte 1 tot som hebben”. Noemt men de hoogte x , dan krijgt men de vergelijking

$$x + 2\sqrt{x(2R - x)} = l.$$

Wie deze nu als gelijkwaardig met

$$4x(2R - x) = (l - x)^2$$

beschouwt, voert, als $l < 2R$ is, een oplossing in die niet voldoet aan de gestelde vraag, wel echter aan deze: „In een cirkel met straal R een gelijkbeenigen driehoek beschrijven, waarvan de hoogte l meer bedraagt dan de basis.”

Het ruime standpunt laat zich nog verdedigen zoo het oplossen van vergelijkingen als een zuiver algebraïsche oefening beschouwd wordt, zonder concrete beteekenis. Is de irrationale vergelijking echter ontstaan door „uitkleeding” van een niet algebraïsch vraagstuk, dan zal het doorgaans geboden zijn zich angstvallig op het enge standpunt te houden.

Graag zei ik nog iets over de manier, waarop ik die zaken in de klas behandel.

Na de algemeene theorie van de rekenkundige wortels, geef ik strenge bepalingen voor de algebraïsche vierkantswortels, en wijs er met klem op dat, voor $a > 0$, $\sqrt{a}$ steeds een positief getal voorstelt; **dat de formules**

$$\sqrt{a^2} = a, \sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}, \sqrt{\frac{a^2}{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}}, \sqrt{\frac{b}{a^2}} = \frac{\sqrt{b}}{a}$$

slechts gelden voor $a > 0$; dat ze voor $a < 0$ moeten vervangen worden door

$$\sqrt{a^2} = -a, \sqrt{a^2 b} = -a\sqrt{b}, \sqrt{\frac{a^2}{b}} = -\frac{a}{\sqrt{b}}, \sqrt{\frac{b}{a^2}} = \frac{\sqrt{b}}{a};$$

dat men, zoo algemeene formules gewenscht worden, dient te schrijven

$$\sqrt{a^2} = |a|, \sqrt{a^2 b} = |a|\sqrt{b}, \sqrt{\frac{a^2}{b}} = \frac{|a|}{\sqrt{b}}, \sqrt{\frac{b}{a^2}} = \frac{\sqrt{b}}{|a|}.$$

Ik laat de leerlingen dan eens *de grafiek teekenen van*

$$y = \sqrt{(x+1)^2} - \sqrt{(x-1)^2}.$$

De meeste loopen erin en komen voor den dag met

$$y = x + 1 - (x - 1) = 2;$$

als grafiek dus een rechte evenwijdig met de x -as.

We bekijken de zaak dan eens samen:

$$\sqrt{(x+1)^2} = \begin{cases} x+1 & \text{voor } x \geq -1 \\ -(x+1) & \text{voor } x \leq -1 \end{cases}$$

$$\sqrt{(x-1)^2} = \begin{cases} x-1 & \text{voor } x \geq 1 \\ -(x-1) & \text{voor } x \leq 1 \end{cases}$$

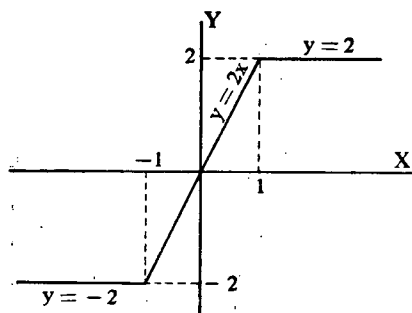
Bijgevolg:

$$\text{voor } x \leq -1, \quad y = -(x+1) + (x-1) = -2;$$

$$\text{voor } -1 \leq x \leq +1, \quad y = x+1 + (x-1) = 2x;$$

$$\text{voor } x \geq 1, \quad y = x+1 - (x-1) = 2.$$

En de grafiek ziet er dus zoo uit:



$$y = \sqrt{(x+1)^2} - \sqrt{(x-1)^2}$$

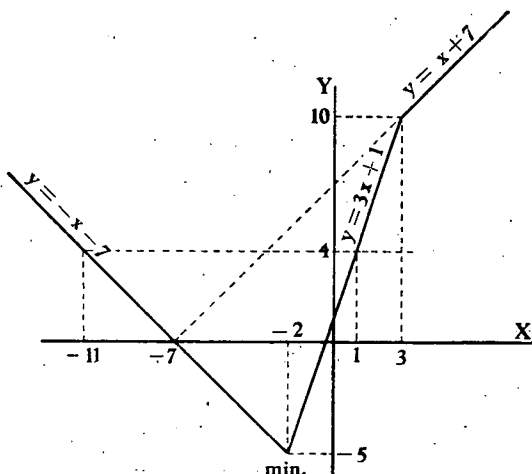
Ze kijken natuurlijk verbaasd; sommige probeeren er aan te tornen; allerlei bezwaren worden geopperd; maar na gemeenschappelijk onderzoek leggen ze er zich, overtuigd, bij neer; als men strikt aan de definitie van $\sqrt{a}$ voor $a > 0$ vasthoudt, is 't wel zoo en niet anders.

Een tweede voorbeeld: *Teeken de grafiek van*

$$y = \sqrt{4x^2 + 16x + 16} - \sqrt{x^2 - 6x + 9} \quad \dots (1)$$

De meeste hebben 't al begrepen en komen met de juiste figuur voor den dag.

Ik laat in 't voorbijgaan opmerken, dat y een minimum bereikt voor $x = -2$, wat zonder grafiek niet zoo makkelijk in te zien zou zijn, en vraag dan:



De vergelijking

$$y = \sqrt{4x^2 + 16x + 16} - \sqrt{x^2 - 6x + 9}$$

$$\sqrt{4x^2 + 16x + 16} - \sqrt{x^2 - 6x + 9} = 4. \quad \dots (2)$$

grafisch oplossen.

Ze vinden direct: $x = 1$, $x = -11$. Even controleeren. Voor $x = 1$ wordt 't eerste lid: $\sqrt{36} - \sqrt{4} = 6 - 2 = 4$;

voor $x = -11$: $\sqrt[3]{324} - \sqrt[3]{196} = 18 - 14 = 4$. Dat klopt dus.

Mag ik hier terloops aan de voorstanders van tweewaardige wortels vragen, hoe zij zich de functie y , gedefinieerd door de betrekking (1), voorstellen? Ik vermoed, dat het antwoord zal luiden: als het complex, het inbegrip van de vier lineaire functies

$$y = 2x + 4 - (x - 3) \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$y = 2x + 4 + (x - 3) \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$y = -(2x + 4) + (x - 3) \quad . \quad . \quad (5)$$

$$y = -(2x + 4) - (x + 3); \quad . \quad . \quad (6)$$

dus als een vierwaardige functie van x .

Dan moet ik doen opmerken, dat mijne *éénwaardige* functie y samenvalt met de lineaire functie (3) in het interval $(3, +\infty)$,

$$,, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad (4) \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad (-2, +3),$$

$$,, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad (5) \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad (-\infty, -2),$$

maar nergens tot dekking komt met de lineaire functie (6). Met andere woorden, voor *geen enkele* waarde van x zal er overeenstemming bestaan tusschen de door (1) en (6) gedefinieerde waarden van y , vooropgesteld dat men zich aan de afspraak $\sqrt{9} = 3$, en niet $\sqrt{9} = -3$, houdt.

En mag ik aan de voorstanders van de ruime opvatting ook vragen, welke van de vier vergelijkingen

$$2x + 4 - (x - 3) = 4 \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

$$2x + 4 + (x - 3) = 4 \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

$$-(2x + 4) + (x - 3) = 4 \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

$$-(2x + 4) - (x - 3) = 4 \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

als gelijkwaardig met de vergelijking (2) dient beschouwd te worden? Als ik de afspraak op blz. 100 (in vetjes) wil naleven, is mij zulks niet erg duidelijk; elk der vergelijkingen (7) tot (10) kan immers gelden als een rationale vorm van de vergelijking (2).

Men kan meer zulke oefeningen opgeven, waaruit blijkt dat het „enge” standpunt meer nadenken vereischt dan het „ruime”; ik zou bijna zeggen: het ruime is het ruwe en hoort thuis in M. U. L. O.; het enge is het fijne en is kost voor Middelbaar en Voorbereidend Hooger Onderwijs.

Ten slotte nog dit. Wordt een irrationale vergelijking door al of niet herhaald kwadrateren tot een rationale herleid, dan moet, bij de enge opvatting, voor elke oplossing van deze onderzocht worden of zij wel aan gene voldoet. Doorgaans gaat men daarbij

gewoonweg door substitutie te werk. De volgende bemerkingen doen een middel aan de hand om het substitueeren te vermijden, of dit tenminste tot een minimum te beperken. *We beschouwen daarbij alleen oplossingen, die ontleend zijn aan het gebied der reële getallen en die bovendien alle in de gegeven vergelijking voorkomende wortelvormen reël maken*, en noemen die kortweg „reële oplossingen”.

Ontstaat uit $A = B \dots (11)$

door kwadrateering $A^2 = B^2 \dots (12)$,

dan zijn (11) en (12) niet gelijkwaardig, want (12) kan men schrijven

$$A^2 - B^2 = 0 \text{ of } (A - B)(A + B) = 0$$

en dus splitsen in

$$A - B = 0 \text{ of } A = B \dots (11)$$

en $A + B = 0 \text{ of } A = -B \dots (13).$

Een oplossing van (12) is dus een oplossing van (11) of (13). Nu zijn de reële oplossingen (11) hieraan te erkennen, dat ze aan A en B een zelfde teeken geven, en die van (13) hieraan, dat ze aan A en B verschillend teeken geven. Een oplossing van (12) zal dus een reële oplossing van (11) zijn als ze 1^o) alle in (11) voorkomende wortelvormen reël maakt; 2^o) aan de twee leden van (11) hetzelfde teeken geeft.

Hebben A en B (als reële functies van een reële veranderlijke beschouwd) steeds hetzelfde teeken, dan is (13) een valsche vergelijking. Een oplossing van (12) is dan een reële oplossing van (11), zoodra ze alle in (11) voorkomende wortelvormen reël maakt.

Gevolgtrekkingen (waarbij alleen die oplossingen van de rationale eindvergelijking in aanmerking komen, welke alle in de irrationale gegeven vergelijking optredende wortelvormen reël maken)

1) Een wortel van $A = B^2$ voldoet aan $\sqrt{A} = B$, als hij $B \geq 0$ maakt.

2) Als B een positieve constante of functie is, dan voldoet elke wortel van $A = B^2$ aan $\sqrt{A} = B$.

3) Elke wortel van $A = B$ voldoet aan $\sqrt{A} = \sqrt{B}$.

4) Een wortel van $(\sqrt{A} + \sqrt{B})^2 = C^2$ voldoet aan $\sqrt{A} + \sqrt{B} = C$, als hij $C \geq 0$ maakt.

5) Als C een positieve constante of functie is, dan voldoet elke wortel van $(\sqrt{A} + \sqrt{B})^2 = C^2$ aan $\sqrt{A} + \sqrt{B} = C$.

6) Elke wortel van $(\sqrt{A} + \sqrt{B})^2 = C$ voldoet aan $\sqrt{A} + \sqrt{B} = \sqrt{C}$.

Hierbij kan men nog bemerken, dat in de gevallen 1 en 2 het onderzoek naar de realiteit achterwege kan blijven: een reële wortel van $A = B^2$ voldoet aan $\sqrt{A} = B$ of aan $\sqrt{A} = -B$; in beide vergelijkingen is het tweede lid reëel, dus ook het eerste.

Eerste voorbeeld (vgl. *Euclides*, 4de jg., nr. 3, blz. 101)

$$\begin{aligned} \sqrt{2x-3} &= \sqrt{6x+28} - \sqrt{4x+1} \quad \dots \quad (14) \\ \sqrt{2x-3} + \sqrt{4x+1} &= \sqrt{6x+28} \\ (\sqrt{2x-3} + \sqrt{4x+1})^2 &= 6x+28 \\ \sqrt{8x^2-10x-3} &= 15 \\ 8x^2-10x-3 &= 225 \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{gelijkwaardig; zie 6} \\ \text{, , , , ,} \\ \text{, , , , ,} \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \\ \\ \text{zie 2} \end{array}$$

$$x_1 = 6, \quad x_2 = -\frac{19}{4}.$$

Voor $x = 6$ zijn de drie wortelvormen in (14) reëel; $x = 6$ is dus een reële oplossing.

Voor $x = -\frac{19}{4}$ is $2x - 3 < 0$; dus is $x = -\frac{19}{4}$ geen reële oplossing.

Tweede voorbeeld (vgl. *Wijdenes*, *Nieuwe School-Algebra*, Deel II, 2de druk, blz. 107)

$$\begin{aligned} \sqrt{x+4} - \sqrt{x-4} &= \sqrt{x-1} \quad \dots \quad (15) \\ \sqrt{x+4} &= \sqrt{x-4} + \sqrt{x-1} \\ x+4 &= (\sqrt{x-4} + \sqrt{x-1})^2 \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{gelijkwaardig:} \\ \text{zie 6.} \end{array}$$

$$\frac{9-x}{3x^2-2x-65} = \frac{2\sqrt{x^2-5x+4}}{0} \quad \text{na oplossing alleen}$$

$$x \leq 9 \text{ behouden (zie 1)}$$

$$x_1 = 5, \quad x_2 = -4\frac{1}{3}.$$

Voor $x = 5$ zijn de drie wortelvormen in (15) reëel, en is $x \leq 9$; $x = 5$ is dus een reële oplossing.

Voor $x = -4\frac{1}{3}$ is $x + 4 < 0$; dus is $x = -4\frac{1}{3}$ geen reële oplossing.

Derde voorbeeld (Vgl. *Wijdenes*, *Lagere Algebra*, Deel II, 2de druk, blz. 147)

$$\begin{aligned} 5x &= 2\sqrt{3x^2-x+15} \quad \text{na oplossing alleen} \\ 25x^2 &= 4(3x^2-x+15) \quad x \geq 0 \text{ behouden (zie 1)} \\ x_1 &= 2, \quad x_2 = -\frac{30}{13} \end{aligned}$$

$x = 2$ is een reële oplossing daar aan $x \geq 0$ voldaan is; $x = -\frac{30}{13}$ niet.

Vierde voorbeeld

$$\sqrt{x+1} - 2 = \sqrt{2x-1} - \sqrt{x+2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} &= \sqrt{2x-1} + 2 \\ (\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2})^2 &= (\sqrt{2x-1} + 2)^2 \end{aligned} \right\} \text{gelijkwaardig: vgl. 6.}$$

$$2x + 3 + 2\sqrt{(x+1)(x+2)} = 2x + 3 + 4\sqrt{2x-1}$$

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{(x+1)(x+2)} &= 2\sqrt{2x-1} \\ (x+1)(x+2) &= 4(2x-1) \end{aligned} \right\} \text{gelijkwaardig: zie 3}$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 2.$$

Beide zijn oplossingen van (16) daar ze de drie wortelvormen reëel maken.

BEWERKINGEN MET BREUKEN EN HAAR VERBAND MET VERSCHILLENDE GEBIEDEN DER WISKUNDE

DOOR

Prof. Dr. J. WOLFF.

(Voordrachten, gehouden voor leeraren aan Hoogere Burgerscholen,
Gymnasia en Lycea).

Eerste Voordracht.

1. Wij plaatsen ons op het standpunt, dat ons alleen bekend zijn: *de optelling en de vermenigvuldiging der geheele getallen, zoowel positieve als negatieve.*

Een breuk $\frac{x_1}{x_2}$ is een paar geheele getallen, die niet beide nul zijn. Wij schrijven:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} \text{ als } x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0, \text{ en d\`an alleen.}$$

Dank zij de uitsluiting van $\frac{0}{0}$ volgt uit $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$ en $\frac{x_1}{x_2} = \frac{z_1}{z_2}$, dat

$\frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$, m. a. w.: de transitieve wet voor het = teeken tusschen

breuken. Wij zullen dikwijls de afkorting x gebruiken voor $\frac{x_1}{x_2}$,

y voor $\frac{y_1}{y_2}$, enz.

Van de gebruikelijke bewerkingen

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1 y_2 + x_2 y_1}{x_2 y_2}$$

en
$$\frac{x_1}{x_2} \times \frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1 y_1}{x_2 y_2}$$

noemt men de eerste „optelling”, wat van zuiver wiskundig standpunt bevreemdend is, omdat er drie keer vermenigvuldigd wordt en slechts één keer opgeteld. Wij zullen de eerste bewerking, even goed als de tweede „vermenigvuldiging” noemen.

Dr. M. VAN HAAFTEN
Dr. B. P. HAALMEYER
Prof. Dr. M. DE HAAS
Dr. A. HEYTING
W. H. JULIUS †
Prof. Dr. J. C. KAPTEYN
Dr. H. D. KLOOSTERMAN
C. L. LANDRÉ †
R. R. LIT
Prof. G. MANNOURY
Dr. M. MINNAERT
Dr. P. MOLENBROEK
Prof. Dr. W. H. J. MOLL
Dr. H. OFFERHAUS
Prof. Dr. L. S. ORNSTEIN
Prof. Dr. C. H. VAN OS
Dr. A. G. PLOEG
Dr. J. A. PRINS
Prof. Dr. P. J. VAN RHIJN
Prof. Dr. J. G. RUTGERS
Dr. J. DU SAAR
Dr. G. SCHAAKE
Dr. M. SCHEFFER
J. H. SCHOGT
Prof. Dr. G. SCHOUTEN
Prof. Dr. J. A. SCHOUTEN
Prof. Dr. F. SCHUH
H. SIERSMA
TH. J. STIELTJES †
Dr. D. STRUIK
Dr. L. S. N. SWEERTS
Dr. F. TERPSTRA
Dr. J. THIE
Prof. Dr. M. J. VAN UVEN
Prof. H. J. VAN VEEN
H. G. A. VERKAART
H. L. VERNHOUT
Prof. Dr. G. VERRIEST
J. VERSLUYS
Prof. Dr. H. DE VRIES
Prof. Dr. R. WEITZENBÖCK
J. J. C. WESTENDORP †
Prof. Dr. J. WOLFF
Prof. Dr. W. VAN DER WOUDE
P. WIJDENES

VRAAG CAT.
A, B, C, D



S. STEVIN

*Geb. te Brugge omstreeks 1560
overleden 1620*

P. NOORDHOFF
TE GRONINGEN
GEEFT DE WERKEN UIT
VAN

Prof. Dr. J. A. BARRAU

P. J. H. BAUDET †

Dr. M. J. BELINFANTE

J. BOSMAN

Dr. O. BOTTEMA

A. J. VAN BREEN †

Prof. Dr. H. BREMEKAMP

Prof. Dr. L. E. J. BROUWER

Dr. H. C. BURGER

C. A. CIKOT †

Prof. Dr. J. G. VAN DEN CORPUT

Dr. E. J. DIJKSTERHUIS

Dr. M. EUWE

Prof. Dr. A. FOKKER

P. VAN GEER †

J. C. N. GRAAFLAND

Dr. G. F. C. GRISS

In beide „producten” zijn teller en noemer bilineaire uitdrukkingen in $x_1, x_2; y_1, y_2$.

2. Ter generalisatie stellen we de volgende vraag: *als we de definitie geven*

$$\frac{x_1}{x_2} * \frac{y_1}{y_2} = \frac{Ax_1y_1 + Bx_2y_2 + Cx_1y_2 + C'x_2y_1}{Dx_1y_1 + Ex_2y_2 + Fx_1y_2 + F'x_2y_1}, \quad (1)$$

waarin de A, B , enz. standvastige geheele getallen zijn, hoe moeten dan die 8 constanten gekozen worden, opdat steeds

$$x * (y * z) = (x * y) * z?$$

Alleen dan namelijk als deze eigenschap (associatieve eig.) geldt, heeft de bewerking $*$ recht op den naam „vermenigvuldiging”.

Om banale oplossingen van te voren uit te sluiten, zoeken we de breuken x , die zóó zijn, dat $x * y$ onafhankelijk is van y . Voor die breuken x moet

$$(Ax_1 + C'x_2)(Fx_1 + Ex_2) - (Cx_1 + Bx_2)(Dx_1 + F'x_2) = 0.$$

Er zijn twee gevallen mogelijk:

a) hoogstens 2 breuken voldoen aan de vraag.

b) alle breuken voldoen aan de vraag.

In geval b) is óf

b') $x * y = f(x)$ en niet altijd dezelfde breuk, óf

b'') $x * y =$ een constante breuk.

Geval b'') kunnen we dadelijk als triviaal uitsluiten.

In geval b') zijn er twee breuken a en b , zoodat $f(a) \neq f(b)$,

dus

$$\frac{a_1}{a_2} * \frac{y_1}{y_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

en

$$\frac{b_1}{b_2} * \frac{y_1}{y_2} = \frac{q_1}{q_2} \neq \frac{p_1}{p_2}.$$

Het is nu zeer gemakkelijk in te zien, dat als $\frac{p_1}{p_2}$ en $\frac{q_1}{q_2}$ ongelijke breuken zijn, $\frac{\lambda p_1 + \mu q_1}{\lambda p_2 + \mu q_2}$ alle breuken doorloopt, als de geheele getallen λ en μ alle waarden doorloopen; en uit het feit, dat teller en noemer van (1) homogeen en lineair in x_1 en x_2 zijn, volgt:

$$\frac{\lambda a_1 + \mu b_1}{\lambda a_2 + \mu b_2} * \frac{y_1}{y_2} = \frac{\lambda p_1 + \mu q_1}{\lambda p_2 + \mu q_2},$$

zoodat $x * y = f(x)$ alle breuken doorloopt, als x alle breuken doorloopt. Nu is

$$(x * y) * z = f(x * y) = f\{f(x)\}$$

en

$$x * (y * z) = f(x),$$

dus voor iedere breuk x moet $f\{f(x)\} = f(x)$, en daar $f(x)$ iedere breuk kan worden door geschikte keuze van x , zoo moet steeds $x * y = x$ zijn.

Wij sluiten geval $b')$ ook als triviaal uit, en houden ons dus slechts bezig met geval $a)$.

Op geheel dezelfde wijze kan men vragen naar de breuken x , waarvoor $y * x$ onafhankelijk is van y ; men komt dan tot de uitsluiting van het triviale geval $y * x = x$. Blijft over het geval, waarin $x * y$ en $y * x$ ieder afzonderlijk voor hoogstens 2 breuken x onafhankelijk zijn van y .

Er bestaat dan een breuk a , zóó dat nòch $a * x$ nòch $x * a$ voor alle breuken x eender uitvalt, bijv. $a * p \neq a * q$. Daaruit volgt, dat $a * x$ met x alle breuken doorloopt (zie boven), evenzoo $x * a$.

Er is dus een breuk e , zoodat $a * e = a$,

en een breuk ε , zoodat $\varepsilon * a = a$.

Nu is $(x * a) * e = x * (a * e) = x * a$,

en $\varepsilon * (a * x) = (\varepsilon * a) * x = a * x$;

daar nu $x * a$ en $a * x$ met x alle breuken doorloopen, geldt voor alle breuken x :

$$x * e = x \text{ en } \varepsilon * x = x;$$

in het bijzonder: $\varepsilon * e = \varepsilon$ en $\varepsilon * e = e$,

dus $\varepsilon = e$.

Wij noemen deze breuk de „*modulus*.”

Uit $x * e \equiv x$ volgt voor de coëfficiënten van (1)

$$Ae_1 + Ce_2 = F'e_1 + Ee_2 \neq 0$$

$$C'e_1 + Be_2 = 0$$

$$De_1 + Fe_2 = 0,$$

en uit $e * x \equiv x$ volgt

$$Ae_1 + C'e_2 = Fe_1 + Ee_2 \neq 0$$

$$Ce_1 + Be_2 = 0$$

$$De_1 + F'e_2 = 0.$$

Is $e_1 \neq 0$, $e_2 \neq 0$, dan volgt $C = C'$, $F = F'$.

Is $e_1 = 0$, $e_2 \neq 0$, dan volgt $C = C' = E \neq 0$, $B = F = F' = 0$.

Is $e_1 \neq 0$, $e_2 = 0$, dan volgt $A = F = F' \neq 0$, $C = C' = D = 0$.

Daar in alle gevallen $C = C'$ en $F = F'$, vinden wij:

*Er zijn geen andere bewerkingen *, die aan onze eischen voldoen, dan commutatieve.*

Uit de gevonden betrekkingen volgt, dat alle gezochte bewerkingen begrepen zijn in die, waarbij de coëfficiënten $A, B, \dots$ van (1) als volgt bepaald worden:

$$\left. \begin{aligned} A &= e_1\lambda + e_2\varrho & B &= -e_1\mu & F &= F' = e_1\lambda \\ E &= e_1\varrho + e_2\mu & C &= C' = e_2\mu & D &= -e_2\lambda \\ f(e_1, e_2) &= \lambda e_1^2 + \varrho e_1 e_2 + \mu e_2^2 \neq 0; \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

hierin zijn λ , ϱ en μ evenals e_1 en e_2 willekeurige geheele getallen, die aan de laatste ongelijkheid voldoen.

3. Men verifieert gemakkelijk, dat alle op deze manier gevonden bewerkingen * associatief zijn, zoodat (2) de algemeene oplossing van ons vraagstuk levert.

Alvorens over te gaan tot indeeling van de bewerkingen in soorten, zullen we 3 voorbeelden beschouwen.

I. $f(x_1, x_2) \equiv x_2^2$, $e_1 = 0$, $e_2 = 1$, $\lambda = \varrho = 0$, $\mu = 1$.

$$x * y = \frac{x_1 y_2 + x_2 y_1}{x_2 y_2}. \quad \text{Gewone optelling van breuken.}$$

De eenige breuk x , waarvoor $x * y$ onafhankelijk is van y , is de breuk $\frac{1}{0}$. Merken we nog op, dat $\frac{1}{0} * \frac{1}{0}$ mislukt, doordat er $\frac{0}{0}$ zou komen.

II. $f(x_1, x_2) \equiv x_1 x_2$, $e_1 = 1$, $e_2 = 1$, $\lambda = \mu = 0$, $\varrho = 1$.

$$x * y = \frac{x_1 y_1}{x_2 y_2}. \quad \text{Gewone vermenigvuldiging.}$$

De breuken x , waarvoor $x * y$ onafhankelijk is van y , zijn $\frac{1}{0}$ en $\frac{0}{1}$ en opgemerkt zij, dat $\frac{1}{0} * \frac{0}{1}$ mislukt.

III. $f(x_1, x_2) \equiv x_1^2 + x_2^2$, $e_1 = 1$, $e_2 = 0$, $\lambda = \mu = 1$, $\varrho = 0$.

$$x * y = \frac{x_1 y_1 - x_2 y_2}{x_1 y_2 + x_2 y_1}.$$

Teller en noemer van het product zijn het reële en het met i vermenigvuldigde deel van $(x_1 + x_2 i)(y_1 + y_2 i)$, als i de gebruikelijke imaginaire eenheid is.

Er zijn geen breuken x , waarvoor $x * y$ onafhankelijk van y is, en geen enkele vermenigvuldiging mislukt.

In het algemeene, door (1) en (2) bepaalde geval moet een breuk x , waarvoor $x * y$ niet van y afhangt (zulke breuken zullen we *invariante breuken* noemen) voldoen aan

$$f(x_1, x_2) = 0.$$

Is a een invariante breuk, dan is $a * x = \frac{ka_1}{ka_2}$, waarin het product geschreven is, zooals het letterlijk door (1) gegeven is. Evenzoo is $a * y = \frac{la_1}{la_2}$; daaruit volgt

$$a * \frac{\lambda x_1 + \mu y_1}{\lambda x_2 + \mu y_2} = \frac{(\lambda k + \mu l) a_1}{(\lambda k + \mu l) a_2}.$$

Kiezen we λ en μ zóó, dat $\lambda k + \mu l = 0$, dan mislukt de laatste vermenigvuldiging, er is dus een breuk β , zoodat

$$a * \beta = \frac{0}{0},$$

maar

$$e * \beta = \beta.$$

Met de meer gebruikte λ, μ methode blijkt ons, dat voor iedere $x \neq a$ steeds

$$x * \beta = \beta,$$

dus β is, evenals a , een invariante breuk.

Zijn er twee verschillende invariante breuken a en β , dan is noodzakelijk $a * \beta$ een mislukking, en wèl de eenige. Is er slechts één invariante breuk a , dan is $a * a$ een mislukking.

De invariante breuken zijn de eenige breuken x , waarvoor de vergelijking

$$x * y = z,$$

waarin z een gegeven breuk, niet altijd een oplossing y heeft, m. a. w. waarvoor de „deeling” door x niet altijd mogelijk is (ter vergoeding voldoet dan aan $x * y = x$, iedere y , uitgezonderd $y =$ de eventueele andere invariante breuk),

Daarom verwijderd men $\frac{1}{0}$ in geval I: de gewone aftrekking van breuken is dan steeds mogelijk en ondubbelzinnig.

4. Wij gaan nu over tot classificatie van de verschillende vermenigvuldigingen, die we gevonden hebben.

Als a , b , c en d geheele getallen zijn, waarvoor $ad - bc \neq 0$, dan noemen we de overvoering van de breuk y in de breuk y' , die bepaald wordt door

$$\left. \begin{aligned} y'_1 &= ay_1 + by_2 \\ y'_2 &= cy_1 + dy_2 \end{aligned} \right\} T \quad \dots \quad (3)$$

een *projectieve transformatie*, op y uitgevoerd.

Deze benaming ontleenen we aan de meetkunde, waarin de „projectieve ruimte van 1 afmeting” gedefinieerd wordt als de verzameling van alle breuken, die daar „punten” heeten. Wij schrijven $y' = Ty$.

Daar $ad - bc \neq 0$, behoort bij iedere y' juist één y , bepaald door

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= Ay'_1 + By'_2 \\ y_2 &= Cy'_1 + Dy'_2 \end{aligned} \right\} T^{-1} \quad (4)$$

waarin $AD - BC \neq 0$, dus weer een projectieve transformatie, die de *inverse* van T heet.

Wij schrijven

$$y = T^{-1}y'.$$

Vermenigvuldigen we alle breuken y met eenzelfde breuk x , dan ondergaan volgens (1) alle breuken y één en dezelfde projectieve transformatie, die we T^x noemen. Doorloopt x alle breuken, dan vormen de oneindig vele aldus verkregen T^x een *groep* G . Vooreerst namelijk hebben we $e * y = y$, dus de verzameling T^x bevat de bijzondere transformatie T^e , die alle breuken onveranderd laat. Ten tweede: zijn x en z twee breuken, dan beteekent de achtereenvolgende toepassing van T_x en T_z , dat we de breuken y achtereenvolgens met x en z vermenigvuldigen, waarvan het resultaat krachtens de associatieve eigenschap in eens bereikt wordt door met $x * z$ te vermenigvuldigen, dus door toepassing van $T^x * z$, zijnde weer een transformatie van de verzameling. In de gebruikelijke groepentheoretische notatie:

$$T^x T^z = T^{x * z}.$$

Wegens de commutatieve eigenschap van onze vermenigvuldigingen komt de volgorde, waarin we T_x en T_z na elkaar toepassen, er niet op aan, dus de *groep* G is *Abelsch*. De *associatieve* eigenschap (*niet de commutatieve*) werd geeischt, om te zorgen dat de bewerkingen $x * y$ een *groep* vormen. Zij nu T een willekeurige projectieve transformatie (3). x' en y' mogen twee wille-

keurige breuken zijn, en $x = T^{-1}x'$, $y = T^{-1}y'$. Zij $x * y = z$ en $T(z) = z'$.

Dan schrijven wij:

$$z' = x' \cdot y', \text{ of ook } x' \cdot y' = (x * y)'$$

en beweren, dat de bewerking $\cdot$ weer een vermenigvuldiging is. Inderdaad: vooreerst ziet men zeer gemakkelijk, dat teller en noemer van z' den vorm (1) hebben in x'_1, y'_1, x'_2, y'_2 . En verder is

$$(x' \cdot y') \cdot u' = z' \cdot u' = (z * u)' = \{(x * y) * u\}'$$

$$\text{en} \quad x' \cdot (y' \cdot u') = x' \cdot (y * u)' = \{x * (y * u)\}',$$

dus de associatieve wet geldt voor de bewerking „ $\cdot$ ”. We zeggen dat de bewerking $*$ door de projectieve transformatie T overgaat in de bewerking $\cdot$ en geven de volgende algemeene definitie:

Gaat de bewerking $*$ door een projectieve transformatie over in de bewerking $\cdot$, dan noemen we deze beide bewerkingen *aequivalent*.

Is $\cdot$ aeq. met $*$, dan is $*$ aeq. met $\cdot$, omdat door de proj. transformatie T^{-1} : $\cdot$ in $*$ overgaat.

Verder volgt dit aequivalentiebegrip, zooals gemakkelijk is in te zien, de transitieve wet.

Wij rekenen nu alle onderling aequivalente vermenigvuldigingen tot één klasse.

De volgende (en laatste) voordracht zal gewijd zijn: ten eerste aan de doorvoering der voorgenomen classificatie, ten tweede aan de behandeling van het verband tusschen ons vraagstuk en de leer der complexe getalstelsels, benevens de niet-euklidische meetkunde.

5. Zij de vermenigvuldiging $*$, bepaald door $\lambda, \varrho, \mu, e_1, e_2$ aequivalent met de vermenigvuldiging $\cdot$, bepaald door $\lambda', \varrho', \mu', e'_1, e'_2$ en T de projectieve transformatie $x'_1 = ax_1 + bx_2$, $x'_2 = cx_1 + dx_2$, waardoor de bewerking $x * y = z$ overgevoerd wordt in de bewerking $x' \cdot y' = z'$. Nu is $x * y$ een projectieve transformatie op y uitgevoerd, die we T_x hebben genoemd, evenzoo is $x' \cdot y'$ een projectieve transformatie $T'_{x'}$ op y' uitgevoerd. Voor de determinant van T_x vindt men gemakkelijk $f(e_1, e_2)f(x_1, x_2)$. Evenzoo is de determinant van $T'_{x'}$ gelijk aan $f'(e'_1, e'_2)f'(x'_1, x'_2)$, waarin onder f' de kwadratische vorm $\lambda'x'^2_1 + \varrho'x'_1x'_2 + \mu'x'^2_2$ wordt ver-

staan. Maar de transformatie $T'_{x'}$ kan men laten ontstaan, door op y' eerst T^{-1} toe te passen, waardoor y verkregen wordt, daarna T_x , waardoor z ontstaat, en eindelijk T , waardoor z' ontstaat. Op de gebruikelijke manier voorgesteld:

$$T'_{x'} = T^{-1} T_x T.$$

De determinant van $T'_{x'}$ = het product van de determinanten van T^{-1} , T_x en T , dus

$$f'(e'_1, e'_2) \cdot f'(x'_1, x'_2) = f(e_1, e_2) \cdot f(x_1, x_2) \cdot C,$$

waarin C een geheel getal, dat van nul verschilt.

Wij noemen twee vormen $f(x_1, x_2) = \lambda x_1^2 + \varrho x_1 x_2 + \mu x_2^2$ en $f'(x'_1, y'_1) = \lambda' x_1'^2 + \varrho' x'_1 x'_2 + \mu' x_2'^2$ *aequivalent*, als de paren x_1, x_2 door een projectieve transformatie overgevoerd kunnen worden in de paren x'_1, x'_2 , zoodanig dat

$$kf(x_1, x_2) = k'f'(x'_1, x'_2), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

waarin k en k' geheele constanten zijn, beide ongelijk nul.

We hebben nu juist bewezen:

*Als * en . aequivalent zijn, dan zijn de bij * en . behorende kwadratische vormen aequivalent.*

Maar ook het omgekeerde is waar. Om dat in te zien, bewijzen we eerst:

Twee bewerkingen, die bij denzelfden kwadratischen vorm f hooren, zijn aequivalent.

De moduli van deze bewerkingen * en . mogen resp. e en ε zijn. Bepaal de breuk p zoodat $p * \varepsilon = e$, hetgeen mogelijk is, omdat $f(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \neq 0$. De bewerking $p * x * y = x \odot y$ heeft tot kwadratischen vorm kf , waarin k een constante, want $T_{p * x} = T_p T_x$, zoodat de determinant van $T_{p * x}$ gelijk is aan een constante maal die van T_x . Verder heeft deze bewerking den modulus ε , want

$$\varepsilon \odot y = p * \varepsilon * y = e * y = y.$$

Maar nu volgt uit (2), dat de bewerkingen $\odot$ en $\cdot$ samenvallen. We behoeven dus nog slechts de aequivalentie van $\odot$ en $*$ in te zien. Beschouw de projectieve transformatie

$$x = p * x'.$$

Heeft men $z = x * y$, dan volgt

$$\begin{aligned} p * z' &= p * x' * p * y', \text{ dus} \\ z' &= p * x' * y', \end{aligned}$$

want $f(p_1, p_2) \neq 0$ wegens $T_p T^s = T_e$. Door genoemde projectieve transformatie gaat dus $*$ in $\odot$ over, zoodat deze bewerkingen aequivalent zijn.

Zijn twee kwadratische vormen ieder aequivalent met een derde, dan ook onderling. Dat volgt vrijwel uit de definitie. Nu kunnen we met gemak bewijzen:

Als de bij de bewerkingen $$ en $\cdot$ behoorende kwadratische vormen f en f' aequivalent zijn, dan zijn die bewerkingen aequivalent.*

Door toepassing van een transformatie T , die aan (5) voldoet, gaat $*$ over in een daarmee aequivalente $\odot$, behoorende bij f' , dus bij denzelfden kwadr. vorm als die van $\cdot$, dus $\odot$ is aequivalent met $\cdot$, dus ook $*$ aequivalent met „ $\cdot$ ”. Wij vatten het gevondene samen:

De begrippen „aequivalente bewerkingen” en „aequivalente kwadratische vormen” dekken elkaar.

De gewenschte klassenindeeling krijgen we derhalve door alle onderling aequivalente kwadratische vormen tot één klasse te vereenigen. Wij komen zodoende tot het onderzoek naar een noodige en voldoende voorwaarde waaronder twee vormen

$$f = \lambda x_1^2 + \varrho x_1 x_2 + \mu x_2^2$$

$$f' = \lambda' x_1'^2 + \varrho' x_1' x_2' + \mu' x_2'^2$$

aequivalent zijn. Wij zullen dat schrijven

$$f \sim f'.$$

Als $f \sim f'$, dan is er een proj.tr. T , waarvoor (5) geldt. Stel $\varrho^2 - 4\lambda\mu = \Delta$ en $\varrho'^2 - 4\lambda'\mu' = \Delta'$ en noem δ den determinant van T . Dan volgt uit (5) en uit een bekende eigenschap van kwadratische vormen:

$$k'^2 \Delta' = \delta^2 k^2 \Delta \text{ of}$$

$$m^2 \Delta' = n^2 \Delta. \quad (6)$$

Voor de aequivalentie van f en f' is dus noodig: het bestaan van twee geheele van nul verschillende getallen m en n , die aan (6) voldoen. Deze voorwaarde is ook voldoende. Wij bewijzen nl.:

1^o. Zijn Δ en Δ' beide nul, dan is $f \sim f'$.

2^o. Is $\Delta \neq 0$ en bestaat de betrekking (6), waarin m en n geen van beide nul zijn, dan is $f \sim f'$.

Bewijs van 1^o. Op constante factoren na, die er ingevolge de definitie (5) niet toe doen, zijn f en f' volkomen kwadraten.

We nemen dus aan:

$$f = (a_2 x_1 - a_1 x_2)^2$$

$$f' = (a'_2 x'_1 - a'_1 x'_2)^2.$$

Daar vormen, die identiek nul zijn, stilzwijgend uitgesloten zijn, kunnen a_1 en niet beide nul zijn, evenmin a'_1 en a'_2 . Het is gemakkelijk in te zien dat iedere proj. tr. T , die de breuk $\frac{a_1}{a_2}$ overvoert in $\frac{a'_1}{a'_2}$ den vorm f doet overgaan in een vorm, die, op een constante factor na, met f' samenvalt, dus $f \sim f'$.

Bewijs van 2^o. Zonder de algemeenheid te schaden, onderstellen we dat $\Delta = \Delta' \neq 0$.

Eerste geval. $\lambda \neq 0, \lambda' \neq 0$.

$$4\lambda f = (2\lambda x_1 + \varrho x_2)^2 - \Delta x_2^2$$

en $4\lambda' f' = (2\lambda' x'_1 + \varrho' x'_2)^2 - \Delta x_2'^2.$

Beschouw de projectieve transformatie

$$x'_1 = 2\lambda x_1 + (\varrho - \varrho') x_2$$

$$x'_2 = 2\lambda' x_2.$$

De determinant is $4\lambda\lambda' \neq 0$.

Dan is $4\lambda' f' = 4\lambda'^2 \cdot 4\lambda f$, dus $f \sim f'$.

Tweede geval. $\lambda = 0$, dan is $f = x_2(\varrho x_1 + \mu x_2)$, ϱ en μ niet beide nul. $\Delta = \varrho^2$, dus $\Delta' = \varrho'^2$, zoodat

$$kf' = (a_2 x_1 - a_1 x_2)(\beta_2 x_1 - \beta_1 x_2),$$

waarin k geheel en $\neq 0$, en $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{\beta_1}{\beta_2}$, anders was $\Delta = 0$. Verder is $\varrho \neq 0$; er is dus een proj. tr. T die $\frac{0}{1}$ in $\frac{a_1}{a_2}$ en $\frac{-\mu}{\varrho}$ in $\frac{\beta_1}{\beta_2}$ overvoert. Daarbij gaat, op constante factoren na, f in f' over. Dus $f \sim f'$.

Het geval $\lambda' = 0$ gaat eender. Dus 2^o is bewezen.

6. We zijn nu tot de volgende classificatie gekomen:

In één klasse worden vereenigd alle bewerkingen, waarvoor $\Delta = 0$ (hiertoe behoort de gewone optelling).

*De klasse van bewerkingen, waartoe een bewerking * behoort met $\Delta \neq 0$ bestaat uit de bewerkingen, waarvoor Δ' voldoet aan een betrekking (6), met $m \neq 0, n \neq 0$.*

In het bijzonder:

Alle bewerkingen, waarbij Δ een van nul verschillend kwadraat is, vormen één klasse (hiertoe behoort de gewone vermenigvuldiging).

Om de klassificatie van de bewerkingen, waarvoor Δ geen kwadraat is, te qualificeeren, nemen we de taal der algebraïsche getallentheoretici één oogenblik over en zeggen:

Tot eenzelfde klasse behooren alle bewerkingen met kwadratische vormen, waarvan de wortels tot één en hetzelfde getallenlichaam behooren.

7. We willen even wijzen op het verband van ons vraagstuk met de niet-euclidische meetkunde. De geometer noemt onze op y uitgevoerde bewerkingen $x * y$ een *groep* van *bewegingen* in de *niet-euclidische ruimte* van 1 *afmeting*, gevormd door de punten $\frac{x_1}{x_2}$. Het *absolutum* bestaat uit de beide punten, waarvoor $f(x_1, x_2) = 0$.

Uit de laatste mededeeling blijkt dat zijn standpunt „hooger” is dan het onze, want voor ons bestaan die punten niet altijd. Om zijn hooger standpunt te bereiken, heeft hij de irrationale en de complexe getallen ingevoerd: x_1 en x_2 mogen bij hem irrationaal of complex zijn. Maar daardoor is zijn classificatie minder fijn dan de onze. Hij onderscheidt slechts

1) de wortels van f zijn reëel en verschillend (hyperbolische meetkunde).

2) de wortels van f zijn gelijk (euclidische meetkunde).

3) „ „ „ f „ complex (elliptische meetkunde).

8. Tot slot behandelen we het verband met de complexe getalstelsels.

In die leer beschouwt men de volgende figuren:

$$x_1 i_1 + x_2 i_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Hierin beteekenen x_1 en x_2 in den regel „gewone complexe getallen van de gedaante $a + bi$, waarin a en b reëel en $i^2 = -1$. Daar wij slechts geheele getallen kennen in deze voordracht, nemen wij aan, dat x_1 en x_2 geheel zijn. Verder moet men zich bij i_1 en i_2 niets anders voorstellen, dan die figuren zelf, zooals men zich bij de figuur 3 ook niets anders heeft voor te stellen. Hetzelfde geldt voor het teeken $+$, dat in (7) voorkomt, zoodat

het opschrijven van $x_1 i_1 + x_2 i_2$ niets anders beteekent dan het geven van een eerste geheel getal x_1 en een tweede geheel getal x_2 . Men geeft nu de volgende definitie

$$(x_1 i_1 + x_2 i_2) + (y_1 i_1 + y_2 i_2) = (x_1 + y_1) i_1 + (x_2 + y_2) i_2 \quad (8).$$

Verder definieert men

$$(x_1 i_1 + x_2 i_2) * (y_1 i_1 + y_2 i_2) = (x_1 y_1) (i_1 * i_1) + (x_1 y_2) (i_1 * i_2) + (x_2 y_1) (i_2 * i_1) + (x_2 y_2) (i_2 * i_2) \quad (9)$$

en men eischt, dat de vier „producten” $i_p * i_q$ weer figuren zijn van den vorm (7) en dat de bewerking $*$ de associatieve wet volgt.

Men zoekt dus 8 geheele getallen A, B, ... zóódanig dat als men stelt

$$\begin{aligned} i_1 * i_1 &= A i_1 + D i_1 \\ i_2 * i_2 &= B i_1 + E i_2 \\ i_1 * i_2 &= C i_1 + F i_2 \\ i_2 * i_1 &= C' i_1 + F' i_1, \end{aligned}$$

de door (9) gedefinieerde bewerking $*$ associatief is.

De verg. (9) uitgewerkt, levert:

$$(x_1 i_1 + x_2 i_2) * (y_1 i_1 + y_2 i_2) = (A x_1 y_1 + B x_2 y_2 + C x_1 y_2 + C' x_2 y_1) i_1 + (D x_1 y_1 + E x_2 y_2 + F x_1 y_2 + F' x_2 y_1) i_2 \quad (10)$$

Vergelijken we dit met (1), dan zien we:

Als wij voor de breuken de schrijfwijze $x_1 i_1 + x_2 i_2$ hadden gekozen, in plaats van $\frac{x_1}{x_2}$, dan zou (10) de definitie voor het product van de breuken x en y zijn.

Ons vraagstuk dekt zich met het opsporen van complexe getalstelsels met associatieve vermenigvuldiging, met de beperking, dat in de theorie der complexe getalstelsels twee figuren dan en dan alleen gelijk heeten als de x_1 en de x_2 overeenstemmen en $0 i_1 + 0 i_2$ wordt toegelaten, terwijl voor de gelijkheid van twee breuken de x_1 en x_2 niet in beide dezelfde behoeven te zijn en $\frac{0}{0}$ verworpen wordt.

Echter leert een nauwkeurige beschouwing van de ontwikkelingen van de eerste voordracht, dat ondanks die beperking, ook (2) alle mogelijke getalstelsels oplevert. Er zijn geen andere dan commutatieve en hun klassenindeeling is dezelfde als die van de vermenigvuldigingen van breuken.

Met de gewone optelling van breuken correspondeert het getalstelsel, waarvoor $A = B = D = F = 0$, $C = E = 1$, dus

$$\left. \begin{aligned} i_1 * i_1 &= 0 \\ i_2 * i_2 &= i_2 \\ i_1 * i_2 &= i_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11)$$

Met de gewone vermenigvuldiging van breuken correspondeert het getalstelsel, waarvoor $A = E = 1$, $B = C = D = F = 0$, dus

$$\left. \begin{aligned} i_1 * i_1 &= i_1 \\ i_2 * i_2 &= i_2 \\ i_1 * i_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

Met de vermenigvuldiging die bij den vorm $x_1^2 + x_2^2$ behoort, en waarvoor $e = \frac{1}{0}$, correspondeert het getalstelsel, waarvoor

$$C = D = E = 0, \quad A = F = 1, \quad B = -1,$$

dus

$$\left. \begin{aligned} i_1 * i_1 &= i_1 \\ i_2 * i_2 &= -i_1 \\ i_1 * i_2 &= i_2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13)$$

In dit licht bezien komt de gewone optelling van breuken neer op de invoering van een „eenheid” waarvan het kwadraat nul is.

Gewone optelling van breuken, euklidische beweging in de ruimte van één afmeting en vermenigvuldiging in een complex getalstelsel waarvoor (11) geldt, vallen, van uit ons standpunt bekeken, samen.

NASCHRIFT OP EEN ALINEA VAN HET ARTIKEL VAN PROF. SCHUH.

Op blz. 194 van deze aflevering, laatste alinea, staat:

„Het wil mij voorkomen, dat het aanleeren van de methode der gelijkwaardige stelsels bij het middelbaar onderwijs geen bezwaar kan opleveren. Daartegenover moet men natuurlijk de andere methoden (die eigenlijk geen volledig uitgewerkte methoden zijn, zoo daaraan niet het begrip „gelijkwaardige stelsels” ten grondslag ligt), de methode der egalisatie, de methode der substitutie of hoe ze verder mogen heeten, weglaten, als zijnde zonder gelijkwaardigheidsbeschouwingen vrijwel waardeloos.”

Wat beteekent $f(x, y, z) = 0$? Een verzameling getallen x, y, z , die, gesubstitueerd in het eerste lid, daaraan de waarde nul geven; als door $\varphi(x, y, z) = 0$ dezelfde drietallen getallen worden bepaald, niet meer en niet minder, dan zegt men, dat $\varphi(x, y, z) = 0$.

gelijkwaardig is met $f(x, y, z) = 0$. — Wat beteekent het stelsel

$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ \varphi(x, y, z) = 0 \end{cases}$? Een aantal drietallen getallen, die, gezet in de eerste leden, beide nul maken; bepaalt een ander stelsel b.v.

$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ \psi(x, y) = 0 \end{cases}$ dezelfde drietallen, dan heet dit gelijkwaardig met

het gegevene. — Vervangt men het stelsel A $\begin{cases} f_1(x, y, z) = 0 \\ f_2(x, y, z) = 0 \\ f_3(x, y, z) = 0 \end{cases}$

door B $\begin{cases} f_1(x, y, z) = 0 \\ \varphi_1(x, y) = 0 \\ \varphi_2(x, y) = 0 \end{cases}$ en dit door C $\begin{cases} f_1(x, y, z) = 0 \\ \varphi_1(x, y) = 0 \\ \psi(x) = 0 \end{cases}$ en wor-

den door A, B en C dezelfde drietallen x, y, z bepaald, dan heeten deze stelsels gelijkwaardig en dan is de vervanging van A door C geoorloofd.

Een allereerste eisch van ons M. en V. H. Ond. is, dat men dit begrip grondig aanbrengt, zooals door Prof. Schuh terecht betoogd is en door mij op elke plaats van de Lagere Algebra (in deel II) en in de Nieuwe School-Algebra (in I, II en III) wordt uitgewerkt. Zelfs ben ik van meening, *dat er geen andere methode bestaat, noch bestaan zal* om de x, y, z te bepalen dan via de gelijkwaardige stelsels (we spreken niet over het onderwijs, waarbij maar wat gecijferd wordt om een uitkomst te krijgen en waarbij het aanbrengen van een goed begrip als onnutte ballast wordt achterwege gelaten). Het aanbrengen van het begrip *kan* geen bezwaar opleveren, *mag* het ook niet, daar anders het oplossen van vergelijkingen slechts in wat onbegrepen techniek zou ontaarden; dit over den eersten zin van de aanhaling, hierboven afgedrukt.

Nu de tweede; daar wordt gesproken over „andere methoden” en die zouden dan zijn die der gelijkstelling, der vervanging, van optellen en aftrekken, van worteltrekken, enz. en die zouden waardeloos zijn. Mij dunkt, dat Prof. Schuh hier het vraagstuk niet geheel nauwkeurig stelt; **er is slechts één methode nl. door opvolgende vervanging telkens door een gelijkwaardig stel**; er zijn geen *andere* methoden tegenover te stellen. Maar wat beteekenen dan die „methode van gelijkstelling”, enz.? Wel, die duiden slechts de manieren aan, waarop men uit stelsel A achtereenvolgens B, C, enz. afleidt. Men stelt zich de zaak aldus voor: we hebben geleerd in verschillende gevallen een vergelijking met één onbekende op te lossen nl. lineaire, kwadratische, wederkeerige en nog zoo een

paar; we komen nu te staan voor A $\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$ en leiden hieruit af B $\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ \psi(y) = 0 \end{cases}$, waarbij in de tweede vergelijking de x ontbreekt. Als we nu in A te doen hebben met lineaire vergelijkingen, dan staan ons een paar middeltjes ten dienste, die steeds voeren tot stelsel B; men heeft $f(x, y) = 0$ van A overgenomen, zoodat het er om te doen is, om $\psi(y) = 0$ te krijgen. Bij lineaire vergelijkingen kan men nu steeds x uit beide vergelijkingen van stelsel A oplossen en deze waarden gelijkstellen; ook kan men x uit $f(x, y) = 0$ oplossen en in $\varphi(x, y) = 0$ zetten; ook kan men door doelmatige keuze van k en l in $kf(x, y) + l\varphi(x, y) = 0$ zorgen, dat hierin de x ontbreekt. Omdat na ieder dezer bewerkingen een vergelijking zonder x ontstaat, noemt men de middeltjes wel opv. eliminatie door gelijkstelling, door vervanging, door optelling; bij lineaire vergelijkingen is de naam eliminatie geoorloofd, omdat $f(x, y) = 0$ en $\varphi(x, y) = 0$ dan den eenigen wortel x_0 gemeen hebben.

Natuurlijk mogen in geen geval deze kleine middelen worden voorgesteld als methoden ter oplossing; maar waardeloos? Dat men met kinderen in de tweede klas van de H. B. S. de manieren nagaat, hoe men uit stelsel A met zekerheid tot stelsel B komt, vind ik zoo kwaad niet.

Maar men heeft niet, zooals in de aanhaling staat: „methode der gelijkstelling” in den zin van „methode van oplossing”, nog wel naast de ware, de eenige methode der gelijkwaardige stelsels; de zaak zit m. i. zóó: men dient een stelsel A te vervangen door B, dat door C, waarbij men het meeste nuttig effect bereikt, als het laatste

stelsel C b.v. er aldus uitziet $\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \\ \psi(y) = 0 \end{cases}$, en nu bestaan er, als de

vergelijkingen lineair zijn, eenige manieren om uit het stelsel A tot dit stelsel C te geraken en het zijn die manieren, welke de schrijver waardeloos oordeelt; ze zijn dat niet, alleen staan ze op een andere plaats, dan waar hij ze zette; de leeraar moet zijn leerlingen duidelijk laten voelen, wat ze beteekenen en dat ze slechts van secundair belang zijn. Het is dringend noodig, dat de volle nadruk worde gelegd op de eenige methode der gelijkwaardige stelsels, maar ook gewenscht, dat men kort stil staat bij de manieren, die met zekerheid tot die stelsels leiden, als de gegeven vergelijkingen lineair zijn.

P. W.

NASCHRIFT OP HET NASCHRIFT VAN DEN HEER WIJDENES.

Ik geloof, dat de Heer Wijdenes en ik het geheel eens zijn. Er bestaat voor het M. O. inderdaad slechts één methode om een stel lineaire vergelijkingen op te lossen, die der gelijkwaardige stelsels, maar toch wordt het wel in leerboeken zoo voorgesteld, dat er verschillende methoden zijn, die dan allerlei namen krijgen. Ik heb willen te kennen geven, dat die, als oplossingsmethoden gepresenteerd, moeten worden verworpen, al hebben ze dan ook eenige waarde voor het omvormen van een stelsel tot een gelijkwaardig stelsel. Ik heb in mijn artikel aangegeven dit te doen door een onbekende uit een der vergelijkingen op te lossen en in de overige vergelijkingen te substitueeren. Daaraan heeft men genoeg. Natuurlijk is het wel goed er op te wijzen, dat het soms voordeelig is, ter vermindering van breuken, de vergelijking, waarin gesubstitueerd wordt, eerst met een zeker constant getal te vermenigvuldigen, maar om aan zulk een kleinigheid den naam te geven van de methode van dit of dat lijkt mij overdreven; daardoor wordt in het oog der leerlingen een kleinigheid tot iets zeer belangrijks gemaakt. Stelt men het zoo voor, dat een onbekende x uit de eene vergelijking wordt opgelost en in een andere gesubstitueerd, dan komt de gelijkwaardigheid veel duidelijker uit, doordat men de vergelijking, waaruit x is opgelost, ook in het nieuwe stelsel opneemt (zoodat men de gesubstitueerde uitdrukking weer door x kan vervangen en zoo terug kan gaan naar het oorspronkelijke stelsel). Het zou m. i. niets hinderen, zoo de leerlingen geen andere methoden kenden om van het eene stelsel tot het andere te geraken. Doet men de methode van het met bepaalde getallen vermenigvuldigen en optellen aan enkele getallenvoorbeelden voor, dan doen de leerlingen dat wel na en zien ze wel, dat het eigenlijk hetzelfde is als uit de eene vergelijking oplossen en in de andere substitueeren. En doen ze het niet na, maar volgen ze steeds den weg van het oplossen en substitueeren (die toch niet noemenswaard langer is), dan hindert het nog niets. Ik blijf er dus bij, dat die andere methoden (die, zooals de Heer Wijdenes terecht zegt, moeten beschouwd worden als de methoden om tot een gelijkwaardig stelsel te geraken, maar toch vaak als oplossingsmethoden worden gepresenteerd) vrijwel waardeloos zijn. Dat „vrijwel” geeft aan, dat er nu en dan wel een klein voordeeltje in gelegen kan zijn van den door mij in mijn artikel geschetsten weg af te wijken.

F. Schuh.

Dr. J. A. BARRAU
ANALYTISCHE MEETKUNDE

1e deel. Het Platte Vlak. Gebonden f 10.20

2e deel. De Ruimte. Gebonden f 14.50

Met de verschijning van het tweede deel van Prof. Barrau's *Analytische Meetkunde* is een werk gereed gekomen, dat sterk verschilt van de bestaande binnen- en buitenlandsche werken, die ongeveer dezelfde namen dragen.

Een werk, dat wij met zeer groote ingenomenheid begroeten, omdat het ons van zoo buitengewone beteekenis schijnt voor degenen, die zich rekenschap willen geven van de onderlinge betrekkingen tusschen de verschillende meetkunden, Euclidisch en niet-Euclidisch, twee-, drie- of meer dimensionaal. De schrijver behandelt de gebruikelijke onderwerpen van de analytische meetkunde der ruimte, maar telkens in nauw verband met allerlei uitbreidingen tot meer dimensies en op niet-Euclidische meetkunden. Ook lijnenmeetkunde en collineaties komen aan het slot van het werk ter sprake.

Moge dit bijzonder fraaie werk vele lezers vinden, en zoodoende in ruime mate bijdragen tot de bevordering van de vergelijkende meetkundestudie.

Euclides.

Dr. J. WOLFF

Inleiding tot de Analytische
Meetkunde van 't Platte Vlak

Uitgegeven in de plaats van Dr. P. v. Geer's *Leerboek der Analytische Meetkunde*. — Eerste deel. Prijs geb. f 5.25

Ongetwijfeld is de schrijver in zijn poging buitengewoon goed geslaagd. 't Boek laat zich aangenaam lezen, loopt niet over de moeilijkheden heen, die zich aanvankelijk vooral voordoen (invoering der ideale elementen, onderscheiding der bijzondere punten eener algebraïsche kromme enz.), behandelt deze juist met de grootst mogelijke zorgvuldigheid. Terwijl de schrijver zich over 't algemeen bij de uitwerking der stof zeer beperkt heeft zijn soms — waarschijnlijk om geheel verschillende redenen — stukjes opgenomen, die naar 't ons voorkomt vooral den deskundige genoegen zullen doen. Zoo dwingen enkele bladzijden b.v. die betreffende de afleiding der brandpuntseigenschappen uit die v. d. cirkel, den lezer zich nog eens scherp rekenschap te geven van allerlei dingen, wier onderling verband niet dadelijk opvalt; een andere keer is 't juist de zorg, aan de afleiding van schijnbaar evidente resultaten besteed, die ons getroffen heeft.

Hier wordt een vrij beknopt akademisch leerboek aangeboden, dat wij vooral aanbevelen aan degenen die niet alleen in de ontwikkelingen, maar ook in den opbouw van de beginselen der Analytische Meetkunde belang stellen.

(N. Archief v. Wisk.).

UITGAVEN VAN P. NOORDHOFF TE GRONINGEN