

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDAC-
TIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN
J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

MET MEDEWERKING VAN

Dr. H. J. E. BETH
DEVENTER

Dr. E. J. DIJKSTERHUIS
OISTERWIJK

Dr. G. C. GERRITS
AMSTERDAM

Dr. B. P. HAALMEIJER
AMSTERDAM

Dr. D. J. E. SCHREK
UTRECHT

Dr. P. DE VAERE
BRUSSEL

Dr. D. P. A. VERRIJP
ARNHEM

4e JAARGANG 1927/28, Nr. 3



P. NOORDHOFF — GRONINGEN

Prijs per Jg. van 18 vel f 6.—. Voor intekenaars op het
Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde en Christiaan Huygens f 5.—.

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken, verschijnt in zes tweemaandelijksche afleveringen, samen 18 vel druks. Prijs per jaargang *f* 6.—. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6.—) of op „Christiaan Huygens” (*f* 10.—) zijn ingeteekend, betalen *f* 5.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341. Aangeteekende zendingen met bijvoeging: „Bijkantoor Van-Eeghenstraat”.

Het honorarium voor geplaatste artikelen bedraagt *f* 20.— per vel.

De prijs per 25 overdrukken of gedeelten van 25 overdrukken bedraagt *f* 3,50 per vel druks *in het vel gedrukt*. Gedeelten van een vel worden als een geheel vel berekend. Worden de overdrukken buiten het vel verlangd, dan wordt voor het afzonderlijk drukken bovendien *f* 6.— per vel druks in rekening gebracht.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

I N H O U D.

	Blz.
W., Eenwaardig of meerwaardig?	96
E. DE HAIRS, Het Cultuur-historisch element in het Wiskunde-onderwijs	106
Dr. D. P. A. VERRIJP, Het z.g. twijfelachtige geval	118
Boekbesprekingen	120
Ir. D. J. KRUYTBOSCH, De formule van Heron.	127
Dr. E. J. DIJKSTERHUIS, Grieksche Wiskunde	134

 De redactie heeft het genoegen in deze aflevering het portret te geven van Prof. Dr. W. H. L. JANSSEN VAN RAAY, zij hoopt de portretten van al onze hoogleeraren den intekenaars achtereenvolgens te kunnen aanbieden.

 **Wie van onze lezers leest er Czechisch?**

EENWAARDIG OF MEERWAARDIG?

Uit een brief van een leeraar: „Prof. Wolff, dien we dezen zomer als gecommitteerde bij ons eindexamen hadden, wilde niets weten van het tweewaardig rekenen van wortelvormen in irrationale vergelijkingen. Hij noemde de eenwaardigheid een „internationale conventie.” Aanleiding gaf de eenvoudige vergelijking $x + (\sqrt{x}) = 6$, waarvan Prof. Wolff 9 niet als wortel wilde aanvaarden. Ik heb volgehouden, dat het éénwaardig rekenen willekeur is, in sommige gevallen toelaatbaar.”

X.

„Wie heeft er gelijk en waarom?” „Internationale conventie?” Heeft de professor zich overtuigd, dat een tiental Duitsche schrijvers, evenveel Fransche, Engelsche, Italiaansche en een stuk of vijf Hollandsche 9 als wortel van $x + \sqrt{x} = 6$ verwerpen? Andere naties laten we er nu maar buiten. Ik kan het moeilijk aannemen; om de eenvoudige reden, dat de professor en vroeger, toen hij nog leeraar was en thans, wel wat anders te doen had en dat hij zich zeker die schoolboeken niet zal hebben aangeschaft, iets waarin ieder hem gelijk zal moeten geven. Ik kan het niet voor hem nagaan, want ik moet eerlijk bekennen, dat ik geen enkel Fransch noch Duitsch schoolboek in mijn bezit heb, noch had, noch uit een boekerij haalde; alleen heb ik een paar Engelsche en een paar Italiaansche. En wat beteekent „conventie”; is er zoo iets als een afspraak bij het Middelbaar en Voorbereidend Hooger Onderwijs? Dan spijt het mij, dat men mij daar buiten gehouden heeft; mij is daaromtrent door niemand ooit iets voorgesteld. Wat mij zelf aangaat, ik reken in de Algebraische Vraagstukken en in de Nieuwe Schoolalgebra 9 wel als wortel van $x + \sqrt{x} = 6$ mee, maar in de Algebra voor M.U.L.O. en in de Beknpte Algebra niet. Mijn eerste ik zou niet meedoen aan de conventie, mijn tweede wel. De lezer ziet hierboven, dat X. er ook een eerste en een tweede ik op nahoudt.

Na deze korte inleiding zou ik gaarne iets over de zaak zeggen, in de onderstelling, dat er nog steeds belangstelling voor bestaat. Een goede 20 jaar geleden is er een heele polemiek geweest in den

2den en 3den jaargang van het Wiskundig Tijdschrift (sinds een tiental jaren gestaakt), waaraan meededen de Heeren Dr. O. Postma, J. N. Visschers en Prof. Schuh (toen nog leeraar); ik kan die polemieken nog wel naslaan, maar doe dit opzettelijk niet; ik geef er de voorkeur aan, hier geheel mijn eigen inzichten in deze zaak weer te geven; waar ik iets aanhaal van Prof. Schuh; daar zal ik dat zeggen.

In het tweede deel van de Lagere Algebra (2e druk blz. 321 en volgende) is een hoofdstuk opgenomen: *Vergelijkingen in woorden*; opzettelijk is niet het gewone opschrift „*Ingekleede vergelijkingen*” gekozen. Voor hen, die het boek niet hebben, volgt hier de aanhaling, die ik noodig heb:

De gewone volgorde, ook in dit boek, bij het behandelen van de vergelijkingen is deze: eerst losse vergelijkingen en dan de ingekleede. Is dit de natuurlijke volgorde? Geen sprake van. In allerlei wetenschappen komt men voor vragen te staan, waarbij op een nog onbekende grootheid (grootheden) zekere bewerkingen worden toegepast, die dan een bepaald resultaat moeten geven. In zoo'n geval noemt men de gevraagde grootheid x (y , z), duidt de achtereenvolgende bewerkingen aan met de algebraïsche teekens en stelt dit dan gelijk aan eenige genoemde grootheid of aan een anderen vorm, die door bewerkingen op x verkregen is. Dan ontstaan vormen als

$$\text{I. } 10\frac{1}{2}(12x^2 + 93) = 912 - x; \quad \text{II. } \begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ x + 2y = 3r \end{cases}$$

Wat moet men nu hiermee doen? Natuurlijk x (x en y) oplossen; dan is het echter zaak vóóraf te leeren, hoe men vaardig hieruit de onbekenden vindt. Hieruit blijkt, dat de vergelijkingen „in woorden” aanleiding gaven tot voorafgaande beoefening van de vergelijkingen als bovenstaande, natuurlijk ook van hooger en graad en met meer onbekenden. In plaats van dus de vergelijkingen „in woorden” ingekleede vergelijkingen te noemen, doet men beter vergelijkingen als b.v. $3x^2 - 8x = 7$ ($x - 5$) „*uitgekleede*” te noemen. Inderdaad is de historische wording, ook voor het individu: eerst vergelijkingen, ontleend aan „de practijk” en dan oplossing van den eindvorm. Maar dit heeft methodische bezwaren; het is beslist noodig, dat eerst vaardigheid in het behandelen van den eindvorm wordt verkregen; daarom laat men dit tegenwoordig voorafgaan. Bij het eerste algebra-

onderwijs is het nuttig de les over de vergelijkingen in te leiden met eenigé „woordenvergelijkingen” en dan de kinderen te laten zien, hoe goed het is voor het vervolg, om eerst den eindvorm te leeren bewerken.

Nu is het in de algebra niet mogelijk, dat de leerling op allerlei andere gebieden wordt gevoerd: getallenleer, vlakke en ruimte-meetkunde, natuur- en werktuigkunde, scheikunde, land-meetkunde, sterrekunde, zeevaartkunde, alle ingenieursvakken, om niet te spreken van het bankvak en de levensverzekering, eenvoudig, omdat dit onmogelijk kan. In onze schoolboeken moeten wij ons blijven beperken tot algemeenheden, waar ieder kind bij kan. (Op blz. 324 verder:) Maar op een heel voorname zaak moeten we wijzen: *nl. dat de algebra in haar gegevens en antwoorden in haar algemeenheid alle denkbare uitkomsten omvat, welke worden verkregen door aan de letters verschillende waarden toe te kennen. Het is beslist noodig, dat in de wetenschap, waaraan het vraagstuk ontleend is, de onderscheidene gevallen worden aangegeven, waartoe de verschillende getallen aanleiding geven.*

Komen nu irrationale vergelijkingen voor? Of zijn het van die vergelijkingen, die enkel in „uitgekleeden” toestand bestaan? Laten we eens een enkel voorbeeld nemen.

Bereken de hoogtelijn AD van een driehoek ABC, waarvan de zijden $BC = a$, $CA = b$ en $AB = c$ gegeven zijn. Stel, dat D zich bevindt tusschen B en C; noem de hoogtelijn $AD = x$, dan is $CD = \sqrt{b^2 - x^2}$ en $BD = \sqrt{c^2 - x^2}$; we hebben dus de vergelijking $\sqrt{b^2 - x^2} + \sqrt{c^2 - x^2} = a$, waarin het $+$ -teeken als bewerkings-teeken wordt opgevat.

$$\sqrt{b^2 - x^2} + \sqrt{c^2 - x^2} = a \quad (1)$$

$$\sqrt{b^2 - x^2} = a - \sqrt{c^2 - x^2}$$

$$b^2 - x^2 = a^2 + c^2 - x^2 - 2a\sqrt{c^2 - x^2} \quad \text{2de macht}$$

$$(b^2 - a^2 - c^2)^2 = 4a^2(c^2 - x^2)$$

$$4a^2x^2 = 4a^2c^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2 \quad (2)$$

Als men deze vergelijking verder uitwerkt, dan komt er

$$x = \frac{2}{a} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Nu weten we uit de vlakke meetkunde, dat deze formule

geldt voor de drie gevallen: D tusschen B en C, D op het verlengde van BC, id. op dat van CB. Laten we eens zien, hoe het zit, als we enkel positieve wortels van irrationale vergelijkingen toelaten. Neemt men $a = 14$, $b = 15$ en $c = 13$, dan geeft de substitutie van $x = 12$ in de vergelijking (1)

$$\sqrt{81} + \sqrt{25} = 14;$$

maar neemt men $a = 4$, $b = 15$ en $c = 13$, dan vindt men ook $x = 12$; opdat nu de substitutie in de gegeven vergelijking aan beide zijden hetzelfde getal zal geven, moet men voor $\sqrt{25}$ in het eerste lid zetten -5 , immers $9-5 = 4$. Rekent men enkel niet negatieve wortels (zeg niet: eenwaardige wortels, want de negatieve worden niet genomen) dan had bij de gegevens 4, 15 en 13 de opgave moeten luiden: bereken x uit

$$\sqrt{b^2 - x^2} - \sqrt{c^2 - x^2} = a;$$

men zou dan in ieder voorkomend geval eerst keus moeten doen uit

$$\sqrt{b^2 - x^2} + \sqrt{c^2 - x^2} = a \quad (3)$$

$$\sqrt{b^2 - x^2} - \sqrt{c^2 - x^2} = a \quad (4)$$

$$-\sqrt{b^2 - x^2} + \sqrt{c^2 - x^2} = a \quad (5)$$

Is het nu niet veel eenvoudiger, dat men afspreekt vergelijking (1) te beschouwen als de vertegenwoordiger van de drie vergelijkingen (3), (4) en (5)? Dit ontslaat ons van den last om de verschillende gevallen te onderstellen; vergelijking (2) is de rationale vorm van de vergelijkingen (3), (4) en (5). **Het is m.i. gewenscht, iedere vergelijking, waarin wortelvormen voorkomen, te lezen als: herleid de vergelijking tot een rationale en beschouw deze als gelijkwaardig met de gegeven.**

We noemen dit de *ruime opvatting* en die, waarbij men slechts de positieve wortels noemt, de *enge*. We beperken ons tot tweede wortels uit lineaire vormen in x en beschouwen de irrationale vergelijking

$$\sqrt{a_1x + b_1} + \sqrt{a_2x + b_2} + \sqrt{a_3x + b_3} = 0; \quad . . . (7)$$

Stellen we de termen van het eerste lid opv. A, B en C, dan is (7) volgens onze ruime opvatting de vertegenwoordiger van de volgende vier volgens de enge opvatting:

$$A + B + C = 0$$

$$A - B + C = 0$$

$$A + B - C = 0$$

$$A - B - C = 0,$$

waarbij een dubbel teeken voor A onnoodig is; daar het tweede lid nul is, is de teekenverbinding $+ - +$ immers dezelfde als $- + -$.

Deze vier vergelijkingen hebben alle denzelfden rationalen vorm:

$$\begin{aligned} A + C &= -B \mid A + C = +B \parallel A - C = -B \mid A - C = +B \\ A^2 + 2AC + C^2 &= B^2 & A^2 - 2AC + C^2 &= B^2 \\ + 2AC &= B^2 - A^2 - C^2 & - 2AC &= B^2 - A^2 - C^2 \\ 4A^2C^2 &= (B^2 - A^2 - C^2)^2 \dots \dots \dots (8) \end{aligned}$$

Aldus laat men zien, dat (7) bij de ruime opvatting, nadat zij rationaal gemaakt is, door de tweewaardigheid der wortels, alle gevallen in zich bevat:

Nu is een ruime opvatting te verdedigen voor hen, wier onderwijs op wat hooger plan staat; voor anderen, b.v. leerlingen van M.U.L.O.-scholen, H.B.S. met 3-jarigen cursus, Handelsscholen zou ik me liever aan de enge opvatting houden; voor die scholen was het nog veel beter, de irrationale vergelijkingen weg te laten; dat zal nog wel een dagje duren! Ik durf er niet mee te beginnen, ze weg te laten; een knieval eigenlijk voor de sleur. Ook op de H.B.S. met 5-jarigen cursus en op de Gymnasia doet men goed deze vergelijkingen tot een minimum te beperken; de bewerkingen zijn eenvoudig; alleen zal men met die leerlingen de beide opvattingen kunnen bespreken; men doet ze m.i. te kort, als men het nalaat. Houdt men vast aan de enge opvatting, dan moet men dat bij de oplossing laten blijken op de volgende manier:

$$\begin{aligned} \sqrt{2x-3} + \sqrt{4x+1} &= \sqrt{6x+28} & 2^{\text{de}} \text{ macht;} \\ 6x-2 + 2\sqrt{8x^2-10x-3} &= 6x+28 & \text{na oplos-} \\ \sqrt{8x^2-10x-3} &= 15 & \text{sing sub-} \\ 8x^2-10x-228 &= 0 & \text{stitueeren.} \\ 8x &= 5 \pm \sqrt{25+1784} = 5 \pm 43 \end{aligned}$$

$$x_1 = 6; x_2 = -\frac{19}{4}.$$

Substitutie van $x_1 = 6$ in de gegeven vergelijking geeft

$\sqrt{9}$ $\sqrt{25}$ $\sqrt{64}$, welke aldus: $3 + 5 = 8$ een getallengelijkheid geeft; dus is $x_1 = 6$ een wortel.

$$x_2 = -\frac{19}{4} \text{ geeft } \sqrt{-12\frac{1}{2}} \quad \sqrt{-18} \quad \sqrt{-\frac{1}{2}} \quad \text{of} \\ 2\frac{1}{2}\sqrt{-2} \quad 3\sqrt{-2} \quad \frac{1}{2}\sqrt{-2};$$

de som der beide eerste geeft niet den laatsten wortelvorm; dus voldoet $-\frac{19}{4}$ niet. — De bijvoeging: *na oplossing substitueeren*, bij de eerste kwadratering geeft te kennen, dat de oplosser zich bewust is, dat de rationale vorm $8x^2 - 10x - 228 = 0$ vier irrationale vergelijkingen volgens de enge opvatting in zich bevat en dat dus onder de wortels van $8x^2 - 10x - 228 = 0$ heel goed wortels van andere dan de opgegeven vergelijking te voorschijn kunnen komen; bij de enge opvatting kan men dus de gevallen hebben: twee wortels, een wortel en valsch. Bij de ruime opvatting heeft men met de substitutie niets te maken; de wortels van de rationale vergelijking voldoen altijd, zooals is aangetoond.

Voor de leerlingen van de H.B.S. en het Gymnasium acht ik het veel leerrijker deze zaken met hen te bespreken, dan maar werktuiglijk een tiental van die irrationale vergelijkingen te laten maken; en dan hindert het weinig, of men de ruime opvatting huldigt of zich beperkt tot de enge opvatting; er is eigenlijk alles voor, om steeds de ruime te nemen, de wortels als meerwaardig te beschouwen, en bij die opvatting met Prof. Schuh (3de Jaarg., blz. 6 van het op blz. 98 genoemde Tijdschrift) te definieeren: **Van de vergelijking $f(x) = 0$ is $x = x_1$ een wortel, als minstens één der waarden, waardoor $f(x_1)$ vatbaar is, gelijk is aan nul.**

En nu rijzen er bij de lezers bedenkingen: stelt $y = c\sqrt{x}$ nu de heele parabool $y^2 = c^2x$ voor of alleen maar de helft in het eerste kwadrant? Of, om de vraag anders te stellen: is de grafiek van de inverse functie congruent met de grafiek van de functie of niet? Deze vraag is op zich zelf niet zonder gewicht; luidt het antwoord bevestigend, dan staat er meteen, dat in $y = c\sqrt{x}$ de ruime opvatting moet worden gehuldigd.

Stelt $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$ alleen het stuk van de parabool voor binnen den driehoek, gevormd door de x -as, de y -as en de rechte $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ (de poollijn van den oorsprong)? Ik wensch deze vergelijkingen op te vatten als een zeer beknopte schrijfwijze voor de vergelijking in

rationalen vorm

$$4. \frac{y}{b} = \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b} - 1 \right)^2 \text{ of } \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right)^2 - \frac{2x}{a} - \frac{2y}{b} + 1 = 0;$$

volgens de ruime opvatting moet men elke vergelijking in irrationalen vorm eerst rationaal maken en deze als *de* vergelijking beschouwen. En hoe wilt U laten uitrekenen $\sqrt{9} + \sqrt{16} + \sqrt{25}$? Mogen Uw leerlingen er wat anders uit krijgen dan $3 + 4 + 5$? Het antwoord kan kort zijn; zoodra we met functies en haar nulwaarden te doen krijgen, rekenen we de wortels tweewaardig; vandaar, dat we ons bij het M.U.L.O.-onderwijs, op de H.B.S. met 3-jarigen cursus en op de Handelsschool, waar de algebra de leer is der constanten en onbekenden, aan de enge opvatting vasthouden; maar op de scholen, waar het functiebegrip door alle stof heen moet zijn gegeven (vanaf het midden der tweede klas), daar moet men de ruime opvatting huldigen. Voor men daar aan de irrationale vergelijkingen is, bij de behandeling der wortelvormen, is het noodig, dat men slechts den positieven wortel neemt, tenzij op een of andere manier blijkt, dat de negatieve moet worden genomen. Zonder deze beperking kan men trouwens geen vraagstukken over wortelvormen maken: $\sqrt{9} + \sqrt{25} + \sqrt{36} = 3 + 5 + 6$ en niet een der andere 7 waarden, die men zal kunnen krijgen door verschillende voortteekens toe te laten; $\sqrt{a^2 - 2a + 1} = a - 1$, als $a > 1$ is en $1 - a$, als $a < 1$ is; $\sqrt{x^2 + 2xy + y^2} = x + y$, in de onderstelling, dat $x + y$ positief is; bij $\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc)}$ begint men aldus a . .; dan komt er $a - b - c$; weet men, dat de vorm onder het wortelteeken positief is, dan zet men het best $|a - b - c|$. Ik zou zoo door kunnen gaan; bij de herleidingen en bewerkingen met wortelvormen rekt men heel gewoón den positieven wortel: $\sqrt{(a^2 - 1)(a^2 - 1)} = (a - 1)\sqrt{(a^2 + a + 1)(a + 1)}$ voor $a > 1$. Er zijn veel gevallen, waarin men weet, dat men den negatieven wortel moet hebben; als b.v. de wortel genomen moet worden uit het kwadraat van een negatief getal:

$$x = \sqrt{4 - \sqrt{3}} - \sqrt{4 + \sqrt{3}} \text{ (het tweede } - \text{ is een aftrekteken)}$$

$$x^2 = 8 - 2\sqrt{13}$$

$x = \pm \sqrt{8 - 2\sqrt{13}}$, maar nu weten we, dat x negatief is; dus komt er uit $x = -\sqrt{8 - 2\sqrt{13}}$. Men moet uit $x^2 = 4$ besluiten tot $x = \pm 2$ en nagaan of de herkomst van de vergelijking een

aanwijzing geeft omtrent den wortel, dien men moet hebben; zoo niet, dan zette men beide.

Ongetwijfeld zal er meer over de zaak te zeggen zijn; inderdaad: er zijn twee opvattingen: een enge, die in geen geval gevolg is van een internationale conventie en die voor het elementaire onderwijs de aangewezen is en voor de herleidingen der wortelvormen; dan is er de ruime opvatting, die zeker als de eenig goede moet worden aangenomen, zoodra men met functies en de nulwaarden van functies te maken heeft, en waarbij dus 9 wel als wortel van $x + \sqrt{x} = 6$ moet worden aangemerkt.

In 1924 is voor de acte Wiskunde L. O. opgegeven dit vraagstuk:

Onderzoek, in hoeverre de grootte van m invloed heeft op het aantal wortels der vergelijking

$$\sqrt{2x^2 + mx + 6} = x - 3.$$

Blijkbaar heeft de examiner zich de enge opvatting gedacht; immers bij de ruime opvatting bestaat deze vraag niet; de vierkantsvergelijking, die den rationalen vorm weergeeft, heeft onafhankelijk van m twee wortels; kandidaten, die zich op het ruime standpunt hebben geplaatst, moeten gezet hebben: „er is niets te onderzoeken, voor iedere waarde van m zijn er twee wortels”. Ik zou dat zeker goedgekeurd hebben en vele anderen met mij. Zij, die uit mijn Lagere Algebra II een goed begrip van de zaak hebben gevormd, zijn misschien door de enge opvatting van den examiner gedupeerd geworden of ze hebben gedacht: „laat ik me wijselijk houden aan de enge opvatting, anders heeft het vraagstuk immers geen zin” en hun oplossing zou luiden: de rationale vorm is $x^2 + (m+6)x - 3 = 0$; één wortel is vast negatief, dien mag ik niet nemen; het tweede lid van de gegeven irrationale vergelijking moet gelijk of grooter dan 0 zijn, zoodat $x \geq 3$ zijn moet; $f(3) = 3m + 24$; opdat er een wortel ≥ 3 zal zijn, moet $3m + 24 \leq 0$ zijn, dus $m \leq -8$. — Waar er twee opvattingen zijn, daar is het niet geoorloofd, een examenvraagstuk te geven, zonder precies aan te geven, wat men wenscht.

P. W.

NASCHRIFT VAN PROF. Dr. J. WOLFF.

Bij het rekenen met reële getallen definieert men $\sqrt{a}$, voor $a > 0$, als het positieve getal welks kwadraat gelijk is aan a . Men bewijst

Dr. B. GONGGRIJP.

TAFELS IN VIJF DECIMALEN

UITG. D.

- I. Briggsche log der getallen van 1—10800.
II. Log. van de gon. functies.
III. 11 Bijtafels.
IV. Gon. functies van hoeken opklimmende met 1'.
V. Aanhangsel.
- Stevig gebonden
231 blz. voor
slechts f 2,50.

Uit het Voorbericht van Gonggrijps Tafel D met een nawoord
van Wijdenes.

Natuurlijke
waarden.

Een verder belangrijk verschil met de gewone tafels is de toevoeging, — *even uitvoerig als die der goniometrische logarithmen*, — van de tafel der natuurlijke waarden van de gon. functies.

De voor berekeningen dikwijls schitterende, soms haast mystieke hulp, die eigenschappen van logarithmen kunnen bieden, is de oorzaak geweest, dat de logarithmen reeds honderden jaren lang, — en **in vele opzichten** geheel verdiend, — op den voorgrond zijn gebracht en gehouden. Het in logarithmischen vorm brengen van formules heeft ook menig elegant resultaat geleverd.

Evenwel zijn rechtstreeksche berekeningen en tafels daardoor te veel op den achtergrond geraakt en gebleven. Er zijn genoeg goniometrische questies en vormen, die eenvoudiger en *nauwkeuriger* rechtstreeks dan logarithmisch te behandelen en te bepalen zijn.

Rechtstreeks zullen wel het eenvoudigst te berekenen zijn vormen als:

$$\sin A + \sin B + \sin C, \quad \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C, \quad \text{enz. enz.}$$

ook al kan men, als voldaan is aan zekere voorwaarden, soms zeer eleganté logarithmische vormen voor deze uitdrukkingen opgeven. Er moeten dan 3 à 4 logarithmen van soms nog te herleiden getallen opgezocht en opgeteld worden; daarna moet weer het getal, beantwoordend aan die log., worden opgezocht. In eenvoud en nauwkeurigheid staat hier de logarithmische berekening zeker achter bij de rechtstreeksche.

Onmiddellijk zijn verder met behulp van de tafel der natuurlijke waarden der gon. functies de bases op te geven van gelijkbeenige

driehoeken, waarvan de tophoek en een been of de tophoek en de hoogte gegeven zijn. Koorden, getrokken in cirkels met straal = 1 en met gegeven middp. hoek a worden gegeven door de zeer eenvoudige vergelijking $k = 2 \sin \frac{1}{2} a$ en zijn dus terstond uit de natuurlijke tafel op te schrijven. Tot deze koorden behooren alle *zijden* van *regelmatige ingeschreven veelhoeken*; bijv. heeft men

$$a_{15} = 2 \sin \frac{1}{2} \times \frac{360^\circ}{15} = 2 \sin 12^\circ;$$

$$a_{192} = 2 \sin \frac{1}{2} \times \frac{360^\circ}{192} = 2 \sin 56' 15'' \text{ enz.}$$

Zijden van omgeschreven regelmatige veelhoeken behooren tot de bases van gelijkbeenige driehoeken met gegeven tophoek en gegeven hoogte ($r = 1$). Bijv. is $A_{192} = 2 \operatorname{tg} 56' 15''$ enz. enz. Zie bijt afels L en M.

Verder is de berekening van een zijde van een driehoek, wanneer de overstaande hoek gegeven is en ook de beide andere zijden, het eenvoudigst langs rechtstreekschen weg te verrichten, wanneer die gegeven zijden eenvoudige waarden hebben.

Als bijv. gegeven is: $a = 3$ cm, $b = 5$ cm en $C = 47^\circ 18' 39''$, is $c^2 = 9 + 25 - 30 \cos C = 34 - 20,3406 = 13,6594$.

Een enkele worteltrekking geeft gemakkelijk $c = 3,696$. Men kan die worteltrekking natuurlijk logaritmisch uitvoeren.

Ook het berekenen van de hoeken van een driehoek, welks zijden gegeven en dan eenvoudige getallen zijn, geschiedt het eenvoudigst rechtstreeks. Als bijv. gegeven is: $a = 5$ cm, $b = 6$ cm en $c = 7$ cm, is

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{36 + 40 - 25}{84} = \frac{5}{7} = 0,71429,$$

waaruit terstond blijkt: $A = 45^\circ 35' 6''$ enz.

De logaritmische formules voor $\sin \frac{1}{2} A$ enz., $\cos \frac{1}{2} A$ enz., en $\operatorname{tg} \frac{1}{2} A$ enz. zijn zeer elegant, maar vereischen dikwijls nog al veel rekenwerk en geven meermalen resultaten met vrij belangrijke onzekerheid.

Sommen en verschillen Het bezit van rechtstreeksche tafels der goniometrische functies spoort aan tot het zoeken van formules, waarin alleen *sommen* en *verschillen* voorkomen. De „logaritmische” formules tracht men altijd zooveel mogelijk in de gedaante van producten en quotienten te brengen; zie b.v. de formules:

$$\sec a = \operatorname{tg} a + \operatorname{tg}(45^\circ - \tfrac{1}{2}a);$$

$$\sec a = \frac{\operatorname{tg}(45^\circ - \tfrac{1}{2}a) + \cot(45^\circ - \tfrac{1}{2}a)}{2};$$

$$\operatorname{cosec} a = \cot a + \operatorname{tg} \frac{1}{2} a \text{ en } \operatorname{cosec} a = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} a + \cot \frac{1}{2} a}{2},$$

Men kan er vooreerst uit zien, dat er in een rechtstreeksche tafel geen secanten- en cotangentenlijsten behoeven opgenomen te worden.

Verder is het merkwaardig, dat met deze formules door sommen en verschillen hetzelfde gedaan kan worden, waarbij anders een deeling of logarithmische berekening noodig is.

Interessant is ook, en bijvoorbeeld nuttig voor contrôle, de formule:

$$\cot 2a = \frac{\cot a - \operatorname{tg} a}{2} \text{ of } \cot a = 2 \cot 2a + \operatorname{tg} a.$$

Met behulp van formules als:

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \text{ en } \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

kan men quadraten van gon. functies rechtstreeks in de tafel opzoeken.

In de formule van De Moivre: $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$ ligt het gebruik der rechtstreeksche tafel zeer voor de hand.

Zoo zijn er vele gevallen op te noemen, waarin de rechtstreeksche goniometrische tafels werkelijk van groot nut kunnen zijn.

b.v.:

1. bij het maken van de proef op de meeste gon. verg. als $a \sin x + b \cos x = c$, $a \operatorname{tg} x + b \cot x = c$, $\operatorname{tg} (x + a) + \operatorname{tg} (x - a) = a$, $\sin x + \cos x + \operatorname{tg} x + \cos x + \sec x + \operatorname{cosec} x = a$ en honderden andere meer, ook $\left. \begin{array}{l} \cos x + \cos y = a. \\ \sin x + \sin y = b. \end{array} \right\}$

2. bij het maken van grafieken, waarbij ze absoluut onmisbaar zijn, geeft Gonggrijps tafel de waarden bij het argument, uitgedrukt in graden, Versluys tafel H geeft ook de bogen, zoodat men b.v. in $y = \sin x$ voor de argumenten kan nemen 0,1; 0,2; 0,3; enz. Dit is beter, dan dat men op de x-as graden uitzet.

3. bij de behandeling van $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ en dergelijke; in de tafel van de rechtstreeksche waarden „ziet” men zelfs tot 1° nog geen verschil in de vijfde decimaal.

4. bij het geven van het antwoord op een vraagstuk; als er immers komt $\operatorname{tg} x = \frac{3}{4}$, dan zoeken men gewoon op, welke hoek $0,75000$ tot tg heeft; waarom toch $\log \operatorname{tg} x = \log 3 - \log 4$? Toch niet, om het

den leerlingen gemakkelijker te maken, noch voor meerdere helderheid? Neen, enkel uit sleur; niets anders dan uit sleur; sleur, die de leerlingen overnemen en als enkele later leeraar worden, zullen voortsleepen.

Hetzelfde geldt van de Tafels voor Sam. Intrest, die nauwelijks op 1 van de 10 scholen den leeraar en den leerling tijd en moeite besparen, die zoo broodnoodig zijn voor betere zaken. Waar men ze niet gebruikt, maakt men per les één eindexamensom en blijft in de tweede steken; gebruikt men de Rentetafel, dan doet men er 4 à 5 op zijn gemak geheel af, wat onnoemelijk veel leerrijker en minder taai is.

 Leeraren, die, met het oog op mogelijke invoering van

GONGGRIJP TAFEL D of

VERSLUYS TAFEL H

pres. ex. wenschen, worden verzocht deze aan te vragen aan den uitgever P. NOORDHOFF te Groningen.

dan bijvoorbeeld, dat voor $a > 0$ en $b > 0$ steeds $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, van welke stelling niets zou overblijven bij dubbelzinnige definitie. Het gelijktteeken plaatsen tusschen twee uitdrukkingen, die niet beide ondubbelzinnig getallen voorstellen, heeft nooit zin. De beginner, die met een vaag wortelbegrip werkt, komt tot fraaiigheden als:

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1.$$

In de complexe functietheorie beteekent het symbool $\sqrt{z}$, voor $z \neq 0$ het volgende: men kiest één der beide complexe getallen w_0 die z_0 tot kwadraat hebben, $z_0 \neq 0$ een willekeurig complex getal zijnde. Daardoor wordt in de omgeving van z_0 een eenwaardige functie $w = f(z)$ gedefinieerd, zoodanig dat $w_0 = f(z_0)$ en dat $w^2 = z$. Deze functie is overal voortzetbaar, behalve over het punt $z = 0$. Zet men haar om $z = 0$ heen voort naar z_0 , dan krijgt men in de omgeving van $z = z_0$ de functie $-f(z)$. Onder $\sqrt{z}$ verstaat men de verzameling van de eenwaardige functies, die men door alle mogelijke voortzettingen verkrijgt in alle cirkels, die $z = 0$ niet bevatten. Men completeert deze verzameling, door te definieeren $\sqrt{0} = 0$, maar vergeet geen oogenblik, dat er geen cirkel is met $z = 0$ tot middelpunt, waar een holomorfe functie van z zou bestaan, wier kwadraat gelijk zou zijn aan z .

NASCHRIFT VAN PROF. Dr. F. SCHUH.

Bij het opgeven van een vergelijking dient aan den oplosser gezegd te worden, uit welk stelsel getallen de waarden der onbekenden ontleend moeten worden. Is dit het stelsel der complexe getallen, dan is m.i. de meest voor de hand liggende opvatting, dat de worteluitdrukkingen, die de onbekende bevatten, meerwaardig zijn, ook in geval van een positief getal onder een tweede wortelteeken. Is de bedoeling anders, dan dient dit in de opgave te worden vermeld. Moeten de onbekenden ontleend worden aan het stelsel der reële getallen, dan is het m.i. het meest aangewezen onder $\sqrt{x}$ (of $\sqrt{x^2-1}$, enz.) den wortel te verstaan, die $\equiv 0$ is. Reële waarden van x , waarvoor een uitdrukking onder een tweede wortelteeken negatief wordt, moeten dan worden uitgesloten.

HET CULTUUR-HISTORISCH ELEMENT IN HET WISKUNDE-ONDERWIJS

(Opmerkingen naar aanleiding van een artikel van

DR. D. J. E. SCHREK.)

DOOR

E. DE HAIRS, Antwerpen.

La majesté d'un grand fleuve n'efface pas les
charmes de son humble source. Paul Ver Eecke.
(Diophante d'Alexandrie-Préface).

1. De heer SCHREK heeft in zijn verhandeling: „Het cultuur-historisch element in het wiskunde-onderwijs” (Bijvoegsel N. T. v. W. jaargang I, 1924/25) No. 1 en 2) eenige beschouwingen ontwikkeld over de geschiedenis der wiskunde als hulpmiddel bij het onderwijs.

De geschiedenis der wiskunde moet zeker een groote rol spelen in onze schoolwiskunde. Ik denk, dat we het verder moeten doorvoeren dan Dr. SCHREK het voorstelt; het cultuur-historisch element moet iets meer zijn dan een: „*Illustratie*”.

In dit artikel breng ik eenige gedachten naar voren die, naar ik hoop, duidelijk mijn opvatting en wijze van behandeling zullen aangeven.

2. We weten, dat men zich omstreeks 1900 hield aan „*methode*” en men aldus dacht blijken te geven van „*esprit scientifique*”. De taak van den leeraar was, de jonge geesten te richten naar „*methoden*” en de formeele faculteiten op te voeden.

Men constateerde weldra, dat men te veel op het veld der dorre logica bleef. Men ondervond, dat wiskunde studeeren en theorieën opbouwen iets anders was dan syllogismen ineen te schuiven.

Robert d'Adhémar zegt in zijn werk „HENRI POINCARÉ” (Philosophes et penseurs, Bloud & Cie., Paris): „pour faire des mathématiques, la logique ne suffit pas, l'érudition ne suffit pas; il faut prévoir de longs enchaînements d'idées et d'idées encore imprécises,

qui se préciseront peu à peu, se cristalliseront. Et c'est ce que l'on nomme l'intuition mathématique".

Het besluit was: geef meer spel aan intuïtie, aan de concrete feiten. De synthetische opvatting der wiskunde begon te kwijnen, en een aantal paedagogen en wiskundigen, POISSON, GRATRY, stelden een hervorming der leerplannen voor.

De toenemende vooruitgang der toegepaste wetenschappen en der techniek had weldra invloed op die hervorming.

3. Het uitgangspunt der praktische hervorming, als ik het zoo noemen mag, vond in Engeland een voorstander in den persoon van J. PERRY. In Engeland werden dan ook een reeks „Practical Mathematics" uitgegeven. We vermelden: J. PERRY: „Englands neglect of Science. British Association Meeting at Glasgow 1901. Discussion on the teaching of Mathematics. Ed. by J. PERRY. London 1901" en J. PERRY „Practical Mathematics. Lessons delivered to workingmen. London."

In Duitschland zetten vooraanstaande wiskundigen een heele beweging op touw. Zooals FELIX KLEIN die voorstelt, gelijk ze wel op die van Engeland. Voor een degelijk overzicht vermelden wij „Der Mathematische Unterricht an den höheren Schulen. KLEIN und SCHIMMACK I. Leipzig 1907" en „Het Meraner leerplan, zijn geschiedenis en zijn invloed op het Duitsche wiskunde-onderwijs" van D. J. E. SCHREK.

In Frankrijk uit zich dezelfde beweging in de „Plans d'études de 1902" (zie „Revue de l'enseignement des Sciences" eerste nummers).

EMILE BOREL wil afbreken met de oude leermethoden en deelt grootelijks de opvatting van J. PERRY. Van zijn hand verschenen twee werkjes, samengesteld volgens die opvatting:

„Algèbre: Premier et Second cycle Paris 1903.

„Géométrie: „ „ „ „ Paris 1905.

Die algemeene hervorming der leerplannen wordt eenigszins anders opgevat in Italië, waar men veel belang hecht aan het onderwijs in de meetkunde. Men wilde niet tot het uiterste gaan. Als degelijk handboek vermelden wij: „Elementi di Geometria de SANNIA e D'OVIDIO, de FAIFOER e de DE PAOLIS".

Het grondig onderzoek door Italiaansche wiskundigen van de grondslagen der meetkunde had weldra een zoodanigen invloed op die hervorming, dat VERONESE, ENRIQUES, AMALDI en anderen hun „Elementi di Geometria" schrijven en uitgeven.

Het Italiaansche tijdschrift: „Rivista paedagogica” verschenen van den 1sten Januari 1908 af, verdedigt die zienswijze.

In Denemarken hadden we vooreerst de methode van JULIUS PETERSEN om te komen tot de voorstellingen van T. BONNESEN.

Deze laatste vereenigde in een werk „Geometri for Mellem-skolen 1904 Kjöbenhavn” de twee bewegingen van Engeland en van Italië. Voor meer zie van denzelfde: „Lov om højere Almenskolen med dertil hørende Anordninger 1906 Kjöbenhavn.

In Oostenrijk wijst men tegelijkertijd op een hervorming voor het onderwijs in de scheikunde, geologie en biologie; voor nadere bijzonderheden raadplege men het werk: „L'enseignement des sciences naturelles dans les écoles moyennes autrichiennes” (Vienne, F. Tempsky 1908).

We constateeren dus, dat een hervorming der leerplannen zich in alle landen voordeed. „Le IVème Congrès international des Mathématiciens” vatte de gedachte op, die verschillende stroomingen nader te bestudeeren. In de „Comptes rendus du IVème Congrès international des Mathématiciens”¹⁾ treffen we degelijke artikelen aan van GUTZMER (Duitschland), GODFREY (Engeland), SMITH (Ver-eenigde Staten), SUPPANTSCHITSCH (Oostenrijk), BEKE (Hongarije), FEHR (Zwitserland), en GALDEANO (Sanje).

Tot zoover de hervorming, wat betreft de wijze van opvatting van het wiskunde-onderwijs.

4. Weldra vestigde men ook de aandacht op het „Cultuur-historisch element”. Immers de historische studiën en onderzoekingen door verschillende geleerden gedaan, zooals HEIBERG, TANNERY, CANTOR, ZEUTHEN, bewezen, dat de wiskunde evolueert.

Welnu, voor den leerling moet de wiskunde een levend organisme zijn, dat altijd verandert om eens te komen tot een bepaald stadium van ontwikkeling. De leeraren moeten de wetenschap doen leven; plaats uwe leerlingen in de evolutie der groote wiskundige gedachten, laat ze de schepping, de wording en den bloei dier tijden bijwonen.

Waar de stof en de methoden vinden? Het antwoord ligt in de

¹⁾ Publiés par les soins du Secrétaire Général G. Castelnuovo. 3 vol. in 8° de 220, 320, 592 pages respectivement. Rome, Typographie de la R. Accademia dei Lincei. 1909.

geschiedenis der wiskunde of liever, zooals DR. SCHREK het uitdrukkelijk aanwijst, in het cultuur-historisch element.

In de meesterlijke „Introduction” van ingenieur Paul Ver Eecke's „Les Oeuvres complètes d'Archimède” ¹⁾ leest men op blz. L:

„... Cependant, si, à la différence des œuvres d'Euclide, celles d'Archimède et d'Apollonius ont cessé de servir, comme à la Renaissance, à l'instruction immédiate de la postérité, il n'en résulte pas que les méthodes des anciens, ayant mené à des découvertes aussi considérables, sur lesquelles Carnot et Monge fondèrent encore tout près de nous des travaux importants, aient épuisé toute leur fécondité, ni que l'impeccable rigueur de ces méthodes synthétiques ait perdu son enseignement pour la jeunesse de vingt ans qui, au seuil des écoles savantes, se prépare toujours plus nombreuse aux spéculations des hautes mathématiques. On sait d'ailleurs que Newton se reprochait d'avoir trop peu lu les géomètres de l'antiquité dès sa jeunesse et de s'être engagé prématurément ainsi sur le chemin de l'analyse; tandis que Pascal, dont le génie eut tant d'analogie avec celui d'Archimède, a écrit dans son traité „Du Vide”: „Ceux que nous appelons anciens étaient véritablement nouveaux en toutes choses, et formaient l'enfance des hommes proprement; et comme nous avons joint à leurs connaissances l'expérience des siècles qui les ont suivis, c'est en nous que l'on peut trouver cette antiquité que nous révénons dans les autres.”

5. ERNEST JABLONSKI, duitsch godgeleerde (1693—1757) schreef in een van zijn werken de volgende methode voor, om afwisseling en aaneenschakeling te brengen in de leerstof: „getroffen door de moeilijkheden, die de leerlingen ontmoeten om zich de deducties van den leergang eigen te maken, heb ik dikwijls een geestesoefening gebruikt, die ik het opzoeken der antecedenten noem; ze is eigenlijk niets anders dan een analyse van een stelling, gevonden door synthese. Men neemt een zekere stelling, en men haalt al de voorafgaande stellingen, bepalingen en axioma's op, die voor het bewijs noodig zijn. Op deze wijze heeft men een eerste analyse der aangeduide stelling. Vervolgens neemt men enkele van de te hulp geroepen stellingen, men ontleedt ze op haar beurt en zoo verder, totdat men enkel nog axioma's en bepalingen heeft.” Niettegenstaande die methode aanbevelenswaardig is, staat het toch vast, dat wel-

¹⁾ Desclée, De Brouwer et Cie., Bruges. 1921.

dra het interessante van die methode geen vat meer heeft op den jongen geest.

6. Tegenover die methode van JABLONSKI stellen we de twee volgende, ontleend aan de geschiedenis der wiskunde:

- a. uit de vergelijking der historische feiten, zoekt men de analogieën op, die zich voordoen of kans hebben van zich voor te doen;
- b. de methode van den „genetischen-historischen” leervorm.

De eerste (a) werd voorgestaan en verdedigd door den geleerde, historicus en mathematicus ZEUTHEN, in een van zijn voornaamste werken „Forelaesning over methematikens historie Oldtid og Middelalder. Kjöbenhavn 1893.”

Daarin zet hij uiteen, wat de leeraar moet weten van de wiskunde der Oudheid en der Middeleeuwen; hij hecht veel belang aan de vroegere methoden en de manier, waarop ze nieuwe gedachten voorstellen. Die methode bestaat in de overeenstemming van de geschiedenis der wetenschap met onze wetenschappelijke begrippen.

Prof. Hk. DE VRIES zegt ergens in zijn „Historische studien” „.... maar juist de manier, waarop een of andere fundamenteele stelling ontdekt en voor de eerste maal bewezen, daarna soms weer totaal verloren gegaan en eeuwen later terug gevonden is, om eindelijk, na van allerlei zijden belicht te zijn, de definitieve plaats te veroveren, die wij haar tegenwoordig gunnen, juist dat is buitengewoon interessant en uitermate leerrijk....”.

Om ons gezegde te verklaren zullen wij een voorbeeld aanhalen uit de schoolwiskunde.

In de meeste leerboeken over „Projectieve meetkunde” zet men naast elkander het bekende theorema van Pascal en dat van Brianchon. Het is dus heel natuurlijk, dat de leerlingen Brianchon nemen voor een tijdgenoot van Pascal; nochtans ligt er tusschen beiden een tijdsverloop van bijna twee eeuwen. Het feit, dat we thans het theorema van Brianchon aanzien als een gevolg van het theorema van Pascal is te danken aan de wet der dualiteit in het vlak. De geschiedenis dier stellingen geeft den leeraar een prachtige aaneenschakeling van gedachten en keus voor onderwerpen. We bevelen ten zeerste aan Prof. Hk. de Vries „Historische studiën” (nummers IV, V, VI van het N. T. v. W. IIde Jaargang).

Een verslaggever schrijft in het „Wis- en Natuurkundig tijdschrift” (4de aflevering; Juli 1924): „Het afdwalen langs zijpaadjes leverde evenveel genot, opende ruim zoo’n gezichteinder en prikkel-

de in dezelfde mate de lust tot nieuwe ontdekkingstochten, als het wandelen langs de groote baan.

Een verruimen van den gedachtenkring, aanzetten tot persoonlijk onderzoek, zijn wel het hoofddoel geweest van den zoo bevoegden als onderhoudenden gids. Welk beter bewijs, dat hij in zijn pogen slaagde, dan het feit, dat deze eerste studie sluit met een serie oorspronkelijke bijdragen den leerlingen van den hoogleeraar geïnspireerd door zijn artikelen."

We zouden dus over die twee stellingen een flinke les kunnen geven; we stippen enkel den gedachtenvorm aan.

1. Stel de leerlingen in 't midden der historische gebeurtenissen. Deel van PASCAL. — De stelling van Brianchon is een gevolg van die van PASCAL.

2. Het uitdrukken in woorden der twee stellingen.

„Stelling van PASCAL.” Als een zeshoek in een kromme van den tweeden graad beschreven is, dan liggen de snijpunten der drie paren overstaande zijden op een rechte lijn.

„Stelling van BRIANCHON.” Als een zeshoek om een kromme van den tweeden graad beschreven is, dan gaan de drie verbindingslijnen van elk paar overstaande hoekpunten door één punt.

Als proefondervindelijk bewijs kan men eenige figuren laten teekenen. Men merke op, dat de origineele opgaven zoo „duidelijk” niet waren.

3. Draagwijdte der stellingen. PASCAL legde zijn „mystieke zeshoek” tot grondslag van zijn „Traité complet sur les Coniques”.

Volgens P. MERSENNE zou PASCAL uit zijn mystieken zeshoek 400 eigenschappen afgeleid hebben.

Van 1640 tot 1806 maakte niemand gebruik van die stelling. Het is slechts in de 19de eeuw, dat men het belang en de draagwijdte inzag. We melden de onderzoekingen van STEINER (de punten van STEINER) en van PLÜCKER; HESSE, CAYLEY en GROSSMANN ontdekten andere eigenschappen van de punten van STEINER.

Later bestudeerden KIRKMANN en SALMON de stelling van PASCAL. Voor het einde der negentiende eeuw melden wij terloops BAUR en VÉRONÈSE.

4. Als „curiosité scientifique” geven wij het bewijs dat PASCAL gaf. (Oeuvres complètes de BLAISE PASCAL. t. III p. 182. — Zie ook: Historische studiën I blz. 5).

Denkt u niet, dat de leerlingen na zulk een les lust voelen tot eigen studie en onderzoek?

Met volle overtuiging schreef JULES TANNERY:

„Ce qui se passe dans l'esprit de celui qui étudie les mathématiques n'est que l'image de ce qui s'est passé dans la création et dans l'organisation de la science; dans ce long travail, la rigueur déductive n'a pas été seule à jouer un rôle. On peut raisonner fort bien et fort longtemps sans avancer d'un pas, et la rigueur n'empêche pas un raisonnement d'être inutile. Même en mathématiques, c'est souvent par des chemins peu sûrs que l'on va à la découverte. Avant de faire la grande route qui y mène, il faut connaître la contrée où l'on veut aller; c'est cette connaissance même qui permet de trouver les voies les plus directes; c'est l'expérience seule qui indique les points où il faut porter l'effort; ce sont les difficultés, parfois imprévues qui se dressent devant les géomètres qui les forcent à revenir au point de départ, à chercher une route nouvelle qui permet de tourner l'obstacle. S'imagine-t-on, par exemple, les inventeurs du calcul différentiel et intégral s'acharnant, avant d'aller plus loin, sur les notions de dérivée et d'intégrale définie?”

7 (b). „Een ander middel om de vereenzaming der wiskunde te weren en dat ook geldt voor de aangrenzende physica, bestaat in het veelvuldig wijzen op de geschiedenis dezer wetenschappen, die beide in de Oudheid reeds veelvuldig beoefend zijn, en onder dewelke wiskunde antiek leergoed is. Men zal zich niet beperken tot den naam van het pythagorisch theorema, tot het archimedisches getal, tot de hippocratische maantjes, maar moet daarbij tevens den ontwikkelingsgang en de methode der oude vorschers laten zien. Heden houdt de schoolmeetkunde zich meer op de baan, die EUCLIDES heeft aangelegd. Zulks is goed; toch wordt de alexandrijnsche meester, die er de grondlegger van is, niet genoemd. Het omgekeerde ware het juiste: de leer uit den vóórtijd met dank vermelden, maar den strammen bewijzenden vorm, dien ze heeft in het leven geroepen, tegen den meer plooibaren genetischen verwisselen” (Dr. OTTO WILLMANN — Didactiek als Vormingsleer t. II bldz. 158).

Immers met de methode der „genetische-historische” leerwijze streven we naar een hooger ideaal: de leerlingen beter voorbereiden tot de „methoden eigen aan de hoogere wiskunde”.

Welke vooruitgang in de 19de en 20ste eeuw! De ontdekkingen der wis- en natuurkundigen geven een ruimer arbeidsveld; men komt

geleidelijk tot den synthetischen opbouw der exakte wetenschappen; nieuwe begrippen vormen zich, de moderne richting der wiskunde stelt aan 's menschen geest nieuwe leermethoden en hervormingen voor. Ons onderwijs is ook een kind van zijn tijd en moet in zekere mate aan die behoeften voldoen, meer aanpassen aan den geest der moderne wetenschap. Moeten wij altijd de oude manier volgen?

EUCLIDES wilde in een doctrinaal stelsel de kennis der meetkunde van zijn tijd opbouwen. De „Elementen” zijn reeds eeuwen doorgegaan als het klassieke type voor 't onderwijs der meetkunde en der wiskunde in het algemeen.

De oude leerwijze der wiskunde hing grootendeels samen met de opvatting der Grieken, een opvatting die niet meer de eereplaats inneemt in de hedendaagsche wetenschap.

Helaas! men verwaarloost het dieper nadenken, de wijsgeerige ontwikkeling der jonge geesten. Met klem wijst C. A. LAISANT erop in zijn werk „La mathématique. Philosophie. Enseignement” ¹⁾ (1^{ère} édition 1898, 2^e édition 1907. Gauthiers-Villars. Paris).

„....c'est sans cesse que le côté philosophique devrait être la grande préoccupation; et cela, dans toutes les classes, à tous les degrés, sur tous les sujets.... En résumé, l'enseignement doit être aussi peu dogmatique que possible, mais en même temps foncièrement philosophique. Cette conciliation de la simplicité dans la forme avec la profondeur des idées constitue l'une des qualités de l'art difficile de l'enseignement”. Ik denk dat de „genetische-historische” leervorm die leemte geheel zal vullen; aan hen, die zich willen overtuigen zeggen wij, zooals d'Alembert „Allez en avant et la foi vous viendra”!

De critiek van TRENDLENBURG is zeer treffend:

„Bij EUCLIDES zijn de bijzonderste leerstellingen enkel uit den uiterlijken samenhang en door middel van bevallige beschouwingen bewezen, maar niet naar aanleiding van de elementen, die in 't begrip der zaak zelve gelegen zijn... Als de leerstelling vast en vaardig wordt „vooropgesteld” en het bewijs „achteraan gezonden”, dan ziet het geheel er uit als een reeks stramme bevestigingen, die voet vatten en zich vervolgens verschansen....

¹⁾ Zie „Revue générale des Sciences pures et appliquées” numéro du 30 novembre 1893: „Sur l'orientation actuelle de la Science et de l'enseignement mathématique” M. E. Lemoine et Ch. Laisant.

Overall bestaat er een kunstvolle samenhang, maar nergens een „wording” en „groei”. De weg, dien wij voorstellen (de genetische methode) leidt verder, want hij leidt er toe, te vinden, wat in de natuur der zaak ligt, en niet door een ontdekt verband te bevestigen wat elders is gevonden. De leerstelling wordt in haar volle nieuwheid verkregen en niet alleen uiterlijk gewaarborgd” (Didaktiek als vormingsleer II blz. 213).

8. Uit dat alles blijkt, dat de genetische leervorm en de geschiedenis der wiskunde als hulpmiddel de beste zouden zijn. Dat is wat wij genoemd hebben de „genetische-historische leervorm”.

De Fransche ster- en wiskundige ALEXIS-CLAUDE CLAIRAUT (1713—1765) dacht er reeds aan de meetkunde te onderwijzen door middel van het cultuur-historisch element. CLAIRAUT ging terug tot de bron en den weg der ontdekkingen. In dien zin schreef hij zijn bekende „*Eléments de Géométrie*” (2 volumes de XIV—95 et 103 pages avec 69 et 77 figures dans le texte; collection „*Les Maîtres de la pensée scientifique*”. Gauthier-Villars. Paris).

Ongelukkiglijk werd de gedachte van CLAIRAUT niet gevolgd; de tijd was daarvoor nog niet gunstig.

De 16de en 17de eeuw waren de tijdperken der groote wiskundige ontdekkingen: „de analytische meetkunde en de infinitesimale analyse”. De 18de eeuw was de eeuw der uitbreiding en verbetering van die vakken; 't was de eeuw van BERNOULLI, EULER, D'ALEMBERT, LAGRANGE, LAPLACE. De geschiedenis der wiskunde was niets anders dan het natuurlijk gevolg van geheel die beweging: den drang naar onderzoekingen. Doch ze werd enkel beoefend door eenige intellectuelen en in de laatste jaren der universiteiten. We mogen dus zeggen, dat de geschiedenis der wiskunde een betrekkelijke jonge wetenschap is. In de eerste helft der laatste eeuw werd ze weinig beoefend in Europa; ze had bijna geen voorrecht in de academische wereld, en men vond het een eigenaardig feit, dat „NESSELMANN” aan de Universiteit van Königsberg, een cursus over de geschiedenis der stekunde gaf.

De eigenlijke grondlegger is de wiskundige „J. F. MONTUCLA”, (1725—1799).

Het opzoeken der bronnen, het ontcijferen en verklaren van teksten, werd ijverig begonnen in de 17de en 18de eeuw. Toen verschenen geschiedkundige verhandelingen van VOSSIUS, WALLIS, DE WEIDLER en HEILBRONNER. Maar aan J. F. MONTUCLA komt eigenlijk de eer toe

in 1758 een „Histoire des mathématiques” (Paris 1799—1802, 4 vol. in 4° avec fig.) opgesteld te hebben.

Dat magistrale werk, vooral in zijn tweede uitgave (1799—1802) blijft, niettegenstaande het veroudert, een modelwerk, dat uitmunt in documentatie en in zekerheid van oordeel. —

9. De „genetische-historische” leervorm is een paedagogisch middel, ik zou haast zeggen een „kunstgreep” om de leerlingen in te wijden in het vak, dat BHASKARA de „Lilavati”, d. w. z. de liefelijke, noemde. Die kunstgreep is moeilijk in het werk te stellen, maar is schatrijk aan leermethoden en onuitputtelijk aan gedachten. Aldus zal het onderwijs in de wiskunde de gedachte van PASCAL verwezenlijken: „heel de reeks der menschen moet worden aangezien als één man, die blijft bestaan en altijd voortleert.”

Gevoed door den genetischen-historischen leervorm zal de gedachtenkring van den leerling verruimen, de moeilijkheden zullen minder worden. Die kunstgreep is het lokaas voor zijn wiskundigen aanleg; de studiedrift is geprikkeld, de arbeid is klaar gemaakt. Allengs krijgt de leerling „inzicht”. Inzicht geeft klaarheid, verstaanbaarheid en volharding bij de studie. Het essentieele eener wetenschap, haar methode en haar gedachtengang, zal begrepen worden, de denkwijze is gevormd, en er blijft „critiek” voor de leerlingen.

Het cultuur-historisch element heeft een zedenkundige waarde.

H. E. TIMERDING schrijft op blz. 153 van zijn verhandeling „Die Verbreitung mathemat. Wissens. u. mathemat. Auffassung.”

„Von groszem Wert erscheint auch das historische Moment im „mathematischen Unterricht. Wenn dem Schüler nicht die mathematischen Tatsachen vorgelegt werden, sondern ihm auch erzählt wird, „wie sie in der geschichtliche Entwicklung ergeben haben, welche „grosze persönliche Leistung in ihnen steckt, wie sie in Zusammenhang stehen mit der ganzen menschlichen Kulturentwicklung, so „wird dem Schüler am ehesten das Verständnis für den lebendigen „Geist aufgeben, der in den mathematischen Formeln und Figuren „atmet.”

Een vormingsinhoud zonder de geschiedenis der hoofdvakken is onvolledig. In de letterkunde behandelt men de litteratuurgeschiedenis, waarom zou men in de wiskunde de geschiedenis der wiskunde niet behandelen? Hebben al onze vormingsmiddelen geen historisch

karakter? Is er geen verband tusschen de wetenschap en de klassieke oudheid?

Het cultuur-historisch element heeft haar eigen vormende waarde. De geschiedenis der wetenschap stelt voor oogen de openbare werkzaamheid, grootsche opofferingen, volharding in de onderzoekingen. De fransche letterkundige CH. M. DES GRANGES roemt de wetenschappelijke litteratuur om haar opvoedkundige waarde.

De geschiedenis prikkelt den geest der nationale fierheid hierin, dat ze den denkenden geest doet inzien, dat de grootheid van een land zich ook uit door de wetenschappelijke vorming van zijn volk.

In een belangrijk wijsgeerig werk: „L'idéal scientifique des mathématiciens”, zegt PIERRE BOUTROUX: „Il y aurait, cependant, dans le domaine des sciences comme dans les autres, une histoire nationale à écrire, qui ne serait ni illusoire, ni sans portée. Mais ce serait une histoire d'un caractère élevé, qui laisserait de côté le détail technique des découvertes pour ne considérer que l'esprit. Ce qui constitue, en effet, l'individualité scientifique d'un peuple ce n'est point le concours des circonstances qui lui a valu d'acquérir le premier telle ou telle connaissance, mais ce sont les méthodes de travail en usage chez ce peuple, les habitudes et les tendances des intelligences, le pouvoir de divination plus ou moins développé et orienté dans tel sens particulier, l'idéal enfin que poursuivent ses savants.”

De studie der geschiedenis van de wiskunde is de beste leermeesteres, want ze geeft aan de jongeren de denkwijze der ouden; doch de schoonste vruchten worden eerst op rijperen leeftijd geplukt; ze zal het verlichtingsmoment zijn der verklaringen en der groote wiskundige stroomingen. LEIBNIZ zei reeds: „Qui Archimedes et Apollonius intelligit, recentiorum summorum virorum inventa parcius mirabitur.”

Hoeveel leerlingen doen er aan lektuur voor hun wetenschappelijke vorming? Ik kan mij geen andere wijze voorstellen om iemand wetenschappelijke lektuur te geven, dan hem de historische studie van een wel omschreven onderwerp ter hand te stellen; langzaam aan zal dan het individueele belang in een gebied opgewekt worden. Zoo b.v. in de eerste wetenschappelijke ¹⁾ de „Trianglè arithmétique”

¹⁾ Deze komt overeen met onze 6e klas Gymnasium. W.

van PASCAL. Daardoor, dunkt me, kan men er toe komen de leerstof en de geschiedenis samen te onderwijzen.

Het cultuur-historische element der wiskunde voldoet aan de principes der didaktiek: het onderwijs is stevig en opvoedend, de innerlijke werkzaamheid der leerlingen is opgewekt; ze zullen de ontwikkeling der formules beter volgen en een „connaissance d'ensemble” hebben.

Alle elementen, waaruit het mathematisch talent samengesteld is, abstractie-vermogen, constructieve phantasie, functioneel denken, het gemakkelijk overzien van heele reeksen aaneengeschakelde sluitredenen, een soort intuïtie voor ruimte en wiskundige betrekkingen en een sterk concentratie-vermogen, worden op de proef gesteld. Het onderwijs zal één zijn in de verscheidenheid.

10. Aldus komen wiskunde en geschiedenis der wiskunde voor, als de twee gebieden, die het „genetisch-geschiedkundig” element der vorming in zich besluit. Ik hoop, dat dit opstel, met dat van DR. SCHREK, het paedagogisch belang van de geschiedenis der wiskunde voor het onderwijs zal ten goede komen. Met het oog op het doel van ons onderwijs, voldoet het cultuur-historisch element, ten eerste: aan de behoeften der hedendaagsche paedagogie; ten tweede: aan de methoden der hoogere wiskunde; en eindelijk: aan een wijsgeerig en dieper gaand vormingsstreven en bekendheid met geschiedkundige beschouwingen, tot doel hebbende de schoolwiskunde en eenige wetenschappelijke stroomingen te verklaren.

Het is natuurlijk de taak van den leeraar door goed gekozen voorbeelden (teksten, lezingen enz.) de „genetisch-geschiedkundige” methode in te voeren. We weten maar al te best, dat de omstandigheden moeilijk nieuwe methoden toelaten.

Ik sluit dit opstel met enkele woorden die G. A. LAISANT schrijft in zijn werk „La mathématique. Philosophie. Enseignement” en die ik geheel tot de mijne maak:

„L'éducation mathématique pourrait devenir un des plus puissants „instruments de progrès et de civilisation, aux prix de quelques réformes faciles. Si j'ai pu hâter d'un jour l'accomplissement de ces „réformes, si j'ai pu montrer à un seul de mes contemporains qu'il „y a dans la Mathématique autre chose que des conventions et „des formules, et si j'ai décidé celui-là, suivant la belle expression „de RABELAIS, à rompre l'os et à sucer la moelle, j'ai la conscience „que ce petit livre (article) n'aura pas été complètement inutile.”

HET Z.G. TWIJFELACHTIGE GEVAL VAN GELIJK- EN GELIJKVORMIGHEID.

Onlangs werd mij gevraagd, hoe dit geval door mij *geformuleerd* wordt. Misschien stellen meerderen in het antwoord belang:

PLANIMETRIE.

Twee driehoeken zijn congruent, als ze gelijk hebben twee paar zijden en de hoeken tegenover één der paren zijden, mits de som der hoeken tegenover het andere paar gelijke zijden — voor het geval, waarin die hoeken niet recht zijn — *niet* gelijk is aan een gestrekten hoek; voor het geval, waarin die hoeken wel recht zijn, zijn de driehoeken zonder verdere voorwaarde congruent, hetgeen ook volgens een ander geval der congruentie blijkt.

Het bewijs der stelling sluit zich op geheel natuurlijke wijze bij de formuleering aan.

Zorgt men, dat het paar hoeken en het paar aanliggende zijden waarvan de gelijkheid gegeven is, samenvallen, dan kan men omtrent de niet genoemde zijden drie onderstellingen maken. Deze leiden dan *precies* tot de *bovengenoemde nadere* voorwaarde voor congruentie. Ik zal dit mijn collega's wel niet duidelijk behoeven te maken. De in de meeste leerboeken geëischte *gelijksoortigheid* van de quaestieuze hoeken dekt de *preciese* voorwaarde niet geheel. De gelijksoortigheid eischt nl. *meer* dan we wel behoeven te weten.

Het voordeel van de genoemde formuleering boven die, waarin sprake is van het gelijksoortig zijn der quaestieuze hoeken blijkt dan ook b.v. bij het bewijs van 1. Van $\triangle ABC$ is $AC = BC$, als CD tegelijk bisectrice en mediaan is. 2. Op het eene been van $\angle A$ liggen B en C , op het andere B^1 en C^1 , zoodat $AB = AB^1$, $BC = B^1C^1$, BC^1 snijdt B^1C in O ; nu halveert AO den $\angle BAB^1$. Bij n^o. 1 (eerste klasse H.B.S. of Gymnasium) zit men met de gelijksoortigheid der quaestieuze hoeken verlegen, bij n^o 2 zal men, zonder hulplijn en zonder „omlegging”, met mijn formuleering twee paar congruente driehoeken noodig hebben; anders drie paar.

Bij de gelijkvormigheid verandere men congruent(ie) in gelijkvormig(heid), terwijl achter „als ze gelijk hebben” komt: „de verhoudingen van”; „paar gelijke” verandert in „dier paren”.

STEREOMETRIE.

Twee boldriehoeken (drievlakshoeken) zijn gelijk en gelijkvormig, als ze gelijk hebben twee paar zijden en de hoeken tegenover één der paren zijden, mits de som der hoeken tegenover het andere paar gelijke zijden — voor het geval, waarin die hoeken niet recht zijn — *niet* gelijk is aan een gestrekten hoek; voor het geval, waarin die hoeken wel recht zijn, zijn de boldriehoeken (drievlakshoeken) zonder verdere voorwaarde gelijk en gelijkvormig, mits de eerstgenoemde gelijke hoeken niet tevens recht zijn.

Men kan in deze stelling ook overal „zijden” door „hoeken”, maar dan ook „hoeken” door „zijden” vervangen.

D. P. A. V.

BOEKBESPREKINGEN.

P. Jansen en G. W. van Brink, *Beknopte theorie der rekenkunde met opgaven, ten dienste van kweekscholen voor onderwijzers*. Groningen, J. B. Wolters, 1927.

Ik moet beginnen met te zeggen, dat het mij voorkomt — hetgeen ik trouwens al eens meer heb doen uitkomen —, dat er in een beoordeeling van den *opzet* van een theorie der rekenkunde wat persoonlijks zit, terwijl van hetgeen na dien opzet komt, het oordeel over hetgeen goed, minder goed of slecht is, wel met meer eenstemmigheid kan gegeven worden. Mijn oordeel heeft dus voor een gedeelte misschien slechts betrekkelijke waarde.

Ik moet dan zeggen, dat deze *Beknopte Theorie der Rekenkunde* op mij geen bepaald kwaden indruk maakt. Wel heb ik bij het doorlezen hier en daar nogal wat streepjes gezet, maar deze hebben voor het grootste gedeelte meer betrekking op details dan op hoofdzaken. Een hoofdzaak, waarbij gezegd wordt, dat eerst *een rij teekens* met bepaalde eigenschappen geleerd wordt — die, zooals ook verschillende anderen dat doen, „de rij der natuurlijke getallen” genoemd wordt — en dat daarna die teekens voor „telling” eener *hoeveelheid* gebruikt worden, is goed in het oog gehouden. Ook de verdere definities der rekenkundige bewerkingen en de behandeling hunner eigenschappen voldoen in het algemeen aan redelijke eischen. Het komt mij voor, dat de schrijvers bij hun werk wel wat geprofitteerd hebben van hetgeen door goede mathematici op het gebied der rekenkunde is geleverd en van hetgeen de kritiek bij de bespreking van een en ander heeft kenbaar gemaakt. Ook de verzameling vraagstukken lijkt mij nog al geslaagd te zijn.

Ik wil echter niet verzuimen een greep te doen uit de aanmerkingen, die ik op het boekje heb, want onberispelijk heb ik het toch nog lang niet gevonden.

Vooreerst een aanmerking op den eersten zin: „Een verzameling van gelijksoortige dingen noemt men een hoeveelheid.” Achter „dingen” behoort te staan „of dingen, die men als gelijksoortig beschouwt.” Iets verder komt een tweetal zinnen, die ik gedeeltelijk anders zou zeggen, gedeeltelijk zou weglaten: „Slechts zeer kleine hoeveelheden kan men direct herkennen of onmiddellijk overzien.” Dat „direct herkennen of onmiddellijk overzien” is te vaag. „Is de hoeveelheid *groot*, dan kunnen wij de vraag, *hoeveel* elementen ze bevat, slechts beantwoorden door ze te *tellen*”. Die zin (de cursiveering is van mij) bevat zeker drie begrippen, met alles wat daaraan vastzit, die hier in het begin niet thuis behooren.

In § 3, die over „tellen” handelt, wordt *eerst* gezegd, dat het resultaat van de telling of het „aantal” elementen der hoeveelheid het bij die telling laatst aangewezen natuurlijk getal is, terwijl *daarna* als hoofdeigenschap der telling genoemd wordt: „Het aantal elementen eener hoeveelheid is onafhankelijk van de volgorde en de groepeerings der elementen.” Het bewijs dezer allerbelangrijkste eigenschap wordt door de schrijvers achterwege gelaten.

Het moet mij hier van het hart, dat de bedenking, die ik tegen het zooeven vermelde heb, niet iets bijkomstigs is, maar dat deze bedenking voor mij een hoofdzaak vertegenwoordigt. De schrijvers zetten, wat den naam „aantal” betreft, de zaak „op zijn kop”. Het behoort zóó te zijn, dat het laatst aangewezen natuurlijk getal bij de telling vooreerst betiteld wordt met den naam „ordinaal getal” en dat dit eerst gepromoveerd kan worden tot „cardinaal getal” of „aantal” als de „hoofdeigenschap” (dan eenigszins van redactie gewijzigd) *bewezen* is.

Op blz. 10 zie ik staan de opgave: „Als $a < b$ en $c < d$, bewijs dan, dat $a + c < b + d$.” Het lijkt mij verkeerd, dat men in de theorie in 't geheel geen bespreking der eigenschappen, die betrekking hebben op $>$ en $<$, aantreft.

Op blz. 25 wordt gesproken van „Verhoudingsdeeling” en „Verdeelingsdeeling”. Waarom die namen gekozen zijn, wordt niet vermeld.

§ 48—§ 62 handelt over „Worteltrekking en logarithmeneming”. De schrijvers hebben dan niet anders behandeld dan geheele getallen. Nu kan zoo iets wel, maar men verwacht dan toch zeker — met alle recht op de practijk — minstens een aanvulling na de behandeling van de gebroken getallen. Doch men ziet in het geheele werk niets daarvan. Zelfs was — nu deze onderwerpen besproken zijn — zeer zeker gewenscht geweest een behandeling van het onmeetbaar getal, welke behandeling evenmin in het boek wordt aangetroffen. Dit zou van meer belang zijn geweest dan te reppen over $\log 0$ en $\sqrt[2]{1}$, welke uitdrukkingen in dit boek achterwege behooren te blijven.

Toen ik het hoofdstuk „Breuken” begon te lezen, deed het mij aangenaam aan te zien, dat de schrijvers ook bespreken, dat „met elke breuk één punt der getallenlijn correspondeert”, doch dat dit tot de „gangbare” definitie van een breuk leidt, zag ik tot mijn groote verwondering niet. Evenmin zag ik het bewijs, — dat toch zeker in een boek als dit thuis behoort — dat de rekenregels der breuken met die gangbare opvatting correpondeeren.

De definitie van het product van twee breuken $\left[\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \left(a \times \frac{c}{d} \right) : b \right]$ is omslachtig. Ze behoort aan te sluiten bij het quotient van twee producten, dat op blz. 26 behandeld is. Men krijgt dan als definitie wat de schrijvers „eigenschap” (no. 7 op blz. 111) noemen.

Op blz. 128 lees ik: „Limiet. We zeggen nu: S_n heeft tot limiet 2, als n oneindig groot wordt. Dat beteekent: het verschil tusschen het constante getal 2 en het veranderlijke getal S_n kan kleiner gemaakt worden, dan elk willekeurig vooraf vastgesteld klein getal k , door n grooter te nemen dan een bij k passend gekozen getal M ”. (Cursi-

veering van mij). Zouden de schrijvers niet eens de preciese definitie van een limiet, als hier bedoeld, in een behoorlijk wiskundig werk nalezen? Ze zullen dan zien, dat men daar voor het woord „veranderlijke” een ander woord (variant = veranderende) gebruikt en dat men daar niet een zoo vage uitdrukking bezigt als „een bij k passend gekozen getal M ”!

Het bewijs, dat $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$, voor $r < 1$, mist het algemeen karakter.

Laat ik nog zeggen, dat ik de bewijzen, die betrekking hebben op de eigenschappen der herleiding van breuken tot zuiver- en gemengd-repeteerende breuken (blz. 137 en 139) niet eenvoudig vind.

Alles samengenomen moet er — naar mijn meening — ondanks goede eigenschappen toch nog wel heel wat aan het boek veranderen, wil men kunnen zeggen, dat het — zooals de geijkte uitdrukking luidt — in een „gevoelde behoefte” voorziet.

D. P. A. V.

Naschrift. Ik zou zoo bijzonder gaarne zien, dat schrijvers van werkjes, die voor a.s. onderwijzers bedoeld zijn, het metriek stelsel van maten en gewichten opnamen, niet omdat dit inhaerent is aan een theorie der Rekenkunde, maar omdat hun dit gelegenheid zou geven eens propaganda te maken voor de *internationale* schrijfwijze.

V.

H. G. Forder, *The Foundations of Euclidean Geometry*. Cambridge, At the University Press, 1927. 343 bladzijden, 25 shillings.

Dit werk verdient de aandacht van de zeer velen, die zich met de Euclidische meetkunde van twee en drie dimensies (dus met de „gewone” meetkunde) bezig houden, want het is het eerste en totnogtoe eenige werk, dat deze meetkunde wetenschappelijk behandelt.¹⁾ Ik zal het daarom eenigszins uitvoerig bespreken en (zulks in verband met het didaktisch karakter van het tijdschrift „Euclides”) nagaan, in hoeverre het den leeraar bij het middelbaar onderwijs van dienst kan zijn, om zijn inzicht in de leerstof te verdiepen, en den leergang te verbeteren.

De schrijver maakt in zijn voorbericht de twee zeer juiste opmerkingen, dat „although the Euclidean Geometry is the oldest of sciences and has been studied critically for over two thousand years, it seems that there is no text-book which gives a connected and rigorous account of that doctrine in the light of modern investigations”, en dat „scarcely one proof in any school text will survive a critical examina-

¹⁾ Eene vroegere poging tot wetenschappelijke behandeling der gewone meetkunde, namelijk door Dr. G. B. Halsted in zijne „*Rational Geometry*”, moet als mislukt beschouwd worden wegens de vrijwel volkomen verwaarloozing der stellingen, die uit de axiomata van volgorde voortvloeien.

tion" (de woorden „any school text" had hij gerust kunnen vervangen door „any text-book of elementary geometry"); hij geeft daarom strange afleidingen van de stellingen der school-leerstof, slechts een enkele maal iets verder gaande. Hij behandelt achtereenvolgens (na eene algemeene inleiding over getallenstelsels) de axiomata van volgorde met eenige belangrijke daaruit voortvloeiende stellingen, de axiomata van congruentie met wat daaruit kan worden afgeleid, ook omtrent den cirkel, dan de parallelentheorie, evenredigheid en gelijkvormigheid, de stellingen van Desargues en Pappos, en de constructies. Daarna terugkeerende tot de axiomata van volgorde behandelt de schrijver de algemeene theorie van veelhoeken (analysis situs of plane polygons) en veelvlakken, en hunne oppervlakten en inhouden. Ten slotte de continuïteitseigenschappen, en als een soort toegift nog enkele eigenschappen uit de niet-Euclidische meetkunden.

Aan de behandeling is in hoofdzaak ten grondslag gelegd het stelsel van axiomata en grondbegrippen, door Veblen in 1904 gepubliceerd in eene verhandeling, getiteld *A System of Axioms for Geometry*. Eene belangrijke eigenaardigheid van dit stelsel is, dat niet zooals bijvoorbeeld bij Hilbert, axiomata van incidentie en axiomata van volgorde worden onderscheiden, maar dat de incidentie en de volgorde te zamen worden behandeld. Uitgangspunt is hierbij eene als grondbegrip aangenomen betrekking tusschen drie punten A, B en C, de lineaire orde [ABC], welke tegelijkertijd aangeeft, dat A, B en C collineair zijn en dat B tusschen A en C ligt. De rechte AB wordt dan gedefinieerd als de verzameling der punten A en B en der punten X in een van de lineaire orden [XAB], [AXB] en [ABX]. Hierdoor wordt vermeden, dat de rechte lijn als grondbegrip wordt ingevoerd, maar dat er toch telkens mee gewerkt wordt als ware zij de verzameling der op haar gelegen punten. Veel van wat gewoonlijk axioma of definitie is, wordt stelling; dit maakt, dat de behandeling zich vrij ver van de gebruikelijke leergangen verwijderd. Onderzoekingen naar de onafhankelijkheid en niet-strijdigheid der axiomata vindt men in het boek niet (Veblen heeft zijn stelsel in bovengenoemde verhandeling uitvoerig onderzocht); wel heeft de schrijver veel zorg eraan besteed, niet meer dan strict noodig is in de axiomata neer te leggen, en gaat hij in den loop der behandeling nog telkens over tot „weakening of the axioms".

De afleiding der stellingen geschiedt op zeer economische wijze: telkens als twee of meer bewijzen een deel gemeenschappelijk zouden hebben, is dit deel tot het bewijs van een apart stellinkje gemaakt, waarnaar dan verder verwezen wordt. Dit heeft eenerzijds ten gevolge, dat alle bewijzen kort zijn, wat een voordeel is, maar anderzijds, dat het aantal stellingen verbazend groot wordt, en dat is een bezwaar, want voor den lezer, die niet reeds zeer goed op de hoogte is van wat behandeld zal worden, is het zeer moeilijk, in dien overvloed van stellingen den weg te vinden. Men moet daarbij bedenken, dat ook zonder deze economie het aantal stellingen bij strenge behandeling veel grooter is dan bij de gebruikelijke, omdat in de schoolboekjes (en in de daarmee uit een oogpunt van strengheid op één lijn te stellen werken) zeer vele stellingen aan de aanschouwing ontleend *en dan niet geformuleerd* worden. Ik voor mij zou er den voorkeur aan geven

hebben, het aantal stellingen wat te beperken, en dan de bewijzen maar wat langer te maken; desnoods met hier en daar eene herhaling. — De overzichtelijkheid wordt bovendien niet bevorderd door een vernuftig decimaal verwijzingssysteem: de vijftien hoofdstukken zijn verdeeld in decimaal genummerde „articles”; en van deze zijn weer telkens eenige tot paragrafen samengevat.

Zulk een article van soms een regel lengte kan eene belangrijke stelling bevatten, bijvoorbeeld II 10,11 en II 19,58 en andere.

Toen ik dit boek in handen nam, was ik zeer benieuwd, hoe de schrijver de optelling van hoeken in de planimetrie zou behandelen; hiervan eene behoorlijke theorie te geven is nogal lastig, omdat de hoeken niet de eigenschap der getallen hebben, dat de optelling onbeperkt uitvoerbaar is. De schrijver verbindt aan elken hoek een getal, angular measure, en maakt in IV 57,7 een soort verontschuldiging: it is rather awkward that an angular measure need not be the measure of any angle, but some awkwardness is inevitable, enz. Inderdaad, het is onvermijdelijk, dat niet aan elke som van hoekmaten een hoek beantwoordt. Maar heel wat meer awkward vind ik de manier, waarop de schrijver komt tot de stelling, dat de hoeksom („angle-sum,” let wel: niet „som der hoeken”) van een n -hoek $(n - 2)\pi$ bedraagt. Nadat eerst bewezen is, dat elke veelhoek kan worden verdeeld in driehoeken, waarvan de hoekpunten uitsluitend vallen in die van den veelhoek, wordt de som der hoekmaten van de hoeken van die driehoeken *gedefinieerd* als hoeksom van den veelhoek. Een hoek van een veelhoek wordt nergens gedefinieerd, en daardoor was het niet mogelijk, de hoeksom van een veelhoek te definieeren als som der hoekmaten van de hoeken van den veelhoek. Deze awkwardness ware te vermijden geweest, als de schrijver inspringende hoeken had willen toelaten, en recht had gedaan aan het feit, dat men getallen als hoekmaten (in graden, radialen of rechte hoeken) toekent aan hoekgebieden („deelen van het platte vlak”, in de naieve terminologie van sommige schoolboeken), niet aan de hoekbegrenzungen, en als hij niet had vastgehouden aan de in de Euclidische meetkunde m. i. niet goed bruikbare definitie van een hoek als tweetal halve lijnen met gemeenschappelijk eindpunt.

Fouten heb ik niet kunnen ontdekken, behalve eene vergissing, die van weinig belang is (III 1,2). De typografische uitvoering is voortreffelijk, maar de prijs naar onze begrippen hoog.

Mijn oordeel samenvattende kan ik dit boek ten zeerste aanbevelen, al ware het slechts om de unieke plaats die het in de litteratuur inneemt: behandeling gevende aan een der meest beoefende en slechtst gekende onderdeelen der wiskunde. Het is streng en betrouwbaar, maar hier en daar wat laconiek en daardoor niet gemakkelijk te lezen. Het verwijdt zich sterk (mijns inziens sterker dan noodig is) van de elementaire leergangen, speciaal natuurlijk van de zeer gebrekkige Nederlandsche, en daardoor zal de Nederlandsche leeraar er niet veel *direct* profijt voor zijn onderwijs uit trekken, maar wien het te doen is om zijn inzicht in het gebouw der Euclidische meetkunde te verbeteren, vindt in het boek van Forder een betrouwbaren gids. Het zal wel

geen betoog behoeven, dat candidaten voor L. O. en K. er niet het minste in vinden, wat hun voor het examen van nut kan zijn.

J. H. S.

Dr. J. A. Barrau, Analytische Meetkunde. Tweede deel: De Ruimte. Groningen, P. Noordhoff, 1927. 460 bladzijden.

Met de verschijning van het tweede deel van Prof. Barrau's Analytische Meetkunde is een werk gereed gekomen, dat sterk verschilt van de bestaande binnen- en buitenlandsche werken, die ongeveer dezelfde namen dragen. Een werk, dat wij met zeer groote ingenomenheid begroeten, omdat het ons van zoo buitengewone beteekenis schijnt voor degenen, die zich rekenschap willen geven van de onderlinge betrekkingen tusschen de verschillende meetkunden, Euclidisch en niet-Euclidisch, twee-, drie- en meerdimensionaal. De schrijver behandelt de gebruikelijke onderwerpen van de analytische meetkunde der ruimte, maar telkens in nauw verband met allerlei uitbreidingen tot meer dimensies en op niet-Euclidische meetkunden. Ook lijnenmeetkunde en collineaties komen aan het slot van het werk ter sprake.

Moge dit bijzonder fraaie werk vele lezers vinden, en zodoende in ruime mate bijdragen tot de bevordering van de vergelijkende meetkundestudie.

J. H. S.

F. Hausdorff, Mengenlehre. Zweite, neubearbeitete Auflage. 285 pg. W. de Gruyter, Berlin und Leipzig.

Blijkbaar wordt in de meeste landen de verzamelingsleer nog steeds minder om haarzelf bestudeerd, dan wel om de bijna onmisbare hulp, welke zij biedt bij de studie van andere onderdeelen der wiskunde. Leerboeken welke uitsluitend verzamelingsleer geven, verschijnen daar weinig. Veelal vindt men het onderwerp behandeld in een eerste hoofdstuk of eerste deel van algemeene leerboeken en monographieën over functie-theorie. Natuurlijk zijn er uitzonderingen, een eigenaardige vormt het boek van W. H. en G. C. Young: „Theory of sets of points”. Dit verscheen reeds in 1906, was spoedig uitverkocht, maar werd nooit herdrukt. Dat er voor het onderwerp in kwestie toch steeds belangstelling bestaat, blijkt herhaaldelijk. Men denke slechts aan het tijdschrift van *Sierpinski*: „Fundamenta Mathematicae”, dat vrijwel geheel aan de verzamelingsleer is gewijd.

Duitschland neemt op dit gebied een uitzonderingspositie in, waar-schijnlijk te verklaren door het feit dat de Mengenlehre daar het eerst tot ontwikkeling kwam. Onder de boeken welke in dat land over de verzamelingsleer werden gepubliceerd, wist dat van *Hausdorff* zich bij zijn eerste verschijnen in 1914 een belangrijke plaats te veroveren. Het muntte uit door helderheid en overzichtelijkheid. Zeer vele onderdeelen werden behandeld en steeds werd de weg voor verdere studie

duidelijk aangewezen. Bij den tweeden druk is het boek in omvang vrij sterk afgenomen en doordat sommige onderwerpen nu uitvoeriger behandeld zijn, worden andere niet, of vrijwel niet, aangeroerd. De schrijver [die zooals de meeste Duitsche mathematici, sterk formalistische neigingen heeft] stelde zich in den nieuwen druk ten doel de belangrijkste theorema's met volledige bewijzen te geven, zoodat men, om de tekst geheel te kunnen volgen, geen andere publicaties noodig heeft. Van de lezers wordt, wat kennis betreft niet veel meer verlangd dan eenige bekendheid met de infinitesimaalrekening, maar wel wordt vereischt een zekere strengheid in abstract denken.

Uitvoeriger dan vroeger zijn behandeld de verzamelingen van *Borel* en de functies van *Baire*, terwijl is toegevoegd een en ander over de verzamelingen van *Suslin*, die eerst in 1917 zijn ingevoerd. Ook van continue afbeelding en homographie is meer werk gemaakt.

Tegenover dit alles staat een minder uitgebreide behandeling van de geordende verzamelingen, terwijl de maat- en integraaltheorie van *Lebesgue* geheel zijn komen te vervallen. Bij de leer der puntverzamelingen is het topologische standpunt verlaten en beperkt de schrijver zich nu tot de meer eenvoudige theorie der metrische ruimten. Slechts een kort overzicht der topologische ruimten wordt nog gegeven.

Ook aan de andere zijde heeft de schrijver zich engere grenzen gesteld, waar hij in de theorie der Euclidische ruimte alles heeft weggelaten, waarbij naderende veelhoeken en veelvlakken te pas komen.

Tot een bespreking van antinomieën en fundeering heeft de schrijver zich evenmin als vroeger laten verleiden.

Saamgenomen lijkt deze druk iets minder aantrekkelijk dan de eerste, wat natuurlijk een persoonlijke opvatting is. Meer objectief is ongetwijfeld het oordeel, dat hier een groote, aaneengesloten kern van de klassieke verzamelingsleer op degelijke en duidelijke wijze behandeld is.

B. P. H.

DE FORMULE VAN HERON.

Ir. D. J. KRUIJTBO SCH (Wageningen).

De algebraïsche afleiding van de formule voor de hoogtelijn en de daaruit voortvloeiende formule voor het oppervlak van een driehoek is overbekend. Zij is in zooverre nuttig voor onze leerlingen van de tweede H. B. S.-klasse, omdat zij nog eens een welkome herhaling biedt van de ontbinding van den veelterm:

$$2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4,$$

die in den vorm: $4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2$ kan worden geschreven.

Met meetkunde heeft deze afleiding echter weinig te maken. De woorden van A. M. Rebière indachtig: „Das einzige Mittel den Untersuchungsgeist zu üben, besteht darin, die bekannten Entdeckungen aufs neue durchzunehmen, gerade so wie sie gemacht worden sind”¹⁾; schijnt hier een schoone gelegenheid geboden om het oorspronkelijke bewijs van *Heron*, natuurlijk in gemoderniseerden vorm, te geven, een bewijs, waarvan *Günther* zegt in zijn *Geschichte der Mathematik*²⁾: „Höchst scharfsinnig ist der Originalbeweis, den kein Lehrer unserer Zeit seinen Schülern vorenthalten sollte.”

Op geschiedkundige bijzonderheden betreffende dien *Hero* of *Heron* van *Alexandrië* ga ik nu niet in. Volgens *Günther* is „die heronische Frage” nog steeds onderwerp van onderzoek. *D. E. Smith*³⁾ meent, dat na de zorgvuldige onderzoekingen van *Wilhelm Schmidt: Heronis Alexandrini Opera quae supersunt omnia*, vaststaat, dat *Hero* heeft geleefd in de eerste eeuw onzer jaar-

¹⁾ Ik vond dit in 't Duitsch vertaalde citaat bij Dr. H. A. Naber, *Das Theorem des Pythagoras*, Haarlem, 1908, op bladz. 164. *Naber* geeft geen verdere bronnen aan. In de *History of Mathematics* by *D. E. Smith*, Volume I, vond ik A. M. Rebière (1841—1900) vermeld als schrijver van „Les femmes dans la science”.

²⁾ 1. Teil, S. 120.

³⁾ *History of Mathematics*. Vol. I. p. 125.

telling; volgens Dr. *Johannes Tropicke* is het waarschijnlijk, dat hij in de eerste eeuw vóór onze jaartelling heeft geleefd. Volgens *Tropicke*¹⁾ is het voorschrift om het oppervlak van een driehoek uit zijn drie zijden te berekenen waarschijnlijk van *Archimedes* afkomstig, zoodat we dus misschien met meer recht van *de formule van Archimedes* zouden kunnen spreken.

Hoe dit dan ook zij, deze prioriteitsquaestie doet geen afbreuk aan de scherpzinnigheid van genoemd bewijs, dat hier moge volgen.

De formule: $O = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$
kan worden geschreven in den vorm:

$$s(s-a) : O = O : (s-b)(s-c)$$

m. a. w. het oppervlak van den driehoek is middelevenredig tusschen twee rechthoeken.

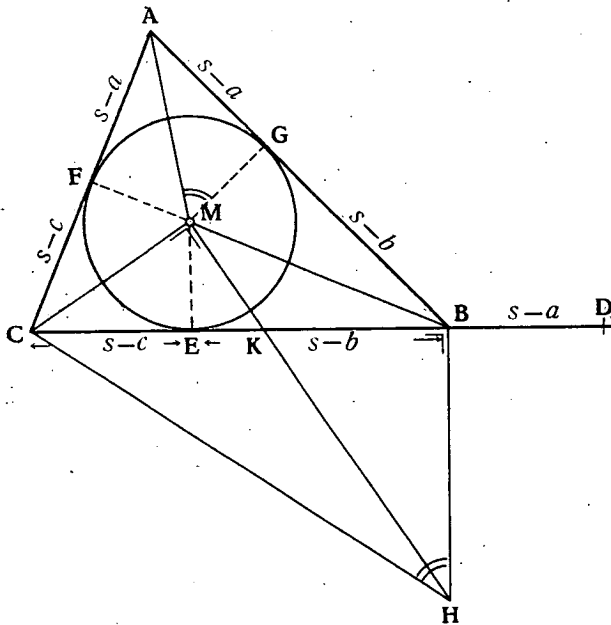


Fig. 1.

In $\triangle ABC$ (fig. 1) is de ingeschreven cirkel beschreven. Zijn E, F en G de raakpunten met de zijden, dan is $AF = AG = s - a$; $BG = BE = s - b$; $CE = CF = s - c$ en $\triangle ABC = r \cdot s$.

¹⁾ Geschichte der Elementar-Mathematik, Bd. IV, S. 9.

Wordt nu op het verlengde van CB het stuk $BD = AG = s - a$ genomen, dan is $CD = s$ en dus $O = ME \times CD$.

Trek nu $BH \perp CB$ en $MH \perp CM$ en verbind H met C; dan liggen C, M, B en H op een cirkelomtrek, waaruit volgt:

$$\angle CHB = 180^\circ - \angle CMB = \frac{1}{2} (\angle B + \angle C) = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle A = \angle AMG.$$

Hieruit volgt: $\triangle CBH \sim \triangle AGM$ en dus:

$$CB : AG = BH : GM \text{ of:}$$

$$CB : BD = BH : ME.$$

Nu volgt uit de gelijkvormigheid der driehoeken BHK en EMK:

$$BH : ME = BK : KE.$$

We weten dus: $CB : BD = BK : KE$ of na toepassing van de eigenschap: de som van de termen der eerste reden verhoudt zich tot die van de tweede reden als de tweede term tot den vierden:

$$CD : BD = BE : KE \text{ of}$$

$$CD^2 : BD \times CD = BE \times CE : KE \times CE.$$

Nu is $KE \times CE = ME^2$, dus:

$$BD \times CD : CD^2 = ME^2 : BE \times CE, \text{ dus ook:}$$

$$BD \times CD : CD \times ME = CD \times ME : BE \times CE \text{ of:}$$

$$s(s-a) : O = O : (s-b)(s-c).$$

Hoeveel leerrijker is een dergelijk bewijs dan de berekening der hoogtelijn met behulp van de projectiestelling!

Een kort en elegant bewijs is het volgende, van ouds bekend; men vindt het b.v. in *Molenbroeks Vlakke Meetkunde*, 6de druk, blz. 277 en o.a. als vraagstuk (nr. 21 van de algemeene herhaling) in Wijdenes en De Lange's schoolboek *Vlakke Meetkunde II*.

In fig. 2 zijn MD en NE de stralen van den ingeschreven cirkel en den aangeschreven cirkel op de zijde $BC = a$ in $\triangle ABC$. Nu is $BN \perp BM$ en $NE \perp BD$, dus is $\triangle BEN \sim \triangle MDB$. Verder is:

$$MD = r = \frac{O}{s}; \quad NE = r_a = \frac{O}{s-a}; \quad BD = s-b \text{ en } BE = s-c.$$

Uit de gelijkvormigheid der driehoeken BEN en MDB volgt:

$$BE : MD = EN : DB$$

$$(s-c) : \frac{O}{s} = \frac{O}{s-a} : (s-b)$$

$$O = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

In verband met de formule van *Heron* rijst de vraag, welke waarden we aan a , b en c moeten toekennen, opdat de uitdrukking voor O rationaal worde.

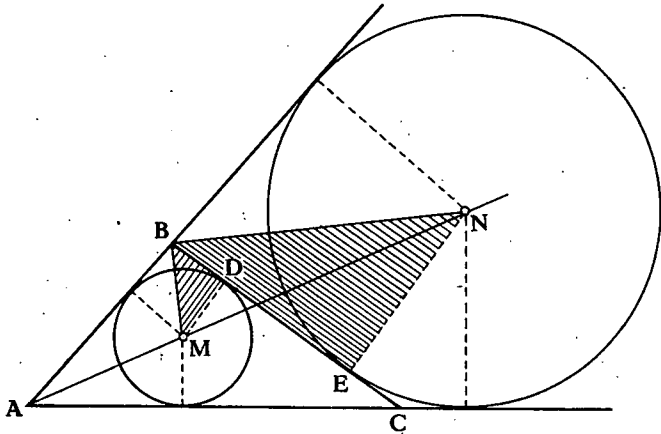


Fig. 2.

Meetbare waarden voor a , b en c , die voor het oppervlak van $\triangle ABC$ een meetbare waarde opleveren, worden *Heronische* getallen genoemd en driehoeken met meetbare zijden en een meetbaar oppervlak heeten *Heronische* of rationale driehoeken.

Zoo noemt men *Pythagoreïsche* driehoeken of rationale rechthoekige driehoeken, die rechthoekige driehoeken, waarvan alle drie zijden rationaal zijn. *Pythagoreïsche* getallen worden het eenvoudigst gevonden met behulp van de identiteit:

$$(x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = (x^2 + y^2)^2$$

$$x = 2 \text{ en } y = 1 \text{ geeft: } 3^2 + 4^2 = 5^2$$

$$x = 3 \text{ en } y = 2 \text{ geeft: } 5^2 + 12^2 = 13^2 \text{ enz.}$$

Een zeer eenvoudige en algemeen bekende¹⁾ afleiding van deze identiteit is de volgende:

De vergelijking: $a^2 + b^2 = c^2$ moet in geheele waarden van a , b en c worden opgelost. We mogen schrijven:

$$a^2 = c^2 - b^2$$

$$\frac{a}{c-b} = \frac{c+b}{a} = \frac{x}{y} \quad (x > y),$$

¹⁾ Zie b.v. *Molenbroek*, *Planimetrie* blz. 168 en voor andere dergelijke onbepaalde vergelijkingen op tal van plaatsen in het N. T. v. W.

waarbij x en y twee geheele, onderling ondeelbare getallen voorstellen.

$$c + b = \frac{x}{y} \cdot a$$

$$c - b = \frac{y}{x} \cdot a$$

Hieruit volgt: $c = \frac{x^2 + y^2}{2xy} \cdot a$; $b = \frac{x^2 - y^2}{2xy} \cdot a$.

Stelt men nu: $a = 2xy$, dan is $c = x^2 + y^2$ en $b = x^2 - y^2$.

Een veelvuldig toegepaste afleiding der *Heronische* driehoeken uit het onmiddellijk voorafgaande is de volgende:

Elke driehoek kan door een hoogtelijn in twee rechthoekige driehoeken verdeeld worden, zoodat men *Heronische* driehoeken kan verkrijgen door twee *Pythagoreïsche* driehoeken met een even groote rechthoekszijde tegen elkaar of op elkaar te plaatsen.

Nemen we een driehoek van het type (3, 4, 5) met de zijden 12, 16 en 20 en plaatsen we deze *op* of *naast* den driehoek (5, 12, 13), zoodanig dat de rechthoekszijden 12 samenvallen, dan vinden we de *Heronische* driehoeken (20, 13, 21) met oppervlak $\frac{1}{2} \times 12 \times 21 = 126$ en (20, 13, 11) met oppervlak $\frac{1}{2} \times 12 \times 11 = 66$. We kunnen den driehoek (3, 4, 5) ook vergrooten tot driehoek (9, 12, 15), die met den driehoek (5, 12, 13) de rationale driehoeken (13, 14, 15) en (13, 4, 15) oplevert. Men raadplege verder over dit onderwerp de studie van W. Lietzmann, *Der Pythagoreïsche Lehrsatz*, verschenen in de Mathematische Bibliothek (Teubner).

Tenslotte moge hier nog een methode ontwikkeld worden om langs directen weg *Heronische* driehoeken te bepalen en die ontleend is aan een artikel van H. Böttcher in de Unterrichtsblätter

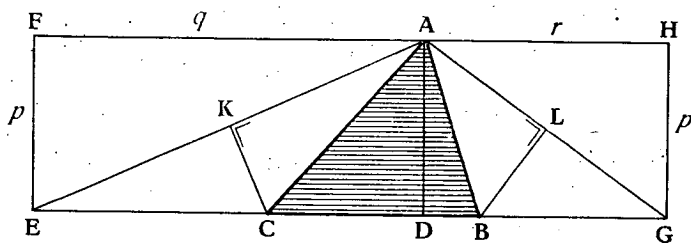


Fig. 3.

für Math. u. Naturw. van 1911 en waarvan ik langs indirecten weg kennis nam door een mededeeling van enkele regels in het Wiskundig Tijdschrift van F. J. Vaes, jaargang 8, bladz. 214.

Wil $\triangle ABC$ (fig. 3) *Heronisch* zijn, dan moet de hoogte AD rationaal zijn. Stel $AD = p$. Er blijven nu nog twee gegevens te kiezen over. Maak $CE = CA$ en $BG = BA$, dan is EG de omtrek, die door D in ED en GD wordt verdeeld. Stel $ED = q$ en $GD = r$, dan is de driehoek door p , q en r volkomen bepaald en de oppervlakte is rationaal, als p , q en r rationaal zijn.

We vinden immers voor AC:

$$\frac{q^2 + p^2}{2q}, \text{ want: } AC^2 = p^2 + (q - AC)^2; \text{ eveneens: } AB = \frac{r^2 + p^2}{2r};$$

$$\text{verder is: } CD = q - \frac{q^2 + p^2}{2q} = \frac{q^2 - p^2}{2q} \text{ en: } BD = \frac{r^2 - p^2}{2r}.$$

Zoodat we ten slotte voor BC vinden:

$$BC = \frac{q^2 - p^2}{2q} + \frac{r^2 - p^2}{2r} = \frac{(qr - p^2)(q + r)}{2qr}.$$

Dus $\triangle ABC = \frac{p(qr - p^2)(q + r)}{4qr}$, terwijl de omtrek de waarde $(q + r)$ heeft.

Behalve de zijden, de hoogtelijnen en het oppervlak, zijn in zulke driehoeken ook de stralen van om-, in- en aangeschreven cirkels rationaal, zooals uit de formules voor deze stralen volgt.

We kunnen nu voor p , q en r willekeurige waarden kiezen, mits:

$$qr > p^2.$$

Is $q < p$, dan is a fortiori $r > p$, de projectie CD is dan negatief en de projectie BD positief, dus $\angle C$ zal stomp en $\angle B$ zal scherp zijn. Natuurlijk is $\angle C$ recht voor $q = p$ en $\angle B$ recht voor $r = p$.

De constructie van den driehoek uit p , q , en r is hoogst eenvoudig. Plaats den rechthoek (p, q) naast den rechthoek (p, r) en construeer de middelloodlijnen der diagonalen AE en AG, waardoor de hoekpunten B en C worden gevonden.

We zullen nu nog trachten op te sporen aan welke voorwaarden p , q en r moeten voldoen, opdat de hoek bij A scherp, recht of stomp zal zijn.

Is $\angle A \leq 90^\circ$, dan is $AD^2 \geq CD \times BD$

$$p^2 \geq \frac{q^2 - p^2}{2q} \times \frac{r^2 - p^2}{2r}$$

$$p^4 - p^2q^2 - p^2r^2 + q^2r^2 - 4p^2qr \leq 0$$

$$(qr - p^2)^2 - p^2(q + r)^2 \leq 0$$

$$\{qr + p(-p + q + r)\} \{qr - p(p + q + r)\} \leq 0$$

Nu is steeds $qr + p(-p + q + r)$ positief, want $qr > p^2$, we vinden dus

$$\angle A \leq 90^\circ, \text{ als } qr - p(p + q + r) \leq 0.$$

Ten slotte nog enkele getallenvoorbeelden.

I. $\left. \begin{array}{l} p = 2 \\ q = 5 \\ r = 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} qr > p^2, \text{ de driehoek is bestaanbaar.} \\ q > p \text{ en } r > p, \text{ dus de hoeken bij C en B zijn scherp.} \end{array}$

$$qr - p(p + q + r) = 15 - 20 < 0, \text{ dus } \angle A \text{ is scherp.}$$

$$AC = \frac{25 + 4}{10} = \frac{29}{10}; AB = \frac{9 + 4}{6} = \frac{13}{6}; \text{ de omtrek is}$$

$$q + r = 8, \text{ dus } BC = 8 - \frac{29}{10} - \frac{13}{6} = \frac{88}{30}.$$

$$\text{Dus } AC : AB : BC = \frac{29}{10} : \frac{13}{6} : \frac{88}{30} = 87 : 65 : 88.$$

Proef: $\left. \begin{array}{l} a = 88 \\ b = 87 \\ c = 65 \\ \hline 2s = 240 \end{array} \right\} \begin{array}{l} s = 120 \\ s - a = 32 \\ s - b = 33 \\ s - c = 55 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \triangle ABC = \\ \sqrt{120 \cdot 32 \cdot 33 \cdot 55} = \\ \sqrt{2^8 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11^2} = 2640. \end{array} \right.$

II. $\left. \begin{array}{l} p = 2 \\ q = 10 \\ r = 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} qr > p^2, \text{ de driehoek is bestaanbaar.} \\ q > p \text{ en } r > p, \text{ dus de hoeken bij C en B zijn scherp.} \end{array}$

$$qr - p(p + q + r) = 30 - 2 \times 15 = 0, \text{ dus } \angle A \text{ is recht.}$$

$$AC = \frac{100 + 4}{20} = \frac{26}{5}; AB = \frac{9 + 4}{6} = \frac{13}{6};$$

$$BC = 10 + 3 - \frac{26}{5} - \frac{13}{6} = \frac{169}{30}.$$

$$\text{Dus: } AC : AB : BC = \frac{26}{5} : \frac{13}{6} : \frac{169}{30} = 12 : 5 : 13 \text{ en dit is}$$

een bekende groep *Pythagoreïsche* getallen.

Ten slotte hoop ik, dat Prof. *Hk. de Vries* op zijn bekende degelijke en boeiende wijze de „Heronische Frage” nog eens tot onderwerp zal kiezen voor een zijner historische studiën.

GRIEKSCHE WISKUNDE.¹⁾

M. d. V.; D. en H.

Toen het Bestuur van de groep Liwenagel mij tot het houden van een voordracht voor uwe vergadering uitnoodigde, heb ik geen enkel oogenblik gearzeld over de vraag, in welk gebied der wiskunde ik mijn onderwerp zou zoeken. Ik bezit reeds lang de overtuiging, dat de bestudeering van de wordingsgeschiedenis van ons vak een veel grootere aandacht verdient, dan daaraan in den regel geschonken wordt, omdat zij naast den algemeenen blikverruimenden invloed, die aan alle historische werk eigen is, bij kan dragen tot verdieping van het inzicht in het hedendaagsche mathematische denken en ik kon dus niet anders dan dankbaar de mij geboden gelegenheid aanvaarden, om door de behandeling van een historisch onderwerp die overtuiging te uiten en te motiveeren.

Welke phase uit den groei der mathesis daarvoor het meest in aanmerking kwam, kon daarna niet meer twijfelachtig zijn. De Grieksche wiskunde toch vertegenwoordigt den oudsten vorm van de zuivere, d. w. z. ter wille van zich zelve en zonder zorg voor mogelijke toepasbaarheid beoefende mathesis en zij heeft in zoo sterke mate de vormen bepaald, waarin het mathematische denken tot in onzen tijd verloopt, dat de historische belangstelling zich altijd in de eerste plaats op haar zal richten; bovendien echter vertoont ze zich aan ons als een zoo sublieme uiting van den Griekschen geest, dat zij, evenzeer als de Grieksche scheppingen op de gebieden van de kunst en het wijsgeerig denken, de aandacht van

¹⁾ Voordracht, gehouden voor de groepen L. I. W. E. N. A. G. E. L. en Classici van het Genootschap van Leeraren aan Nederlandsche Gymnasiën te Arnhem op 2 September 1927. De beperkte plaatsruimte van dit tijdschrift dwingt mij, af te zien van de vermelding van de bewijsplaatsen, waarop het betoog steunt. De belangstellende lezer moge bij voorbaat verwezen worden naar een in voorbereiding verkeerend werkje van mijn hand over Grieksche Wiskunde.

ieder verdient, die in de Helleensche beschaving de bronnen van het Europeesche geestesleven zoekt.

De eerste overweging zou de keuze van mijn onderwerp voor iedere bijeenkomst van mathematici rechtvaardigen; de tweede rechtvaardigt haar in hoogere mate, nu ik het voorrecht heb, te spreken voor een vergadering van docenten aan een onderwijsinrichting, die zich niet alleen ten doel stelt, aan hare leerlingen een zekere mate van kennis van een bepaalde groep wetenschappen bij te brengen ter wille van de vormende waarde, die men daaraan toekent of van het practische nut, dat men daarvan verwacht, maar die bovendien het ideaal heeft, hun meest ontvankelijke levensjaren te doen verloopen in een sfeer, waarin iets van den geest der antieke beschaving leeft. Want het is wel waar, dat de taak, die sfeer te scheppen in de eerste plaats rust op de docenten in de oude talen, omdat zij het zijn, die door het aanbrengen van de kennis van de Grieksche taal den eenigen weg kunnen openen, die tot contact met Hellas voeren kan; en omdat zij in de voortbrengselen der letterkunde over de voor jeugdige gemoederen meest onmiddellijk aansprekende uitingen der Grieksche cultuur beschikken; maar er mag daarom niet vergeten worden, dat, naast hen, vooral de mathematici geroepen zijn, om het moderne gymnasium aan het humanistisch ideaal te helpen beantwoorden. Zij zullen dat, onopzettelijk, reeds doen, voorzover zij in hun behandeling der wiskunde iets trachten te doen leven van den geest der zuivere mathesis, die Grieksch is in oorsprong en wezen; zij zullen hun aandeel in de gemeenschappelijke taak echter bewust versterken, wanneer zij, zelf zich thuis gevoelend in de gedachtenwereld der antieke wis- en natuurkunde, hun leerlingen kunnen inwijden in een gebied van het Grieksche geestesleven, dat uit den aard der zaak in het overheerschend op taal- en letterkunde gerichte onderwijs der classici niet tot zijn recht komt.

Ik heb aan dezen gedachtengang, waarin wiskunde en oude talen gezamenlijk gezien worden als vormende de kernvakken van het humanistisch gymnasium, waarin classici en mathematici dus verschijnen als natuurlijke bondgenooten in hun strijd tegen een tijdgeest, die te zeer den nadruk wil leggen op de wenschelijkheid van onmiddellijk practisch nut van een onderwijs, dat zij voor alles als geestvormend beschouwen, den moed ontleend, aan het bestuur van Liwenagel voor te stellen, ook de leden van de groep classici van het Genootschap tot deze bijeenkomst uit te noodigen. Ik besef

wel, dat hierdoor mijn taak niet vergemakkelijkt wordt. De wiskunde heeft nu eenmaal in het algemeen en, naar ik vrees, heeft zelfs de Grieksche wiskunde voor vele classici den naam, voor niet-mathematici ongenietbaar te zijn en ik voel de verantwoordelijkheid, er voor te moeten zorgen, dat deze naar mijn meening onjuiste opvatting niet door mijn schuld nieuwen steun krijgt.

Ik zal me daarom op een enkele uitzondering na beperken tot zoo elementaire mathematische onderwerpen, dat ieder, die een Gymnasium heeft afgeloopen, geacht kan worden, eenige kennis daarvan althans eenmaal te hebben bezeten. Die beperking zal, naar ik overtuigd ben, voor de mathematici onder u geen bezwaar zijn; zij zullen het wezenlijke der Grieksche wiskunde misschien nog scherper beseffen bij een beschouwing van hare beginselen dan bij een uiteenzetting van de hoogste der door haar bereikte resultaten.

Het probleem, dat de studie der Grieksche wiskunde ons stelt, is viervoudig. Het is samen te vatten in de vier volgende vragen: hoe heeft zich de Grieksche wiskunde ontwikkeld? welke zijn, als ze tot vollen bloei gekomen is, hare methoden en hare resultaten? welke positie bekleedt ze in het Grieksche geestesleven? welke beteekenis heeft ze voor onzen tijd?

Ik zal wel niet behoeven te betoogen, dat ik mij door de keuze van den alles omvattenden titel „Grieksche wiskunde” niet heb verplicht, u van den huidige stand van deze vier problemen een eenigszins volledig overzicht te geven. De algemeenheid van dien titel duidt op niets anders dan op mijn voornemen, u door het doen van enkele losse grepen uit het geheele gebied iets typeerends voor elk van hen te toonen.

Ik zou dan willen beginnen met enkele opmerkingen over de tegenwoordige opvattingen aangaande de ontwikkeling der wiskunde tot aan de periode van haar grootsten bloei, dus tot aan den tijd van Euclides, Archimedes en Apollonius, wier werkzaamheid hoofdzakelijk kort voor of in de 3e eeuw voor Christus valt.

Het begin van de wetenschappelijke beoefening der mathesis wordt door de traditie in verband gebracht met den naam van Pythagoras. Proklos, in zijn commentaar op het 1e boek van Euclides, vertelt ons, hoe hij het was, die de geometrie vervormde *εἰς σχῆμα παιδείας ἐλευθέρου* dus tot een vrije, d. w. z. van practische doeleinden losgemaakte wetenschap, hoe hij haar grondslagen *ἀνωθεν*, van boven af, dus deductief, onderzocht en hoe hij haar stellingen *ἀπόλως* en

νοερός, dus immaterieel en door het denken alleen bestudeerde. Naast deze algemeene verdienste schrijft de overlevering òf aan Pythagoras zelf òf aan zijn naaste volgelingen een aantal mathematische ontdekkingen toe, waaronder het algemeene bewijs van het theorema, dat nu nog steeds zijn naam draagt, verder, weer op gezag van Proklos, de ontdekking van het irrationale, d. w. z. van het verschijnsel, dat er lijnstukken bestaan, die geen gemeene maat hebben, dus waarbij geen derde lijnstuk te vinden is, dat op beide een geheel aantal malen begrepen is, en de constructie van de vijf regelmatige veelvlakken, de vijf eenig mogelijke lichamen, die begrensd worden door regelmatige veelhoeken, waarvan er in elk hoekpunt evenveel samenkomen. Ten slotte wordt hij beschouwd als de schepper eener mathematische natuurphilosophie, die in het getal het wezen der dingen leerde zien en welker opvattingen in het aphorisme: „de dingen zijn getallen” worden samengevat.

De hiermee in groote lijnen geschetste voorstelling omtrent het werk van Pythagoras heeft tot voor betrekkelijk korten tijd onder de beoefenaren van de geschiedenis der wiskunde haar volle geldigheid behouden. Men was er zich wel van bewust, dat zij feitelijk op geen andere basis steunde dan op het citaat uit Proklos, die zijn werk schreef 9 eeuwen na den tijd, waarin Pythagoras leefde, en op enkele vage, neo-pythagoraeische anecdoten; men was misschien wel eenigszins gaan twijfelen aan haar juistheid, toen de historici der Grieksche Wijsbegeerte Pythagoras hoe langer hoe meer gingen behandelen als een legendaire gestalte, waarvan het traditioneele beeld geheel onder neo-pythagoraeischen invloed was gevormd, maar men was daardoor toch maar weinig geschokt in de overtuiging, dat de wijsgeer van Krotoon voor de geschiedenis der wiskunde als een historisch wel bepaalde figuur mocht worden beschouwd. Er scheen voor die overtuiging inderdaad grond te bestaan; men meende namelijk redenen te hebben, aan te nemen, dat de geschiedenis der wiskunde zich, wat Pythagoras betrof, in een veel gunstiger positie bevond, dan die der wijsbegeerte, omdat Proklos bij het samenstellen van zijn commentaar op Euclides gebruik had gemaakt van een geschiedenis der wiskunde, die in de 4e eeuw voor Christus, dus 8 eeuwen voor zijn tijd, was geschreven door den peripatetischen filosoof Eudemos van Rhodos, terwijl men op grond van een mededeeling van Iamblichos meende te mogen onderstellen, dat er ten tijde van Eudemos een mathematisch geschrift van de Pythago-

reische school, de z.g. *πρὸς Πυθαγόρου ἱστορία* in omloop was geweest, waaruit deze bij de samenstelling van zijn geschiedenis zou hebben kunnen putten.

Nu vond wel de laatste hypothese, die van den zeer vernuftigen, maar soms wel op wat al te losse gegevens bouwenden Franschen historicus Paul Tannery afkomstig was, weinig aanhang, maar men vertrouwde genoeg op de uit het werk van Proklos sprekende autoriteit van Eudemos, die nog door enkele bekende scholia op Euclides werd ondersteund, om zich zeker te blijven gevoelen van de rol van Pythagoras en zijn school.

Die zekerheid is nu echter wel volkomen verstoord door de mathematische en philologische argumenten, die daartegen vanaf het jaar 1907 voornamelijk door G. Junge, H. Vogt en Eva Sachs zijn aangevoerd. Deze drie schrijvers hebben aangetoond, dat de bladzijden van Proklos, die men vroeger voor een afschrift of excerpt uit Eudemos had gehouden, de z.g. *catalogus geometrarum*, in werkelijkheid een door hem zelf opgesteld historisch overzicht bevatten, bij de samenstelling waarvan hij wel uit Eudemos heeft geput, maar waarbij hij ook van andere minder betrouwbare bronnen, o.a. van den sterk neo-pythagoraeisch beïnvloeden Iamblichos gebruik heeft gemaakt, en dat in het bijzonder de mededeelingen over Pythagoras waarschijnlijk van Iamblichos en in ieder geval niet van Eudemos afkomstig zijn. Dit laatste o. a. reeds hierom niet, omdat het ten tijde van Aristoteles, zooals we uit diens werken merken, reeds volkomen onmogelijk was, om tusschen Pythagoras en zijn school te onderscheiden. Daarnaast hebben de genoemde schrijvers gewezen op de mathematische ongerijmdheden, die ontstaan, wanneer men de onderstelling, dat reeds omstreeks 500 v. Chr. een theorie van het irrationale zou hebben bestaan en een stereometrie, ver genoeg ontwikkeld om de vijf regelmatige veelvlakken voor te brengen, in verband met onze overige kennis van de ontwikkeling der Grieksche wiskunde beschouwt.

Nu was echter juist de overlevering over de Pythagoraeische constructie van de vijf regelmatige veelvlakken een der schijnbaar meest vaste gegevens ter beoordeeling van de Pythagoraeische wiskunde: wanneer men nagaat, op welke gronden de historici der wiskunde eigenlijk aannemen, dat Pythagoras en zijn onmiddellijke volgelingen bepaalde mathematische resultaten moeten hebben gekend, dan vindt men telkens weer, dat men hun die toeschrijft, omdat

zij immers de regelmatige veelvlakken konden construeeren, wat inderdaad een vrij omvangrijke kennis van planimetrie en stereometrie vereischt. De twijfel aan de mathematische mogelijkheid van deze overlevering heeft zoo vanzelf aanleiding gegeven tot een nader onderzoek over de ontwikkelingsgeschiedenis van de kennis der regelmatige veelvlakken, een onderzoek, dat door Eva Sachs in een voortreffelijk werkje „*Die fünf Platonischen Körper*” verricht is en dat tot resultaten heeft gevoerd, die met vroeger gangbare voorstellingen volkomen in strijd zijn.

Om dit toe te lichten aan een voorbeeld, dat in de geschiedenis der wiskunde een zekere vermaardheid bezit, zou ik willen wijzen op de volkomen ommekeer, die haar werk, in dezen op dat van Vogt voortbouwend, heeft gebracht in de beoordeeling van een plaats uit de fragmenten van den Pythagoraeër Philolaos, waarin men vroeger een bevestiging las van de mededeeling van Proklos, dat Pythagoras de vijf regelmatige veelvlakken zou hebben kunnen construeeren. Die plaats luidde in de eerste uitgave van de fragmenten door Boeckh a.v.: *Καὶ τὰ ἐν τῇ σφαίρᾳ σώματα πέντε ἐντί. τὰ ἐν τῇ σφαίρᾳ πῦρ, ὕδωρ, καὶ γᾶ, καὶ ἀήρ, καὶ ἡ τᾶς σφαίρας ὁλκᾶς πέμπτον.* en ze werd door hem als volgt geïnterpreteerd: in den bol zijn vijf lichamen, namelijk de vijf regelmatige veelvlakken; vier hiervan zijn de vormen van de elementen binnen de wereldsphaer: vuur, water, aarde en lucht, terwijl het vijfde, de *πέμπτη οὐσία*, quinta essentia of aether, wordt beschouwd als vorm van den drager, het lastschip, van het geheel.

Men vond hierin dus niet alleen een bewijs, dat Philolaos de vijf regelmatige veelvlakken kende, maar tevens een aanwijzing, dat de Pythagoraeërs reeds de opvatting bezaten, die Plato in den *Timaios* uiteenzet, namelijk, dat de vier elementen aarde, water, lucht en vuur, als vormen van hun atomen resp. den kubus, den icoesaeder, den octaeder en den tetraeder hebben, terwijl het vijfde der regelmatige veelvlakken, de dodecaeder, in verband werd gebracht met het alles omvattend omhulsel.

Het is nu voor onzen tijd, waarin het wantrouwen ten opzichte van de Pythagoras-legende eenmaal is gewekt, vrijwel een raadsel, hoe men dit alles ooit in deze plaats van Philolaos heeft kunnen lezen. Want dat *σφαῖρα* eerst een meetkundige bol zou beteekenen en even later het heelal, *σῶμα* eerst meetkundig lichaam en onmiddellijk daarop element, was al zonderling, maar bovendien staat er toch, nuchter

beschouwd, werkelijk niets anders, dat de gedachte aan de regelmatige veelvlakken kan wekken, dan het gétal vijf.

Wat er wel mee bedoeld wordt, wordt duidelijker, wanneer men de conjectuur aanvaardt, waarmee Diels deze plaats in zijn *Fragmente der Vorsokratiker* heeft opgenomen. Hij leest: τὰ μὲν τὰς σφαίρας en dan kan men er niets anders meer in lezen dan de van Empedocles afkomstige theorie der vier elementen, waaraan het den kosmos omhullend boloppervlak als een soort vijfde lichaam wordt toegevoegd. Van een verband met de regelmatige veelvlakken is dan geen sprake meer.

En een bron voor de Platonische atoomtheorie kan men er al evenmin meer in vinden. Integendeel: Eva Sachs heeft door een nauwkeurige analyse van de tradities over de elementenleer aangetoond, dat het de interpretatie van Philolaos in het licht van Plato's Timaios geweest is, die aanleiding heeft gegeven tot een te vroege dateering van de constructie der regelmatige veelvlakken en van haar verband met de elementen, dat de volledige kennis van hun eigenschappen en hun constructie pas te danken is aan Plato's vriend Theaitetos en dat die kennis een van de nieuwste resultaten van de nog jonge stereometrie was, toen Plato aan de regelmatige veelvlakken de kosmologische beteekenis toekende, die er den naam kosmische of Platonische lichamen voorgoed aan zou verbinden en die later Kepler zou voeren tot zijn beroemde speculaties over het verband van de structuur van het planetenstelsel met de afmetingen van hun omgeschreven bollen.

Ik heb bij dit onderwerp wat langer stilgestaan, om u aan een voorbeeld te toonen, hoe weinig betrouwbaar de vroeger gangbare en nog steeds vrij verspreide voorstellingen over de Pythagoraeische wiskunde zijn. Men is wel voorzichtiger geworden met het gebruik van den naam Pythagoras, maar ook wanneer men ter wille van de exactheid meer over de Pythagoraeërs als grondleggers van de wiskunde spreekt, is dat toch nog maar in schijn een winst in nauwkeurigheid. Er is namelijk geen vager begrip in de geschiedenis van de wiskunde dan dat van de Pythagoraeërs. Wanneer men de ἀρχὴ van Pythagoras zelf ongeveer op 530 v. Chr. stelt en men bedenkt dan, dat Archytas van Tarente, die een tijdgenoot van Plato was, als ultimus Pythagoraeorum geldt, terwijl soms de nog jongere Eudoxos van Cnidos nog onder de Pythagoraeërs gerekend wordt, dan blijkt het tijdvak der Pythagoraeërs ongeveer twee

eeuwen te omvatten, zoodat het meer een probleem formuleeren is dan een probleem oplossen, wanneer men een stelling aan de Pythagoraeërs toeschrijft.

Eén positief resultaat heeft echter de kritische beschouwing van de Pythagoras-legende opgeleverd naast de vele negatieve, waarvan ik er nu een heb geschetst. Zij heeft ons gedwongen, de kern van de ontwikkeling der Euclidische meetkunde veel meer dan vroeger het geval was, te zoeken in den tijd van Plato en ze heeft daardoor vooral de aandacht gevestigd op de mathematische opvattingen van Plato zelf en op het mathematische werk van zijn drie tijdgenooten: Archytas van Tarente, Theaitetos van Athene en Eudoxos van Knidos.

Men moge in deze uitspraak geen onderschatting zien van wat er vóór Plato's tijd reeds aan mathematische resultaten was bereikt. We kunnen weliswaar niet in finesses vaststellen, hoeveel dat was, maar er zijn, om een voorbeeld te noemen, voldoende aanwijzingen, dat de mathematici van de vijfde eeuw reeds tot op zekere hoogte bekend waren met die voor de Grieksche wiskunde karakteristieke methode, die door den Deenschen historicus Zeuthen met den naam van geometrische algebra is bestempeld en die in haar volkomen ontwikkelden vorm de Grieksche mathematici in staat heeft gesteld, langs meetkundigen weg de meest algemeene functioneele relatie van den tweeden graad tusschen twee veranderlijken te behandelen, d. w. z. de theorie der kegelsneden te beheerschen. Ook bezitten we in een uittreksel uit de geschiedenis van Eudemos, dat door Simplikios in zijn commentaar op de *Physica* van Aristoteles wordt meegedeeld, een uit de tweede helft van de vijfde eeuw afkomstig fragment van het werk van Hippocrates van Chios, waarin de quadratuur van de naar hem genoemde *μυρίατοι*, d. z. bepaalde sikkelvormige, door cirkelbogen begrensde figuren, wordt uitgevoerd en dat reeds een aanzienlijke kennis van planimetrische stellingen en een groote vaardigheid in meetkundig redeneeren omtrent. Voegen we hier nog aan toe, dat Hippocrates bekend staat als samensteller van *Stoicheia*, van een samenvattende uiteenzetting van de grondstellingen van de meetkunde in den trant van het latere beroemde werk van Euclides, dan vinden we in deze uiting van een behoefte aan systematisering een nieuwe aanwijzing, dat reeds voor Plato's tijd de ontwikkeling der meetkunde een aanmerkelijke hoogte moet hebben bereikt.

Alle waardeering voor die hoogte mag echter niet doen vergeten, dat met het optreden van de straks genoemde mathematici, maar vooral met dat van Eudoxus en Theaitetos de Grieksche wiskunde in een geheel nieuwe phase komt, dat hun beteekenis grooter is dan die van één schakel uit vele in de lange keten van mathematische onderzoekers, omdat zij een crisis te boven hebben weten te komen, die het tot dusver niet bedreigde pogen, om door het logische denken de structuur der ruimte op het spoor te komen, in gevaar bracht.

Die crisis moet tweeledig van aard geweest zijn; zij moet eenerzijds zijn veroorzaakt door de ontdekking van het irrationale, anderzijds door het veldwinnen van het inzicht, dat het ongeoorloofd is, om zonder meer op het oneindige over te dragen, wat ons verstand ons omtrent het eindige leert. Het is aan Eudoxos en Theaitetos gelukt, deze beide moeilijkheden te overwinnen; zij hebben daardoor voor de ontwikkeling der wiskunde die groote beteekenis, die aan allen toekomt, die in perioden, waarin ons geheele weten plotseling schijnt te wankelen, de nieuwe grondslagen weten te vinden, waarop het bedreigde bouwsel hechter en hooger dan vroeger kan worden opgetrokken.

Ik zal over de wijze, waarop de Grieksche wiskunde de moeilijkheden van het oneindige wist te boven te komen, na de pauze spreken. Vooreerst verzoek ik u nu echter, u een voorstelling te vormen van de opschudding, le scandale logique, om met Tannery te spreken, die het moet hebben veroorzaakt, toen men ontdekte, dat men maar niet van elk tweetal grootheden, van elk tweetal lijnstukken, b.v. de verhouding door getallen (en onder getallen verstaat de Grieksche wiskunde altijd dat, wat wij natuurlijke getallen noemen) kan uitdrukken. Het begrip verhouding toch en de daarmee samenhangende begrippen van evenredigheid en gelijkvormigheid moeten wel naar alle waarschijnlijkheid reeds vroeg een groote rol in het mathematische denken hebben gespeeld en het is zelfs denkbaar, dat wanneer de Pythagoraeërs zich werkelijk hebben laten verleiden tot de verbijsterende uitspraak, die de meest betrouwbare overlevering hun toch toeschrijft, tot de uitspraak namelijk, dat de dingen getallen zijn, dit moet worden verklaard door aan te nemen, dat de ontdekking van een door getallen uit te drukken wettelijkheid in mathematische vormen en physische verschijnselen (men denke b.v. aan de mogelijkheid van het teekenen op schaal en

aan de eenvoudige verhoudingsgetallen van de lengten van consonante snaren) over het nog jeugdige wetenschappelijke denken een roes heeft gebracht, waarin men het wezen der verschijnselen door hun mathematische beschrijving uitgeput heeft gewaand.

Kan men zich nu erger ontnuchtering denken, dan de ontdekking, dat de mogelijkheid, een verhouding door getallen uit te drukken, reeds in zeer eenvoudige gevallen plotseling niet meer blijkt te bestaan? De zijde van een vierkant en de diagonaal daarvan blijken zulk een geval op te leveren en dit onweerlegbare feit bedreigt in eens zoowel den geheelen opbouw van een meetkunde, die steeds onderlinge meetbaarheid van lijnstukken als vanzelfsprekend had aangenomen, als de subtiële speculaties der getallenmystiek.

Of de eerste Pythagoraeërs die, wat wij nu de irrationaliteit van $\sqrt{2}$ noemen, hebben ontdekt, deze draagwijdte van hun vondst in volle scherpste hebben beseft, weten we niet. Wel weten we, dat de neo-Pythagoraeërs aan de ontdekking van het irrationale de mythe verbinden, dat de eerste, die dit feit in de openbaarheid bracht, in een schipbreuk is omgekomen, waaraan men, volgens een scholium op Euclides, deze beteekenis moet hechten, dat al het irrationale in het heelal ook als iets onuitsprekelijks en vormloos verborgen moet blijven en dat, wanneer een ziel op zulk een vorm van het leven treft en deze in de openbaarheid brengt, hij binnengesloten wordt in den Oceaan van het worden en door de rusteloze stroomen daarvan omspoeld wordt. Dit is orakel-achtige quasi-diepzinnigheid en toch voelen we er nog iets in van de huijvering, die den eersten mathematicus moet hebben doortrild bij de ontdekking, dat zijde en diagonaal van een vierkant zich niet als getallen verhouden.

Hoe de Pythagoraeërs hun ontdekking deden, weten we niet. Aristoteles vermeldt ergens als een bekende zaak, dat wanneer zijde en diagonaal van een vierkant onderling meetbaar waren, dit ten gevolge zou hebben, dat er een getal bestond, dat tegelijk even en oneven was en hij zinspeelt daarbij blijkbaar op het ook bij Euclides voorkomende bewijs voor de irrationaliteit van $\sqrt{2}$, dat wij in moderne formulering zoo zouden weergeven:

De stelling van Pythagoras, toegepast op diagonaal en twee zijden van een vierkant, levert $m^2 = 2 \cdot n^2$; wanneer hieraan nu door geheele onderling ondeelbare waarden van m en n kon worden voldaan, zou m^2 en dus ook m even zijn, zoodat we $m = 2r$ zouden

kunnen stellen. Daaruit zou volgen $n^2 = 2r^2$, dus zou n^2 en dus ook n even zijn, waaruit wegens de onderlinge ondeelbaarheid van m en n zou volgen, dat m oneven was, terwijl eerst gevonden is, dat m even is. Het is natuurlijk heel goed mogelijk, dat het bewijs oorspronkelijk reeds zoo gegeven is; een andere mogelijkheid is, dat men heeft ingezien, dat het proces van het vinden van de grootste gemeene maat bij diagonaal en zijde van een vierkant niet tot een eind voerde.

Hoe dit zij, het is niet waarschijnlijk, dat men voor Plato's tijd verder is gekomen dan tot de ontdekking van de irrationaliteit van $\sqrt{2}$. We vermoeden dit op grond van het begin van Plato's dialoog Theaitetos, waaraan met vrij groote zekerheid historisch-mathematische beteekenis kan worden toegekend en waar Plato laat vertellen, dat Theodoros van Kurene de irrationaliteit van $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ enz. tot aan $\sqrt{17}$ bewees. Ook zijn er geen aanwijzingen, in hoeverre men pogingen heeft gedaan, de meetkunde te vrijwaren voor de moeilijkheden, die de ontdekking van het irrationale met zich mee bracht.

Vast staat echter, dat de mathematici in Plato's tijd volkomen helder de algemeenheid van het verschijnsel der irrationaliteit hebben ingezien en dat ze beseft hebben, dat, wanneer men nog ooit van het begrip verhouding van continu veranderlijke grootheden gebruik wilde maken in een omvang, die zoowel onderling meetbare als onderling onmeetbare grootheden omvatte, een geheel nieuwe fundeering van de theorie vereischt werd, dat verder de zoo gegeneraliseerde theorie der evenredigheden als haar complement een strengeren opbouw van de theorie der rekenkunde noodig had, die in staat was, een criterium te leveren, waardoor men uit kon maken, of vierkantswortels al dan niet irrationaal waren en dat ten slotte het begrip van de irrationale grootheid aanleiding gaf tot een classificatie van deze grootheden naar den graad van hun irrationaliteit.

Het enorme werk, dat hierdoor in het kort geschilderd is, is, naar we met vrij groote zekerheid kunnen zeggen, voorbereid door Theodoros van Kurene en voltooid door Eudoxos en Theaitetos. Theaitetos ontwikkelde den strengeren opbouw van de rekenkunde, leidde hieruit het algemeene criterium van quadratische irrationaliteit af en gaf een classificatie van deze irrationaliteiten. Eudoxos stelde de algemeene verhoudingstheorie op. Men vindt het werk

Verschenen:

Noordhoff's Verzameling van Wiskundige Werken No. 14

Het Natuurlijke Getal

IN ZOO STRENG MOGELIJKE BEHANDELING

DOOR

Dr. FRED. SCHUH.

MET 218 VRAAGSTUKKEN.

Prijs geb. f 5,90.

Voor abonnées N. T. v. Wisk. en Chr. Huygens tot 1 Maart
1928 f 4,50.

Uitgave van P. Noordhoff te Groningen.

Verschenen:

Vraagstukken over Levensverzekering-Wiskunde

Opgegeven bij het examen ter verkrijging van het
diploma voor verzekeringswiskunde, afgenomen door
de vereeniging voor verzekeringswetenschap, in de
jaren 1903—1927

MET EXAMENPROGRAMMA

LITTERATUURLIJST EN TAFELS

bewerkt door

Dr. M. VAN HAAFTEN,

Directeur der Holl. Societeit van Levensverzekeringen te Amsterdam.

Prijs f 1.75.

Uitgave van P. Noordhoff te Groningen.

Dezer dagen verschijnt:

Beknopte Rekenkunde

VOOR HET

Middelbaar en Voorbereidend
Hooger Onderwijs

DOOR

P. WIJDENES.

Met een Inleidend woord van Dr. H. J. E. BETH.

Uitgave van P. Noordhoff te Groningen.

Zoo juist verschenen:

Leerboek der Natuurkunde

bestemd voor het

Middelbaar, Voorbereidend Hooger
en Propaedeutisch Onderwijs

DOOR

Dr. W. J. H. MOLL

EN

Dr. H. C. BURGER.

DERDE DEEL:

LICHT-ATOOMPHYSICA

Prijs f 3,50, geb. f 4,10.

Vroeger verschenen:

Eerste deel: Mechanica, Eigenschappen der Materie, Warmte, Geluid,
f 3,90, geb. f 4,50.

Tweede deel: Electrostatica, Magnetisme, Stroomende Electriciteit.
f 3,90 geb. f 4,50.

Uitgaven van P. Noordhoff te Groningen.