EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN

J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

MET MEDEWERKING VAN

Dr. H. J. E. BETH
DEVENTER

Dr. E. J. DIJKSTERHUIS
OISTERWIJK

Dr. G. C. GERRITS
AMSTERDAM

Dr. B. P. HAALMEIJER
AMSTERDAM

Dr. D. J. E. SCHREK
UTRECHT

Dr. P. DE VAERE
BRUSSEL

Dr. D. P. A. VERRIJP
ARNHEM

4e JAARGANG 1927/28, Nr. 4

P. NOORDHOFF — GRONINGEN

Prijs per Jg. van 18 vel f 6.—. Voor inteekenaars op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde en Christiaan Huygens f 5.—.

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken, verschijnt in zes tweemaandelijksche afleveringen, samen 18 vel druks. Prijs per jaargang *f* 6.—. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6.—) of op „Christiaan Huygens" (*f* 10.—) zijn ingeteekend, betalen *f* 5.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341. Aangeteekende zendingen met bijvoeging: „Bijkantoor Van-Eeghenstraat".

Het honorarium voor geplaatste artikelen bedraagt *f* 20.— per vel.

De prijs per 25 overdrukken of gedeelten van 25 overdrukken bedraagt *f* 3,50 per vel druks *in het vel gedrukt.* Gedeelten van een vel worden als een geheel vel berekend. Worden de overdrukken buiten het vel verlangd, dan wordt voor het afzonderlijk drukken bovendien *f* 6.— per vel druks in rekening gebracht.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

INHOUD.

☞ De redactie heeft het genoegen in deze aflevering het portret te geven van Prof. Dr. Hk. DE VRIES, zij hoopt de portretten van al onze hoogleeraren den inteekenaars achtereenvolgens te kunnen aanbieden.

---

van Theaitetos terug in het 7e, 8e en 10e boek van Euclides, dat van Eudoxos in het 5e. De Grieksche wiskunde bereikt hier een hoogtepunt van streng en zuiver denken en ik wil u daarom tenminste voor een van de genoemde gebieden in het kort schetsen, wat ze wist te bereiken. Ik kies hiervoor het werk van Eudoxos, dat het begrip λόγος of reden in zijn algemeenen vorm invoert.

Het zal degenen onder u, die het werk van Euclides uit eigen ervaring kennen, niet verbazen te vernemen, dat men in den aanvang van het vijfde boek vergeefs zoekt naar een bevredigende definitie van reden. Definities, die werkelijk nieuwe begrippen invoeren, dus die niet slechts afspraken zijn, om een langere uitdrukking door een kortere te vervangen, worden bij Euclides gewoonlijk zoo gegeven, dat ze den lezer slechts een voorloopigen indruk geven van het nieuwe ding, waarover gesproken zal worden; ze worden dan echter nooit gebruikt, d. w. z. er worden nooit conclusies uit getrokken. De nauwkeurige en voor mathematische doeleinden bruikbare omschrijving der nieuw ingevoerde begrippen geschiedt, evenals in de moderne wiskunde, die dan het stadium van de voorloopige informatie maar overslaat, in de postulaten of axiomata. Zoo gaat het b.v. ook met de vermaarde Euclidische definitie van rechte lijn, als lijn, die ἐξ ἴσου, gelijkmatig, ligt met al haar eigen punten. Reeds de Grieksche commentatoren zijn het er niet over eens, wat dit ἐξ ἴσου eigenlijk beteekent, maar voor den opbouw der meetkunde hindert dat niets, omdat Euclides van de eigenschappen der rechte lijn bewust alleen die toepast, welker geldigheid hij in de Αἰτήματα heeft gepostuleerd. Bij het reden-begrip hebben we iets dergelijks: de 3e definitie van het 5e Boek, die zegt, dat λόγος is δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητά ποια σχέσις, d. w. z. een zekere grootte-relatie van twee grootheden van dezelfde soort, zegt ons niets. Het ware zit weer in een postulaat, dat echter niet als zoodanig wordt geformuleerd, maar dat ook onder de definities opgenomen is. De 4e definitie zegt namelijk, dat twee grootheden een reden tot elkaar hebben, wanneer elk van haar, met een zeker getal vermenigvuldigd, de andere kan overtreffen. Ze voert dus het postulaat van Eudoxos in, dat de moderne wiskunde ten onrechte het axioma van Archimedes noemt. De bedoeling hiervan in de Grieksche wiskunde is blijkbaar tweeledig: het wil ten eerste zeggen, dat twee grootheden a en b gelijksoortig zijn, wanneer er getallen m en n bestaan, zoodat $ma > b$ en $nb > a$ en ten tweede, dat grootheden dan en alleen dan een reden hebben, als ze gelijksoortig zijn.

De 5e definitie zegt, wanneer twee redens gelijk zullen heeten. Letterlijk vertaald luidt ze als volgt: Grootheden heeten evenredig, de 1e tot de 2e en de 3e tot de 4e, wanneer willekeurige gelijke veelvouden van de 1e en de 3e tegelijk grooter zijn dan, gelijk aan of kleiner dan willekeurige gelijke veelvouden van de 2e en de 4e. In moderne symbolen dus als volgt: Wanneer A en B grootheden zijn, die voldoen aan het axioma van Eudoxos, evenzoo C en D, terwijl m en n natuurlijke getallen zijn, dan heeten A, B, C, D, evenredig, wanneer voor alle willekeurige waarden van m en n tegelijk met

$$m\mathrm{A} \gtreqless n\mathrm{B} \quad \text{ook} \quad m\mathrm{C} \gtreqless n\mathrm{D}.$$

Ik zal nu verder de reden van A tot B door het symbool (A, B) voorstellen; de 7e definitie zegt dan, dat

$$(\mathrm{A}, \mathrm{B}) > (\mathrm{C}, \mathrm{D})$$

wanneer er een stel getallen m en n bestaat, zoodat

$$m\mathrm{A} > n\mathrm{B}, \text{ maar } m\mathrm{C} \leqq n\mathrm{D}.$$

Het zal mij nu weinig moeite kosten, om althans aan de mathematici onder u de eigenlijke beteekenis en daarmede de groote waarde van deze begripsbepaling duidelijk te maken. Wanneer we namelijk eens de boven gebruikte natuurlijke getallen n en m vereenigen tot getallenparen, die we als representanten van rationale getallen $\frac{n}{m}$ beschouwen, dan zien we, dat wanneer gegeven is een tweetal gelijksoortige grootheden A en B, deze in de verzameling der positieve rationale getallen een indeeling in twee klassen teweeg brengen, waarvan gemakkelijk is in te zien, dat ze een snede van Dedekind is.

Rekenen we namelijk tot de kleine klasse die getallenparen (n, m), waarvoor

$$mA > n\mathrm{B}$$

en tot de groote die, waarvoor

$$m\mathrm{A} < \mathrm{n}B$$

terwijl we in het bijzondere geval, dat A en B zich als getallen verhouden, dus dat er getallen m en n bestaan, zoodat

$$m\mathrm{A} = n\mathrm{B}$$

het daardoor bepaalde paar bij de groote of de kleine klasse indeelen, dan is, als (n, m) tot de kleine klasse behoort, terwijl (n_1, m_1) een kleiner rationaal getal representeert, (n_1, m_1) ook een getal van de kleine klasse. Immers

$$\frac{n_1}{m_1} < \frac{n}{m} \qquad \text{dus } n_1 m < m_1 n$$

Nu is $mA > nB$, dus

$$m \,.\, m_1 \,.\, A > n \,.\, m_1\, B > m \,.\, n_1 B$$

$$\text{dus } m_1 \,.\, A > n_1 \,.\, B.$$

Wat Eudoxos doet, is dus in wezen identiek met de definitie van een snede. De definitie van „grooter" bevestigt dit nog eens. Volgens Dedekind heet een irrationaal getal α grooter dan een andere irrationaal getal β, wanneer als

$$\alpha = a/A \quad \text{en} \quad \beta = b/B$$

de kleine klasse van α een rationaal getal bevat, dat tot de groote klasse van β hoort. Dit is nu juist, wat onze definitie VII zegt: Is er een getallenpaar (n, m), zoodat $mA > nB$, maar $mC \leqq nD$, dan hoort $\frac{n}{m}$ in het eerste geval tot de kleine en in het tweede tot de groote klasse.

Nu moet men natuurlijk met beschouwingen, als ik hier gehouden heb, oppassen. Men mag namelijk volstrekt niet zeggen, dat Eudoxos dus het irrationale getal invoert. Het begrip reden is wel naar zijn omvang identiek met dat van het positieve irrationale getal, maar het blijft er naar zijn inhoud wezenlijk van verschillen. Want dit is juist het cardinale verschilpunt tusschen de Grieksche en de moderne wiskunde, dat de laatste haar getalbegrip zoover heeft uitgebreid, dat de reden, zoowel de rationale als de irrationale, onder het begrip reëel getal valt, terwijl de Grieksche wiskunde onder ἀριθμός altijd slechts het geheele getal is blijven verstaan, zoodat zij wel rationale en irrationale verhoudingen, maar geen rationale en irrationale getallen kent.

De invloed van dit verschil, dat, oppervlakkig bezien, misschien niet meer dan een kwestie van woorden zal lijken, is ontzaglijk; ja, men kan, dunkt mij, wel zeggen, dat in dit verschil de voornaamste oorzaak ligt, waardoor de Grieken niettegenstaande hun onbetwistbaren aanleg voor wiskunde met hun onderzoekingen altijd zijn blijven ronddraaien in een kring, die van modern standpunt uit beschouwd, opvallend eng is en dat het ook verantwoordelijk is voor den vreemden indruk, dien de schijnbaar zoo noodeloos omslachtige redeneertrant der Grieksche Wiskunde aanvankelijk op iedereen maakt, die er na kennisname van de moderne mathesis toe nadert. Men heeft, om dit laatste aan te toonen, slechts een willekeurigen greep te doen in de werken van een der Grieksche mathematici; ik zal er dadelijk een eenvoudig, maar heel sprekend voorbeeld van laten zien, maar moet daartoe eerst iets meer mededeelen over den inhoud van de reden-theorie van Eudoxos, het vijfde boek van de Elementen van Euclides.

Menig moderne lezer zal misschien verwachten onder de rekenregels voor evenredigheden, die hij daarin ontwikkeld vindt, in de eerste plaats aan te treffen, wat wij de hoofdeigenschap der evenredigheden noemen, de eigenschap namelijk, dat als vier grootheden a, b, c, d een evenredigheid vormen, de betrekking geldt: $ad = bc$.

Hij zal die eigenschap echter niet aantreffen en dat is geen wonder, want ze zou voor een Griekschen mathematicus, wanneer ze hem was voorgelegd, eenvoudig zinledig zijn geweest. Immers de termen van een evenredigheid zijn voor hem in het algemeen geen getallen, maar grootheden en wat zou hij in het algemeen hebben moeten verstaan onder het product van twee grootheden? Voor ons is dat heel anders. Voor ons stellen in $a : b = c : d$ de letters getallen voor, die rationaal of irrationaal zijn en die òf onbenoemd zijn òf waarden van zekere mathematische of physische grootheden in een gekozen eenheid uitdrukken en dan toch tijdens het rekenen als onbenoemd worden behandeld. Voor de Grieken stellen die letters echter de mathematische of physische grootheden zelve voor; ze zijn veel meer te vergelijken met onze vectoren dan met de scala-waarden van die vectoren en pas de redens (a, b), (c, d) zijn dingen, die met onze getallen correspondeeren. Vandaar dat een uitspraak, als: „het oppervlak van een rechthoek is gelijk aan het product van twee aangrenzende zijden", die wij in de practijk als slordige afkorting van de uitspraak: „het oppervlak van een rechthoek wordt in de bij de gekozen lengte-eenheid passende oppervlakte-eenheid uitgedrukt door een getal, dat het product is van de getallen, die de lengtes van twee aangrenzende zijden in de gekozen lengte-eenheid uitdrukken" toch tolereeren, voor hem heelemaal geen beteekenis zou hebben gehad.

En wanneer hij een mathematicus van onzen tijd de formule voor de eenparige beweging naar willekeur had zien schrijven als $s_1 : s_2 = t_1 : t_2$ of als $s_1 : t_1 = s_2 : t_2$, zou hij zich in zijn meest fundamenteele opvattingen over het reden-begrip aangetast hebben gevoeld. Immers de grootheden s en t zijn ongelijksoortig; men kan niet, door een lengte met een getal te vermenigvuldigen, een tijd overtreffen of bereiken. Van een reden (s, t) kan dus in het geheel niet gesproken worden.

Om nu echter over te gaan tot wat er in Boek V wel staat, vermeld ik vooreerst de 9e definitie, waarin het zeer belangrijke begrip *διπλασίων λόγος*, ratio duplicata, wordt ingevoerd. Ik zal dit begrip weergeven met den term „dubbelreden" en het aanduiden door het symbool Δ. De definitie luidt vertaald:

Wanneer drie grootheden evenredig zijn, zegt men, dat de reden van de 1e en 3e de dubbelreden is van die van de 1e en de 2e. Wij zouden dit schrijven $a : b = b : c$ en dan bewijzen $\frac{a}{c} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$. Het begrip dubbelreden komt dus naar omvang overeen met wat wij het vierkant van een verhouding noemen; het verschilt er echter naar inhoud weer wezenlijk van, wat reeds hieruit blijkt — dit is een punt van principieel belang voor de geheele Grieksche wiskunde —, dat het voor Euclides geen eigenschap is, dat $(a, c) = \Delta\ (a, b)$, maar een echte afkortingsdefinitie. Welk diepgaand verschil dit in den opzet der meetkunde veroorzaakt, zal aanstonds blijken. Ik wil nu alleen nog even vermelden, dat de term dubbelreden waarschijnlijk gevormd is onder invloed van de Grieksche muziektheorie, die op verschillende punten de mathematische terminologie heeft helpen scheppen. Immers een interval wordt gekenmerkt door een verhouding van trillingsgetallen; een verdubbeling van dat interval komt neer op het quadrateeren van die verhouding. De Grieken moeten nu echter zorgvuldig onderscheiden tusschen het verdubbelen en het quadrateeren van een verhouding; vandaar het verschil tusschen de termen *διπλάσιος* en *διπλασίων*, welke laatste als een comparatief behandeld wordt en met *ἤ* wordt geconstrueerd.

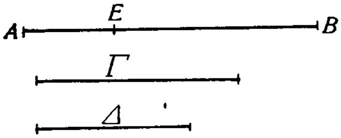
Van de Proposities vermeld ik alleen diegene, die ik noodig heb, om het aangekondigde voorbeeld, dat de eigenaardige redeneermethode der Grieksche wiskunde toe zal lichten, te kunnen behandelen.

Volgens Prop. 7, volgt uit $a = b$ $\quad (a, c) = (b, c)$

Prop. 8 zegt, dat, als $a > b$, ook $\quad (a, c) > (b, c)$

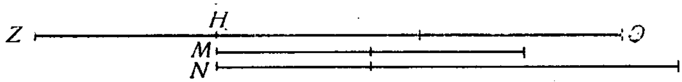
Ik zal hiervan het bewijs geven, zooveel mogelijk naar Griekschen trant, maar eenigszins bekort.

Laat gegeven zijn twee ongelijke, maar gelijksoortige grootheden AB en Γ, waarvan $AB > \Gamma$ en een willekeurige derde grootheid Δ:



Ik beweer, dat AB tot Δ een grootere reden heeft dan Γ tot Δ.

Daar $AB > \Gamma$ is, moge $BE = \Gamma$ zijn. Het kleinste van de 2 stukken AE en BE, b.v. AE kan met een zoodanig getal vermenigvuldigd worden, dat het verkregen stuk Δ overtreft. Zij dit stuk ZH; neem nu evenmaal malen Γ als ZH AE bevat en zij het zoo verkregen stuk $H\theta$



Neem nu van Δ achtereenvolgens het tweevoud M, het drievoud N, en zoo telkens een meer, totdat het veelvoud voor het eerst $H\theta$ overtreft. Dit zal geschieden b.v. door $N = 3\Delta$. Nu is $H\ \theta > M$ en $ZH > \Delta$, dus $Z\ \theta > \mathrm{N}$, terwijl $H\ \theta < \mathrm{N}$.

Verder is ZH hetzelfde veelvoud van AE, als $H\theta$ het is van BE, dus ook als $Z\ \theta$ van AB. (Dit is vooraf nog bewezen in Prop. 2). Er bestaat dus een veelvoud van AB, namelijk $Z\theta$, dat een zeker veelvoud van Δ, nl. N, overtreft, terwijl hetzelfde veelvoud van Γ als $Z\theta$ van AB is, nl. $H\theta$, N niet overtreft.

Volgens Definitie 7 is dus $(AB, \Delta) > (\Gamma, \Delta)$.

Prop. 10. Uit $(a, c) > (b, c)$ volgt: $a > b$.

Het bewijs is indirect op grond van de prop. 7 en 8 en vertoont een merkwaardige fout, waarop Simson voor het eerst heeft gewezen en die hierop neerkomt, dat Euclides verzuimt te bewijzen, dat de begrippen grooter en kleiner voor redens elkaar uitsluiten. U moet deze opmerking niet als een uiting van hypercritiek beschouwen. Euclides zelf zou ongetwijfeld haar juistheid hebben moeten toegeven; immers zijn eigen exactheid gaat zoover, dat hij in Prop. 11 zelfs de transitieve eigenschap der gelijkheid voor redens aantoont:

Prop. 11. Uit $(a, b) = (c, d)$ en $(c, d) = (e, f)$ volgt $(a, b) = (e, f)$.

Het is heel merkwaardig, dat hij dit bewijst en dat hij zich niet beroept op het eerste der *Κοιναὶ ἔννοιαι*: „wat gelijk is aan hetzelfde, is ook gelijk aan elkaar." De grond hiervan is ongetwijfeld deze, dat dit axioma bedoeld is voor grootheden terwijl nog niet vaststaat, of een reden een grootheid is.

Hij bewijst nu achtereenvolgens de eigenschappen:

Prop. 12: Uit $(a, b) = (c, d) = (e, f) =$ enz. volgt $(a, b) = (a + c + e + \ldots, b + d + f + \ldots)$.

Prop. 13. Uit $(a, b) = (c, d)$ en $(c, d) > (e, f)$ volgt $(a, b) > (e, f)$.

Prop. 14. Uit $(a, b) = (c, d)$ en $a \gtreqless c$ volgt $b \gtreqless d$.

Het bewijs verloopt als volgt:

Als $a > c$ is $(a, b) > (c, b)$ (Prop. 8).
Dus $(c, d) > (c, b)$ (Prop. 13).
Dus $d < b$ (Prop. 10).

Prop. 15 spreekt nu uit, dat

$$(a, b) = (ma, mb) \qquad \text{(Prop. 7 en 12)}$$

en hierna zijn we in staat, de fundamenteele propositie 16 te bewijzen: Uit $(a, b) = (c, d)$ volgt ἐναλλάξ (permutando): $(a, c) = (b, d)$, mits alle 4 grootheden gelijksoortig zijn.

Het bewijs is als volgt:

Wegens Prop. 15 geldt: $(a, b) = (ma, mb)$
$(c, d) = (nc, nd)$

Wegens Prop. 11: $(ma, mb) = (nc, nd)$

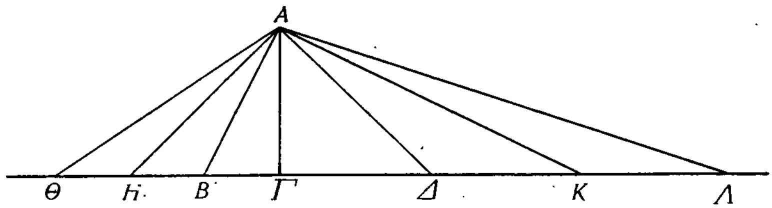
Wegens Prop. 14: Tegelijk met

$$ma \gtreqless nc \qquad mb \gtreqless nd$$

dus: $(a, c) = (b, d)$

U zult moeten erkennen, dat dit bewonderenswaardig is. De geheele theorie der evenredigheden wordt ontwikkeld in een omvang, die zoowel de rationale als de irrationale verhoudingen omvat, zonder dat ze tusschen deze beide onderscheid behoeft te maken, en zonder dat het getalbegrip meer dan de natuurlijke getallen omvat. En die ontwikkeling, die slechts enkele, gemakkelijk aan te vullen, leemtes vertoont, voldoet aan zulke hooge eischen van strengheid, dat zij een plaats naast de negentiende-eeuwsche theorieën van het irrationale getal verdient.

Ik heb voor mijn doel nu niet meer stellingen uit het vijfde Boek noodig, wel enkele uit het zesde, waarin de reden-theorie op de meetkunde wordt toegepast. En wel vooreerst de prop. I, de stelling, dat de oppervlakken van twee driehoeken met gemeenschappelijken top, welker bases in een zelfde rechte lijn liggen, zich verhouden als die bases.

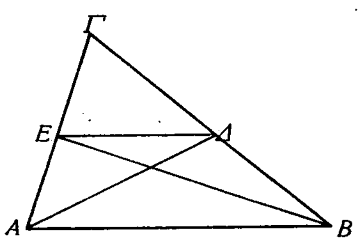


Dit is een zeer eenvoudige toepassing van de reden-theorie, maar een; die haar groote waarde ten volle openbaart. Euclides weet namelijk uit I, 38, dat twee driehoeken met gelijke bases en gelijke hoogtes gelijke oppervlakken hebben en neemt stilzwijgend aan, dat van twee driehoeken met gelijke hoogtes en ongelijke bases die met de grootste basis het grootste oppervlak heeft. Hij neemt nu willekeurige veelvouden van $B\Gamma$ en van $\Gamma\Delta$. Is nu

$$m \,.\, B\Gamma > n \,.\, \Gamma\Delta, \text{ dan is } m \,.\, AB\Gamma > n \,.\, A\Delta\Gamma$$

Evenzoo voor $\leqq$ en hieruit volgt nu onmiddellijk, ook voor irrationale waarden van de verhouding der bases, de bedoelde stelling.

Deze stelling wordt nu gebruikt voor het bewijs van de fundamenteele eigenschap, dat een lijn, evenwijdig aan de basis van een driehoek, de opstaande zijden verdeelt in evenredige stukken, de stelling dus, die, iets uitgebreid, in het tegenwoordige meetkunde-onderwijs den grondslag vormt van de theorie der meetkundige evenredigheden en waarbij men de moeilijkheden van het irrationale tracht te overwinnen door insluiting tusschen rationale grenzen, welker afstand tot nul nadert. Bij Euclides loopt het verrassend eenvoudig af:



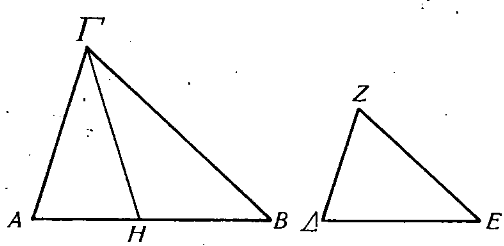
$A\Delta E = B\Delta E$ (I, 38) dus

$(A\Delta E, \Gamma\Delta E) = (B\Delta E, \Gamma\Delta E)$ (V, 7)

dus $(AE, \Gamma E) = (B\Delta, \Gamma\Delta)$ (V, 11).

Ik heb nu nog noodig de Prop. VI, 19, volgens welke de oppervlakken van twee gelijkvormige driehoeken in de dubbelreden van hun gelijkstandige zijden staan; bij het bewijs daarvan komen nog verschillende andere stellingen van Boek VI te pas, die ik maar zonder meer zal vermelden.

Gelijkvormige driehoeken worden gedefinieerd als driehoeken met de eigenschap, dat de hoeken van de eene opvolgend gelijk zijn aan die van de andere en de zijden om de gelijke hoeken evenredig. Zooals u ziet, is deze definitie overbelast; ze wordt dan ook behoorlijk aangevuld door het bewijs in Prop. 6, dat gelijkheid van hoeken voldoende is, om tot gelijkvormigheid te kunnen besluiten. Het bewijs van Prop. 16 verloopt nu als volgt:



Laat $AB\Gamma$ en ΔEZ de gelijkvormige driehoeken zijn. Construeer (VI, 11) AH, zoodat $(AB, \Delta E) = (\Delta E, AH)$.

Nu is gegeven $(AB, A\Gamma) = (\Delta E, \Delta Z)$, dus ἐναλλάξ: $(AB, \Delta E) = (A\Gamma, \Delta Z)$ (V, 16)

dus (V, 11): $(\Delta E, AH) = (A\Gamma, \Delta Z)$. In de driehoeken $AH\Gamma$ en ΔEZ, die een hoek gelijk hebben, zijn de zijden om dien hoek omgekeerd evenredig. Dus (VI, 15) $A\Gamma H = \Delta EZ$.

Nu heeft men wegens Definitie V, 9:

$(AB, AH) = \Delta(AB, \Delta E)$. Maar $(AB, AH) = (AB\Gamma, AH\Gamma)$, dus

$(AB\Gamma, AH\Gamma) = \Delta\ (AB, \Delta E)$ dus

$(AB\Gamma, \Delta EZ) = \Delta\ (AB, \Delta E)$.

Het kost hierna weinig moeite, om aan te toonen, dat de stelling kan worden uitgebreid op gelijkvormige veelhoeken.

Ik kan nu overgaan tot behandeling van de aangekondigde propositie, waarbij de moderne lezer aanvankelijk geheel verrast wordt door den schijnbaar noodeloozen omslag, dien de Grieksche wiskunde soms moet maken, om iets te bewijzen, wat voor ons onmiddellijk evident lijkt. Het is de 9e Propositie van het 10e Boek, de stelling van Theaitetos:

De oppervlakken van twee vierkanten, welker zijden zich verhouden als de geheele getallen m en n, verhouden zich als de quadraten dier getallen. Het lijkt nu voor ons zoo doodeenvoudig, om uit de verhouding der zijden

$$a : b = m : n$$

te concludeeren tot $O_1 : O_2 = m^2 : n^2$.

Voor Euclides ligt de zaak echter heel anders. Immers a en b zijn lijnen, m en n getallen. De vierkanten, beschreven op de zijden a en b staan in een reden, die dubbelreden is van (a, b). Maar om nu verder te kunnen komen, moet hij nog aantoonen, dat de reden van de quadraten van twee getallen a en b ook dubbelreden is van hun eigen reden (vergeet u niet, dat de dubbelreden niet gedefinieerd is als verhouding van de quadraten, omdat de definitie voor grootheden in het algemeen moet gelden) en bovendien weten, dat als twee redens gelijk zijn, hun dubbelredens ook gelijk zijn. Nu, dit laatste verzuimt hij, maar het is, zooals reeds door Simson is aangetoond, gemakkelijk uit het vijfde Boek af te leiden. Het eerste echter, de stelling dus, dat de reden van de vierkanten van twee getallen dubbelreden is van de reden dier getallen kan uit Boek V onmogelijk volgen, omdat dit over grootheden in het algemeen handelt, terwijl men, zooals ik al opmerkte, van het quadraat van een willekeurige grootheid niet kan spreken. Het is dan ook niet verwonderlijk dat Euclides op de zes z.g. planimetrische boeken nog drie, gewoonlijk als arithmetische aangeduide boeken heeft laten volgen, waarin de van Theaitetos afkomstige theorie der rekenkunde wordt ontwikkeld: hierin vindt men als Prop. 11 van Boek VIII de bedoelde stelling over de verhouding van de quadraten van twee getallen.

Wat nu echter wel verwonderlijk is, is dat de arithmetische theorie van verhoudingen geheel onafhankelijk van het vijfde Boek wordt opgebouwd, ja, dat zij zelfs begint met een geheel nieuwe definitie van evenredigheid, nu alleen op getallen van toepassing, terwijl het toch niet is aan te nemen, dat het Euclides zou zijn ontgaan, dat zijn algemeen begrip van *μέγεθος* in Boek V dat van *ἀριθμὸς* in Boek VII als bijzonder geval omvat en dus evenmin, dat hij moest aantoonen, dat de speciale definitie van evenredigheid van Boek VII paste in de algemeene van Boek V. Het onderzoek naar de wordingsgeschiedenis der Euclidische Meetkunde staat hier voor een probleem, dat, naar het mij toeschijnt, nog niet volledig is opgelost, al is het door de onderzoekingen, die H. G. Zeuthen er in de latere jaren van zijn leven, dus na het verschijnen van zijn bekende werken over de Grieksche wiskunde, aan heeft gewijd, wel heel wat verhelderd.

Ik wil volstaan met op het bestaan van dit probleem gewezen te hebben en laat nu ook verder de arithmetische reden-theorie van het 7e en 8e Boek rusten. Wat ik tot dusver besproken heb, zal wel voldoende zijn geweest, om u een denkbeeld te geven van het verschil, dat er in zake het begrip en het gebruik van evenredigheden tusschen de Grieksche wiskunde en de onze bestaat.

Van dat verschil heb ik trouwens slechts de eene zijde belicht, namelijk die, waar de Grieken een veel sterker gebruik van het begrip verhouding maken, dan wij nu bij de behandeling van de elementaire meetkunde doen. Het is echter merkwaardig, dat er ook gebieden zijn, waar de toestand juist omgekeerd is: zoo worden, om slechts twee voorbeelden te noemen, de stelling van Pythagoras en de macht-eigenschap van een cirkel bij Euclides opvolgend behandeld in het 1e en 3e Boek, dus lang voordat het begrip verhouding is ingevoerd. De Grieken volgen hier weer de machtige methode der geometrische algebra, die haar groote ontwikkeling waarschijnlijk wel dankt aan het streven, de meetkunde zoover mogelijk zonder hulp van het moeilijke reden-begrip op te bouwen.

Het was nu echter niet mijn hoofddoel, u te wijzen op de groote verschillen, waardoor de Grieksche wiskunde zich van de onze onderscheidt. Belangrijker nog lijkt mij het inzicht in beider verwantschap, in de overeenstemming, die bij alle vormverschil tusschen beider grondbeginselen bestaat en die mij een onweerlegbaar argument schijnt tegen de tegenwoordig wel eens geuite bewering, dat de Grieksche wiskunde met de moderne eigenlijk niet meer dan den naam gemeen zou hebben. Eén punt, waarop die overeenstemming bestaat, hoop ik u nu te hebben getoond, door de wijze te schetsen, waarop de mathematici van Plato's tijd het irrationale behandelen. Want dat is geheel naar den geest der moderne mathesis: het is een uiting van wat men het mathematische geweten zou kunnen noemen, van de zorg voor exacten logischen opbouw, die zich niet laat begoochelen door den graad van evidentie, dien de verkregen resultaten voor het niet-mathematische denken hebben.

Ik wil nu voor de pauze nog een vraag behandelen, die allicht al bij sommigen van u zal zijn opgekomen: welke positie neemt deze exacte wiskunde nu in in het Grieksche intellectueele leven van de vierde eeuw? Is ze een geïsoleerd verschijnsel, een mania voor enkelingen of vormt ze een integreerend deel van het zoo sterk tot abstracte speculatie neigende philosophische denken van de Grieken? Of, om een engere, maar scherpere vraag te stellen: welke plaats bekleedt de exacte wiskunde in de groote philosophische schepping uit het begin van de 4e eeuw, in de philosophie van Plato en welk aandeel heeft Plato zelf in de bevordering van haar bloei gehad?

Die vraag kan nu met vrij groote zekerheid aldus beantwoord worden, dat Plato het merkwaardige, misschien wel eenige voorbeeld vormt van een philosoof, die, zonder de wiskunde zelf met noemenswaardige vondsten te hebben verrijkt, niettemin door zijn denkbeelden over haar wezen haar opbloei sterk heeft bevorderd. Inderdaad berust de groote beteekenis van Plato voor de geschiedenis der wiskunde daarop, dat hij op grond van zijn philosophische opvattingen voor het eerst scherp haar geheel eigen en afzonderlijke plaats ten opzichte van de andere wetenschappen heeft bepaald, dat hij de consequenties heeft getrokken, die daaruit ten aanzien van de aan den opbouw van een mathematisch systeem te stellen eischen volgen en dat hij voor het eerst heeft gewezen op het eminente belang van mathematisch onderwijs voor elke intellectueele ontwikkeling.

Om dit alles duidelijk te maken, zou ik vooreerst willen wijzen op de Platonische opvatting, dat de objecten van het mathematische weten staan tusschen de ideeën, de *εἴδη* en de objecten van de zintuigelijke waarneming, de *αἰσθητά*. Van de laatste onderscheiden ze zich door hun eeuwigheid, van de eerste verschillen ze doordat ze de eenheid der idee missen. In verband hiermee moeten drie graden van ons kennen worden onderscheiden, de op de ideeën gerichte rede, de *νοῦς*, de op de zinnenwereld gerichte meening of waarneming, *δόξα* of *αἴσθησις* en daartusschen in het denken over de dingen tusschen de ideeën en de zinnenwereld in, de *διάνοια* of *λογισμός*, waaronder het mathematische denken valt. De vraag is nu, waaraan deze tusschenvorm van ons kenvermogen, waaraan in het bijzonder de mathesis hare nauwkeurigheid en hare absolute zekerheid dankt. Hierop geeft nu de philosophie van Plato, voorzoover het het negatieve deel betreft, hetzelfde antwoord, dat die van Kant 23 eeuwen later zou geven: zoowel de volkomen exactheid als het apodictisch karakter van de wiskundige waarheden zouden onverklaarbaar zijn, wanneer de ziel uit de waarneming van stoffelijke dingen achteraf door abstractie tot de vorming van de mathematische entiteiten kwam, wanneer ze dus door het waarnemen van stoffelijke voorwerpen, die den vorm van een cirkel of een driehoek hebben, eerst het beeld van een driehoek of een cirkel kreeg. En, afwijkend van Kant in het positieve deel van haar antwoord, voegt ze er aan toe, dat de ziel door de waarneming der stoffelijke voorwerpen slechts wordt geprikkeld tot bezinning op de in haar sluimerende immaterieele en onvergankelijke mathematische vormen, dat ze daarna echter, de boeien der zinnen van zich afschuddend, zonder hulp van de *δόξα* of de *αἴσθησις* tot de zuivere beschouwing van die vormen komt.

Het is duidelijk, welk een waarde Plato en zijn school aan zulk een wetenschap moesten toekennen: geen betere voorbereiding kon er zijn voor het beschouwende leven van den waren philosoof, dan een wetenschap, die op haar bijzonder gebied den mensch den stap van de materie tot den vorm, van het bijzondere tot het algemeene, van de meening, het vermoeden tot het redelijke weten leerde doen. Vandaar dan ook de belangrijke plaats, die in het ontwerp voor den ideaalstaat, in de Politeia, aan het wiskunde-onderwijs wordt toegekend en die we geschetst vinden in enkele onvergetelijke bladzijden van het zevende boek.

U kent de situatie, waarmee dit boek begint: Socrates heeft daar de beroemde vergelijking ontwikkeld tusschen ons aan het zintuigelijk waarneembare gebonden leven en het bestaan van de menschen, die, gekluisterd in een hol, op een muur, waarvoor ze onbewegelijk zitten, slechts de schaduwen zien van wat buiten, tusschen den ingang van het hol en een daarvoor brandend vuur, voorbijgaat en die dit schaduwenspel voor de werkelijkheid houden. In de bevrijding uit die boeien, het omkeeren en omhoog voeren naar het licht en het leeren zien van een hoogere werkelijkheid heeft hij daarna de taak geteekend, die de intellectueele opvoeding aan de toekomstige leiders van den staat te vervullen heeft en wanneer hij dan, het beeld verlatend, die opvoeding zelf gaat schetsen, zet hij, geheel in overeenstemming met de opvattingen, die we zoo straks leerden kennen, uiteen, dat de wiskunde daarin een eereplaats zal moeten innemen. Niet, zooals Glaukoon meent, om eenig practisch nut, maar uitsluitend, omdat zij een zeker orgaan der ziel, dat meer waard is dan duizend oogen, maar dat in het dagelijksch leven dreigt weg te kwijnen, zuivert en daardoor tot nieuw leven wekt en omdat zij, die in schijn, namelijk wanneer men afgaat op de door haar gebruikte woorden, handelt over practische toepassingen op vergankelijke dingen, in werkelijkheid een kennis van het eeuwige inhoudt en daardoor een kracht is, die de ziel omhoogtrekt naar de waarheid, een *ὁλκός πρὸς ἀλήθειαν*.

„En daarom moet er met zorg gewaakt worden, dat men zich in den ideaalstaat niet van de wiskunde afzijdig houde."

Deze woorden leeren ons nog meer, dan dat de wiskunde veel voor Plato beteekende; ze doen ons ook beseffen, welk een gunstige atmospheer in de Akademeia voor den groei der zuivere wiskunde moet hebben geheerscht. In volle overtuiging werd hier het recht, ja zelfs de noodzakelijkheid bepleit, om een vak, dat als handwerk was ontstaan, terwille van zich zelve zonder eenige aandacht voor toepasbaarheid in het practische leven te behandelen; het kon niet anders, of hier moest de zorg voor zuiverheid van opbouw, voor scherpte van definitie en uitdrukking, voor eerlijkheid van denken, het winnen van de neiging, om resultaten ook dan te aanvaarden, als ze alleen maar juist, maar niet exact bewezen waren.

En zoo verwondert het ons ook niet, dat het juist in Plato's omgeving is, dat we Eudoxos van Knidos en Theaitetos van Athene de grondslagen zien leggen, die tot in onzen tijd het gebouw der mathesis helpen dragen.

Er zijn tal van symptomen, dat Plato steeds hartstochtelijk in den opbloei der zuivere wiskunde is blijven meeleven; we zien hem in den Timaios de groote mathematische vondst van zijn vriend Theaitetos, de vijf regelmatige veelvlakken, gebruiken voor zijn atoomtheorie; in de Nomoi bepleit hij, evenals in de Politeia, het belang van wiskunde-onderwijs, zelfs voor hen, die niet tot de leidende figuren in den staat zullen behooren en het is teekenend, dat hij het daar als een toestand, die meer voor zwijnen, dan voor menschen past, hekelt, dat er nog steeds zoovele Hellenen zijn, die zich geen rekenschap geven van het wonderlijke feit, dat niet elk tweetal grootheden onderling meetbaar is. En in de Politeia is zelfs een plaats, waar we hem als het ware bezig zien met het beïnvloeden van de ontwikkeling der wiskunde, doordat hij meer aandacht en waardeering bepleit voor het jonge vak der driedimensionale meetkunde. Het is de plaats, waar hij in de opsomming van de onderdeelen der mathematische opvoeding opmerkt, dat vóór de astronomie, die lichamen in beweging behandelt, een ander vak ter sprake moet komen, dat over de derde dimensie, die der lichamen, ἡ τῶν κύβων αὔξη, zelf handelt. Een naam heeft dit vak nog niet en Glaukoon meent zelfs, dat het nog heelemaal niet bestaat. Maar dat spreekt Socrates tegen: de officieele wetenschap wil het nog niet erkennen en de staten verzuimen hun plicht, door het niet meer in eere te houden, maar het groeit βίᾳ ὑπὸ χάριτος, dus door de kracht van de bekoring, die er aan eigen is. Het is een verleidelijke hypothese, dat Plato deze woorden spreekt, terwijl hij zelf al op de hoogte was van het stereometrische werk van zijn vriend Theaitetos en dat hij er een verwijt mee bedoelde aan het adres van diegenen onder zijn tijdgenooten, die de driedimensionale meetkunde niet in het geometrische systeem opgenomen wilden zien.

Het is natuurlijk niet mogelijk, nauwkeurig vast te stellen, welken invloed Plato's philosophische beschouwingen over de wiskunde op haar ontwikkeling hebben gehad, omdat wij niet weten, in hoeverre zij daarvan de oorzaak en in hoeverre zij er het gevolg van zijn geweest. Deze onzekerheid behoeft ons echter niet te beletten, de beteekenis van zijn figuur voor de geschiedenis der wiskunde zeer hoog te schatten. Want zonder eenigen twijfel heeft de wiskunde het eerst aan hem de eervolle positie onder de wetenschappen te danken gehad, die zij in alle, niet uitsluitend op het nastreven van materieel nut ingestelde tijden genoten heeft. Het is een zeer slecht gefundeerde overlevering, dat boven de toegangspoort van de Akademeia de woorden Μηδεὶς ἀγεωμέτρητος εἰσίτω zouden hebben geprijkt. Maar het is in ieder geval een overlevering, die den geest, die in den olijvenhof moet hebben geheerscht, juist kenmerkt. En wanneer ik dit eerste deel van mijn voordracht mag besluiten met een toepassing van wat de geschiedenis der Grieksche Wiskunde ons leert, op het onderwijs van onzen tijd, dan zou ik den wensch willen uitspreken, dat onze gymnasia steeds zullen beseffen, dat, wanneer zij Plato's geest willen navolgen, zij zich niet alleen zullen moeten verzetten tegen elk streven ter verzwakking van de positie, die het onderwijs in het Grieksch thans inneemt, maar evenzeer tegen elken aandrang, aan de wiskunde de plaats te misgunnen, die aan haar, als element van klassieke opvoeding, onmiddellijk naast het Grieksch toekomt.

II.

Ik heb u voor de pauze een indruk trachten te geven van de wijze waarop de Grieksche wiskunde de moeilijkheden, die het voorkomen van irrationale verhoudingen opleverde, wist te overwinnen. We hebben daarmee tevens een eerste voorbeeld leeren kennen van de groote zorgvuldigheid, waarmee zij alle vragen, die het oneindige betreffen — want de vraag naar de verhouding van twee grootheden, bij welke de bewerking van het zoeken van de grootst gemeene maat niet eindigt, hoort daartoe — behandelde. Ik wil nu over deze zeer karakteristieke zijde van de Grieksche mathesis nog iets meer zeggen.

Wanneer men in de geschiedenis der wiskunde meer zoekt dan een zoo nauwkeurig mogelijke kennis van het leven der mathematici van verschillende tijden en van den inhoud van hun werken, wanneer men haar, wat ze naar haar wezen in de allereerste plaats is, beschouwt als een onderzoek naar de werkwijze van het menschelijk verstand, als een streven tot het verzamelen van materiaal voor die wonderlijke geestelijke occupatie, waarin ons intellect zich zelf kritisch beschouwt, dan heeft zij weinig onderwerpen aan te wijzen, die tot zulke boeiende en raadselachtige resultaten voeren als de geschiedenis der oneindige processen. Zij toont namelijk aan, dat het mathematische denken altijd weer blootstaat aan de verleiding, om, wel verre van voor het oneindige met een diep besef van vermogen stil te blijven staan, integendeel de problemen, die het ons stelt, over het hoofd te zien. Alleen in periodes van groote geestelijke zelftucht, die tot critische beschouwing van het tot stand gebrachte voert, wordt dat anders; dan wordt het oneindige zelf tot probleem; dan wordt de naieve zekerheid van een vorige generatie vervangen door een niets ontziend wantrouwen, dat tot groote verdieping van ons inzicht kan voeren en welks eenige schaduwzijde bestaat in het gevaar van onvruchtbaarheid in het scheppen van nieuwe gebieden.

Zulk een periode van kritiek beleven wij, zooals alle mathematici onder u uit ervaring weten, tegenwoordig; zulk een periode echter, bij alle gradueel verschil wezenlijk met de onze verwant, heeft de Grieksche wiskunde in de 4e en 3e eeuw gekend.

Haar kritiek op het begrip van het oneindige is zoo radicaal geweest, als ze maar zijn kon; ze heeft dit begrip, als ondenkbaar, voor goed verbannen en ze heeft methodes ontwikkeld, om streng te bewijzen, wat vroegere generaties, op grond van een onrechtmatige, het eindige overschrijdende inductie slechts hadden kunnen vermoeden.

Voor de beoordeeling van de ontwikkeling, die tot deze kritiek heeft gevoerd, staan ons helaas slechts zeer weinig gegevens ten dienste. We weten uit een mededeeling van Archimedes, dat Eudoxos van Knidos, dezelfde wiens reden-theorie ik voor de pauze behandelde, de eerste is geweest, die de stellingen over den inhoud van de pyramide en den kegel, welker afleiding een oneindig proces in zich sluit, streng heeft bewezen, nadat Demokritos die stellingen zonder bewijs had uitgesproken, maar hoewel we op deze wijze een bovenste grens kunnen aangeven voor den tijd, waarin de Grieksche strengheid inzake de oneindige processen haar oorsprong heeft, kunnen we slechts een vermoeden uitspreken over de motieven, die de Grieksche mathematici er toe hebben geleid, om juist op dit gebied een graad van exactheid na te streven, waarbij, om slechts een voorbeeld te noemen, die van hun behandeling van de beginselen der meetkunde verre achterblijft.

Volgens dat vermoeden nu, waarvan ik dadelijk wil erkennen, dat het niet door bewijsplaatsen wordt gesteund, maar dat zooveel inwendige overtuigingskracht heeft, dat men zich toch telkens weer geneigd voelt, het voor waar te houden, zou de omkeer tot strengheid op het gebied der oneindige processen toe te schrijven zijn aan den invloed der Eleatische wijsbegeerte in het algemeen en in het bijzonder aan dien van den Eleaat Zenoon. Het is een hypothese, die door Paul Tannery in 1887 in zijn *Géometrie grecque* is uitgesproken en die in den jongsten tijd met warmte is verdedigd door den Italiaanschen mathematicus Enriques en diens leerling Rufini.

Zooals u weet, berust de Eleatische wijsbegeerte op een grondstelling, die door Parmenides in zijn gedicht *Περὶ φύσεως* wordt ontwikkeld, de stelling namelijk van de eenheid, de ondeelbaarheid en de onbewegelijkheid van het Zijnde. Het is voor ons niet gemakkelijk, ons een voorstelling te maken van de beteekenis van dezen term „het Zijnde", τὸ ὄν, en van den wezenlijken inhoud van het zoo nadrukkelijk door Parmenides gevoerde betoog, dat het zijnde niet kan zijn ontstaan, omdat het òf voortgekomen zou moeten zijn uit „het Zijnde" (dat er dan al was) òf uit het niet-zijnde, wat ondenkbaar is, en van de heftige bestrijding van de dwaalleer, dat naast „het Zijnde" nog het niet-zijnde een afzonderlijk bestaan zou hebben. Wanneer we echter bij Parmenides lezen, dat „het Zijnde", dat onvatbaar is voor ontstaan of vergaan, bestaat als een overal gelijksoortig, samenhangend geheel en dat het vergelijkbaar is met een goed afgeronden bol, dan krijgt men wel sterk den indruk, dat de Eleaten met het woord τὸ ὄν het slechts met het denken te vatten ruimtelijk uitgebreide en verder qualiteitlooze substraat hebben bedoeld, dat van de stoffelijke wereld overblijft, als men deze bevrijd denkt van den schijn der verandering, dien de zintuigelijke waarneming voor werkelijkheid houdt. Om de beteekenis van deze leer duidelijk te maken, zou ik haar willen plaatsen tegenover de atomatische opvatting van een leege ruimte, waarin zich materieele atomen bewegen. Voor de Eleaten is dat ondenkbaar: het ledig, τὸ κενόν staat met het niet zijnde, τὸ μὴ ὄν, gelijk, welks bestaan Parmenides heftig ontkent; daardoor valt meteen de mogelijkheid, de materie van de ruimte te onderscheiden. Het zijnde van Parmenides mag dan ook noch ruimte, noch materie heeten; wil men het bepaald met behulp van deze termen omschrijven, dan zou men moeten zeggen, dat het de als materie beschouwde ruimte is, een begrip dus, nauw verwant aan Plato's opvatting in Timaios van de ruimte als het qualiteitlooze ἐκμαγεῖον, de substantie, waarin de ideeën als het ware hun beelden, de objecten der zintuigelijke waarneming, afdrukken en ook weer samenhangend met de later door Descartes verkondigde theorie, dat het wezen der materie in haar uitgebreidheid ligt.

Wanneer men deze interpretatie aanvaardt, valt er wel een onverwacht helder licht op den strijd, dien, volgens het getuigenis van Plato en van Proklos, Zenoon ter verdediging van de leer van zijn meester heeft gevoerd; we lezen, dat hij de stelling ἕν εἶναι τὸ πᾶν, dat al het zijnde een eenheid is, verdedigde, door de opvatting der tegenstanders, volgens welke de waargenomen veelheid der dingen ook een wezenlijke veelheid van het Zijnde openbaart, ad absurdum te voeren. Gaan we nu echter na, hoe hij dat deed, dan vinden we in den commentaar van Simplikios op de Physica van Aristoteles redeneeringen, waarvan niet uitdrukkelijk gezegd wordt, dat ze betrekking hebben op continua van 1, 2 of 3 dimensies, op lijnstukken, oppervlakken en ruimtedeelen, maar die in ieder geval geheel ongedwongen zoo kunnen worden opgevat, terwijl men niet goed ziet, wat ze nog anders zouden kunnen beteekenen. De opvatting, die Zenoon bestrijdt, wordt nu volgens deze interpretatie deze, dat een continuum gedacht zou kunnen worden als som van continua van een dimensie lager (waarbij men het punt als een continuum van nul dimensies moet opvatten), dat een lijn dus zou kunnen worden beschouwd als ontstaan door iuxtapositie van punten, dat een rechthoek als som van lijnen, een cirkelcylinder als som van cirkels zou kunnen worden opgevat.

Het is nu inderdaad de hypothese van Tannery, dat Zenoon deze meening, die we als de theorie der indivisibilia kunnen aanduiden, in zijn polemieken zou hebben bestreden. Tannery meent, dat hij zich daarmee in het bijzonder tegen de Pythagoraeërs richtte, die het punt definieerden als *μονὰς προσλαβοῦσα θέσιν*, een eenheid met een bepaalde ligging, en die daardoor inderdaad den indruk wekken, dat ze een lijn als een hoeveelheid van zulke eenheden, als een som van punten dus, hebben beschouwd. Een bewijsplaats, dat er Pythagoraeërs geweest zijn, die deze meening aanvaardden, is echter niet bekend.

Ik wil nu eerst een voorbeeld van Zenoon's polemiek geven, dat door Simplikios aan Porphurios is ontleend. Zijn citaat, waarin waarschijnlijk ten onrechte Zenoon's naam door die van Parmenides is vervangen, luidt als volgt: „Parmenides had een andere redeneering, waardoor hij met behulp van dichotomie meende te kunnen aantoonen, dat „het Zijnde" een en ondeelbaar is. Want, zegt hij, indien het deelbaar was, laat het dan in tweeën gedeeld worden, en daarna elk der deelen opnieuw in tweeën en wanneer dit altijd door blijft gebeuren, dan, zegt hij, is het duidelijk, dat er òf zekere uiterste kleinste en ondeelbare grootheden zullen overblijven, welker aantal oneindig groot zal zijn, zoodat het geheel zal bestaan uit oneindig veel kleinste deeltjes, òf het zijnde zal bij de deeling verdwijnen en in niets worden gesplitst en dus uit niets bestaan, wat dwaasheid is. Dus zal „het Zijnde" niet worden gedeeld, maar één blijven."

Kan men nu den indruk van zich afzetten, dat hier iemand bezig is, een betoog te leveren, dat wij als volgt zouden formuleeren: denk een lineair continuum, b.v. het lijnstuk, begrensd door den oorsprong en het punt met abscis 1 op de X-as. Deel het in tweeën, deel elke helft weer in tweeën en zoo voort in infinitum. Wanneer nu de lengte der verkregen deelen een benedenste grens had, die grooter dan nul was, terwijl de deeling toch tot in het oneindige was voort te zetten, dat zou de lengte van het lijnstuk oneindig groot zijn. Kwam er daarentegen een oogenblik, dat de deeling tot punten voerde, welke lengte nul is, dan zou de lijn als som van lengtes nul zelf de lengte nul hebben.

Kan men, zoo vraag ik, nog twijfelen, of het zoo bedoeld is, wanneer men, ook bij Simplikios, het doel van Zenoon's redeneering kort beschreven vindt als een poging, om aan te toonen, dat, indien het zijnde een veelheid was, het tegelijkertijd groot en klein zou zijn, zoo groot, dat het oneindig zou zijn in grootte, zoo klein, dat het geen grootte zou hebben.

Een andere vraag is, of de boven gehouden redeneering alle mogelijkheden uitput. Dat doet ze blijkbaar niet. Want men zou ten eerste kunnen onderstellen, dat de deeling na een eindig aantal stappen tot lijnstukken voert, die nog wel lengte hebben, maar niet meer deelbaar zijn, een soort lijnquanta dus. Dit is een hypothese, die men in dezelfde passage van Porphurios aan Xenokrates toegeschreven vindt en die met de onderstelling van het bestaan van atoomlijnen, atoomoppervlakken en atoomlichamen eenvoudig een atomistische structuur van de ruimte aanneemt. Ten tweede echter zouden wij tegenwoordig op de redeneering van Zenoon antwoorden met de opmerking, dat de voortgezette dichotomie van een lijnstuk tot lijnstukken zal voeren, welker lengte kleiner kan worden dan elk willekeurig voorgeschreven klein getal, maar dat de verkregen lijnstukken in elk stadium der deeling een eindige lengte zullen hebben. En wanneer wij daaraan toevoegden, dat elk dier lijnstukken altijd nog dezelfde machtigheid heeft als het lijnstuk 0—1, waarvan we uitgingen, dat er voortdurend een 1—1 toevoeging tusschen beider punten blijft bestaan, zoodat het onmathematische denken geneigd zou zijn, te zeggen, dat het dus voortdurend evenveel punten bezat als het oorspronkelijke stuk, waarvan het toch een deel is, dan zou Zenoon waarschijnlijk triomphantelijk hebben uitgeroepen, dat hij dus terecht volhield, dat „het Zijnde" ondeelbaar is, nu alle pogingen, om het lineair continuum te deelen, toch altijd weer tot het lineair continuum terug blijken te voeren.

Zooals u ziet, is het mogelijk, de redeneeringen van Zenoon te interpreteeren als een critiek op de theorie der indivisibilia. Minder gemakkelijk is het echter te bewijzen, dat deze interpretatie ook de noodzakelijke is. Inderdaad, bewijsplaatsen daarvoor in den vorm van uitlatingen van Grieksche mathematici of philosophen, waarin de paradoxen van Zenoon zoo worden opgevat, als ik dat zoo juist deed, zijn niet bekend. Nu is dit echter een geval, dat zich in de geschiedenis van de wis- en natuurkunde vaker voordoet en men pleegt zich dan, m.i. terecht, op het standpunt te stellen, dat een mogelijke interpretatie als de feitelijke mag worden aanvaard, zoolang daartegen geen bezwaren kunnen worden aangevoerd. Aan het zwijgen van de Grieksche mathematici kan echter zulk een bezwaar moeilijk worden ontleend. Zij spreken toch zeer zelden over hun werk; ze laten in een volkomen onpersoonlijken stijl zonder een woord van toelichting hun lange reeksen proposities afloopen; zij versmaden elke inleiding, elken terugblik. Enkelen, Euclides helaas niet, zeggen nog wel eens iets persoonlijks in hun voorberichten, maar ze gaan daarbij nooit zoover, dat ze hun standpunt inzake de gevolgde methode van bewijsvoering en den nagestreefden graad van strengheid uiteenzetten.

Wanneer we nu echter verder alleen vragen naar de mogelijkheid van de geschetste interpretatie van de Eleatische wijsbegeerte, dan blijken daar nog verschillende argumenten vóór aan te voeren te zijn, die dan tevens aannemelijk maken, dat de Grieksche wiskunde haar standpunt ten opzichte van het oneindige onder invloed van die wijsbegeerte heeft bepaald.

We moeten daartoe in de eerste plaats bedenken, dat Zenoon de klassieke Paradoxieeën des Unendlichen niet alleen in het straks geciteerde voorbeeld behandeld heeft. Proklos vertelt, dat hij 40 *ἐπιχειρημάτα* ter verdediging van de stelling, *ἕν εἶναι τὸ πᾶν* geschreven had en daaronder zullen vermoedelijk wel de beroemde paradoxen over de beweging hebben gehoord, waardoor zijn naam onsterfelijk is geworden en die ook in de Oudheid de algemeene opmerkzaamheid moeten hebben getrokken. Die redeneeringen over de beweging nu kunnen volgens een eveneens van Tannery afkomstige interpretatie worden opgevat op een wijze, die ze niet langer beschouwt als sophismen, maar als middelen, om een tegenstander, die een continuum als som van indivisibilia wil opvatten, ad absurdum te voeren en ze passen daardoor geheel in het beeld, dat we ons sedert Tannery van Zenoon vormen. Het is dus wel waarschijnlijk, dat de Grieksche wiskundigen in de redeneeringen van Zenoon althans een waarschuwing hebben gevonden, om voorzichtig te zijn met het oneindige. Dat ze getwijfeld hebben over de toelaatbaarheid van de theorie der indivisibilia wordt ons verder nog bevestigd door een curieuse mededeeling van Ploutarchos, die vermeldt, dat het een aporia voor Demokritos was, of, wanneer men een kegel sneed met een vlak, evenwijdig aan de basis, het oppervlak van de doorsnede al dan niet gelijk was aan dat van het grondvlak. In het tweede geval zou de kegel een trapvormige gedaante hebben, in het eerste zou hij niet spits toeloopen, maar cylindrisch van vorm zijn. Deze opmerking, die aanvankelijk vreemd aandoet, wordt direct begrijpelijk, wanneer we ook hier aan de beschouwing van den kegel als som van zijn doorsneden evenwijdig aan het grondvlak denken. Immers als Demokritos die beschouwing gehouden heeft, moet hij het bestaan van een eerste, op het grondvlak volgende doorsnede hebben aangenomen en dan toont ons de mededeeling van Ploutarchos, tot welke denkmoeilijkheden dat voerde. De opmerking wordt voor ons van des te meer belang, omdat we uit Archimedes weten, dat Demokritos den inhoud van den kegel heeft aangegeven. Het wordt daardoor namelijk wel zeer waarschijnlijk, dat hij daarbij gebruik zal hebben gemaakt van de theoretisch verwerpelijke, maar als heuristisch hulpmiddel onschatbare theorie der indivisibilia, die later in de handen van Galilei en Cavalieri zulke mooie resultaten zou opleveren en die ook aan de integraalopvatting van Leibniz ten grondslag ligt.

Verder hebben we nu ook alle reden, om te onderstellen, dat, wanneer Archimedes zegt, dat Demokritos de stellingen over den inhoud van pyramide en kegel had gevonden, maar dat Eudoxos ze pas had bewezen, hij zeggen wil, dat hij de redeneering met de indivisibilia, die Demokritos hield, niet als een bewijs beschouwt.

En wat nu ten slotte als sluitsteen van dit betoog kan gelden: in 1906 ontdekte Heiberg op een palimpsest in Constantinopel een verloren gewaand geschrift van Archimedes, de Ephodos of Methode en dit werk heeft ons het merkwaardige feit geopenbaard, dat Archimedes zelf de methode der indivisibilia als heuristisch hulpmiddel gebruikte en dat hij de langs dien weg gevonden stellingen daarna van een bewijs voorzag, dat niet blootstond aan een kritiek als die van Zenoon. Ik zie hierin het voornaamste, wat de ontdekking van de Ephodos ons heeft kunnen leeren. Want wat zijn nu de feiten? Er is een heuristisch vruchtbare, maar theoretisch verwerpelijke methode, die de Grieksche mathematici wel binnenkamers, maar niet in hun officiëele werken gebruiken. Deze methode is echter juist die, waartegen men zich de critek der Eleaten gericht kan denken. Het is dus aannemelijk — meer wil ik niet beweren —, dat de verbanning van deze methode uit de exacte wiskunde een gevolg van de critiek der Eleaten geweest is.

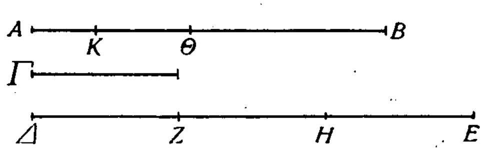
We moeten nu nagaan, hoe de Grieksche wiskunde na verwerping van de methode der indivisibilia de moeilijkheden van het oneindige te boven is gekomen. Hierover zou ik de stelling willen uitspreken, dat zij zich op een standpunt heeft gesteld, dat in wezen identiek is met dat, waarop de moderne wiskunde zich plaatst en dat dus de grootere exactheid ten aanzien van de oneindige processen, die de wiskunde van de 19e eeuw onderscheidt van die der 17e en 18e in waarheid een voortzetting en verdere ontwikkeling vormt van de wijze, waarop de Grieksche wiskunde die processen behandelde.

Ik kan die stelling niet beter verdedigen, dan door de bespreking van een elementair voorbeeld en kies daarvoor de tweede propositie van het twaalfde Boek van Euclides, de stelling, dat de oppervlakken van twee cirkels zich verhouden als de quadraten hunner middellijnen.

Dit bewijs is weer gebaseerd op de zeer belangrijke 1e propositie van het tiende Boek, die de grondstelling vormt van de methode, die men later in de 17e eeuw de exhaustiemethode genoemd heeft. Deze propositie luidt als volgt:

Wanneer twee ongelijke grootheden gegeven zijn en men neemt van de grootste een stuk af, grooter dan haar helft, van de rest weer een stuk, grooter dan de helft daarvan enz., dan zal er ten slotte een stuk overblijven, kleiner dan de kleinste der twee gegeven grootheden.

Het bewijs van deze stelling steunt op het axioma van Eudoxos, waaruit opnieuw het fundamenteele belang blijkt, dat dit axioma ook voor de Grieksche wiskunde had. Het verloopt als volgt:



Laat AB en Γ de twee ongelijke grootheden zijn, waarbij $AB > \Gamma$. Vermenigvuldig Γ met een zoodanig getal, dat het veelvoud ΔE

van Γ grooter zij dan AB. Laat ΔE verdeeld zijn in de deelen ΔZ, ZH HE elk gelijk aan Γ.

Neem van AB af $B\Theta > \frac{1}{2} AB$

van $A\Theta$ $\Theta K > \frac{1}{2} A\Theta$.

totdat het aantal stukken, waarin AB verdeeld is, gelijk is aan dat, waarin ΔE verdeeld is.

Daar nu $\Delta E > AB$, terwijl van ΔE minder dan de helft, van AB meer dan de helft is afgenomen, blijkt $\Delta H > A\Theta$.

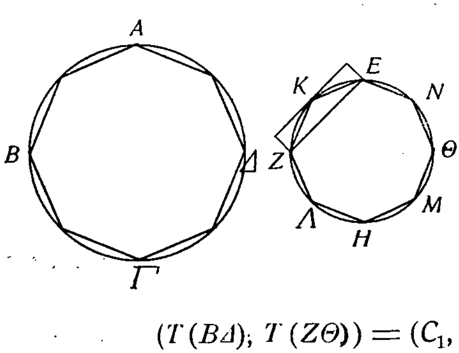
En daar van ΔH de helft, van $A\Theta$ meer dan de helft is afgenomen,

$$\Delta Z > AK \text{ of } AK < \Gamma.$$

Aan het bewijs is de opmerking toegevoegd, dat de stelling ook geldt, wanneer van AB en zijn deelen telkens de helft wordt afgenomen. Wanneer we haar in dezen vorm in moderne symbolen formuleeren, zegt ze, dat

$$\frac{a}{2^n}$$

door keuze van n kleiner kan gemaakt worden dan een willekeurig voorgeschreven getal ε, wat wij bij wijze van afkorting ook wel uitdrukken, door te zeggen:



$$\lim_{n \to \infty} \frac{a}{2^n} = 0.$$

We kunnen nu de stelling XII,2 bewijzen.

Te bew.

$$(C_1 . C_2) = (T(B\Delta) . T(Z\Theta))^{1)}.$$

Stel, dat deze stelling niet juist is, dan moet

$$(T(B\Delta); T(Z\Theta)) = (C_1, O), \text{ waarbij } O \gtrless C_2$$

Stel ten eerste $O < C_2$ en stel $C_2 - O = E$.

Beschrijf in cirkel C_2 een regelmatigen vierhoek $EZH\Theta$, dan is

$$EZH\Theta > \tfrac{1}{2} C_2$$

Verdeel de bogen EZ, ZH enz. in twee gelijke deelen in de punten K, Λ, M, N dan is de som van de driehoeken $EZK > \frac{1}{2}$ som van de segmenten EKZ.

Zoo voortgaande moeten we dus een n-hoek krijgen met een zoo groot aantal zijden, dat de som der overblijvende segmenten volgens

1) $T(B\Delta)$ duidt het vierkant met zijde $B\Delta$ aan, C_1 en C_2 de gegeven cirkels.

X, 1 kleiner is dan E. Hieruit volgt, als O_{n2} het oppervlak van dezen veelhoek aanduidt, $O_{n2} < O$.

Beschrijf nu in C_1 een regelmatigen veelhoek met een even groot aantal zijden, dan is volgens XII,1:

$$(O_{n1}, O_{n2}) = (T(BA), T(ZO)) = (C_1, O)$$

of ἐναλλάξ

$$(C_1, O_{n1}) = (O, O_{n2}).$$

Nu is $C_1 > O_{n1}$, dus $O > O_{n2}$, maar tevens $O < O_{n2}$.

Op analoge wijze, namelijk door beschouwing van omgeschreven regelmatige veelhoeken, wordt aangetoond, dat O niet $>$ C_2 kan zijn. Hieruit volgt $O = C_2$, waarmee de gestelde evenredigheid bewezen is.

Ik zou er nu de aandacht op willen vestigen, dat er een essentieele verwantschap bestaat tusschen deze redeneermethode en die van de moderne theorie der convergente varianten. Oppervlakkig bezien, blijkt die verwantschap misschien niet dadelijk. Immers wij zouden deze stelling bewijzen, door de oppervlakte van den cirkel op te vatten als de limiet van de oppervlakte van een ingeschreven regelmatigen veelhoek, waarvan het aantal zijden tot oneindig nadert, en dan schrijven

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{\text{Lim}\, O_{n1}}{\text{Lim}\, O_{n2}} = \text{Lim}\, \frac{O_{n1}}{O_{n2}} = \text{Lim}\, \frac{R_1^2}{R_2^2} = \frac{R_1^2}{R_2^2}.$$

Bij eerste beschouwing lijkt dat veel korter dan het Grieksche bewijs en ook heel anders van aard. Nu is die kortheid maar schijn; immers men maakt tweemaal gebruik van een vroeger bewezen stelling, namelijk eerst van de stelling, dat het quotient van twee convergente varianten convergeert tot het quotient hunner limieten en later van de stelling, dat een constante variant zijn eigen constante waarde tot limiet heeft. Doet men dat nu niet, neemt men de afleidingen van de hulpstellingen in het bewijs op en past men overal het gulden voorschrift toe, dat bij elke mathematische redeneering op elk oogenblik op straffe van waardeloosheid moet kunnen worden toegepast, het voorschrift: substituer les définitions à la place des définis, dan zal men altijd tot een redeneering moeten komen, die bij alle verschil in inkleeding de kern met die van Euclides gemeen heeft. Men zal ten eerste vroeg of laat het gegeven Lim $O_n = C$ moeten toepassen en dat beteekent niets anders, dan dat, bij voorgeschreven ε, N zoo groot te nemen is, dat voor $n > N$, $|C - O_n| < \varepsilon$. Welnu, dat doet het Euclidische bewijs ook, wanneer het $C_2 - O = E$ stelt en nu een veelhoek construeert, welks oppervlak van dat van den cirkel C_2 minder dan E verschilt. En men zal ten tweede vroeg of laat indirect moeten redeneeren, wat het Grieksche bewijs van den aanvang af doet. Dat die redeneering uit het ongerijmde zulk een wezenlijk bestanddeel van de grondslagen der limietentheorie uitmaakt, springt ook niet zoo dadelijk in het oog, omdat men de fundamenteele stellingen, bij welker afleiding ze een rol speelt, zoo vaak toepast, dat men zich niet steeds meer bewust is van de manier, waarop ze zijn bewezen. Roept men zich echter die bewijzen voor den geest, denkt men b.v. aan de stelling, dat een naar boven begrensde getallenverzameling een bovenste grens heeft, aan de stelling van de intervalkapseling, aan het algemeene convergentiebeginsel van Cauchy, dan stuit men steeds weer op de reductio ad absurdum. Het is ook niet recht denkbaar, hoe het anders zou kunnen zijn. Want onze redeneering kan slechts een eindig aantal stappen doen en ze kan alleen met „enzoovoort" den weg aanwijzen, dien ze zou willen blijven volgen. Ze kan dan het vermoeden hebben gewekt, dat het na een eindig aantal stappen verkregen resultaat, zoo weinig als we zelf maar willen, zal gaan verschillen van een vast, maar onbereikbaar doel, maar dat vermoeden kan slechts tot zekerheid worden verheven, doordat de ongerijmdheid van zijn ontkenning wordt aangetoond.

Dit is nu het punt, waarop de nauwe samenhang tusschen de Grieksche en de moderne opvatting der oneindige processen blijkt: het inzicht, dat elke limietstelling neerkomt op een stel ongelijkheden en dat het bewijs gebaseerd is op een redeneering uit het ongerijmde. De vele punten, waarop ze verschillen, betreffen meer den vorm dan het wezen. Ik zeg dit niet uit geringschatting voor den vorm. Wij weten allen, welk een suggestieve invloed er uitgaat van de terminologie van de limietentheorie, hoe groot daardoor haar heuristische waarde is, welk een vooruitgang het beteekent, dat de moderne wiskunde algemeene stellingen heeft kunnen formuleeren, zooals ik juist citeerde, terwijl de Grieken bij elk oneindig proces de geheele redeneering van voren af moeten beginnen. Maar de aandacht voor den vorm mag niet het inzicht in het wezen vertroebelen. En dat gevaar dreigt voortdurend in een theorie, die kinetisch formuleert, wat wezenlijk statisch is, die van veranderlijke grootheden spreekt, die tot een limiet naderen, van limietovergangen, van grootheden, die oneindig groot worden, alsof ze niet wist, dat een veranderlijke steeds constant is (of, om met Zenoon van Elea te spreken, dat een vliegende pijl steeds in rust is), dat ze haar limiet nooit bereikt, en dat een grootheid, die boven iedere grens groeit, altijd eindig blijft.

Nu is het hieruit voortvloeiende gevaar voor den actieven beoefenaar der wiskunde niet zoo ernstig; maar het bedreigt sterk de zuiverheid van denken van den beginneling in de wiskunde, van den buitenstaander, die van haar redeneeringen slechts oppervlakkig kennis neemt, en van hem, die slechts voor hare practische toepassingen oog heeft. Het zal allen mathematici onder u wel uit ervaring bekend zijn, welk een moeite het kost, om aan deze drie categorieën het statische karakter van een limietovergang duidelijk te maken, en hen ervan te overtuigen, dat woorden als „limiet", „oneindig", „naderen tot" niet een van nature voor elk duidelijke beteekenis hebben, maar dat ze moeten kunnen worden omschreven in termen, die slechts op eindige constante grootheden betrekking hebben. Zij willen nooit recht gelooven, dat de uitspraak

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a$$

werkelijk niets, maar ook niets anders beteekent, dan dat het mogelijk is, bij elk voorgeschreven getal ε een getal N te bepalen, zoodat voor $n > N$

$$| a - a_n | < \varepsilon$$

en ze meenen altijd, dat na het bewijs van deze ongelijkheid nog nader zal worden betoogd, dat, wanneer men nu ε al maar kleiner neemt, het verschil $|a - a_n|$ op den duur nul zal worden. Ze denken, dat het een oneindig kleine sprong is, om van een ingeschreven veelhoek met een onvoorstelbaar groot aantal zijden tot een cirkel te komen en ze zien niet in, dat die sprong in zeker opzicht altijd oneindig groot blijft, omdat een veelhoek met veel zijden nu eenmaal evenmin een cirkel is als een met vier.

De Grieksche mathematici nu zijn nooit in die fout vervallen. Teekenend is in dit verband een passage van Aristoteles, waarin een toespeling wordt gemaakt op een ψευδογράφημα van den sophist Antiphoon bij een poging tot quadratuur van den cirkel. Uit de commentaar van Simplikios blijkt, dat zijn redeneering hierin bestond, dat hij in den cirkel een veelhoek wilde beschrijven met een zoo groot aantal zijden, dat deze wegens hun kleinheid met de bogen van den cirkelomtrek zouden samenvallen, om daarna dezen veelhoek op de bekende wijze in een vierkant te veranderen. Die redeneering nu, waarin dus de veelhoek „op den duur" in den cirkel overgaat, is voor de Grieksche mathematici, wat ze voor ons ook is, een sophisma. Aristoteles acht zelfs het betoog van Antiphoon geen weerlegging waard, omdat het reeds met de axiomata der meetkunde strijdt; immers een koorde is recht en een cirkelboog is gebogen en een kleine koorde kan dus evenmin met een cirkelboog samenvallen als een groote.

Ik hoop, dat ik u met het bovenstaande eenigszins heb aangetoond, welk een groote waardeering het Grieksche standpunt ten aanzien van de oneindige processen verdient. Die waardeering geniet het echter nog slechts kort. Men krijgt wel eens den indruk, dat eerst onze tijd weer voldoende ernst met het oneindige maakt, om de Grieksche opvatting volkomen te kunnen begrijpen. Bij oudere schrijvers treft men vaak een zekere verbazing aan over wat ze de overdreven beangste zorgzaamheid der Grieksche mathematici ten opzichte van het oneindige noemen en zelfs een hoogstaand mathematicus als Hermann Hankel maakte er, een 50 jaar geleden, Euclides een soort van verwijt van, dat hij niet uit de stelling, dat de oppervlakken van twee regelmatige veelhoeken met hetzelfde aantal zijden zich verhouden als de quadraten van de stralen van hun omgeschreven cirkels, concludeerde, dat dus ook de oppervlakken van twee cirkels, als zijnde veelhoeken met oneindig veel zijden, zich op dezelfde manier moeten verhouden. Onze tijd daarentegen waardeert het weer in Euclides, dat hij zich van deze zinledige en in de practijk slechts tot op zekere hoogte als slordige afkorting te tolereeren zegswijze onthield.

Ik zou nu, alvorens te eindigen, nog twee dingen willen zeggen. Het eerste is een waarschuwing, speciaal gericht tot de niet-mathematici onder u, om toch vooral uit mijn betoog, waarin meer op de overeenstemming tusschen de Grieksche en de moderne wiskunde de nadruk werd gelegd dan op het verschil, te concludeeren, dat dus blijkbaar de geheele moderne wiskunde blijkbaar in kiem reeds in het Grieksche denken aanwezig was. Niets zou minder juist zijn. De wiskunde heeft in de 19e en 20e eeuw wegen ingeslagen, waarvan men vroeger nooit heeft kunnen droomen en wat voor de Grieken de totale inhoud der mathesis was, is voor onzen tijd nog slechts een zeer klein onderdeel daarvan. Ik kan dit hier natuurlijk niet in den breede gaan uiteenzetten en volsta dus met het noemen van twee eenvoudige voorbeelden: de zeer groote uitbreiding, die het getalbegrip heeft ondergaan en de opheffing van de beperking van het meetkundig denken tot de driedimensionale Euclidische ruimte.

Ten tweede echter zou ik er op willen wijzen, dat, hoever de wiskunde zich ook moge hebben ontwikkeld, de toegangsweg tot haar toch nog altijd leidt over de gebieden, die de Grieksche mathematici voor het eerst hebben betreden. Men heeft wel andere middelen beraamd, om haar te benaderen; men heeft ook en vaak niet zonder succes getracht, om den ouden weg door moderne hulpmiddelen gemakkelijker begaanbaar te maken; maar men heeft, naar mijn bescheiden meening althans, nog niets gevonden, dat in staat is, de Grieksche methode te vervangen en menigmaal zijn ook de wijzigingen, die men erin aanbracht, geen verbeteringen gebleken.

Natuurlijk behoeft ons dit niet te beletten, voortdurend te blijven zoeken naar wijzigingen, die wel verbeteringen zijn. De tijd is voorbij, dat men het systeem van Euclides beschouwde als een onaantastbaar logisch gebouw en dat het wiskunde-onderwijs, deels uit eerbied, deels uit conservatisme, niets anders durfde te doen, dan er een zoo getrouw mogelijke copie van te leveren. Maar er is, naar ik vrees, een tijd voor in de plaats gekomen, waarin men geneigd is bij volledige erkenning van de historische waarde der Grieksche wiskunde hare actueele didactische waarde te onderschatten. Ik wil het terrein van onuitputtelijke discussies, dat zich bij het maken van deze opmerking opent, niet betreden en beperk me dus tot een uitlating, die zelfs de grootste tegenstander van de Euclidische methode zal kunnen beamen: laten wij voor alles zorgen, dat wij de Grieksche wiskunde, die dan toch het oudste zuiver mathematische systeem vormt en waarvan de geest, zooals ik vanmiddag hoop te hebben aangetoond, in zoovele opzichten dezelfde is, als die de moderne wiskunde bezielt, door en door kennen, niet alleen om tal van redenen van historischen en mathematischen aard, maar ook, omdat wij van een volk, dat zoozeer als de Grieken overtuigd was van den vormenden invloed der mathesis, altijd nog wel wat kunnen leeren inzake de vraag, hoe die vormende invloed het best kan worden uitgeoefend.

En, hoe men dan ook moge denken over de waarde der Euclidische meetkunde als eerste inleiding in de wiskunde, niemand zal wel twijfelen aan het belang, dat eigen kennismaking met dit systeem voor den verder gevorderden leerling kan hebben. Dat belang kan echter nog aanzienlijk worden verhoogd, wanneer men, zooals dat op de Gymnasia het geval is, beschikken kan over leerlingen, die het onschatbare voorrecht genieten, Grieksch te leeren. Immers dit opent de mogelijkheid, om hen door lectuur van de Grieksche mathematici in het oorspronkelijke in veel inniger contact met de Grieksche wiskunde te brengen, dan door het gebruik van vertalingen ooit kan worden bereikt. Van dat contact echter is een dubbel voordeel te verwachten: het zal den blik op de Grieksche cultuur, die nu vaak te eenzijdig op het politieke en litteraire wordt ingesteld, verruimen en het zal bijdragen tot het vestigen van de overtuiging, dat de beoefening van de zuivere wiskunde een wezenlijk bestanddeel vormt van elke geestelijke vorming.

INGEKOMEN BOEKEN.

Dr. J. F. DE VRIES, Beknopte Mechanica, *f* 1,75, geb. . . . . *f* 2,25
P. WIJDENES, Algebra voor M. U. L. O. II A, 8e druk, geb. . - 1,50
— Nieuwe School-algebra II, 2e druk, geb. . . - 2,25
— Nieuwe School-algebra III, 2e druk, geb. . . - 2,25
— Grafiekenschrift bij de N. S. A., 2e druk . . - 0,50
— Kleine Stereometrie, geb. . . . . - 1,40
— Algebraische Vrst. I, 6e druk . . . . . . - 2,40
— Beknopte Rekenkunde, ing. *f* 2,—, geb. . . . - 2,50
— Antw. en Opl. bij het Leerboek der Gon. en Trig., 3e druk . . . . - 2,—
Dr. G. C. GERRITS, Bijlage I bij den 21sten druk van de Schriftelijke Opgaven H. B. S. . . . . - 0,30
P. WIJDENES, Algebra voor M. U. L. O. I, 19de druk. Gebonden *f* 1.40
Dr. J. KORS, Beschrijvende Meetkunde, 8ste druk, herzien door Dr. O. Postma. Tekst m. Atlas . . . . . . *f* 2.10
P. WIJDENES, Nieuwe School-Algebra I, 3de druk. Gebonden *f* 2.25
— en Dr. D. DE LANGE, Vlakke Meetkunde, deel I, 8ste druk, gecart. . . . . *f* 2.25
P. WIJDENES, Beknopte Rekenkunde, ing. *f* 2.—, geb. . . . *f* 2.50

BOEKBESPREKING.

De Bouw der Atomen. Door H. A. Kramers en Helge Holst. N. V. D. B. Centen Uitgevers Mij., Amsterdam. Geen jaartal.

Van de hand van den Utrechtschen hoogleeraar H. A. Kramers verscheen een nieuwe, Hollandsche, uitgave van een werkje over atoombouw, dat voor het eerst in 1922 in het Deensch, daarna in 1923 in het Engelsch en vervolgens in 1925 in het Duitsch het licht zag. Evenals de vorige keeren is het boek ook thans weer met het oog op de nieuwste resultaten der atoomtheorie bijgewerkt. Bij vergelijking met de voorlaatste, Duitsche, uitgave blijken de hoofdstukken, waarin Bohr's theorie van het waterstofspectrum en andere physische en chemische toepassingen van zijn atoomtheorie worden behandeld, belangrijk te zijn gewijzigd, terwijl nieuw is toegevoegd een hoofdstuk met den karakteristieken titel „Lichtdeeltjes en Materiegolven", waarin de lichtquanta van Einstein, de materiegolven van de Broglie en de golftheorie van Schrödinger, de laatste in verband met de reeds eerder besproken quantummechanica, ter sprake komen.

Uit dit korte overzicht blijkt reeds, hoeveel moeite de schrijver zich heeft gegeven, zijn boek weer in overeenstemming te brengen met het huidige peil der mathematische physica, welker verbijsterend snelle groei de uitgave van 1925 reeds had doen verouderen. De omstandigheid, dat hij als medewerker van Bohr de geheele atoomtheorie zich ab ovo heeft zien ontwikkelen en dat hij zelf aan die ontwikkeling een werkzaam aandeel had en heeft, geeft aan zijn uiteenzettingen, die zich bovendien kenmerken door de helderheid en den suggestieven betoogtrant, die ook zijn mondelinge voordracht zoo aantrekkelijk maken, een groote autoriteit en een groote bekoring.

Juist deze voortreffelijke eigenschappen echter doen het mij dubbel betreuren, dat de opzet van het boek zoodanig is, dat het, naar ik vrees, niet veel uitwerking zal hebben in de kringen, waarvoor het bedoeld is en niet aan de behoeften zal voldoen van die, waarin het vooral gelezen zal worden. Bedoeld is het blijkbaar voor den z.g. ontwikkelden leek, die ideale persoonlijkheid, die in alles belang stelt en die de lectuur van de talrijke boeken, die voor hem geschreven worden, begint, met niets te weten en beëindigt, met alles te begrijpen. Het draagt hier althans alle kenmerken van: het onderstelt aan voorkennis niet meer dan de elementairste beginselen van natuur- en scheikunde, het behandelt verschillende hiervan ten overvloede nog eens weer en het vermijdt zooveel mogelijk het gebruik van wiskundige ontwikkelingen. Dit laatste is beslissend; immers de wiskunde is het eenige vak, waarin de ontwikkelde leek geen belang stelt en waarvan hij geacht wordt, niets te begrijpen.

Gelezen zal het echter vooral worden door docenten en studenten in wis- en natuurkundige wetenschappen; vooral de eerste categorie, die afgesloten is van het onmiddellijk contact met de wetenschappelijke centra en die niet in staat is door bestudeering van de oorspronkelijke verhandelingen de snelle ontwikkeling der natuurwetenschappen bij te houden, ziet met verlangen uit naar boeken, waarin de nieuwere resultaten der physica zijn verwerkt; onder deze categorie zal een werkje over atoombouw van bevoegde hand ongetwijfeld aftrek vinden.

Nu zij het verre van mij, te willen ontkennen, dat docenten en studenten met de aandachtige lezing van het werkje van Prof. Kramers zeer hun voordeel zullen kunnen doen. Maar het lijkt mij een fout in den opzet van het boek, dat het met hun behoeften niet voldoende rekening houdt, terwijl het anderzijds de capaciteiten van de leeken onder de lezers overschat en dus in dezen kring toch ook niet tot zijn recht zal komen. Het is uitgesloten, dat iemand, die de elementaire inleiding werkelijk nog noodig heeft, van de eigenlijke atoomtheorie iets zal begrijpen en het is evenzeer uitgesloten, dat iemand, die naar inzicht streeft, tevreden zal kunnen zijn met den schrijver over de nieuwe theorieën te hooren praten, waar hij in die theorieën zou willen worden ingewijd. Men leze b.v. de hoofdstukken over quantummechanica en golftheorie; ze zijn ongetwijfeld knap geformuleerd, maar ze verhouden zich tot een uiteenzetting van die theorieën juist als de analyse van een symphonie in een concertprogramma tot de uitvoering van die symphonie zelf. En lezen over muziek, die men niet hoort, verveelt spoedig; het is bovendien onvruchtbaar.

Ik meen dus, dat de schrijver wat meer had kunnen denken aan de belangen van docenten en studenten in wis- en natuurkundige wetenschappen èn dat hij dan èn een bevredigender geheel zou hebben verkregen èn zijn doel beter zou hebben bereikt. Ten eerste had hij dan het wiskundig element niet zoo op den achtergrond behoeven te dringen. Men kan nu eenmaal de physica niet zonder hulp van de mathesis beoefenen en men kan dus ook niet volkomen helder over physica schrijven, wanneer men de mathesis verbant. Zij behoort toch tot het wezen der physica, niet tot haar vorm. Zij is geen hulpmiddel, dat ook wel ontbeerd kan worden, maar zij is het eenige instrument dat verfijnd genoeg is, om de natuur bij benadering te kunnen beschrijven.

De schrijver denkt er zelf ook zoo over. Immers op blz. 124 stelt hij de vraag, of een goed gefundeerde physische theorie in den grond van de zaak wel iets anders is dan een spel met formules, waarbij men in de woorden „niets anders dan" en „spel" allerminst een geringschattend waarde-oordeel hoort. Maar hoe kan hij dan hopen, dat de lezer hem werkelijk zal begrijpen, wanneer hij de wiskunde uit zijn betoog verbant?

Ten tweede echter had de schrijver zijn sympathieke doel, de denkbeelden der moderne physica te helpen verspreiden buiten den engen kring der vakgeleerden niet beter kunnen bereiken, dan door een wetenschappelijk leerboek over atoombouw te schrijven. Want ten slotte zijn de organen, waarlangs de nieuwe wetenschappelijke denkbeelden in den loop van 20 à 30 jaar in de maatschappij doordringen, toch in hoofdzaak de scholen voor Gymnasiaal en Middelbaar Onderwijs. De academische docent, die die doordringing wil bevorderen, kan dit niet beter doen, dan door zich de handhaving van het wetenschappelijk peil van de docenten aan die onderwijsinstellingen ter harte te nemen. E. J. Dijksterhuis.

Conductibilité Electrique des Métaux et problèmes connexes. Rapports et Discussions du quatrième conseil de Physique tenu .... à Bruxelles du 24 au 29 Avril 1924 sous les auspices de l' Institut international de Physique Solvay. Paris. Gauthier-Villars. 1927.

Dit werk bevat de verslagen en discussies, die in 1924 door den Conseil de Physique van het Instituut Solvay te Brussel gehouden zijn naar aanleiding van de geleiding van electriciteit in metalen en verwante problemen. Het is een weemoedige taak, het boek thans, onder den onmiddellijken indruk van het overlijden van Lorentz, aan te kondigen, omdat het een beeld oproept uit den tijd, waarin hij nog zijn schitterende geestesgaven in dienst der wetenschap stellen kon. Men ziet hem hier als voorzitter de beraadslagingen openen met een rede over de toepassing van de electronentheorie op de eigenschappen der metalen en er is geen discussie, waarbij niet zijn stem klinkt met dien eenvoud, die hem op zijn hooge plaats in het geestelijk leven der wereld nooit heeft verlaten. Dat hij thans is heengegaan, wordt in deze dagen door talloozen ook buiten den kring van hen, die de Physica beoefenen of in haar belangstellen gevoeld als een leed, dat alleen verzacht wordt door den sterken troost, dat zijn werk zal blijven voortbestaan en dat nog eeuwen lang, ook wanneer wellicht de huidige denkbeelden over de natuur reeds lang weer zullen zijn gewijzigd, zijn naam steeds met den eerbied zal worden genoemd, die aan de groote baanbrekers op wetenschappelijk gebied verschuldigd is.

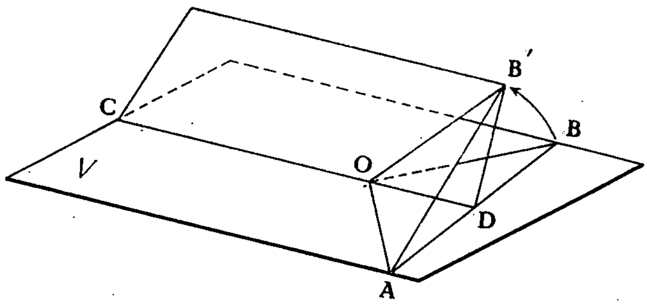
De bijdrage van Lorentz is niet de eenige, die in dit werk eervol getuigt van het hooge peil van de Nederlandsche beoefening der Physica; het bevat tevens een verhandeling van Kamerlingh Onnes, wiens overlijden in een necrologie herdacht wordt, over den suprageleidenden toestand. Wij vermelden verder verslagen van Bridgman en Richardson, Joffé en Hale over geleidingsvermogen van metalen en kristallen, van Rosenhain over de interne structuur van alliages en van Broniewsky over electrischen weerstand en uitzetting van metalen. E. J. Dijksterhuis.

DE DRIEVLAKSHOEK.

Onlangs deelde ik in dit tijdschrift een nieuwe methode mede om de eigenschappen van den drievlakshoek te behandelen. Ik voegde er een tweede bewijs bij, dat echter, gelijk mij nader is gebleken, minder juist is; Dr. J. G. van de Putte, die er een stelling van maakte in zijn onlangs verschenen proefschrift, was zoo vriendelijk mij dit aan het verstand te brengen.

Ziehier echter een nieuw bewijs voor de eigenschap $a + b + c < 360°$, waarvan men, naar ik meen, bij de theorie van den drievlakshoek moet uitgaan.

De eigenschap hoeft slechts bewezen te worden voor het geval,



dat de drievlakshoek minstens twee stompe zijden heeft. Zulk een drievlakshoek ontstaat, als men van bovenstaande vlakke figuur (OA, OB, OC in vlak V), $\angle$ COB opklapt, waarbij OC als scharnier dienst doet; OB wordt dan OB^1. Nu ontstaat de drievlakshoek $O—AB^1C$; beschouw nu de driehoeken AOB en AOB^1; $AB = AD + DB = AD + DB^1 > AB^1$; verder is $OB = OB^1$, $OA = OA$; dus is $\angle AOB > AOB^1$;

$$
\begin{array}{lllll}
\text{nu is} & \angle AOB + \angle BOC & + \angle COA = 360° \\
& \angle AOB^1 & < \angle AOB \\
\hline
+ & \angle AOB^1 + \angle B^1OC + \angle COA < 360°.
\end{array}
$$

S. W. F. MARGADANT.

„EENWAARDIG OF MEERWAARDIG".

In n°. 3, 4e jg. van Euclides bevat het Naschrift van Prof. Schuh over bovengenoemd onderwerp den volgenden zin: „Is dit het stelsel der complexe getallen, dan is m.i. de meest voor de hand liggende opvatting, dat de worteluitdrukkingen, die de onbekende bevatten, meerwaardig zijn . . ."

Deze opvatting deel ik niet. Ik bedoel dit: Men meent vaak, dat het wel gemakkelijk is een afspraak te maken omtrent $\sqrt{a}$ en $\sqrt{x}$ in het stelsel der reëele getallen, maar dat een afspraak tot meer willekeur aanleiding zou geven, als men het stelsel der complexe getallen kiest.

Bij mijn onderwijs ga ik als volgt te werk. Bij het *begin* van de behandeling der complexe getallen zeg ik: laten we *voorloopig* onder $\sqrt{8-15i}$ twee waarden verstaan, maar, als we dan het theorema van de Moivre en de meetkundige voorstelling van complexe getallen behandeld hebben, redeneer ik aldus: de twee 2e wortels uit het getal 1 vinden we door het argument d.i. hier 0° te halveeren, men vindt dan $z_1 = 1$, terwijl — overeenkomstig het behandelde, waarbij we de argumenten positief kozen van 0° af — de andere wortel gevonden wordt door $\frac{360°}{2} = 180°$ bij $\frac{1}{2} \times 0°$ *op te tellen,* zoodat men vindt $z_2 = -1$. Nu komt de afspraak omtrent $\sqrt{1}$, die we vroeger maakten, daarop neer, dat we voor $\sqrt{1}$ alleen $z_1 = 1$ namen, d. w. z. den wortel met het kleinste argument. Welnu, laten we thans ook voor $\sqrt{8-15i}$ als eenige waarde die kiezen, welke het *kleinste pos. argument* heeft.

Het kiezen van een positieve waarde voor $\sqrt{5}$ ($\sqrt{x}$) geeft aan „positief" een zekere voorkeur. Consequent zijn we dan, als we in het stelsel der complexe getallen ook aan „positief" bij 't argument een zekere voorkeur geven.

Minder voel ik er voor, indien men — wat sommige leerboeken doen — voor $\sqrt{8-15i}$ de waarde kiest, waarvan de *reëele* term positief is. Want, als men eenmaal de imaginaire getallen invoert, moet men ze in zekeren zin evenveel „recht" toekennen als de reëele getallen. Dat, zooals ik het gewoon ben te doen, de imaginaire term in $\sqrt{a+bi}$ dan steeds positief wordt, is zonder „opzet".

Verder voel ik er ook weinig voor om aan $\sqrt{a}$ en $\sqrt{x}$ ($\sqrt{z}$) ongelijke behandeling toe te kennen. Indien in een in vergelijking gebracht vraagstuk $\sqrt{x}$ twee waarden toelaat, is er toch ook niets tegen om al a priori $\pm\sqrt{x}$ te schrijven. Lastiger wordt natuurlijk de kwestie, als men in het stelsel der complexe getallen met hoogere wortels te doen krijgt. Maar te dien opzichte zou men een schrijfwijze kunnen aannemen, b.v. voor den wortel met het kleinste (pos.) argument zou men gewoon $\sqrt[n]{\ }$ kunnen schrijven, voor de verzameling van alle wortels $\underline{\sqrt[n]{\ }}$ en voor een wortel met een bepaald rangnummer (in volgorde van de opklimmende grootten der argumenten) $_k\sqrt[n]{\ }$. Doch de lagere wiskunde zal aan dit laatste wel weinig behoefte hebben. Toch deel ik de meening van prof. Wolff: ook in de lagere wiskunde werke men zoo mogelijk met holomorphe (analytische) functies.

Dit niet te doen verwekt bij mij een gevoel van onbehagelijkheid. Trouwens staan de wortels te dien opzichte in de lagere wiskunde niet alleen. Men denke maar aan de cyclometrische vormen en functies.

D. P. A. V.

Naschrift. Merkwaardig is, dat in de „Vorschläge zur Vereinheitlichung der Mathematischen Bezeichnungen im Schulunterricht, herausgegeben vom D. A. M. N. U. (1913)" geen *afdoende* oplossing van de bovenstaande kwestie wordt voorgesteld. Ik lees daar:

$\sqrt[n]{a}$ n te Wurzel aus a. Bemerkung 5. $\sqrt[n]{a}$ bedeutet, wenn a reell und positiv is, die positive reelle Zahl, deren n te Potenz a ist. Wenn a reell und negativ, der Wurzelexponent n ungerade ist, so bedeutet $\sqrt[n]{a}$ die jenige reelle Zahl, deren n te Potenz a ist. Erläuterung. Die durch die Bemerkung 5 festgelegte Eindeutigkeit des Wurzelsymbols scheint allein die Möglichkeit zu bieten, Ungenauigkeiten im Schulunterricht zu vermeiden. Beachtenswert ist also, dass die Gleichungen $a^3 = 1$ und $a = \sqrt[3]{1}$, ebenso wie $a^2 = 1$ und $a = \sqrt{1}$ danach nichtidentisch sind. Die ersten Gleichungen sind jeweilig mehrdeutig, die anderen eindeutig. Die Verwirrung is besonders Verhängnisvoll bei der Einführung der Logarithmen, wenn man $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ setzt und dann $a^{\frac{1}{n}} = b$ in $\frac{1}{n} = {}^{a}\log b$ umsetzt, ohne vorher die Eindeutigkeit von $\sqrt[n]{a}$ ausgesprochen zu haben.

Dit is alles!

DE WAARDE VAN HET WISKUNDIG REDENEEREN

(voordracht gehouden 28 Dec. 1927 op de algemeene vergadering der Ver. van Leeraren in de Wiskunde, de Mechanica en de Kosmographie aan H. B. Scholen met 5-j. cursus B, Lycea en Meisjes H. B. Scholen met 5-/6-j. cursus),

door Dr. FRED. SCHUH.

Bij het middelbaar onderwijs in wiskunde kan men op tweeërlei dingen het oog gericht hebben, nl. op het aanbrengen van nuttige kennis en van werkmethoden, geschikt om in verschillende wetenschappen, in het bijzonder de natuurwetenschappen, te worden toegepast, en op het aankweeken van een logischen redeneertrant, waardoor systematisch en doelbewust van uit het gegevene op het gevraagde wordt aangestuurd. Beide zijn voor de ontwikkeling en de vorming van het verstand van groot nut en daar men dezelfde redeneerwijze in allerlei onderdeelen van de wiskunde terugvindt, is het zeer goed mogelijk de beide genoemde voordeelen te vereenigen, dus zoowel de te behandelen onderwerpen zoo te kiezen, dat zooveel mogelijk met de toepassing op natuurwetenschappen wordt rekening gehouden, als door het leveren van een welverzorgd betoog en het geven van scherp geformuleerde definities het logisch redeneeren bij te brengen.

De vraag naar de wijze, waarop het wiskunde-onderwijs moet zijn ingericht, valt hiermede in twee vragen uiteen: Wat moet behandeld worden? en: Hoe moet het behandeld worden? De meeningen loopen hieromtrent nogal uiteen, vooral wat betreft de laatste vraag, waarop ik het eerst zal ingaan; daarbij zal dan van zelf de gelegenheid zich aanbieden enkele punten te bespreken, die met de eerste vraag, die betreffende het „wat", in verband bestaan.

Het wil mij toeschijnen, dat bij het antwoord op de vraag, hoe de wiskunde behandeld moet worden, d. w. z. met welke mate van strengheid, vooral de doorslag geeft, dat het bij het wiskunde-onderwijs niet uitsluitend, en zelfs niet in de eerste plaats, te doen is om het aanleeren van nuttige rekenmethoden, maar vooral ook om oefening van het verstand en verrijpen van het oordeel.

Ik wensch dit zoo opgevat te zien, dat men geen oefeningen moet laten doen, die uitsluitend zoogenaamde training van het verstand beoogen, maar overigens ten aanzien van de te behandelen stof waardeloos zijn. Dit lijkt mij tijd verspillen, daar er een menigte belangrijke onderwerpen wacht, die minstens even goed en door de belangstelling, die ze inboezemen, allicht meer bijdragen om hetzelfde doel, het logisch leeren denken, te bereiken; ja zelfs zijn er tal van onderwerpen, eveneens zeer als oefenmateriaal voor het denken geschikt, die men zoo gaarne om hun zelfs wil zou bespreken, maar waarbij de bespreking wegens tijdsgebrek achterwege moet blijven.

Van de onderwerpen, die ik, als zijnde vrijwel waardeloos voor het onderwijs, zou wenschen weggelaten te zien, noem ik het ontbinden op het oog van $ax^2 + bx + c$, waarin a, b en c eenvoudige getallen zijn, vóórdat de kwadratische functie op zoodanige wijze behandeld is, dat de ontbinding in ieder voorkomend geval kan worden uitgevoerd. Verder noem ik het zoogenaamd rekenkundig oplossen van vraagstukken, die sneller en gemakkelijker door het invoeren van een of meer onbekenden worden opgelost; hierbij zou dan juist het voordeel van de rekenkundige methode daarin bestaan, dat de grootere moeilijkheid meer oefening meebrengt. Algemeener kan ik wijzen op het oplossen van vraagstukken, waarbij een bepaalde methode is voorgeschreven, of liever, waarbij een andere bepaalde methode verboden is, zooals het oplossen van vraagstukken over evenredigheden zonder de hoofdeigenschap toe te passen.

Dergelijke wiskunde met hindernissen lijkt mij af te keuren, daar toch het doel der wiskunde geacht kan te zijn, zijn doel zoo snel mogelijk, het komt er niet op aan met welke hulpmiddelen (mits deugdelijke), te bereiken. Daarbij komt nog, dat een vraagstuk met hindernissen reeds daarom een onding is, omdat het begrip „een bepaalde stelling niet toepassen" niet scherp omlijnd is en ook niet scherp te omlijnen is, doordat men niet weet wat men toe mag passen van de overwegingen, die tot de verboden stelling gevoerd hebben; men zal bij een dergelijk verbod steeds een zoodanig ingekleede oplossing kunnen geven, dat niet te zeggen is of de genoemde eigenschap nu eigenlijk is toegepast of niet.

Oefeningen, die ik eveneens voor tijdverknoeien houd, zijn die, welke betrekking hebben op gebroken wortelexponenten, of gebroken decimalen, schrijfwijzen, waarvan de beteekenis eerst nog gedefinieerd moet worden, zonder dat die definities eenig nut afwerpen. Immers vereenvoudiging (wat toch het doel van iedere notatie is) geven zij niet, maar druischen daarentegen lijnrecht in tegen de bedoeling, die aan het werken met gebroken exponenten of het schrijven van een getal in een talstelsel voorzit; dit maakt dan ook, dat men dergelijke schrijfwijzen in de hoogere deelen der wiskunde niet aantreft. Iets anders vind ik het, zoo men, binnen de algemeen gebruikelijke schrijfwijze, gecompliceerde vormen laat herleiden, ook al zijn die omvangrijker dan men ze overigens ontmoet. M.i. gaat de grief tegen dit soort opgaven, dat nl. zulke uitdrukkingen niet voorkomen, niet op en zijn ze niet door hun gecompliceerd karakter alleen reeds veroordeeld. Indien men niet overdrijft, kunnen zoodanige vormen zeer goed als kriterium omtrent begrijpen dienst doen. Bij een leerling toch, die met de herleiding van een grooten, maar overigens normaal samengestelden vorm geen weg weet, hapert er iets aan het begrip en het vraagstuk kan dienen om de begripsfout aan het licht te brengen.

Wat de mate van strengheid bij de behandeling aangaat, wil het mij voorkomen, dat men goed doet daaraan geen geringe eischen te stellen en op dit punt naar het hoogst bereikbare te streven, zonder zich door aanvankelijk weinig succes te laten ontmoedigen. Het lijkt mij gewenscht met het oefenen in streng redeneeren reeds vroeg, dus in de eerste klasse, te beginnen. Het spreekt van zelf, dat men hierbij niet tot het uiterste moet gaan, daar het onderwijs alle nut verliest, zoodra men over de hoofden zijner leerlingen heen praat. Met succes bekroonde pogingen kosten echter veel tijd, maar het komt mij voor, dat die tijd niet verloren is, maar later teruggevonden wordt.

Hetzelfde geldt voor de m.i. zeer nuttige oefeningen in het herleiden uit het hoofd om daardoor de leerlingen er toe te brengen de verschillende omzettingen in niet al te kleine stapjes te volbrengen; te kleine stapjes bij herleidingen, zonder doelmatig rangschikken, doen het overzicht verliezen, zijn niet bevorderlijk aan het begrip en dwingen tot te vaak overschrijven, allicht gepaard gaande met verschrijven, dus met het maken van fouten. Ook hier bereikt men zijn doel slechts door voortdurend hameren op hetzelfde, maar den besteden tijd vindt men terug, doordat later alles vlotter kan verloopen.

Een eerste vereischte om op doeltreffende wijze strengheid te kunnen betrachten in een mate, die het bevattingsvermogen der leerlingen niet te boven gaat, is dat de leeraar aan zich zelf nog vele hoogere eischen stelt dan die, waarmede hij bij zijn onderwijs rekening kan houden. Bij het kiezen van de mate van strengheid moet de docent welbewust een keus doen; de strengheid moet niet worden beperkt door de geringe strengheid, waaraan de docent zelf gewoon is geraakt. Zegt hij, wat nu en dan onvermijdelijk is, dingen, die niet door den beugel kunnen, dan moet dat niet zijn uit onwetendheid, maar op grond van degelijke paedagogische en didactische overwegingen. Dit brengt mede, dat de wiskunde-docent zeer ver boven zijn stof dient te staan, niet alleen wat strengheid van behandeling betreft, maar ook wat de uitgestrektheid van het gebied aangaat, daar toch de docent moet kunnen beoordeelen, wat met het oog op de toepassingen voor het onderwijs van belang is en wat niet. Het is daarom zeer gewenscht, dat de leeraar in wiskunde ook van de aanverwante vakken mechanica en natuurkunde eenigermate op de hoogte is, al lijkt het mij een onvervulbare eisch toe, dat het onderwijs in wiskunde, mechanica en natuurkunde in een hand moet zijn om daardoor die vakken op de meest gewenschte wijze in elkaar te doen grijpen. Het wil mij voorkomen, dat aan zulk een vereeniging aan den anderen kant nog grootere nadeelen verbonden zijn, die maken dat òf het onderwijs in wiskunde òf dat in natuurkunde in het gedrang komt; personen toch, die in voldoende mate zoowel boven de wiskunde als boven de natuurkunde van het H. B. S.-onderwijs staan, die in voldoende mate met de nieuwere stroomingen in die wetenschappen kunnen meeleven om beide met vrucht te kunnen doceeren, zonder te behoeven te vervallen in napraten van hetgeen in de schoolboeken staat, zal men weinig aantreffen.

Wel wenschelijk daarentegen acht ik het, dat het geheele wiskunde-onderwijs van een klasse in één hand is en dat de leeraar met de klasse meegaat. Eerst dan kan op zoodanige oeconomische wijze met den tijd worden omgesprongen, dat de noodige hoeveelheid stof in goed onderling verband kan worden verwerkt. Wil men, wat toch wel noodzakelijk geacht kan worden, het functiebegrip en de beginselen der differentiaal- en integraalrekening inlijven bij de H. B. S.-wiskunde, dan moet gewoekerd worden met de uren en moet niets worden nagelaten, dat tot tijdbesparing kan voeren. Daarbij komt nog, dat wiskunde-onderwijs in één hand beter gelegenheid biedt de toepassingen der differentiaal- en integraalrekening op de meetkunde, b.v. op inhoudsberekeningen ter vervanging van de vroegere, tot hun recht te doen komen.

Uit het voorgaade zal U reeds gebleken zijn, dat ik mij geheel schaar aan de zijde van de commissie BETH, die haar taak vervuld heeft op een wijze, die alle lof verdient en waaruit een open oog voor de groote waarde van het wiskunde-onderwijs en inzicht in de wijze, waarop dit te verbeteren valt, blijkt. Te meer is het streven dier commissie te waardeeren, waar ze getoond heeft niet stijf tot in alle onderdeelen aan het eerst ontwikkelde programma te willen vasthouden, maar de noodige soepelheid te bezitten om, zonder haar algemeene beginselen prijs te geven, die wijzigingen aan te brengen, die in de leeraarswereld gewenscht geoordeeld worden. M.i. heeft de commissie die wijzigingen op een juiste en oordeelkundige wijze aangebracht en is het oorspronkelijke programma daardoor in niet geringe mate verbeterd.

Ik bedoel hier vooral het laten wegvallen van de onderwerpen: continuïteit, theorema van ROLLE en middelwaardestelling en het niet meer bij name noemen van verschillende onderwerpen uit de integraalrekening, hetgeen daarom nog niet zeggen wil, dat het de bedoeling is die onderwerpen onbesproken te laten. Vooral het opnemen van het theorema van ROLLE en de middelwaardestelling leek mij in het oorspronkelijke programma te ver te gaan, daar ik aan het vermelden van die onderwerpen geen andere beteekenis kon hechten dan de bedoeling de theorie der reeksontwikkeling van functies op hechten grondslag te baseeren. Mij dunkt, dat de beschikbare tijd daarvoor niet toereikend is.

Slechts één onderwerp zag ik noode uit het ontwerp geschrapt, de binomiaalformule (binomium van NEWTON), en wel om verschillende redenen. Talrijk toch zijn de toepassingen, die van deze formule te maken zijn, gezwegen nog van de mooie gelegenheid, die zij biedt, eens een zeer fraai voorbeeld te geven van het gebruik van de niet te onderschatten bewijsmehtode der volledige inductie. De bedoelde toepassing der volledige inductie is vooral fraai, als men de leerlingen geoefend heeft in het gebruik van het teeken Σ en hen geleerd heeft omzettingen met dat Σ-teeken te verrichten, zonder dat ze noodig hebben tot de hoogst gebrekkige stippelnotatie $a_1 + a_2 + \ldots . + a_n$ terug te gaan. Het leeren werken met het Σ-teeken acht ik voor het elementaire onderwijs van zeer groot belang. Maar al te vaak kan men bij verder gevorderden het merkwaardige verschijnsel waarnemen, dat iemand met het integraalteeken behoorlijk weet om te springen, maar bij de overeenkomstige omzettingen betreffende het Σ-teeken verlegen staat. Ik kan dit niet anders toeschrijven dan aan den grooten invloed, die bij ieder onderwerp de wijze van eerste kennismaking heeft. De vaardigheid in het werken met het Σ-teeken ontbreekt, doordat niet van begin af aan, bij het eerste optreden van een som van n termen, met dit teeken gewerkt is en men zich altijd met het gebrekkige surrogaat der stippelnotatie heeft trachten te redden, wat vaak gaat, maar vaak ook niet. Het goed verrtouwd zijn met de Σ-notatie, die alle beschouwingen onvergelijkelijk veel scherper maakt, vergemakkelijkt ten zeerste het aanleeren der integraalrekening en het werken met bepaalde integralen.

Ter toelichting van mijn bezwaren tegen de stippelnotatie begin ik met de volgende paradox, die alleen uit deze ondoelmatige schrijfwijze voortspruit. Uit $(a+b)^n = a^n + \ldots + b^n$ volgt, als a en b positief zijn, $(a+b)^n \geqq a^n + b^n$, hetgeen voor $n = 0$ overgaat in $1 \geqq 1 + 1$, dus in $1 \geqq 2$. Dit is natuurlijk hiervan het gevolg, dat de stippelnotatie in het geheel niet op het geval $n = 0$ berekend is; de Σ-notatie is dit echter wel en in deze betere notatie laat zich de grap, om het zoo maar eens te noemen, dan ook niet vertellen.

Om de binomiaalformule in den mooisten vorm te kunnen neerschrijven, moet men de definitie van $j!$ bespreken, benevens de voor de begripsvorming zeer belangrijke beteekenis van $j!$ voor $j = 0$. Overeenkomstig de formule $j! = \frac{(j+1)!}{j+1}$, die men door wenscht te laten gaan voor $j = 0$, stelt men bij definitie $0! = 1$. Dit is geheel in overeenstemming daarmede, dat een product van 0 factoren (zooals $j!$ wordt voor $j = 0$) steeds als 1 is op te vatten, dus als de modulus der vermenigvuldiging, dus als het getal, dat voor iedere waarde van a aan $ax = a$ voldoet; dit is analoog daarmede, dat een som van 0 termen gelijk is aan den modulus 0 der optelling, het getal, dat voor iedere waarde van a aan $a + x = a$ voldoet.

Om dit toe te lichten, kan men zich het geval stellen, dat een persoon A een ander B optellingen laat verrichten door getallen te noemen en van B te verlangen, dat hij telkens de laatst verkregen uitkomst vermeerdert met het daarna door hem (A) op te noemen getal; vóórdat A nog iets genoemd heeft, staat B natuurlijk op 0. Wordt deze proef uitgevoerd met vermenigvuldigen, dan staat B, als nog geen enkele factor genoemd is, op 1. Bij het biljarten staan beide telwerken op 0, als het spel nog moet beginnen; was de regel zoo, dat het reeds behaalde aantal punten bij iedere carambole met een bepaald getal werd vermenigvuldigd, dan zouden beide telwerken bij den aanvang van het spel op 1 staan. Ik geloof, dat door dergelijke voorbeelden het zoo belangrijke begrip van een product van 0 factoren volledig duidelijk gemaakt wordt en dat daardoor de leerling niet meer kan vergeten, dat $0! = 1$ is en dat ook $a^0 = 1$ is, wat eigenlijk geheel dezelfde zaak is.

Met behulp van de zoo ingevoerde notaties kan nu de binomiaalformule aldus geschreven worden:

$$(a + b)^n = \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!\,(n-j)!}\, a^j b^{n-j},$$

hetgeen voor $n = 0$ geen contradictie geeft, maar naar behooren $(a + b)^0 = \dfrac{0!}{0!\,0!}\, a^0 b^0 = 1$. Hiermede is het uitgangspunt aanwezig. De stap van n op $n + 1$ verloopt verder als volgt:

$$(a + b)^{n+1} = (a + b)\ (a + b)^n = (a + b) \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!\,(n-j)!}\, a^j b^{n-j} =$$

$$= a \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!\,(n-j)!}\, a^j b^{n-j} + b \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!\,(n-j)!}\, a^j b^{n-j} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!\,(n-j)!}\, a^{j+1} b^{n-j} + \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!\,(n-j)!}\, a^j b^{n-j+1}.$$

Door in de eerste som van het laatste lid $j + 1 = \lambda$ te stellen en daarna λ weer door j te vervangen, vindt men:

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{\lambda=1}^{n+1} \frac{n!}{(\lambda-1)!\,(n-\lambda+1)!}\, a^{\lambda} b^{n-\lambda+1} + \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!\,(n-j)!} a^{j} b^{n-j+1} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n+1} \frac{n!\,j}{j!\,(n+1-j)!}\, a^{j} b^{n+1-j} + \sum_{j=0}^{n} \frac{n!\,(n+1-j)}{j!\,(n+1-j)!}\, a^{j} b^{n+1-j} =$$

Door in de eerste som van het laatste lid het onderschrift van het Σ-teeken in $j = 0$ te veranderen, voegt men een term 0 toe, terwijl men bij de tweede som een term 0 toevoegt, als men het bovenschrift van het Σ-teeken door $n + 1$ vervangt. Door deze veranderingen worden onder- en bovenschrift bij de eerste som dezelfde als bij de tweede en kan men beide sommen tot één som samentrekken, waardoor men vindt:

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{j=0}^{n+1} \frac{n!\,j}{j!\,(n+1-j)!}\, a^{j} b^{n+1-j} + \sum_{j=0}^{n+1} \frac{n!\,(n+1-j)}{j!\,(n+1-j)!}\, a^{j} b^{n+1-j} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n+1} \left\{ \frac{n!\,j}{j!\,(n+1-j)!} + \frac{n!\,(n+1-j)}{j!\,(n+1-j)!} \right\} a^{j} b^{n+1-j} =$$

$$\sum_{j=0}^{n+1} \frac{n!\,(n+1)}{j!\,(n+1-j)!}\, a^{j} b^{n+1-j}.$$

Dit geeft de formule:

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{j=0}^{n+1} \frac{(n+1)!}{j!\,(n+1-j)!}\, a^{j} b^{n+1-j},$$

die uit de oorspronkelijke ontstaat door n door $n + 1$ te vervangen.

Het is waar, dat dit voor de leerlingen niet gemakkelijk is, maar toch geloof ik, dat de herleiding met wat inspanning en na voldoende voorbereiding wel te volgen is en dat de leerlingen dan veel geleerd hebben.

Ik wil nog enkele dingen opnoemen, die mij voorkomen bij uitstek geschikt te zijn voor het bijbrengen van juiste begrippen. In de eerste plaats reken ik hiertoe wel het goed inprenten van het verbod door 0 te deelen.

Ik las eens ergens: God had den menschen het rekenkundige paradijs gegeven en hun toegestaan te rekenen met welke getallen en hoe ze maar wilden. Slechts één verbod gaf Hij hun: „door nul zult gij niet deelen". Een tijdlang gehoorzaamden de menschen, maar toen kwam de verzoeking. Zij deelden toch door nul. En zie, zij kregen oneindig. En van dien tijd af konden ze alles bewijzen het ware en het onware. En uit dezen rekenkundigen zondeval komt alle ellende in de wiskunde voort.

Men kan er bij het onderwijs niet genoeg op wijzen, dat deelen door 0 onder alle omstandigheden verboden moet zijn. Wordt er dus door een zekere uitdrukking, waaraan men niet zien kan of ze gelijk aan 0 is of niet, gedeeld, dan dient men onderscheid te gaan maken tusschen twee gevallen: die uitdrukking is gelijk aan 0 of ze is niet gelijk aan 0. Ook overigens is het ten zeerste gewenscht zich aan te wennen steeds alle gevallen te beschouwen, die zich bij de oplossing van een probleem kunnen voordoen, dus aan de oplossing van het probleem een discussie te verbinden, welke die oplossing eerst in alle opzichten af doet zijn. Wenscht men in een bepaald geval zulk een uitputtende oplossing van het probleem niet te geven, ten einde niet te veel in bijzonderheden af te dalen, dan dient men tenminste scherp omlijnd aan te geven tot welk geval men zich gemakshalve bij de oplossing beperkt heeft.

Als voorbeeld van een vraagstuk, waarbij het verbod door 0 te deelen duidelijk uitkomt, noem ik het herleiden van $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ tot den vorm $\sqrt{x}+\sqrt{y}$. Hierin zijn a en b gegeven meetbare getallen, terwijl x en y te bepalen meetbare getallen zijn; ondersteld wordt, dat b positief en geen vierkant van een meetbaar getal is, dus dat $\sqrt{b}$ onmeetbaar is, en verder, dat $a+\sqrt{b}$ positief is. Men krijgt nu:

$$a-x-y+\sqrt{b}=2\sqrt{xy},$$
$$2(a-x-y)\sqrt{b}=4xy-(a-x-y)^2-b.$$

Dit voert tot de onderscheiding van twee gevallen: $a-x-y\neq 0$ of $a-x-y=0$. In het eerste geval kan men beide leden door $2(a-x-y)$ deelen, waardoor men krijgt:

$$\sqrt{b}=\frac{4xy-(a-x-y)^2-b}{2(a-x-y)},$$

in strijd met de onmeetbaarheid van $\sqrt{b}$. Hieruit besluit men tot $a-x-y=0$ en dan verder tot $b=4xy$, enz.

Ik geloof, dat zeer veel narigheid vermeden wordt, zoo men den leerlingen telkens wanneer dit voorkomt, en dit is vaker dan men zou denken, er op wijst, dat deelen door 0 niet geoorloofd is. Een ieder kent de aardigheden, paradoxen zoo men wil, die berusten op het deelen door 0 in een vorm, waarbij men niet zoo direct ziet, dat door 0 gedeeld is. Iemand, die zich aangewend heeft niet zoo maar ergens door te deelen, zonder tot onderscheiding van twee gevallen over te gaan, waardeert de aardigheid niet, maar trekt direct de conclusie, dat de uitdrukking, waardoor zoo even gedeeld is, de waarde 0 heeft.

Ik wil niet van het deelen door 0 afstappen zonder er op te wijzen, dat het deelen door 0 niet door het invoeren van het symbool ∞ tot een mogelijke bewerking gemaakt kan worden, ten minste zoo men wenscht, dat met het nieuwe symbool op de gewone wijze, dus volgens de bekende grondeigenschappen, mag worden gerekend. Immers uit die grondeigenschappen volgt gemakkelijk, dat $0 \times a = 0$ is voor ieder getal a. Voert men nu toch een getal in, dat aan de vergelijking $0 \times x = 1$ voldoet, en noemt men dit getal ∞, dan is reeds direct de ongerijmdheid $0 = 1$ aanwezig. Ik licht dit nog even aan de volgende rekening nader toe: is $0 \times \infty = 1$, dan is:

$$1 = 0 \times \infty = 0 \times \infty + 0 = 0 \times \infty + 0 \times 1 = 0 \times (\infty + 1),$$

dus $\infty + 1 = \frac{1}{0} = \infty$, dus $1 = 0$. Ziet men van het rekenen met het symbool ∞ af, dan komt de tegenstrijdigheid niet, maar dan geeft het invoeren van het symbool ∞ ook geen enkel voordeel en heeft dit invoeren geen zin. Iets anders is het natuurlijk, wanneer het symbool ∞ gebezigd wordt om een limiet aan te wijzen.

Ik heb hier wat langer bij het deelen door 0 stil gestaan, omdat ik steeds bemerkt heb hoezeer het zondigen daartegen (vooral daarin bestaande, dat men niet tot onderscheiding van verschillende gevallen overgaat, zoodra een uitdrukking met letters in den noemer verschijnt) zich wreekt. Ik kan niet nalaten in dit verband nog te wijzen op een passage, die mij trof in de toelichting van het ontwerp-leerplan van de Haagsche wiskunde-leeraren. Daarin lees ik (zie Euclides, 4e Jaarg., blz. 95): „Invoering van nieuwe getallen om de deeling van elk paar getallen mogelijk te maken." Zoo belangrijk komt mij de zaak voor, dat mij zelfs in een korte aanduiding der te behandelen onderwerpen, zooals hier gegeven wordt, de toevoeging „mits niet door 0" niet overbodig zou geleken hebben.

Een ander voor het onderwijs uiterst belangrijk begrip is dat van gelijkwaardigheid van vergelijkingen en van stelsels vergelijkingen, het heen en terug kunnen gaan, dat ook bij de verwante quaestie van analyse en bewijs zulk een belangrijke rol speelt.

Het begrip gelijkwaardigheid is natuurlijk niet beperkt tot het gebied der lineaire vergelijkingen, maar kan eveneens dienst doen bij stelsels van goniometrische vergelijkingen met meerdere onbekenden en op hooger niveau ook bij een simultaan stelsel van differentiaalvergelijkingen. Het treedt ook op bij het elimineeren uit vergelijkingen van hoogeren graad, bij de afleiding van den regel van CRAMER, die de oplossing van een stelsel van n lineaire vergelijkingen met n onbekenden in determinantvorm levert, bij het behandelen van de mogelijkheid en ondubbelzinnigheid der aftrekking en deeling na iedere uitbreiding van het getalbegrip en bij verschillende andere gelegenheden.

Ter toelichting wil ik mij beperken tot de voor het elementaire onderwijs voornaamste toepassing, die op een stelsel lineaire vergelijkingen met meerdere onbekenden. Door middel van de methode der gelijkwaardige stelsels kan zulk een stelsel lineaire vergelijkingen in ieder getallenvoorbeeld op de meest overzichtelijke en afdoende wijze behandeld worden, even afdoende als met determinanten en met veel minder gereken. De methode bestaat daarin, dat getracht wordt het stelsel van n vergelijkingen met n onbekenden terug te brengen tot een daarmede gelijkwaardig bijzonder stelsel, dat is tot een stelsel van den vorm

$$\left.\begin{array}{l} L_1(\boldsymbol{x_1})=0, \quad L_2(x_1, \boldsymbol{x_2})=0, \quad L_3(x_1, x_2, \boldsymbol{x_3})=0, \\ L_4(x_1, x_2, x_3, \boldsymbol{x_4})=0, \ldots, L_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \boldsymbol{x_n})=0. \end{array}\right\} \quad (1)$$

Hierin is $L_j(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, \boldsymbol{x_j})$ een lineaire functie van $x_1, x_2, \ldots, x_j$, waarbij de coëfficiënt van x_j niet gelijk is aan 0, dus een functie van den vorm

$$c_{j1}x_1 + c_{j2}x_2 + \ldots + c_{j,j-1}x_{j-1} + c_{jj}x_j + d_j \; (c_{jj} \neq 0).$$

Bij het bijzondere stelsel komen dus de vetgedrukte onbekenden met van 0 verschillende coëfficiënten in de vergelijkingen voor, terwijl de niet vet gedrukte onbekenden in de vergelijkingen kunnen voorkomen, maar niet behoeven voor te komen; de niet onder de functieteekens L genoemde onbekenden komen in de vergelijkingen niet voor. Uit het bijzondere stelsel kan men achtereenvolgens x_1 (uit de 1ste vergelijking), x_2 (uit de 2de vergelijking), ..., x_n (uit de $n$de vergelijking oplossen, daar de coëfficiënten der op te lossen onbekenden van 0 verschillen.

Zij het oorspronkelijke stelsel lineaire vergelijkingen:

$$f_j\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Uit een der vergelijkingen, b.v. $f_n\,(x_1, x_2, \ldots; x_n) = 0$, waarin x^n met een van 0 verschillenden coëfficiënt voorkomt, lossen we x_n op en substitueeren de voor x_n gevonden uitdrukking in de overige vergelijkingen. Men krijgt dan het lineaire stelsel:

$$g_j\,(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{3}$$
$$f_n\,(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \boldsymbol{x}_n) = 0, \tag{4}$$

waarbij de vet gedrukte letter weer aanwijst, dat x_n in de laatste vergelijking voorkomt. Het door (3) en (4) gevormde stelsel is gelijkwaardig met het oorspronkelijke stelsel (2). Immers met behulp van (4) kan men omgekeerd de vergelijkingen (3) terug transformeeren tot de vergelijkingen $f_j\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ voor $j = 1, 2, \ldots, n-1$, zoodat niet alleen iedere oplossing van (2) ook een oplossing is van het door (3) en (4) gevormde stelsel, maar ook omgekeerd. De gelijkwaardigheid van beide stelsels is het gevolg daarvan, dat de vergelijking (4), met behulp waarvan de overige vergelijkingen (2) getransformeerd zijn, ook in het nieuwe stelsel is opgenomen.

Uit een der vergelijkingen (3), b.v. $g_{n-1}\,(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = 0$, waarin x_{n-1} met een van 0 verschillenden coëfficiënt voorkomt, lossen we x_{n-1} op en substitueeren de uitkomst in de overige vergelijkingen (3). Dit voert tot het lineaire stelsel:

$$h_j\,(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n-2), \tag{5}$$
$$g_{n-1}\,(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}, \boldsymbol{x}_{n-1}) = 0, \tag{6}$$
$$f_n\,(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \boldsymbol{x}_n) = 0, \tag{7}$$

dat gelijkwaardig is met het oorspronkelijke. Zoo doorgaande krijgt men een met (2) gelijkwaardig stelsel van den vorm (1), dus een bijzonder lineair stelsel, waaruit men achtereenvolgens de onbekenden kan oplossen.

Bij de besproken herleidingen (oplossen uit een vergelijking en substitueeren in andere vergelijkingen) kunnen zich verschillende bijzonderheden voordoen. Vooreerst kan het voorkomen, dat bij substitutie in een vergelijking het eerste lid daarvan in een van 0 verschillende constante overgaat, waarbij men een vergelijking als $3 = 0$ verkrijgt. Daaraan wordt door geen enkel stel waarden der onbekenden voldaan, zoodat ook aan het oorspronkelijke lineaire stelsel (2) niet kan worden voldaan. Dit stelsel is dan strijdig en het onderzoek is met het bereiken der vergelijking $3 = 0$ afgeloopen.

Ook volgens de voorstellen Dr. BETH. c.s. wordt aanbevolen het gebruik van de tafels der gon. functies zelf. Deze beide tafels zijn de eenige, die deze volledig bevatten.

LEERAREN, die de grafieken der **goniometrische functies** laten teekenen, vinden de gegevens daarvoor in:

Dr. B. GONGGRIJP

LOG. TAFEL D.

Prijs geb. **f 2.50**

J. VERSLUYS

LOG. TAFEL H.

Prijs geb. **f 2.50**

Beide tafels voldoen tevens ten volle aan de wenschen van de Vereeniging van de Leeraren in Wis- en Natuurkunde aan Gymnasia en Lycea omtrent het vak Driehoeksmeting, wenschen, die de leeraren aan de H.B.S. ook ter harte mogen nemen.

„Aanbevolen wordt: 1° het gebruik van tafels met de directe waarden der goniometrische functies, 2° de behandeling van opgaven, waarin de trigonometrie op de stereometrie wordt toegepast."

Aan den laatsten eisch voldoet in alle opzichten de

VLAKKE DRIEHOEKSMETING

VAN

Dr. P. MOLENBROEK EN P. WIJDENES

Prijs gec. met formules f 2.—.

Het gebruik van de tafels der gon. functies breidt zich snel uit; de eenige boeken, die dit gebruik, gebaseerd op de tafels van GONGGRIJP of VERSLUYS, bevorderen, zijn het bovenstaande en

Beknopte Driehoeksmeting

DOOR

P. WIJDENES.

DERDE DRUK. Gec. met formules . . . . f 2.25.

☞ De Uitgever zendt gaarne aan leeraren bij het M. en G. Ond. een pres.-ex. van bovenstaande werken.

P. NOORDHOFF — UITGEVER — GRONINGEN

Verschenen:

Dr. P. MOLENBROEK

STEREOMETRIE

7e druk, herzien door P. Wijdenes

Prijs gebonden . . . . f 5.00

Voor Abonné's N. T. v. Wisk. Christiaan Huygens en Euclides tot 1 Juni a.s. . . . . f 4.25

De nieuwe uitwerkingen zijn reeds ter perse.

Verschenen:

Leerboek der Zonnephysica

door Prof. Dr. W. H. JULIUS

verzorgd door Dr. M. Minnaert

Prijs f 9.75 . . . . Geb. f 10.50

Voor abonné's op Chr. Huygens en Euclides tot 1 Juli a.s. f 8.50 geb.

Zoo juist verscheen:

BEKNOPTE MECHANICA

MET VRAGEN EN OPGAVEN

door Dr. J. F. DE. VRIES

Leeraar aan de Gem. Kweekschool voor onderwijzers en onderwijzeressen te Rotterdam en aan de daaraan verbonden cursus voor de acte van Hoofdonderwijzer.

Prijs f 1.75. Geb. f 2.25. Antwoorden f 0.50.

Zoo juist verscheen:

NIEUWE SCHOOL-ALGEBRA

door P. WIJDENES

DEEL III TWEEDE DRUK

Prijs gebonden . . . . f 2.25

Zoo juist verscheen:

KLEINE STEREOMETRIE

door P. WIJDENES

Prijs gebonden . . . . f 1.40

UITGAVEN VAN P. NOORDHOFF TE GRONINGEN.