

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDAC-
TIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN
J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

MET MEDEWERKING VAN

Dr. H. J. E. BETH
DEVENTER

Dr. E. J. DIJKSTERHUIS
OISTERWIJK

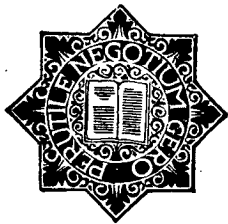
Dr. B. P. HAALMEIJER
AMSTERDAM

Dr. D. J. E. SCHREK
UTRECHT

Dr. P. DE VAERE
BRUSSEL

Dr. D. P. A. VERRIJP
ARNHEM

4e JAARGANG 1927/28, Nr. 1



P. NOORDHOFF — GRONINGEN

Prijs per Jg. van 18 vel f 6.—. Voor intekenaars op het
Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde en Christiaan Huygens f 5.—.

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken, verschijnt in zes tweemaandelijksche afleveringen, samen 18 vel druks. Prijs per jaargang *f* 6.—. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6.—) of op „Christiaan Huygens” (*f* 10.—) zijn ingeteekend, betalen *f* 5.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans-van-Mierisstraat 112; Tel. 28341. Aangeteekende zendingen met bijvoeging: „Bijkantoor Van-Eeghenstraat”.

Het honorarium voor geplaatste artikelen bedraagt *f* 20.— per vel.

De prijs per 25 overdrukken of gedeelten van 25 overdrukken bedraagt *f* 3,50 per vel druks *in het vel gedrukt*. Gedeelten van een vel worden als een geheel vel berekend. Worden de overdrukken buiten het vel verlangd, dan wordt voor het afzonderlijk drukken bovendien *f* 6.— per vel druks in rekening gebracht.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

I N H O U D.

Dr. H. J. E. BETH, Eenvoudige beschouwingen uit de meetkunde van GAUSS.	1
F. VEEN, Bijdrage tot de regeling van het wiskunde-onderwijs aan de H. B. S.	25
Boekbesprekingen	34
De Universitaire opleiding tot leeraar in wiskunde en aanverwante vakken	41

 De redactie heeft het genoegen in deze aflevering het portret te geven van Prof. Dr. J. C. KLUYVER, zij hoopt de portretten van al onze hoogleraren den intekenaars achtereenvolgens te kunnen aanbieden.

Dr. H. J. E. BETH,

Beknopt Leerboek der Cosmographie

voor het Middelbaar- en Voorbereidend Hooger Onderwijs,
Kweek- en Normalscholen, en studeerenden voor de Hoofdacte
met 32 teekeningen in den tekst *f* 0.90.

UITGAVE VAN P. NOORDHOFF TE GRONINGEN.

EENVOUDIGE BESCHOUWINGEN UIT DE MEETKUNDE VAN GAUSS¹⁾

DOOR

DR. H. J. E. BETH (Deventer).

§ 1. De diepgaande onderzoeken, welke in het laatste gedeelte der vorige eeuw omtrent de grondslagen der meetkunde zijn verricht, hebben onder meer tot gevolg gehad, dat de z.g. Niet-Euclidische Meetkunde eene belangstelling is ten deel gevallen, die scherp afsteekt bij de onverschilligheid, waarmede zij bij hare verschijning in de eerste helft dier zelfde eeuw werd begroet. Bedenkt men, dat de herziening van de grondslagen der meetkunde gepaard ging met eene verdieping in de gronden der rekenkunde en dat de Niet-Euclidische Meetkunde den weg wees tot onderzoeken op het gebied der functietheorie, dan is het te begrijpen, dat de belangstelling voor dezen nieuwen tak der meetkunde niet tot de meetkundigen beperkt bleef, en dat de nieuwe leer de aandacht der geheele wiskundige wereld tot zich trok. De moderne meeningen omtrent de begrippen ruimte en tijd, die omstreeks het begin van onze eeuw ontstaan zijn, maken het ten slotte verklaarbaar, dat de kring der belangstellenden zich heeft uitgebreid tot buiten dien der wiskundigen in engeren zin, en dat thans de Niet-Euclidische Meetkunde van groote beteekenis wordt geacht voor ieder, die zich met de wiskundige wetenschap, in ruimen zin beschouwd, zal willen bezig houden, of haar zal willen onderwijzen. Toch meende ik de gelegenheid, welke de vereerende uitnoodiging van het bestuur onzer Vereeniging mij bood, een onderwerp te behandelen, dat in nauw verband met onze leerstof staat en reeds op dien grond op onze belangstelling aanspraak kan maken, niet

¹⁾ Voordracht op 4 Juni 1927 te Amsterdam gehouden voor de „Vereeniging van leeraren in de Wiskunde, de Mechanica en de Kosmographie aan Hoogere Burgerscholen met 5-j. cursus B, Lycea en Meisjes-Hoogere Burgerscholen met 5-/6-j. cursus”.

beter te kunnen gebruiken dan door het ten beste geven van enkele eenvoudige beschouwingen op het gebied der Niet-Euclidische Meetkunde. Het is mij nl. gebleken, dat het geen zeldzaamheid is, wanneer men zich bij de bestudeering der N.-E. Meetkunde bepaalt tot de verovering van het inzicht in de mogelijkheid van zulk een meetkunde, doch van een verder binnendringen in haar gebied afziet.

Inderdaad is dit inzicht in hare mogelijkheid van het grootste belang; maar wellicht is geen middel zoo geschikt om de Euclidische Meetkunde, waarmede wij dagelijks omgaan, voor ons in het juiste licht te plaatsen, en deze stof voor ons te verlevendigen, als een dieper indringen in een op gedeeltelijk andere grondslagen opgetrokken Meetkunde. En vooral dan zal van de bestudeering der N.-E. Meetkunde die verhelderende werking uitgaan, indien men de z.g. elementaire behandelingswijze kiest, dat wil zeggen, als men den historischen weg volgt. Men moet deze behandeling niet kiezen, om het zich gemakkelijk te maken. Er is wel eens gezegd, en naar ik meen niet ten onrechte, dat de elementaire weg om tot de Niet-Euclidische Meetkunde te komen de moeilijkste is. Een afbeeldingsmethode als die, welke b.v. Weber en Wellstein (in deel 2 van hun Encyclopädie der Elementar-Mathematik) gebruiken om de N.-E. Meetkunde terug te brengen tot eigenschappen van cirkel- of bollenstelsels in de Euclidische ruimte, is voor ieder, die de gewone elementaire meetkunde eenigszins beheerscht, vrij van moeilijkheid; maar men behoeft ook slechts de beginselen der projectieve meetkunde te kennen om den weg te kunnen volgen, die door Cayley en Klein geopend is en het zijn slechts algemeene begrippen uit de differentiaal-meetkunde der oppervlakken, die men noodig heeft om het beeld van de Niet-Euclidische Meetkunde, dat men aantreft op de oppervlakken van standvastige kromming, te kunnen begrijpen.

Een axiomatisch behoorlijk gefundeerde elementaire inleiding tot de N.-E. Meetkunde, zooals de tegenwoordige tijd zou eischen, kan ik U in deze voordracht niet geven. Ik hoop, dat U met minder genoegen zult willen nemen ¹⁾ en bedenken wilt, dat Gauss, Lobat-

¹⁾ Aan degenen, die eenigszins dieper op het onderwerp, behandeld volgens de hier gevolgde methode, willen ingaan, moge de raad gegeven worden, te lezen: M. Simon, Nichteuklidische Geometrie in elementarer Behandlung (Teubner, 1925).

schefsky en Johann Bolyai reeds gestorven waren, toen de moderne axiomatica geboren werd; Lobatschefsky heeft uitdrukkelijk verklaard, dat zijn meetkundig stelsel een voorafgaande herziening van de grondslagen der meetkunde, behalve dan die der parallellen-theorie, niet noodig had (hoewel hij toch in zijn „Neue Anfangsgründe¹⁾ de meetkunde op nieuwe wijze opstelde); Gauss echter heeft de dringende noodzakelijkheid van een herziening dier grondslagen in hun geheel diep gevoeld en duidelijk uitgesproken.

Ik heb gemeend goed te doen mij te beperken tot de eene bepaalde Niet-Euclidische Meetkunde, welke door de zooeven genoemde onderzoekers is opgebouwd; deze beperking vereenvoudigt nl. de uiteenzetting in hooge mate, aangezien de afwijking van de Euclidische Meetkunde dan pas bij de evenwijdigheid begint en het begrip van rechte lijn zelf onaangetast blijft.

Ik zal bij mijn uiteenzetting bijna steeds blijven in de onmiddellijke nabijheid van de grondleggers. Na de reeds gemaakte opmerkingen zal het onnoodig zijn toe te lichten, waarom ik niet den door Hilbert²⁾ aangegeven weg volg, waarbij met de z.g. vlakke axioma's, zelfs zonder gebruikmaking van continuïteitsaxioma's, kan worden volstaan. Ook, nu reeds gebleken is, dat een overgang op de ruimte onnoodig is, behoeft voor ons de methode, die Gauss

¹⁾ Lobatschefsky gaf van zijn systeem verschillende uiteenzettingen, van welke blijkbaar „Pangeometrie” (oorspronkelijk in het Fransch en het Russisch; een Duitsche vertaling van de hand van Liebmann verscheen in „Ostwald's Klassiker”) het meest verbreid, doch stellig niet het meest aanbevelenswaardig is. De meest volledige uiteenzetting, voor zoover het de grondslagen betreft, gaf hij in een verhandeling, die geheel het karakter van een leerboek heeft en die hij in het Russisch schreef; doch waarvan een Duitsche vertaling verscheen in het werk van F. Engel: „N. I. Lobatschefsky. Zwei geometrische Abhandlungen aus dem Russischen übersetzt mit Anmerkungen und mit einer Biographie des Verfassers”. (Teubner, 1899); de bedoelde verhandeling is de *tweede* en draagt in de vertaling tot titel: „Neue Anfangsgründe der Geometrie mit einer vollständigen Theorie der Parallellinien” (de eerste, die in de vertaling tot titel draagt „Ueber die Anfangsgründe der Geometrie”, en die in de behandeling der stof véél verder gaat, is voor een eerste kennismaking volstrekt niet aan te bevelen). Voor een eerste kennismaking is het meest geschikt het kleine en zeer duidelijk geschreven werkje: „Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien” (niet meer in den handel) en waarin de schrijver het essentiele van zijn onderzoekingen weergaf; een gedeelte van dit werkje vindt men in hoofdtrekken in mijn voordracht terug. (o.a. § 4—§ 9).

²⁾ Zie Anhang III in Hilberts: „Grundlagen der Geometrie”. (Teubner).

tot bewondering bracht, niets van haar bekoring verloren te hebben. Toch zal ik nu en dan, vooral met het oog op een daardoor te verkrijgen kortere uiteenzetting, van den historischen weg afwijken, en nieuwere beschouwingen (die vaak op verrassende wijze in den gedachtengang der grondleggers passen) door het betoog vlechten.

§ 2. Voordat ik tot het eigenlijke onderwerp over ga, moet ik, om duidelijk te kunnen zijn, iets zeggen omtrent de onderzoekingen, die aan die van Gauss zijn vooraf gegaan; ik moet daarvoor beginnen bij de „Elementen” van Euclides. Aangaande Euclides kan ik mij echter bepalen tot: het begrip van rechte lijn, dat van evenwijdigheid, en een eenigszins ruwe samenvatting van diegene van zijn stellingen, die van het parallellen-postulaat onafhankelijk zijn.

Het begrip van rechte lijn bij Euclides volgt uit zijn definitie, uit zijn beide eerste postulaten en uit een door hem niet genoemd, maar wel gebruikt postulaat: dat van de oneindige lengte der rechte lijn. Gebruik makende van onze wijze van uitdrukking kunnen wij zeggen, dat de rechte lijn van Euclides de oneindige lijn is, die door twee willekeurige harer punten volkomen is bepaald.

Evenwijdige rechten zijn volgens definitie rechten, die, naar beide zijden verlengd, elkaar niet ontmoeten. En het parallellen-postulaat (5e postulaat) zegt, dat, als twee rechten gesneden worden door een derde en de som van de beide binnenhoeken aan één zijde der snijlijn kleiner is dan 180° , die rechten elkaar zullen ontmoeten aan die zijde der snijlijn, waar die hoeken gelegen zijn; tegenwoordig zegt men in den regel: dat door een punt buiten een rechte slechts één rechte gaat, die met de eerste evenwijdig is.

De eerste 28 stellingen van Euclides worden zonder hulp van het parallellen-postulaat bewezen en zijn dus daarvan onafhankelijk; men kan ze derhalve nog gebruiken, als men het parallellen-postulaat door een ander wenscht te vervangen. Men ziet hieruit hoe groot gewicht de moderne axiomatica, waarbij de onafhankelijkheid der axioma's van elkaar wordt aangetoond en van elke stelling is uit te maken, van welke axioma's zij wel, van welke zij niet afhankelijk is, voor deze onderzoekingen heeft; ik vestig er dan ook opnieuw de aandacht op, dat mijne uiteenzetting slechts van oppervlakkigen aard kan zijn. De stellingen bij Euclides, die van het parallellen-postulaat onafhankelijk zijn, zijn o.a.: enkele,

die de mogelijkheid van de constructie eener aangegeven figuur uitspreken, b.v. van een gelijkzijdigen driehoek met gegeven zijde, van de bisectrice van een gegeven hoek, van het midden eener begrensde rechte, van de loodlijn uit een punt op een rechte, van een driehoek met gegeven lijnen als zijden (onder de bekende voorwaarde); andere, die eigenschappen van gegeven figuren noemen, b.v. die omtrent de congruentie van driehoeken, die omtrent de gelijkheid en omtrent de ongelijkheid van zijden of hoeken in denzelfden driehoek. Van het parallellen-postulaat is echter afhankelijk alles, wat betrekking heeft op de som der hoeken in drie- en veelhoeken en op de gelijkvormigheid van figuren. ¹⁾

§ 3. Door Proklos, die in de 7de eeuw n. C een kommentaar op het 1ste Boek der Elementen schreef, weten wij, dat dit werk reeds bij de Grieken kritiek had opgewekt. In het bijzonder weigerden, in het 5de postulaat een postulaat te zien; men wilde het gevorderde niet zonder meer toegeven en eischte een bewijs. Men meende, dat Euclides stellingen bewezen had, waarvan de waarheid door elk zonder bewijs zou zijn erkend, en vond daarentegen den inhoud van het 5de postulaat toch eigenlijk weinig evident. Men achtte het blijkbaar niet van zelf sprekend, dat, als AB niet

¹⁾ Eén stelling moet ik echter nog uitdrukkelijk noemen, omdat zij in onze leerboeken niet voorkomt en wij haar in het vervolg herhaaldelijk zullen gebruiken: de stelling, dat een buitenhoek van een driehoek grooter is dan elk der niet aanliggende binnenhoeken (dat een buitenhoek gelijk is aan de som der niet aanliggende binnenhoeken, is een gevolg van het 5de postulaat). Om b.v. aan te toonen, dat $\angle A$ kleiner is dan de hoek, dien CA maakt met het verlengde CD van BC, trekken we de zwaartelijn uit B en verlengen haar door de zijde AC heen met een stuk gelijk aan zichzelf; zij E het eindpunt. De verbindingslijn van E met C verdeelt nu $\angle DCA$ in twee deelen; één der deelen, nl. $\angle ECA$ is (op grond van de congruentie van driehoeken) gelijk aan $\angle A$, waarmede het gestelde is aangetoond.

We moeten er echter om denken, dat de kern van het bewijs gelegen is in de bewering, dat het punt E komt te liggen binnen den buitenhoek ACD, hetgeen een gevolg is van de omstandigheid, dat bij onze onderstelling omtrent de rechte lijn de lijnen BE en BD elkaar niet voor de tweede maal kunnen snijden. In de bolmeetkunde b.v. is de stelling niet algemeen geldig; hier snijden twee „rechten” elkaar in 2 punten, die een bepaalden afstand van elkaar hebben. Is nu de zwaartelijn uit B grooter dan de helft van dien afstand, dan snijdt het verlengde van de zwaartelijn de lijn BD vóórdat het punt E bereikt is; E valt dus buiten $\angle ACD$ en het bewijs gaat niet door.

CD snijdt, elke lijn, die AB snijdt, hoe klein ook de hoek is, dien zij met AB maakt, CD wèl moet snijden.

O.a. weten we door Proklos, dat Posidonios voorstelde, de definitie van evenwijdige lijnen te vervangen door deze: twee rechten zijn evenwijdig, als alle punten der eene lijn gelijke afstanden hebben tot de andere lijn. Toch mag men hieruit niet besluiten, dat de Grieken niet gevoelden, dat het *begrip* evenwijdigheid bij Euclides iets anders was dan dat bij Posidonios, want we vinden bij Proklos, dat Geminos wees op het gedrag van de hyperbool ten opzichte van een asymptoot; hier zijn twee lijnen, die in den zin van Euclides evenwijdig zijn, want zij ontmoeten elkaar niet, maar niet in den zin van Posidonios, dus niet aequidistant.

Ik zal niet spreken over alle vergeefsche pogingen, die in den loop der tijden gewaagd zijn om het 5de postulaat te bewijzen, d.w.z. om het af te leiden uit de andere axioma's, maar wel mag vermeld worden, dat vele dier pogingen van de verwarring der beide genoemde begrippen van evenwijdigheid een gevolg zijn geweest. Ik behoef eigenlijk niet te zeggen, dat in de definitie van Posidonios een postulaat verborgen is, nl. dit: er *bestaan* evenwijdige lijnen, m.a.w. de uiteinden der loodlijnen van bepaalde lengte op een rechte lijn vormen weder een rechte lijn. Dat het noodig is, het bestaan van evenwijdigen te postuleeren of te bewijzen, werd ingezien door Clavius, die in 1574 zijn bekende Euclides-uitgave in het licht gaf. Hij trachtte deze bewering als een theorema te bewijzen om er daarna het postulaat van Euclides uit af te leiden. Inderdaad volgt uit het bestaan van aequidistante rechten het 5de postulaat; maar men ziet gemakkelijk in, dat het reeds voldoende is aan te toonen, dat 3 van een rechte op gelijken afstand gelegen punten op een rechte liggen om te kunnen besluiten tot het 5de postulaat.

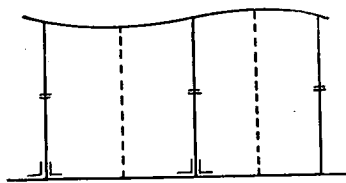


Fig. 1.

Immers, verbinden we (Fig. 1) de middens der stukken, die door de gelijke loodlijnen worden afgesneden, dan zien we gemakkelijk in (door omlegging), dat de verbindingslijnen loodrecht op de beide gegeven lijnen zijn. Dus zijn de uit-

einden der verbindingsrechten de hoekpunten van een rechthoek, maar het bestaan van een rechthoek heeft de juistheid van het 5de postulaat ten gevolge. Tot het inzicht, dat het bestaan van twee

rechten, zoodanig, dat 3 punten van één der rechten op gelijke afstanden liggen van de andere, voldoende is om tot de juistheid van het parallellen-postulaat te besluiten, kwam voor het eerst Giordano Vitale (1633—1711), die daardoor bewijst veel verder gekomen te zijn dan zijn voorgangers.

Nog veel verder dan hij kwam Saccheri (1667—1733), die den vierhoek beschouwde, die aan de basis twee rechte hoeken en gelijke opstaande zijden heeft (Fig. 2). Alleen in het geval van de geldigheid van het 5de postulaat zijn de andere hoeken ook recht. Hij onderzocht nu, wat er gebeuren zou, als die hoeken (die natuurlijk even groot zijn) beide scherp of beide

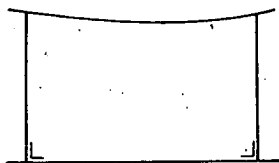


Fig. 2.

stomp zijn, en deed dit in de verwachting, in beide gevallen tot een tegenstrijdigheid te komen, waaruit dan de juistheid van het 5de postulaat zou volgen. Inderdaad kwam hij in het geval van den stompen hoek vrij gemakkelijk tot een tegenstrijdigheid, maar niet in dat van den scherp hoek. Bij deze laatste onderstelling kwam hij tot het resultaat, dat twee rechten asymptotisch kunnen loopen en hij achtte dit toereikend, om tot de onjuistheid dier onderstelling te besluiten en het 5de postulaat als streng bewezen te beschouwen. Dezelfde Saccheri echter komt bij zijn onderzoek tot de „afstandskromme”, d.w.z. de meetkundige plaats der punten, die tot een gegeven rechte gelijke afstanden hebben en gaat hare eigenschappen na; we zullen deze kromme bij Lobatschefsky, maar vooral bij Johann Bolyai, terugvinden.

Door Wallis was in 1663 het vraagstuk op geheel andere wijze aangevat. Hij vervangt het parallellen-postulaat door dit andere: dat er bij elken driehoek een daarmede gelijkvormige van willekeurige grootte bestaat; hij had kunnen volstaan met het postulaat, dat er twee verschillende driehoeken bestaan met onderling gelijke hoeken. Inderdaad is dit postulaat met het Euclidische equivalent; alleen in de Euclidische meetkunde bestaan gelijkvormige figuren. We zien dit gemakkelijk in, door den eenen driehoek zoodanig te plaatsen, dat hij met den anderen een hoek gemeen heeft; er ontstaat dan een vierhoek, die een hoekensom van 360° heeft, hetgeen

echter met het parallellen-postulaat equivalent is.¹⁾ Dat de 3de zijde van den eenen driehoek die van den anderen niet snijden kan,

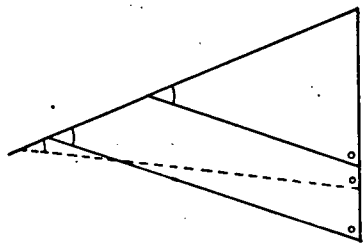


Fig. 3.

zooals in Fig. 3 door de stippel-lijn wordt aangegeven, volgt uit het feit, dat er alsdan een driehoek zou ontstaan, waarvoor een buitenhoek gelijk is aan een niet-aanliggenden binnenhoek. Dit is echter in strijd met een stelling omtrent den buitenhoek, die door Euclides zonder hulp van het 5de

postulaat (zie Noot pag. 5) bewezen is.

Op de andere oudere onderzoekingen op het gebied der parallellen-theorie gaan we niet nader in. Men vindt een aantal belangrijke geschriften verzameld in Engel en Stäckel's „Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss”, met elkaar verbonden door beschouwingen, die een duidelijk overzicht geven over de geschiedenis van het vraagstuk, en waarin de weg voor verdere studie wordt aangewezen.

§ 4. Men kan zeggen, dat tot omstreeks het begin der 19de eeuw door niemand de volstrekte waarheid van het parallellen-postulaat in twijfel getrokken is. Daar men echter den inhoud niet voldoende evident achtte, trachtte men het uit de andere axioma's af te leiden of het te vervangen door een ander, waarvan men eerder geneigd was, de waarheid zonder bewijs te aanvaarden.

Gauss²⁾ is de eerste geweest, aan wien het volkomen duidelijk geworden is, dat het parallellen-postulaat niet meer was dan een willekeurige aanname, die men, naast een aantal andere axioma's, noodig had om één bepaalde meetkunde, nl. die van Euclides, te

¹⁾ Dat men hier en elders van equivalentie eerst spreken mag, als men ook het z.g. Archimedische postulaat in zijn fundamenteelsysteem heeft opgenomen, is een van de zaken, die ik in verband met reeds gemaakte opmerkingen, buiten beschouwing kan laten.

²⁾ Gauss heeft nimmer een systematische behandeling van de Niet-Euclidische Meetkunde gepubliceerd. Er zijn slechts fragmenten van zulk een behandeling later gevonden; hieruit en uit de bewaard gebleven briefwisseling blijkt; hoe ver Gauss ook op dit gebied gekomen was. (Werke, Band 8). De gangbare meening is, dat hij van een publicatie van zijne onderzoekingen afzag uit vrees voor het „Geschrei der Bötter”, zooals hij 27 Januari 1829 aan Bessel schreef. Zou deze

kunnen opbouwen, en dat niets zich ertegen verzette, indien men een onderstelling wilde maken, afwijkend van de Euclidische, om daarop een andere meetkunde op te bouwen. Bijna gelijktijdig kwamen in het begin der vorige eeuw ook Lobatschefsky en Johann Bolyai tot hetzelfde inzicht.

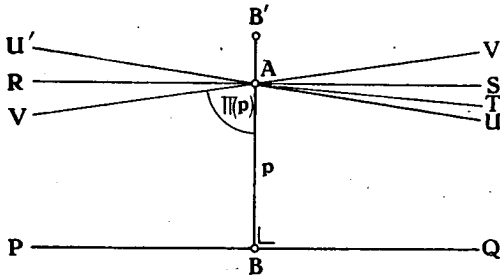


Fig. 4.

Om duidelijk te maken, van welke onderstelling de genoemde onderzoekers uitgaan, denken we in Fig. 4 gegeven een rechte PQ en een daarbuiten gelegen punt A. We laten uit A de loodlijn AB neer op PQ en

trekken door A de rechte RS loodrecht op AB.

We maken nu reeds een onderstelling, indien we zeggen, dat RS met PQ géén punt gemeen heeft. Er zou, indien niet reeds het begrip der oneindige rechte was vastgelegd, niets tegen zijn, te onderstellen, dat RS en PQ 2 punten gemeen hebben, of dat RS en PQ één punt gemeen hebben, maar beide onderstellingen voeren tot andere meetkunden dan die, welke we willen behandelen, nl. de meetkunde van Riemann en die van Klein, in welke beide de rechte een eindige lengte heeft.

We onderstellen dus met Euclides en met Gauss, dat RS en PQ géén punt gemeen hebben. De vraag is nu echter of RS de éénige lijn is door A, die PQ niet snijdt en op deze vraag wenschen beiden een verschillend antwoord te geven.

We verlengen de rechte AB door A en letten eerst op de uit A vertrekkende halve rechten, die aan die zijde van BB' liggen, waar ook S gelegen is. De halve rechten binnen den hoek B'AS kunnen onmogelijk BQ snijden, omdat zulk een rechte dan voor de tweede maal AS zou moeten snijden, hetgeen met ons begrip rechte lijn in strijd

opmerking van Gauss niet als een schertswoord bedoeld zijn en de werkelijke reden van zijn terughoudendheid op dit punt een geheel andere zijn? Men komt tot deze vraag, als men ziet, hoe Gauss bij meerdere gelegenheden schrijft, dat de moeilijkheden in de meetkunde niet *beginnen* bij de evenwijdigen en dat er in die eerste beginselen nog méér zaken zijn, die op een herziening wachten.

is. We hebben dus te letten op de halve rechten binnen den hoek BAS. Indien een rechte AT de lijn BQ niet sneed, dan is het duidelijk, dat elke halve rechte binnen hoek SAT evenmin BQ kan snijden, omdat immers die rechte BQ niet zou kunnen ontmoeten zonder AT voor de tweede maal te snijden. Het is mogelijk, dat er halve rechten door A gaan, die met AS een grooteren scherpen hoek maken dan AT en die evenmin BQ snijden. Maar aangezien er rechten zijn, die BQ wél snijden, moet er een lijn AU zijn, die de grens vormt tusschen de halve rechten, die BQ wél en die, welke BQ niet snijden. Ik vestig er nogmaals de aandacht op, dat in deze zoo eenvoudig schijnende redeneering nog verschillende onderstellingen verscholen liggen, die men nauwkeurig weet aan te wijzen en te formuleeren, waarvan ik echter, om de zaak zoo eenvoudig mogelijk voor te stellen, afzie.

De rechte AU heeft nu 1° de eigenschap van met BQ geen punt gemeen te hebben, en 2° de eigenschap, dat iedere halve rechte, die van haar willekeurig weinig in de richting van AB afwijkt, met BQ wél een punt gemeen heeft. We noemen AU een *evenwijdige* aan BQ en spreken van „een” evenwijdige, omdat aan de andere zijde van AB een rechte AV ligt met overeenkomstige eigenschappen. Verlengen we AU en AV door A heen, dan worden de stralen van den waaier, die A als top heeft, ten gevolge van hun gedrag ten opzichte van PQ in twee groepen verdeeld: een groep van stralen, die alle PQ snijden, en een groep van stralen, die PQ niet snijden, gescheiden door UU' en VV', de beide door A gaande evenwijdigen. We krijgen hier een nieuw begrip: dat van de *gerichte evenwijdigheid*: AU is in de eene, AV in de andere richting evenwijdig met PQ. We geven dit als volgt aan: AU//BQ, AV//BP.

In de meetkunde, die we thans gaan bespreken, vallen UU' en VV' niet samen; het zijn twee verschillende rechte lijnen, die dus een hoek insluiten. Bij Euclides was RS de eenige rechte door A, die PQ niet snijdt, zoodat daar UU' en VV' samenvallen, dus geen hoek insluiten. We moeten dus niet zeggen, dat de nieuwe onderstelling strijdig is met het postulaat van Euclides; zij is ruimer en omvat het oude parallellen-postulaat als bijzonder geval; daar de beide evenwijdigen bij Euclides samenvallen, hebben we bij hem geen gerichte evenwijdigheid.

Men hoort wel eens bezwaar maken tegen zulk een willekeurig wijziging brengen in het stelsel axioma's en zeggen, dat dit

„postulaat van Lobatschefsky”, dat in de voorgaande beschouwing neergelegd is, in strijd is met onze „ruimtevoorstelling”. Nu zal ik straks nog een en ander mededeelen omtrent het willekeurig aannemen van axioma's en omtrent de voorstelbaarheid. Maar reeds thans wil ik er op wijzen, dat men met het woord „voorstelling” toch wel heel voorzichtig dient te zijn. Immers in zake het „oneindige” laat het voorstellingsvermogen ons geheel in den steek, en we kunnen hierover alleen denken en spreken (doch zonder er voorstellingen aan te verbinden) op grond van tevoren gemaakte nauwkeurige afspraken. We kunnen nog wel spreken over de voorstelbaarheid van de gevolgtrekkingen, die men uit het postulaat van Euclides en dat van Lobatschefsky maakt, maar niet over de voorstelbaarheid dier afspraken zelf, omdat het begrip van het oneindige in beide opgesloten is. Onze waarneming en ook onze voorstelling bepaalt zich tot een begrensde gedeelte van een plat vlak, waarin dus ook een rechte PQ begrensde is (Fig. 5). De

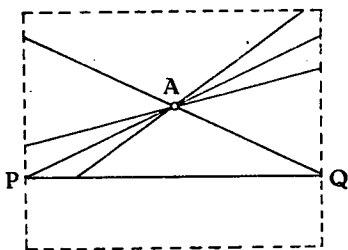


Fig. 5.

waaier, die een punt A als top heeft, zien we verdeeld worden in een groep van rechten, die PQ wel ontmoeten en een groep van rechten, die PQ niet ontmoeten, welke groepen gescheiden worden door de grenslijnen AP en AQ. We vragen nu, wat er met deze grenslijnen gebeurt, indien we de grenzen van het

vlak zich laten verwijderen; we mogen nu uit hetgeen de beschouwing van het eindige ons leert geen gevolgtrekking maken omtrent het oneindige. Men kan aannemen, dat AP en AQ tot een limietstand naderen, indien P en Q zich steeds verder verwijderen, en verder, dat die limietrechten samenvallen, zooals Euclides onderstelt, of niet samenvallen, zooals Lobatschefsky onderstelt.

Den hoek, dien AU en AV in Fig. 4 met de loodlijn AB maken, noemt Lobatschefsky *parallelhoek*; hij stelt den parallelhoek, die bij een afstand $AB = p$ behoort, voor door $\Pi(p)$. In de Euclidische meetkunde is $\Pi(p) = 90^\circ$ voor elke waarde van p .

We zullen thans de eigenschappen van evenwijdigen en niet-snijdenden in de meetkunde van Gauss nagaan, en beginnen met de evenwijdigen.

§ 5. *Onafhankelijkheid der evenwijdigheid van het beginpunt.*
 We willen bewijzen, dat evenwijdigheid onafhankelijk is van het beginpunt, m.a.w.; dat, als (Fig. 6) $AU \parallel BD$ is, ook $EU \parallel BD$ is, d.w.z., dat niet alleen EU BD niet snijdt, maar dat, als $EF \perp BD$

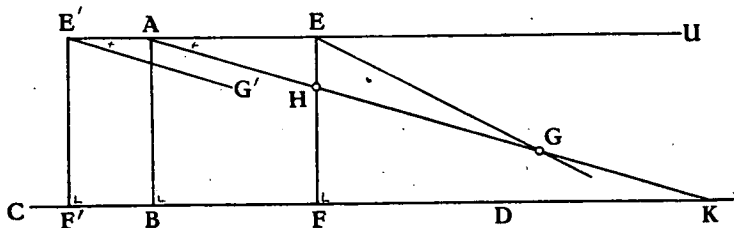


Fig. 6.

getrokken is, elke rechte EG , door E binnen $\angle UEF$ getrokken, BD wél snijdt. Neem daartoe een punt G op EG , en verbind A met G , dan zal AG de lijn EF ergens in H en volgens het onderstelde BD ergens in K snijden. De lijn EG , die den thans gevormden $\triangle HFK$ binnentreedt in G , moet hem ook weer verlaten, en dit kan alleen gebeuren in een punt van FK .¹⁾

In de tweede plaats moeten we nemen een punt E' op het verlengde van UA , $E'F' \perp BD$ trekken en aantonen, dat elke rechte $E'G'$, getrokken door E' binnen den hoek $AE'F'$ zóó, dat ze CB niet tusschen F' en B en dus AB wél ontmoet, BD ergens snijdt. Denken we daartoe (om dezelfde figuur te kunnen gebruiken), dat AG zoodanig is getrokken, dat $\angle UAG = \angle UE'G'$ is. Nu zal $E'G'$ de lijn AK niet kunnen snijden; de stelling, waarop dit berust (twee rechten hebben geen punt gemeen als bij snijding door een derde gelijke overeenkomstige hoeken ontstaan) is van het parallellen-postulaat onafhankelijk; en daar zij den driehoek ABK ergens op AB binnentreedt zal zij hem ergens op BK moeten verlaten.

Wederkeerigheid der evenwijdigheid. Als gegeven is, dat (Fig. 7) $AB \parallel CD$ is, zullen we bewijzen, dat omgekeerd $CD \parallel AB$ is, d.w.z. dat niet alleen CD de lijn AB nergens snijdt, hetgeen reeds bekend

¹⁾ Van de bewering, dat een rechte, die één zijde van een driehoek snijdt (niet in één der hoekpunten), ook een tweede zijde snijden moet, wordt in deze beschouwingen bij voortdurend gebruik gemaakt. Lobatschefsky motiveert haar door te verwijzen naar zijn bewering, dat een rechte lijn het vlak in twee deelen verdeelt. Bij Hilbert is het no. 4 van de Anordnungsaxiomen.

is, maar dat elke rechte CE, door C binnen $\angle ACD$ getrokken, AB ergens snijdt (we hebben $AC \perp CD$ getrokken). Trek $AF \perp CE$; F ligt op CE zelf en niet op haar verlengde, omdat anders $\triangle ACF$

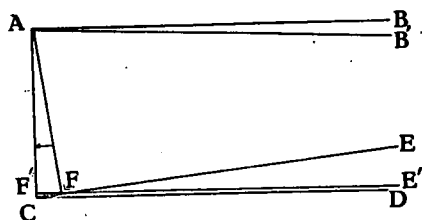


Fig. 7.

een buitenhoek ACE zou bezitten, die kleiner is dan een niet aanliggende (rechte) binnenhoek. Voorts is in $\triangle ACF$: $AF < AC$. We passen nu AF op AC af en vinden aldus tusschen A en C het punt F'; door F' trekken we $F'E' \perp AC$. We

denken nu de figuur BAFE gedraaid om A, totdat AF op AC, dus F in F', en FE op F'E' valt en onderstellen, dat de rechte AB alsdan den stand AB' gaat innemen. Volgens de onderstelling, dat $AB \parallel CD$ is, zal nu AB' CD moeten snijden. Maar dan zal F'E', die den aldus gevormden driehoek in F' binnentreedt, hem ook weer moeten verlaten en daar zij CD niet ontmoeten kan, zal zij AB' moeten snijden en aldus den afstand van A bepalen tot het punt, waar CE de lijn AB snijdt. Hiermede is het bewijs geleverd.

Voordat we tot andere eigenschappen van evenwijdigen komen, moeten we als hulpstellingen afleiden stellingen omtrent de som der hoeken van een driehoek.

§ 6. *In geen rechtlijnigen driehoek is de som der hoeken grooter dan twee rechte.* Onderstellen we, dat in $\triangle ABC$ (Fig. 8) de som der hoeken gelijk aan $\pi + \alpha$ is, waarin α een positief bedrag voor-

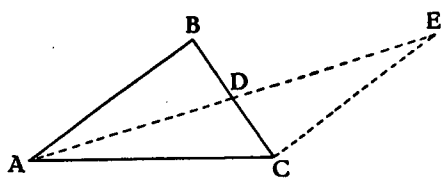


Fig. 8.

stelt. Indien de zijden ongelijk zijn (de beschouwing van de tegenovergestelde onderstelling geeft geen moeilijkheden) denken we, dat BC de kleinste is. We verbinden dan A met het

midden D van BC en verlengen AD door D heen met een stuk DE, dat gelijk is aan AD (we maken evenals in de Noot op pag. 5 gebruik van de onderstelling, dat twee rechten elkaar niet voor de tweede maal kunnen ontmoeten, en de te bewijzen stelling mag dus niet toegepast worden in een meetkunde; waarin de lengte der rechte lijn eindig is). Trekken we CE, dan is $\triangle CDE \cong$

$\triangle BDA$, waaruit gemakkelijk volgt, dat ook van $\triangle AEC$ de hoekensom $\pi + \alpha$ is. Maar $\angle BAD = \angle DEC$, zoodat we in $\triangle AEC$ den kleinsten hoek van $\triangle ABC$ terugvinden, verdeeld over twee der hoeken. Hieruit volgt, dat de kleinste hoek van $\triangle ACE$ hoogstens gelijk is aan de helft van den kleinsten hoek van $\triangle ABC$. Gaan we nu op de aangegeven wijze voort, met $\triangle ACE$ handelend op gelijke wijze als met $\triangle ABC$ gedaan is, dan komen we eens tot een driehoek, waarvan twee hoeken elk kleiner zijn dan $\frac{1}{2} \alpha$, terwijl toch de som der hoeken nog steeds $\pi + \alpha$ is, zoodat één der hoeken grooter dan een gestrekte moet zijn. De gemaakte onderstelling voert derhalve tot een ongerijmdheid.

De som der hoeken van een driehoek is dus gelijk aan of kleiner dan 180° . We bewijzen nu:

Indien er één rechtlijnige driehoek aan te wijzen is, waarvan de som der hoeken gelijk aan een gestrekten is, dan is voor elke rechtlijnige driehoek die som gelijk aan een gestrekten.

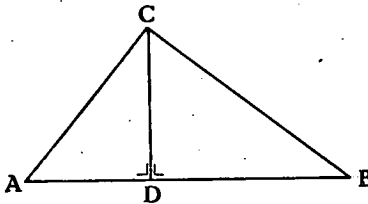


Fig. 9.

Als van driehoek ABC de som der hoeken 180° is, dan zijn zeker twee van zijn hoeken scherp; we onderstellen, dat de hoeken A en B scherp zijn. De hoogtelijn uit C treft AB zelf en verdeelt $\triangle ABC$ in twee rechthoekige driehoeken.

In elk van deze is de som der hoeken weder 180° , omdat zij in één der driehoeken niet kleiner dan 180° kan zijn zonder in den anderen grooter dan 180° te zijn, in strijd met de vorige stelling.

We beschouwen thans één van de rechthoekige driehoeken en noemen de rechthoekszijden b en d . Plaatsen we nu een tweeden

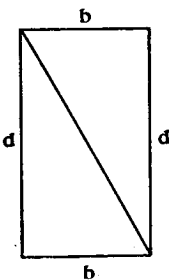


Fig. 10.

rechthoekigen driehoek met rechthoekszijden b en d tegen den eersten, zóó, dat zij de schuine zijde gemeen hebben en de gelijke zijden niet aan elkaar grenzen (Fig. 10), dan ontstaat, gelijk men gemakkelijk ziet, een vierhoek met 4 rechte hoeken (we merken terloops op, dat bij de gemaakte onderstelling thans het bestaan van een rechthoek is aangetoond).

Vervolgens kunnen we van deze rechthoeken een aantal met de zijde b tegen elkaar plaatsen en aldus komen tot een rechthoek met zijden b en md ; en daarna een

aantal van deze nieuwe rechthoeken met zijde md tegen elkaar en aldus komen tot een rechthoek met zijden nb en md , waarin m en n willekeurig groote geheele getallen zijn. Een diagonaal verdeelt den driehoek in twee congruente rechthoekige driehoeken met rechthoekszijden nb en md en waarvan de som der hoeken 180° is.

We kunnen nu bij elken willekeurig gegeven rechthoekigen driehoek een anderen met rechthoekszijden nb en md teekenen, waarbij n en m zoodanig gekozen zijn, dat deze driehoek den eersten geheel bevat. Gemakkelijk is in te zien, dat, als in Fig. 11 van $\triangle ABC$ de

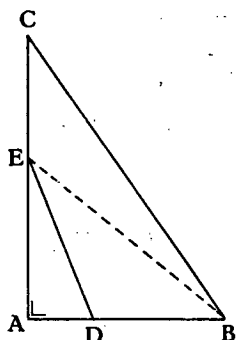


Fig. 11.

som der hoeken 180° is, die van $\triangle ADE$ ook 180° is. Trek nl. BE; van elk der driehoeken CBE en EBA is de som der hoeken nu ook 180° , daar zij van den eenen driehoek niet kleiner dan 180° kan zijn zonder van den anderen grooter dan 180° te zijn. Daar die van $\triangle ABE$ 180° is, is nu om dezelfde reden de som der hoeken van $\triangle ADE$ 180° .

Nu we aangetoond hebben, dat bij de gegeven onderstelling de som der hoeken van elken rechthoekigen driehoek gelijk aan 180° is, volgt uit het feit, dat elke scheefhoekige driehoek door middel van een hoogtelijn in twee rechthoekige is te verdeelen, dat bij diezelfde onderstelling van een willekeurigen driehoek de som der hoeken gelijk aan 180° is.

§ 7. We kunnen thans bewijzen:

Door een punt buiten een rechte kan men een lijn trekken, die met de eerste een willekeurig kleinen hoek maakt.

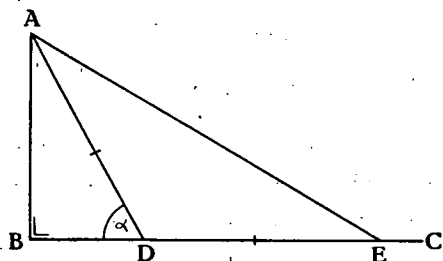


Fig. 12.

Laat (Fig. 12) uit het gegeven punt A de loodlijn AB neer op de gegeven rechte BC. Zij AD een willekeurige lijn en $\angle ADB = \alpha$. Maak nu $DE = AD$, dan is volgens de vorige stellingen de hoek AED gelijk aan of kleiner dan $\frac{1}{2} \alpha$. Gaan we op

deze wijze voort, dan blijkt de juistheid der stelling (voor elke meetkunde met rechten van oneindige lengte).

We toonen vervolgens aan, dat de onderscheiding der beide mogelijkheden, waartoe we kwamen bij de opstelling van het nieuwe parallellen-postulaat, samenvalt met de onderscheiding der mogelijkheden betreffende de som der hoeken van een driehoek.

Als twee loodlijnen op eenzelfde rechte evenwijdig zijn, dan is in elken rechte driehoek de som der hoeken gelijk aan 180° .

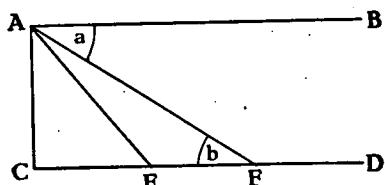


Fig. 13.

In Fig. 13 zijn AB en CD de beide rechten, die volgens onderstelling evenwijdig zijn. Zij de som der hoeken van $\triangle ACE$ $180^\circ - \alpha$ en die van $\triangle AEF$ is $180^\circ - \beta$ (waarin α en β positief zijn of nul), dan is die van $\triangle ACF$

$180^\circ - \alpha - \beta$. Stellen we $\angle BAF = \alpha$ en $\angle AFC = \beta$, dan is $\alpha + \beta = \alpha - \beta$. Daar nu, naarmate we F verder in de richting van D nemen, indien α en β positief zijn, het bedrag $\alpha + \beta$ steeds moet toenemen, doch we elk der hoeken α en β zoo klein kunnen maken als we willen, moeten α en β nul zijn, waarmede het gestelde bewezen is.

We kunnen het gevondene aldus uitspreken: indien door een punt buiten een rechte slechts één lijn te trekken is, evenwijdig met die lijn, dan is de som der hoeken van elken driehoek 180° ; gaan door een punt buiten een rechte twee evenwijdigen, m.a.w. is $\Pi(p) < \frac{\pi}{2}$, dan is van elken driehoek de som der hoeken kleiner dan 180° . We gaan nu de Meetkunde, die bij de laatste onderstelling behoort, verder ontwikkelen.

§ 8. *Bij een gegeven parallelhoek behoort een bepaalde afstand.*¹⁾ We kunnen deze stelling ook als volgt uitspreken: als gegeven is een scherpe hoek $BAC = A$, dan is het mogelijk een rechte te construeeren, die tegelijkertijd loodrecht op AC en evenwijdig met AB is.

Voor het bewijs laten we in Fig. 14 uit een punt B' van AB de loodlijn B'A' neer op AC, nemen A'A'' = AA', en richten de loodlijn A''B'' op AC op. Is nu de som der hoeken van $\triangle AA'B'$ gelijk aan $\pi - \alpha$, dan is die van $\triangle AA''B'$ gelijk aan $\pi - 2\alpha$ (de $\triangle$ en

¹⁾ In § 18 vindt men behandeld, op welke wijze Johann Bolyai den afstand, die bij een gegeven parallelhoek behoort, construeert.

$AA'B'$ en $A''A'B'$ zijn congruent), die van $\triangle AA''B''$ kleiner dan $\pi - 2\alpha$. We hebben daarbij ondersteld, dat de loodlijn in A'' opgericht, AB snijdt. Gaan we

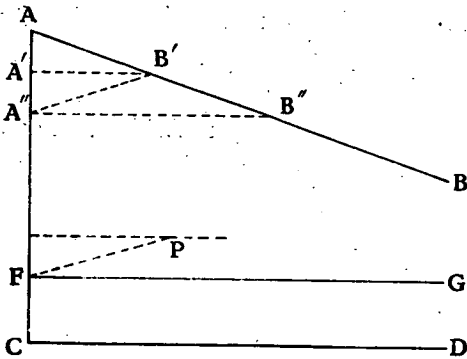


Fig. 14.

echter op de aangegeven wijze voort, dan zouden we noodzakelijk eenmaal aan een driehoek komen, waarvan de som der hoeken negatief is, d.w.z. we komen eenmaal aan een punt C op AC , zoodanig gelegen, dat de loodlijn CD , in dat punt op AC opgericht, AB niet snijdt.

Nu zou het kunnen zijn, dat die lijn CD zelf evenwijdig met AB is. In dat geval is reeds het bestaan van de gezochte rechte aangetoond. Is echter CD niet evenwijdig met AB , dan moet er toch een grens zijn tusschen de loodlijnen op AC , die, zooals $A'B'$, de lijn AB wél, en de loodlijnen, die, zooals CD , de lijn AB niet snijden (continuïteitsoverweging). Zij FG de lijn, die de grens vormt, zoodat dus FG de eigenschap heeft AB niet te snijden, terwijl elke loodlijn op AC , wier voetpunt tusschen A en F willekeurig dicht bij F ligt, AB wél snijdt, dan zullen we aantoonen, dat $FG \parallel AB$ en dus de gezochte rechte is. Trekken we daartoe een willekeurige lijn FP binnen hoek AFG en laten we uit een punt P van die lijn de loodlijn neer op AC ; deze ontmoet AF tusschen A en F en zij snijdt dus na verlenging AB . Aldus wordt een driehoek gevormd, waarin FP in P binnendringt, en dien zij alleen in een punt van AB weder verlaten kan. De evenwijdigheid van FG en AB is hiermee aangetoond. We merken naar aanleiding van deze stelling op, dat, zooals men gemakkelijk inziet, p toeneemt, als $\Pi(p)$ afneemt; nadert p tot 0 , dan nadert $\Pi(p)$ tot $\frac{1}{2}\pi$; nadert p tot ∞ , dan nadert $\Pi(p)$ tot 0 .

§ 9. *Als men twee evenwijdigen in den zin der evenwijdigheid verlengt, dan naderen zij steeds meer tot elkaar.*

Richten we, om dit te bewijzen, in de punten A en B eener rechte (Fig. 15) loodlijnen van gelijke lengte AC en BD op, en verbinden we C met D . De rechten AB en CD zijn loodrecht op de lijn, die de

middens van AB en CD verbindt en dus niet-snijdend (door deze benaming zullen we den onderlingen stand van twee rechten blijven aangeven, die geen punt gemeen hebben, en ook niet evenwijdig

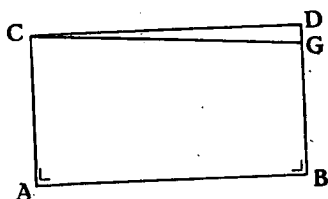


Fig. 15.

zijn). Trekken we nu door C de lijn $CG \parallel AB$, dan zal zij naar de zijde van AB van CD moeten afwijken, en dus van DB een stuk GB afsnijden, dat kleiner dan AC is, waarmede het gestelde is aangetoond.

We zullen straks op dit punt nader terugkomen en dan aantoonen, dat de loodlijn, uit een punt van een der twee evenwijdigen op de andere neergelaten beneden elk bedrag daalt, als we de rechten ver genoeg in den zin harer evenwijdigheid verlengen, m.a.w. dat de evenwijdigen asymptotisch verlopen.

§ 10. In het vorige (§ 4—§ 9) heb ik, wat de hoofdzaken betreft, den gedachtengang gevolgd, dien Lobatschewsky aanwees in zijn „Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien”. Ik wijk thans een oogenblik af om een stelling omtrent de niet-snijdenden in te lasschen, waardoor het verschil in gedrag tusschen evenwijdigen en niet-snijdenden duidelijk uitkomt.

Twee niet-snijdenden hebben een gemeenschappelijke loodlijn. We kunnen deze stelling als het omgekeerde beschouwen van de waarheid, dat in de meetkunde van Gauss de loodlijnen op eenzelfde rechte niet-snijdend zijn.

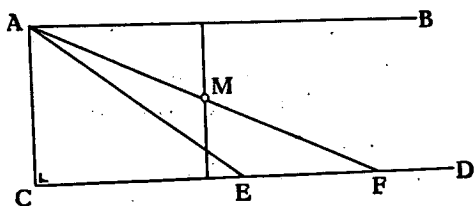


Fig. 16.

De in Fig. 16 gegeven rechten AB en CD hebben derhalve geen punt gemeen en zijn niet evenwijdig. We laten uit een punt A der eene de loodlijn AC neer op de andere. Indien nu $\angle BAC$ recht

is, dan is de stelling reeds bewezen. We onderstellen dus, dat dit niet het geval is; dan is één der hoeken, die AC met AB maakt, scherp; we denken, dat het $\angle CAB$ is en noemen hem φ . Laat nu een rechte van den stand AC uit om A draaien, zoodat zij achtereenvolgens de standen AE, AF enz. aanneemt. De hoek, dien

zij maakt met CD , wordt steeds kleiner, en daalt, zooals we reeds gezien hebben, van 90° af tot beneden elk bedrag. De hoek, dien zij met AB vormt, wordt ook steeds kleiner en nadert van φ af tot zekere grenswaarde, die van nul verschilt. Er moet dus een stand gepasseerd zijn, waarbij de genoemde hoeken aan elkaar gelijk zijn; zij AF deze stand. Laten we nu uit het midden M van AF een loodlijn neer op CD , dan zal zij, zooals uit de congruentie van twee driehoeken volgt, ook AB loodrecht snijden.

Deze stelling, die thans met behulp van continuïteitsoverwegingen is afgeleid, en die voor de meetkunde van Gauss fundamenteel is, is later door Hilbert zonder hulp van zulke overwegingen elementair bewezen; zie § 19.

Aan het werk van Saccheri zouden we kunnen ontleenen het bewijs van de waarheid, dat bij zulke niet-snijdenden de afstanden aan weerszijden van de gemeenschappelijke loodlijn op dezelfde wijze aangroeien, dat deze toename steeds sterker wordt en dat dus de afstand ten slotte boven elk bedrag stijgt.¹⁾

§ 11. We keeren thans terug tot de beschouwing van de eigenschappen der evenwijdigen en bewijzen na de onafhankelijkheid van de evenwijdigheid van het beginpunt en de wederkeerigheid der evenwijdigheid (zie § 5) thans hare *transitiviteit*, d.w.z. we bewijzen de stelling:

Als twee rechten evenwijdig zijn met een derde, dan zijn zij onderling evenwijdig.

We beginnen met het geval, dat de 3 rechten in één plat vlak gelegen zijn. In dit geval hebben we nog te onderscheiden de mogelijkheden, dat de lijn, die met de beide andere evenwijdig is, niet of wel tusschen de beide andere gelegen is.

Vooreerst hebben we dus te bewijzen, dat, als $AB \parallel EF$ en $CD \parallel EF$ is, ook $AB \parallel CD$ is. (Fig. 17).

¹⁾ We kunnen ons thans ook een „voorstelling” vormen van hetgeen gebeurt, als we in Fig. 4 een rechte, beginnend in den stand AB , om A laten draaien; bij een bepaalden hoek van wenteling, nl. $\angle BAU$, is het snijpunt met PQ in het oneindige verdwenen; draaien we even verder, dan krijgt de rechte een stand, waarbij zij met PQ een gemeenschappelijke loodlijn op zeer grooten afstand heeft. Bij het steeds verder draaien, nadert die loodlijn tot AB , welke plaats zij heeft, als de draaiende rechte den stand RS heeft aangenomen. Draaien we wederom verder, dan verwijdt zich de loodlijn van AB naar links tot in het oneindige, waarna een snijpunt aan diezelfde zijde voor den dag komt, dat weder in B is, wanneer de draaiende rechte haar oorspronkelijken stand weder heeft ingenomen.

Daartoe trekken we $AE \perp EF$. De lijn AE zal CD in een punt C snijden en $\angle DCE < 90^\circ$, aangezien $CD \parallel EF$ is. We trekken ook

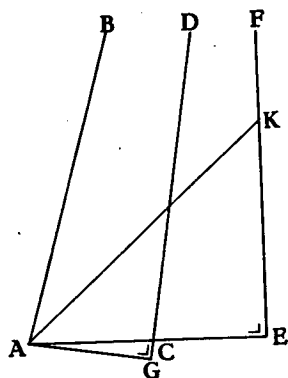


Fig. 17.

$AG \perp CD$. AG zal het verlengde van DC snijden, aangezien $\angle ACD > 90^\circ$ is. We hebben nu te bewijzen, dat alle rechten, door A binnen $\angle BAG$ getrokken, CD snijden. Alle rechten binnen $\angle CAG$ snijden GD tusschen C en G . We beschouwen dus een rechte door A binnen $\angle BAE$. Zulk een rechte snijdt EF ergens in een punt K . Maar dan zal de rechte CD , die $\triangle AEK$ in C binnentreedt en die EF niet ontmoet, den driehoek in een punt van AK weder

moeten verlaten. Dus heeft AK met CD een punt gemeen.

In de tweede plaats hebben we te bewijzen, dat, als $AB \parallel CD$ is en ook $EF \parallel CD$ is, $AB \parallel EF$ is (Fig. 18).

Trek daartoe weder $AE \perp EF$. Elke rechte door A binnen $\angle BAE$ snijdt volgens de onderstelling CD ; zoo snijdt AK de lijn CD in K . Neem nu een punt L op het verlengde van AK en verbind dat punt met L , dan zal, wederom volgens de onderstelling, CL de lijn EF snijden, b.v. in M . De lijn AL , die nu in L den driehoek CEM binnentreedt, zal hem ergens in EF weder moeten verlaten.

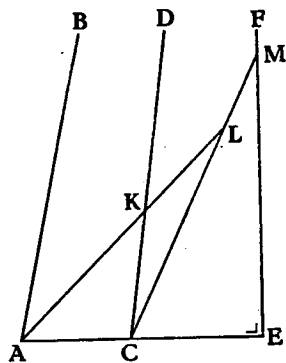


Fig. 18.

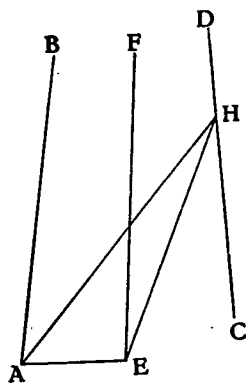


Fig. 19.

We gaan thans over tot het geval, dat de drie rechten, die gegeven zijn, niet in één plat vlak gelegen zijn. Daartoe onderstellen we, dat AB en CD (Fig. 19) twee evenwijdige rechten zijn, en dat E een punt is, niet in het vlak van die twee rechten gelegen. We trekken AE en verbinden E met een punt H van CD . Laten we nu vlak AEH draaien om AE , dan zal, wanneer H op CD voortschrijdt, een grénstand

bepaald zijn, waarbij AH met AB samenvalt. Het vlak AEH valt in dezen stand samen met BAE en de grensstand van EH is de snijlijn van de vlakken BAE en CDE; zij is evenwijdig met CD. We zouden op dezelfde wijze hebben kunnen aantonen, dat de snijlijn van die vlakken evenwijdig met AB is.

Als nu omgekeerd EF de lijn is, die met AB of CD evenwijdig is, dan is zij de snijlijn der twee bedoelde vlakken en dus ook evenwijdig met de andere lijn.

De transitiviteit der evenwijdigheid is thans volledig aangetoond. Het zal spoedig blijken, waarom het noodig was, onze beschouwingen tot de ruimte uit te breiden.

§ 12. We komen thans tot een stelling, uit de Euclidische meetkunde welbekend, die ook in de meetkunde van Gauss geldt, mits we aan het begrip „gemeenschappelijk punt van rechten” eenige uitbreiding geven.

De stelling luidt:

De drie middelloodlijnen van een driehoek gaan door één punt. Er zijn 3 gevallen te onderscheiden (dus 3 verschillende onderstellingen te maken omtrent de onderlinge ligging der hoekpunten van een driehoek):

1°. Twee der middelloodlijnen ontmoeten elkaar. Op de bekende manier, dus door het beschouwen van congruente driehoeken bewijst men, dat de derde middelloodlijn gaat door het snijpunt der beide eerste.

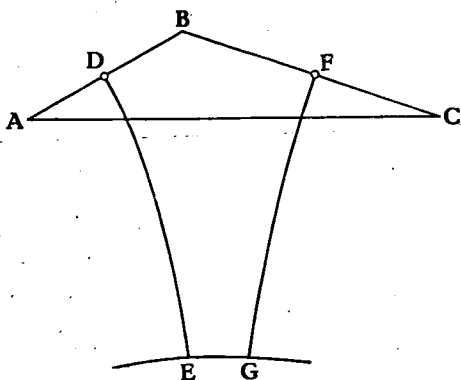


Fig. 20.

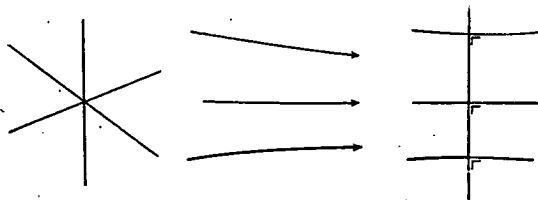
2°. Twee der middelloodlijnen zijn niet-snijdend. We maken thans gebruik van de reeds in § 10 bewezen stelling, dat die middelloodlijnen een gemeenschappelijke loodlijn bezitten; zij in Fig. 20 EG deze loodlijn. Nu zijn de loodlijnen, uit A en B op EG neergelaten, even lang, gelijk uit congruentie van vierhoeken blijkt.

Evenzoo zijn de loodlijnen, uit B en C op EG neergelaten, even lang. Dus zijn ook de loodlijnen, uit A en C op EG neergelaten even

lang, zoodat ook de middelloodlijn van AC loodrecht op EG is.

3°. Twee der middelloodlijnen zijn evenwijdig. De derde kan nu met geen der vorige twee in een der onder 1° of 2° genoemde gevallen verkeerren, zoodat de drie rechten twee aan twee evenwijdig zijn. Er zijn nu echter nog 2 mogelijkheden. Drie rechten nl., die twee aan twee evenwijdig zijn, zijn of evenwijdig in denzelfden zin of zij vormen een z.g. asymptotischen driehoek. Om de ongerijmdheid der laatste onderstelling ten aanzien van de middelloodlijnen van den driehoek aan te toonen, is het voldoende, te bewijzen, dat de 3 middelloodlijnen een zelfde rechte snijden; immers dit is nooit mogelijk met de zijden van een asymptotischen driehoek. Als lijn, die de drie middelloodlijnen snijdt, noemen we: de grootste zijde van den driehoek (het geval, waarin niet één der zijden de grootste is, geeft geen moeilijkheid); want de middelloodlijn van één der zijden snijdt steeds de grootste der beide andere.

We hebben dus gevonden: de drie middelloodlijnen van een driehoek ontmoeten elkaar in één punt, of zij zijn loodrecht op eenzelfde rechte, of zij zijn evenwijdig in dezelfde richting. Om dus de uitgesproken stelling in haar vollen omvang te kunnen handhaven moeten we vooreerst afspreken, dat we aan de rechten, die in bepaalden zin evenwijdig zijn, een gemeenschappelijk punt zullen toekennen; we zeggen, dat die rechten een *eindpunt* gemeen hebben. Maar



a. Hoekpunt. b. Eindpunt. c. Ideaal punt.

Fig. 21.

in de tweede plaats moeten we afspreken, dat we aan alle rechten, die loodrecht op dezelfde rechte zijn, een gemeenschappelijk punt zullen toekennen; we zeggen, dat die rechten een *ideaal punt* gemeen hebben. Van twee snijdende rechten wordt dan gezegd, dat zij een *hoekpunt* gemeen hebben. Na deze afspraken hebben twee verschillende rechten of een hoekpunt, of een eindpunt of een ideaal punt gemeen. En we kunnen in de meetkunde van Gauss 3 soorten van waaiers onderscheiden, die in Fig. 21 worden aangeduid.

We hebben nu gevonden, dat in deze meetkunde niet om elken driehoek een cirkel kan beschreven worden, en zien dus, dat de onderstelling, dat er om elken driehoek wèl een cirkel mogelijk is, (terwijl we vasthouden aan de oneindige lengte der rechte) aequivalent is met het 5de postulaat.¹⁾ Immers vonden we ook de mogelijkheid, dat er een rechte is, van welke de drie hoekpunten van den driehoek even ver verwijderd zijn, zoodat die hoekpunten op een z.g. *afstandskromme* liggen, door Lobatschefsky *paracykel* genoemd; hier vinden we het aanknoopingspunt met de beschouwingen over de aequidistante lijnen. Ook vonden we de mogelijkheid, dat de 3 hoekpunten van den driehoek zoodanig gelegen zijn, dat de middelloodlijnen evenwijdig zijn en dus de cirkel overgaat in een kromme, die zou te beschouwen zijn als een cirkel met oneindig grooten straal; deze kromme, de z.g. *grenskromme*, door Lobatschefsky *horicykel* genoemd, gaan we thans beschouwen. In de meetkunde van Gauss liggen dus elke 3 punten òf op een rechte, òf op een cirkel, òf op een afstandskromme, òf op een grenskromme.

§ 13. *De middelloodlijnen van alle koorden van een grenskromme zijn evenwijdig.*

Om deze stelling te bewijzen zullen we eerst de grenskromme construeeren. Daartoe nemen we (Fig. 22) een bepaalde rechte AB, die *as* van de grenskromme zal worden en trekken uit A rechten in alle richtingen. Voor elk van die rechten bepalen we de rechte, die loodrecht op haar en tevens evenwijdig met AB is (zie § 8). Voorts

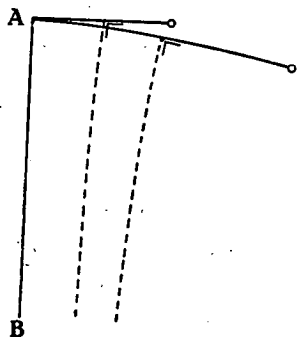


Fig. 22.

verdubbelen we het stuk dat die loodlijn van de rechte afsnijdt en vinden aldus een punt van de grenskromme. Uit de constructie volgt nu onmiddellijk, dat de ontstane kromme de eigenschap heeft, dat de middelloodlijnen van alle koorden die door A gaan, onderling evenwijdig zijn, nl. evenwijdig met AB. In verband met een zooeven bewezen stelling volgt nu onmiddellijk, dat de middelloodlijnen ook van alle andere

¹⁾ Wolfgang Bolyai heeft voorgesteld, het parallellen-postulaat te vervangen door het postulaat, dat door elke 3 punten, die niet op een rechte liggen, een cirkel gaat.

koorden met AB evenwijdig zijn (verbind daartoe de uiteinden der koorde met A).

Voorts zien we, dat de rechten door elk der punten van de grenskromme evenwijdig met AB getrokken, even goed als AB zelf, als uitgangspunt voor de constructie van de grenskromme hadden kunnen dienen; en dat dus al die rechten assen, d.w.z. symmetrie-assen, dier kromme zijn.

Uit de constructie volgt, dat alle grenskrommen congruent zijn. Beschouwen we nu twee grenskrommen met gemeenschappelijke assen, terwijl x de lengte der stukken is, die door de grenskrommen op elk der assen bepaald worden. Teekenen we (Fig. 23) drie van

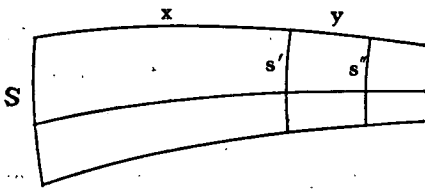


Fig. 23.

die assen, dan zullen de tusschen die assen gelegen bogen der grenskrommen op beide grenskrommen dezelfde verhouding hebben. Hieruit volgt, dat de verhouding der bogen s en s' een functie

is van x alleen; daar nu in Fig. 23:

$$\frac{s}{s'} = f(x); \frac{s'}{s''} = f(y) \text{ en } \frac{s}{s''} = f(x+y).$$

is, is de functie dus zoodanig, dat

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$$

is, en dus

$$f(x) = e^{ax}.$$

Kiezen we nu de lengte-eenheid zóó, dat $a = 1$ is, dan wordt

$$f(x) = e^x$$

dus

$$s : s' = e^x \dots\dots\dots(1)$$

De lengte-eenheid, die we thans hebben aangenomen, is dus zoodanig dat zij gelijk is aan den afstand, waarop twee grensbogen, tusschen dezelfde gemeenschappelijke assen begrepen, een verhouding van lengte gelijk aan e hebben. Lobatschefsky noemt dezen afstand de *natuurlijke lengteëenheid*. Hierbij kan opgemerkt worden, dat het bestaan van zulk een lengtemaat a priori als noodzakelijk gevolg van de verwerping van het 5de postulaat reeds in 1766 door Lambert was ingezien. (Wordt vervolgd.)

BIJDRAGE TOT DE REGELING VAN HET WISKUNDE-ONDERWIJS AAN DE H.B.S.

DOOR

F. VEEN (Enkhuizen).

In de provinciale bijeenkomst van leeraren in de wiskunde enz. op Zaterdag 25 Juni te Amsterdam gehouden ter bespreking van het bekende rapport der commissie-Beth, werd mij verzocht mijn beschouwingen in het (inmiddels herdoopte) Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde te publiceeren.

Ik geef daaraan gevolg in den vorm van beantwoording der ons voorgelegde vragen, die vrijwel overeenkomen met de vragen welke de Commissie zelf formuleerde,¹⁾ terwijl ik bij mijn beantwoording van de laatste vragen mededeeling doe van leerplan en eindexamenprogramma, zooals die volgens mijne beschouwingen zouden kunnen worden. Ten overvloede geef ik een aanwijzing van de verschillende artikelen van het eindexamenreglement, die gewijzigd zouden moeten worden in verband met de voorgestelde verbetering van de programma's. Herziëning der regelingen van het onderwijs en het eindexamen moeten hand aan hand gaan. Het eindexamen dient te loopen over datgene wat (in de hoogste klassen) onderwezen is, terwijl het ook niet meer dan natuurlijk is, dat (allengs slechts) onderwezen wordt, datgene, waarover het eindexamen loopt. Men moet zich geen illusies maken over het onderwijs in dingen, die op het eindexamen niet ter sprake gebracht (kunnen) worden. En men moet in de voorschriften voor het eindexamen ook maar zoo goed mogelijk tot uitdrukking brengen, wat men onderwezen wil zien, en waaraan men wenscht, dat bij het onderwijs aandacht wordt geschonken. Ik heb hier op het oog vakken, waarin geëxamineerd wordt. Met een vak, waarin dit niet

¹⁾ Weekblad voor Gymn. en Midd. Ond. van 8 Dec. 1926, blz. 451.

geschiedt, waarvoor het gemiddeld schoolcijfer wordt genoteerd, staat het natuurlijk anders: daarbij is eenige vrijheid mogelijk en met het oog daarop zijn dergelijke vakken dan ook o.a. gewenscht (verg. hieronder mijn oordeel over de (positie der) mechanica en de differentiaalrekening). Een ander argument er voor is, dat het eindexamen toch al vrij omvangrijk is.

V r a a g 1. Acht gij wijziging in het bestaande leerplan voor het onderwijs in wiskunde, mechanica en cosmographie gewenscht?

A n t w o o r d. Ja.

V r a a g 2. Hoe denkt gij in beginsel over het voorstel der Commissie om meer dan tot dusver geschiedde in het onderwijs op de H. B. S. den nadruk te leggen op de theoretische zijde van de wiskunde en de mechanica?

A n t w o o r d. Daar stem ik van harte mee in, althans wat de wiskunde betreft.

V r a a g 3. Kunt gij U in beginsel vereenigen 1) met het streven het functioneele denken te bevorderen en 2) als consequentie daarvan de beginselen der infinitesimaalrekening in te voeren?

A n t w o o r d 1). Daar gevoel ik veel voor. Ik acht het van groot belang, dat de leerlingen de grootheden leeren zien, geleidelijk veranderend in onderling verband. Graphische voorstellingen moeten zooveel mogelijk doorlopend, althans te beginnen in de tweede klasse, het algebraonderwijs illustreeren, niet — naar men volgens het bestaande programma zou kunnen denken — in een aanhangsel gegeven worden aan het eind van de derde klasse. Anders gezegd: de ontwikkeling van het functiebegrip moet meer in de geheele algebra worden ingeweven. Zoo wordt ook de weg bereid voor de infinitesimaalrekening.

A n t w o o r d 2). Daarin zou ik niet zoo ver willen gaan als de Commissie. Ik zou niet verboden willen zien om in de mechanica, daar waar er aanleiding toe is, occasioneel dus, differentiaal-quotient of differentieeren ter sprake te brengen. Laat men het daar desnoods voorschrijven. Maar ik heb er groot bezwaar tegen, dat (beginselen der) differentiaal- (en integraal-)rekening een verplicht bestanddeel van het wiskundeprogramma zou worden. Ik schaar mij aan de zijde van diegenen, die het te moeilijk vinden voor onze leerlingen en ik heb den beschikbaren tijd (meer dan) noodig voor hetgeen thans gevraagd wordt en wat ik daarvan zou willen maken. De kwestie zou, wat dit betreft, nog anders zijn, als het

ergens voor in de plaats kon komen. En dan ook op het eind-examen. Zooals men b.v. zou kunnen voorstellen: een beknopte analytische meetkunde van de kegelsneden inplaats van beschrijvende meetkunde.

V r a g 4. Hoe denkt gij over 1) het voorstel om de leervakken Mechanica en Kosmographie te herstellen in de positie, die zij vóór 1920 innamen en 2) over de verdeeling van de lesuren voor Wiskunde, Mechanica en Kosmographie over de verschillende klassen?

A n t w o o r d 1). Daar ben ik niet voor. Zie hierboven (inleiding).

2). Voor Wiskunde had ik graag een uur meer in de 5e kl. Wat Mechanica en Kosmographie betreft, stem ik blanco. Er zijn vier onderdeelen, die ik graag ieder een wekelijksche beurt van een vol lesuur zou geven. Maar er moeten ook (liefst geregeld) proefstukken worden gemaakt ter repetitie, beoordeeling en training. Daar had ik graag een apart (vijfde) uur voor. Nú moet het van de andere vakken af en dit gaat voornamelijk ten koste van algebra en trigonometrie. Er zal wel niets van in kunnen komen, dat dat aparte uur er bij komt, maar laat men dan ook niet meenen, dat het algebra-(en trigonometrie-)programma in IV en V verzwaaard kan worden.

V r a g 5. Acht gij het ontwerp leerplan overladen?

A n t w o o r d. Ja, waarlijk. Ik schreef daar, vóór ruim een jaar al, een artikeltje ¹⁾ over, dat ook na de nadere beschouwingen en de wijzigingen door de Commissie aangebracht nog ten volle van kracht is en dat ik hier moge citeeren:

Het oog en de maag, en ... het lied van schijn en wezen.

Het oog nl. van de Commissie-Beth c.s. Is dat niet wat groot in verhouding tot de maag der leerlingen?

Men zie haar ontwerp-leerplan voor het onderwijs in wiskunde enz. op de H. B.-scholen met 5-j. cursus.

Zij stelt voor — om slechts enkele hoofdzaken te noemen —: strenger behandeling van de theorie der rekenkunde, kegelsneden, axiomatische behandeling en uitbrei-

¹⁾ Weekb. v. Gymn. en M. O. van 5 Mei 1926, blz. 1122.

ding van de planimetrie in klasse IV, differentiaal- en integraalrekening.

En dit alles bij het tegenwoordige. Want van het bestaande programma wordt feitelijk niets geschrapt. De beperkingen, die de Commissie in haar toelichting noemt, betreffen uitsluitend zaken, die niet voorgeschreven, maar hoogstens gebruikelijk zijn. Wat beduiden echter een paar inhoudsformules minder? Wat beteekent de aansporing tot beperking in berekeningen met wortelvormen, samengestelden intrest, exponentiële en logarithmische vergelijkingen, lengten, koorden- en raaklijnnenvierhoek, regelmatige veelhoeken? Met wat de Commissie daarvan zelve blijft eischen, kan ook thans worden volstaan. En waarschuwt zij aan den anderen kant al niet zelve (op blz. 10¹) van haar publicatie tegen te-groote onderschatting van technische vaardigheid?

De eenige tijdsbesparing van beteekenis zie ik in de voor te schrijven vereenvoudiging in het rekenen met logarithmische, goniometrische en rentetafels. Hoe groot die besparing kan zijn, is moeilijk te schatten. Dat ze echter toereikend zal wezen voor de waarlijk niet geringe uitbreidingen, die de Commissie voorstelt, zal wel niemand gelooven.

En hoe staat het daar tegenover met de capaciteit der leerlingen? Zoo, dat er tegenwoordig al hard genoeg gewerkt moet worden in de 4e en 5e kl. om tot een redelijk eindexamen te komen. En dat de resultaten in de lagere klassen ook niet zijn om te zeggen: er kan nog wel wat bij.

De nieuwe spijsen van de Commissie zijn, op zichzelf genomen, wel smakelijk, maar de oude zijn waarlijk voor onze jongelui al zwaar genoeg te verduwen.

„En leeren ze nu op de H. B. S. de heele vlakke meetkunde?” vroeg een belangstellend dominee aan een nuchter leeraar. „Zeker”, was het antwoord, „zooals ze op de catechisatie de heele bijbelsche geschiedenis leeren.”

Welke van beide onderwijsinstellingen door deze vergelijking gevleid of tekort gedaan werd, blijve in het midden gelaten. Toegegeven zij alleen, dat het geleerd hebben van een vak altijd maar betrekkelijk is.

¹) Bijvoegsel, Jg. 2, blz. 122.

Maar als het nu straks zal heeten, dat onze leerlingen differentiaal- en integraalrekening („hoogere wiskunde”!) geleerd hebben, zal dat dan niet wat hèèl betrekkelijk zijn: een wat àl te groot woord voor al te weinig zaaks? Zou dat niet in hooge mate geschikt zijn om onze leerlingen over het paard te tillen en onze critici in het harnas te jagen?

Het wil mij voorkomen, wanneer wij langzamerhand het nieuwe pad van het rekenen met oneindig kleinen opgaan op de H. B. S., dat wij dan wetenschappelijk en paedagogisch wèl zullen doen, hierbij de noodige bescheidenheid en voorzichtigheid te betrachten. Eenvoudige benamingen ter aanduiding van de stof, als: graphische voorstellingen, functies, differentiaalquotient, verdienen m.i. de voorkeur.

V r a a g 6. Acht gij de leerstof overal geschikt voor de klassen, waarvoor zij is voorgeschreven?

A n t w o o r d. Allesbehalve. Zoo weinig, dat ik om uit te drukken, wat ik zou wenschen, mede ter beantwoording van

V r a a g 7. Welke wijzigingen stelt gij voor in het ontwerp-leerplan? liever uitga van het bestaande leerplan. Ja, wanneer ik met het mes op de keel zou moeten kiezen tusschen dit en het voorgestelde, zou ik — juist om de goede beginselen van de Commissie een gunstiger kans te laten om in practijk gebracht te worden — aan het tegenwoordige de voorkeur geven. Het hare zou hiertoe leiden, dat wij wel voor onze leerlingen een heele massa klokjes lieten luiden, maar dat zij ten slotte geen enkele klepel wisten te hangen.

Wat wij noodig zullen hebben om tot meerder inzicht op te leiden, zal vooral zijn een betrekkelijk rustig onderwijs, kon het zijn, nog wat rustiger dan thans. In geen geval haastiger, meer ten halve, meer verdeeld, verward. Zoo iets als Dr. L. Yntema oppert op blz. 15 van zijn brochure te dezer zake ¹⁾:

„Men zou de stelling kunnen verdedigen, dat elk leerplan wel binnen een zekeren tijd is af te werken. De interpretatie is als het ware een functie van den beschikbaren tijd. Alles wat gemist kan worden, wordt er vanzelf uitgeknepen. De leeraren zullen wel opruimen, wat niet dient voor het doel.”

1) Het Nieuwe Ontwerp van een Leerplan enz. Wolters, Groningen.

Zoo iets acht ik kortweg roekeloos, nog afgezien van de omstandigheid, dat hieruit een ongelijkheid kan voortvloeien, die niet ligt in de bedoeling van het n o r m a a l programma.

We moeten ook niet al te onoprecht worden. De werkelijkheid mag niet al te veel af gaan wijken van den schijn, dien de programma's wekken. Ik voor mij vind het al bluff genoeg als onze abiturienten beweren, dat ze de geheele planimetrie en stereometrie „gehad” hebben.

Er zijn evenwel eenige wijzigingen in den bestaanden toestand mogelijk, die de toepassing van de beginselen, waarvoor de Commissie door haar arbeid zoo waardevolle propaganda maakt, kunnen bevorderen.

Allereerst verdient de wiskunde in aanzien te stijgen niet alleen op het eindexamen, maar ook op school, door zoo al niet voor 4, dan toch voor 2 vakken te gelden. Laat ons zeggen A 1 Rekenkunde en algebra, gonio- en trigonometrie, A 2 Meetkunde. De indeeling en aanduiding die de Commissie voorstelt ²⁾, acht ik gezocht en minder sprekend.

Hiermee zou kunnen samengaan: 1 of 2 „vrijstellingen”. Of men, zooals de Commissie voorstelt, in ieder geval mondeling examen zal laten afleggen is meer een kwestie van practischen aard. Er is ook iets voor te zeggen, het mondeling examen wiskunde voor examinerator en deskundige — als er toch hooge cijfers voor schriftelijk zijn — wat te ontlasten.

Verder kan men in de programma's door het vooropstellen van „Algemeene opmerkingen” op enkele punten de bedoeling beter uitdrukken dan door opsomming of indeeling.

De tafels, die gebruikt mogen worden, dienen zoowel in het schoolprogramma als in de regeling v. h. eindexamen met name te worden genoemd.

Voor het overige mogen onderstaande schema's voor zich zelf spreken.

Programma van het onderwijs:

a1. Voor reken- en stekunde, gonio- en trigonometrie.

Algemeene opmerking. Het onderwijs in de stekunde wordt met behulp van graphische voorstellingen zooveel mogelijk dienstbaar gemaakt aan de ontwikkeling van het functioneele denken en de voorbereiding tot de infinitesimaalrekening.

²⁾ Weekblad van 27 October 1926, blz. 271.

Klasse I.

Rekenkunde: Eigenschappen van de hoofdbewerkingen.

Deelbaarheid. Grootste Gemeene Deeler en Kleinste Gemeene veelvoud. Gewone en tiendeelige breuken. Vraagstukken. Evenredigheden.

Stelkunde: Hoofdbewerkingen met geheele vormen.

Merkwaardige producten en quotienten. Ontbinding in factoren. Vergelijkingen van den eersten graad met èèn onbekende.

Klasse II.

Rekenkunde: Voortzetting der evenredigheden.

Evenredige afhankelijkheid. Vierkantworteltrekking. Eenvoudigste begrippen van onnauwkeurige getallen.

Stelkunde: de functies $y = ax + b$ en $y = \frac{a}{x}$.

Eenvoudige gevallen van G.G.D. en K.G.V. Gebroken vormen. Voortzetting der vergelijkingen van den eersten graad ook met meer onbekenden. Wortelgrootheden (hiervan alleen de herleidingen, welke bij de meetkunde worden toegepast).

Klasse III.

Reken- en stelkunde: Gebroken en negatieve exponenten.

Logarithmen. Tafels met vier decimalen zijn voldoende. Reeksen. Limietbegrip. Vergelijkingen van den tweeden graad (en enkele van hooger en graad, die hiermede samenhangen) met een en meer onbekenden.

De functie $y = ax^2 + bx + c$.

Gonio- en trigonometrie:

De goniometrie van den enkelen hoek.

De trigonometrie van den rechthoekigen driehoek. Tafels van de goniometrische verhoudingen zelve en van haar logarithmen.

Klasse IV.

Stelkunde: Samengestelde interest. Rentetafels. Herhaling.

Gonio- en trigonometrie: Voortzetting der goniometrie. Trigonometrie van den scheefhoekigen driehoek.

Klasse V.

Stelkunde: Herhaling.

Gonio- en trigonometrie: Voortzetting van de vlakke driehoeksmeting. Herhaling.

a2. Voor Meetkunde.

Algemeene opmerking. Bij het onderwijs in de meetkunde

wordt gestreefd naar geleidelijke opklimming van een eenvoudige behandelingswijze, voornamelijk op het bijbrengen van meetkundige kennis en practische toepassing gericht, tot een strenger methode, waarbij de redeneering op den voorgrond treedt en inzicht gegeven wordt in den logischen samenhang van het geheel.

Klasse I.

Beginselen der vlakke meetkunde tot aan de evenredigheid van lijnen.

Klasse II.

Evenredigheid van lijnen. Vermenigvuldiging van figuren. Gelijkvormigheid.

Klasse III.

Voortzetting der vlakke meetkunde. Herhaling, waarbij een overzicht wordt gegeven van het geheel en een denkbeeld van de axiomatische behandeling.

Klasse IV.

Stereometrie: Afstanden en hoeken ter bepaling van den onderlingen stand van punten, lijnen en vlakken. Veelvlakken. Inhoud van prisma, pyramide en afgeknotten pyramide.

Beschrijvende Meetkunde: Orthogonale projectie, inleiding.

Klasse V.

Stereometrie: Omwentelingslichamen.

Bij den kegel aanschouwelijke behandeling van de verschillende kegelsneden. Inhoud en oppervlak van cylinder, kegel, afgeknotten kegel, bolsector en bol. Eigenschappen van den drievlakshoek (ook overbrengen op den boldriehoek). Herhaling.

Beschrijvende Meetkunde: Voortzetting tot aan den bol. Herhaling.

Eindexamenprogramma.

A. De Wiskunde.

Algemeene Opmerking. Onderzoek wordt gedaan naar het inzicht in de theorie en naar de vaardigheid in het oplossen van vraagstukken. Terwijl bij het schriftelijk gedeelte het laatste op den voorgrond treedt, bepaalt het mondeling zich in hoofdzaak tot het eerste.

A1. Stelkunde en driehoeksmeting. Het examen omvat de stof omschreven in het algemeen leerplan.

A2. Meetkunde.

Stereometrie en beschrijvende meetkunde, als omschreven in het algemeen leerplan.

Reglement voor de eindexamens.

Wijzigingen zouden aangebracht moeten worden in:

- art. 1. Het eindexamen omvat:
 - 1. stelkunde en driehoeksmeting.
 - 2. meetkunde.
 - 3. natuurkunde enz. t.m. 13.
- art. 2. Het schriftelijk examen omvat de vakken 1, 2, 3, 4, 9, 10, 11, 12 en 13 van art. 1.
- art. 3. Wat het mondeling examen betreft in de vakken 1 tot en met 4 van art. 1, geldt het bij art. 12 bepaalde.
- art. 9. Het gebruik van boeken is verboden met uitzondering van die welke geen andere dan logarithmentafels, rentetafels en tafels van goniometrische verhoudingen bevatten.
- art. 12. Van een mondeling examen in de vakken 1 tot en met 4 van art. 1 is vrijgesteld.....
- art. 14. Het oordeel over de kennis en de ontwikkeling der candidaten in elk der vakken, vermeld in art. 1,.....

Behalve door de programma's kan ook door de keuze der examenopgaven nog richting worden gegeven aan het onderwijs.

Ten slotte de erkenning, dat het werk van de Commissie-Beth, al is haar concreet programma te verwerpen, van groot nut is geweest voor het onderwijs door de veelvuldige aanleiding, die het gaf tot bezinning en gedachtenwisseling.

BOEKBESPREKINGEN.

Leerboek der Goniometrie en Trigonometrie door
P. Wijdenes. Derde Druk. P. Noordhoff, Groningen,
1927.

Van het bekende leerboek der Gonio- en Trigonometrie van Dr. B. Gonggrijp en P. Wijdenes verscheen een derde door P. Wijdenes alleen bewerkte uitgave, waarin het geheele boek zoozeer blijkt te zijn omgewerkt en uitgebreid, dat het een bespreking alleszins verdient. De behandelde stof is namelijk in dien zin gewijzigd, dat het oorspronkelijk ook als schoolboek bedoelde werk voortaan bestemd is als studieboek voor de acten L. O. en K. I, terwijl het daarnaast goede diensten zal kunnen bewijzen aan pas beginnende leeraren in wiskunde. Het vormt nu met de twee deelen Lagere Algebra van P. Wijdenes, de Planimetrie en de Stereometrie van Dr. P. Molenbroek een volledig en onderling samenhangend stel betrouwbare leerboeken der lagere wiskunde, dat geheel op de hoogte staat van het tegenwoordige peil der genoemde examens en dat ongetwijfeld velen de studie zal vergemakkelijken en veraangenameu.

De uitbreiding, die het boek verkregen heeft, betreft voornamelijk de volgende onderwerpen: in een afzonderlijk hoofdstuk, getiteld Toepassingen van de Optellingstheorema's, wordt het logaritmisch maken van goniometrische vormen behandeld, verder de toepassing van de stelling van de Moivre op de afleiding van formules voor de goniometrische functies van veelvouden van een hoek en voor de machten van goniometrische functies van een hoek; daarnaast nog iets over limieten en over goniometrische reeksen. In Hoofdstuk XI is nieuw de behandeling van de onderlinge afstanden van de merkwaardige punten in een driehoek en van het punt van Brocard; in Hoofdstuk XIII een uitbreiding van het probleem van Snellius. Hoofdstuk XII is geheel aan vierhoeken gewijd. Uit het hoofdstuk over Goniometrische Vergelijkingen moge een discussie over oneindig groote waarden van de verkregen oplossingen vermeld worden. Een afzonderlijk hoofdstuk is gewijd aan uiterste waarden.

Over den inhoud van het werk zou ik enkele opmerkingen willen maken.

De hoofdstukken II, III en IV zouden zeer aanzienlijk kunnen worden bekort en vereenvoudigd, wanneer onmiddellijk na Hoofdstuk I de goniometrische cirkel werd ingevoerd; men komt hier vanzelf toe, wanneer men, om na te gaan, in welken zin de sinus van een scherpen hoek verandert, als de hoek toeneemt, de in lengte constante schuine zijde van een scherphoekigen driehoek laat wentelen om een der op die zijde gelegen hoekpunten. Men definieere dan den sinus onmid-

dellijk algemeen als de (lengte van de) projectie van het wentelende been op de verticale middellijn, gemeten met den straal van den cirkel als eenheid (met toevoeging van een tekenafpraak); analoog hiermee voor cosinus en tangens. De verwarrende term „goniometrische lijn” blijve achterwege; de toevoeging „gemeten met den straal als eenheid” natuurlijk nooit. Minder gewenscht is de uitdrukking (blz. 32) „een cirkel met straal 1”. Men neemt den straal niet gelijk aan de eenheid van lengte, maar de eenheid gelijk aan den straal.

In theorie zou bij dezen opzet natuurlijk ook Hoofdstuk I kunnen wegblijven; dit zou echter didactisch ongewenscht zijn. Ik zou in Hoofdstuk I echter liever de zeer verwarrende termen „projectie, projecteerende lijn en geprojecteerde lijn”, die de schrijver met het oog op zijn Hoofdstuk II wel moet gebruiken, vermijden en van aanliggende en overstaande rechthoekszijde en schuine zijde spreken. Dit is eenvoudiger, bij de toepassingen der trigonometrie (b.v. in de mechanica) veel gemakkelijker en levert bovendien het mnemotechnische voordeel op, dat het praefix „co-” met het begrip „aanliggend” in verband gebracht kan worden.

In overeenstemming met het bovenstaande, waarin de goniometrische functies vóór alles als „Kreisfunctionen” gezien worden, zou ik in de Trigonometrie de grootheid R (straal van den omgeschreven cirkel) veel meer, dan nu reeds geschied is, op den voorgrond geplaatst willen zien. Het wezenlijke van den sinusregel b.v. is niet, dat hij een betrekking geeft tusschen de zijden van een driehoek en de sinussen der overstaande hoeken, maar dat hij verband legt tusschen den straal van een cirkel, een koorde van dien cirkel en den sinus van de bijbehorende omtrekshoeken, dus dat hij de goniometrische vorm is van de planimetrische stelling, dat twee der genoemde grootheden de derde bepalen. De sinusregel in den driehoek is, evenals die voor den koordenvierhoek (die trouwens in Hoofdstuk XII ontbreekt) slechts een toepassing van deze formule.

Het lijkt mij te betreuren, dat de functie $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x$ pas behandeld wordt na de vergelijking $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c$ en dan nog maar alleen ter wille van de uiterste waarden. Omkeering van de volgorde en ruimere opzet van de studie der functie (draaiende vector; begrip phase; toepassing in de theorie der harmonische beweging; samenstelling van twee harmonische bewegingen langs dezelfde lijn met denzelfden trillingstijd) zou m.i. de voorkeur verdienen.

Gaarne zou ik opgenomen hebben willen zien functies van den vorm $a \cdot \sin^2 x + b \cdot \sin x + c$ en derg.

Op blz. 20 mis ik de nauwkeurige interpretatie van de schrijfwijze $\text{tg. } 90^\circ = \infty$ en de definitie van het begrip continuïteit.

Dat uit $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{m}{n}$ volgt $\frac{\text{tg } \frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\text{tg } \frac{1}{2}(\alpha - \beta)} = \frac{m + n}{m - n}$

wordt driemaal in extenso afgeleid, nl. op blz. 100 (tangensregel), op blz. 162 (probleem van Snellius) en op blz. 212 (goniometrische vergelijkingen). Het zou gewenscht zijn, de aandacht van den lezer te vestigen op de goniometrische identiteit van deze drie problemen.

Vreemd is, dat bij de oplossing der vergelijking $\sin x = a$ de algemeene oplossing wel aan de bijzondere wordt toegevoegd voor $a < 0$ (blz. 49), maar niet voor $a > 0$ (blz. 46 seq.). De beperking tot scherpe hoeken moest liever van den aanvang af vermeden worden, omdat de beginnening altijd geneigd is, zich met één oplossing tevreden te stellen. Op blz. 49 staat niet vermeld, wát de letters k en n in de algemeene oplossing eigenlijk beduiden. Overbodig is het gebruik van $\pm$ voor k ; later (Hoofdstuk XV) geschiedt dit ook niet meer.

Op blz. 58 staat, dat de formule voor $\sin(\alpha + \beta)$ bewezen is voor het geval, dat α en β beide in het eerste quadrant liggen. Dit is onjuist; ze is op blz. 53 alleen bewezen voor het geval, dat α , β en $(\alpha + \beta)$ in I liggen.

Op blz. 66 wordt in het analytisch bewijs eener goniometrische identiteit gedeeld door een factor, terwijl verzuimd wordt te onderzoeken, of die factor ook nul kan worden. Dit verleidt den lezer tot gevaarlijke fouten.

De behandeling van het twijfelachtige geval van de oplossing der scheefhoekige driehoeken lijkt mij noodeloos moeilijk en onlogisch. De cosinusregel moet hier liever vermeden worden.

Geen der aangevoerde bedenkingen kan mij weerhouden, het boek goed te noemen. Dat het keurig uitgevoerd is, spreekt, gezien den naam van den uitgever, vanzelf.

E. J. Dijksterhuis.

Per la storia e la filosofia della matematiche.
Collezione diretta da Federico Enriques. Roma,
Alberto Stock.

N. 1. *Gli Elementi d'Euclide e la critica antica en moderna*, editi da Federico Enriques col concorso di diversi collaboratori. Libri I—IV. 1925.

N. 4. Enrico Rufini. *Il „metodo” di Archimede e le origini dell' Analisi infinitesimale nell' Antichità.*

Die neue Bücherreihe, von der der erste und der vierte Band hier ankündigt werden, will die historisch-philosophische Bildung der Lehrer der Mathematik an den höheren Schulen Italiens fördern. Sie entstammt somit der Ueberzeugung, dass die Kenntnis der historischen Entwicklung der Mathematik als eine notwendige Ergänzung der modern-mathematischen Ausbildung zu betrachten sei. Diese Ueberzeugung fängt auch bei uns an, sich in weiteren Kreisen zu verbreiten, ohne dass sie aber schon einen einigermaßen bedeutenden Einfluss auf die Organisation des Hochschulunterrichts gewonnen hätte. Italien aber besitzt in F. Enriques einen Forscher, der seine Kräfte nicht nur der Entwicklung der modernen Mathematik gewidmet hat, sondern auch, wie F. Klein in Deutschland, der Vertiefung des Hochschulunterrichts und indirekt also auch des gesamten Mathematikunterrichts im angedeuteten Sinne. Seine allseitige Beherrschung des mathematischen, philosophischen und philologischen Apparats setzt ihn in den Stand, selber bedeutende Arbeiten auf dem vielverzweigten Gebiete der Mathematikgeschichte zu liefern. Wir verdanken jetzt diese neue Bücherreihe wieder der nämlichen kräftigen Initiative, die uns auch schon

die schöne Sammlung der *Questioni riguardanti le Matematiche Elementari* geschenkt hat.

Der erste Band, der von *Enriques* selber mit einigen Mitarbeitern redigiert worden ist, bringt eine Uebersetzung der Bücher I—IV von *Euklid's Elemente*; die übrigen Bücher sollen in weiteren Bänden der Sammlung zur Erscheinung gelangen. Der Text der einzelnen Definitionen, Postulate, Axiome und Propositionen wird überall von kurzen, aber sehr inhaltsreichen und oft originellen Anmerkungen begleitet, die dem modernen Leser die schwierige Lektüre der griechischen Mathematik wesentlich erleichtern werden. Ich möchte ohne Anspruch auf Vollständigkeit aus dem Inhalte dieser Anmerkungen einiges hervorheben.

Die Postulate werden durchweg als Konstruktionspostulate behandelt. *Enriques* schliesst sich der von *Zeuthen* verteidigten Auffassung an, dass die Konstruktion in der griechischen Mathematik den Zweck habe, den Existenzbeweis der betreffenden Figur zu liefern. Dementsprechend betrachtet er die Postulate als Fundamente der Probleme (Gleichungen), die Axiome dagegen als Fundamente der Theoreme (Identitäten). Bekanntlich ist dies eine der drei Unterscheidungen (nämlich die von *Geminus* herrührende), die *Proklos* in seinem Euklid-kommentar überliefert hat. Die ersten drei Postulate können ungewungen in dieser Weise aufgefasst werden; das vierte aber (dass alle rechten Winkel einander gleich seien) muss dann als Kondition für die Eindeutigkeit der Verlängerung einer gegebenen Geraden über einen ihrer Endpunkte hinaus gedeutet werden, während das fünfte (das Parallelen-Postulat) als Kondition für die Möglichkeit der Konstruktion eines Punktes als Schnittpunkt von zwei Geraden angesehen werden muss.

Die Gleichheitsaxiome werden auf Aequivalenz, nicht auf Kongruenz bezogen. In dem Ungleichheitsaxiom VIII („das Ganze ist grösser als sein Teil“) findet der Autor einerseits, nämlich in seiner Beziehung auf Strecken und Winkel eine Vorahnung der modernen Axiome der Anordnung, andererseits, wenn es auf Polygone angewendet wird, eine erste Formulierung des De Zolt-schen Postulats.

Es wäre vielleicht wünschenswert gewesen, darauf hinzuweisen, dass *Heiberg* in seiner Textausgabe des Euklid nur die Axiome I, II, III, VII und VIII als echt betrachtet.

Ich muss in dem engen Rahmen dieser Anzeige auf eine ausführlichere Besprechung verzichten. Ich möchte darum nur noch aussprechen, dass die Lektüre des Buches als Einführung in Euklid aufwärmste empfohlen werden kann; natürlich wird jeder, der tiefer zu dringen wünscht, nach dem griechischem Texte und nach dem vorzüglichen grossen Kommentare von *T. L. Heath* greifen müssen.

Der vierte Band, der von dem leider früh verstorbenen historisch-mathematischen Forscher *Rufini* herrührt, ist zu betrachten als das erste Kapitel einer geplanten Geschichte der Infinitesimalrechnung. Der Kern des Buches ist eine Uebersetzung des *Ephodos* von *Archimedes*, der merkwürdigen von *Heiberg* in 1906 entdeckten Abhandlung, die uns enthüllt hat, dass *Archimedes* sich, um zu seinen Resultaten

zu gelangen, der sonst in der griechischen Mathematik streng verpönten Methode der Indivisibilia bedient hat. Der Autor gibt aber in einer ausführlichen Einleitung die Resultate seiner Untersuchungen über die Anfänge der Infinitesimalrechnung im klassischen Altertum und in einem Schlusskapitel eine moderne Interpretation des Archimedischen Verfahrens. Er schliesst sich ganz der von *Enriques* wieder ins volle Licht gerückten Auffassung *Tannery's* an, die den Ursprung der griechischen Strenge auf dem Gebiete der unendlichen Prozesse in der von der Eleatischen Philosophie an den Grundbegriffen der Mathematik geübten Kritik sucht.

Man wird natürlich auf einem Gebiete, wo unser ganzes Wissen auf zum Teil sehr subtilen Hypothesen ruht, öfters anderer Meinung sein können als der Autor; da aber der Raum eine kritische Würdigung seiner Ansichten nicht gestattet, möge es mir nur vergönnt sein, das grosse Verdienst, das er sich mit diesem geistreichen, ernstesten und tiefdringenden Buche um die Geschichte der Mathematik erworben hat, dankbar anzuerkennen.

Oisterwijk, Juli 1927.

E. J. Dijksterhuis.

Leerboek der Stereometrie door F. J. Vaes, Tweede
vermeerderde druk, prijs ing. f 4.—, gecart. f 4.25.
Deventer, Æ. E. Kluwer.

Na een Voorrede bij den eersten, een Voorrede bij den tweeden druk en een Inleiding komt het Eerste gedeelte, handelende over: Het teekenen van lichamen, en eenvoudige berekeningen. In een en ander en trouwens ook later nog wel treft men nog al subjectieve meeningen aan, of wordt nog al eens de causerie-vorm gebezigd. De bedoeling van het eerste gedeelte is blijkbaar het geven van een soort van propaedeutischen cursus in de stereometrie, te behandelen in 3 à 3½ maand (hoeveel uur per week?). Nu voel ik in 't algemeen al niet veel voor een propaedeutischen cursus in de meetkunde op 'de H. B. S. of op het Gymnasium, maar voor een dergelijken cursus, wat de stereometrie betreft, in de vierde klasse van de H. B. S. of de vijfde van een Gymnasium voel ik absoluut niets. De leerlingen zijn dan toch zeker op een leeftijd gekomen, waarbij een werken met bijzonder onzuivere definities of redeneeringen gedurende een zoo lange periode geheel misplaatst is en niets anders dan tijdverlies beteekent, terwijl bovendien het „teekenen” m.i. veel doeltreffender met het steeds winnende *werkelijke* (dit woord genomen in den zin, die op schoolbehandeling past) stereometrie-inzicht kan gepaard gaan bij een methode, die het propaedeutisch onderwijs in dit vak nalaat. En wanneer de leerlingen nu na de 44 bladzijden propaedeuse zien staan: Tweede gedeelte, Theorie, wat moeten ze dan denken van de opgaven van het Eerste gedeelte, waarin „Toon aan” staat? Wat was in 't voorafgaande juist en wat was onjuist? Wat kan behouden blijven en wat moet herzien worden? Neen, ik geloof niet, dat ik er ooit toe zou komen om zoo te werk te gaan. Ik voel er verder ook niets voor om op een verdere beoordeeling van die geheele propaedeuse in te gaan.

In de eerste §§ der „Theorie” komen ook dingen voor, die mij niet kunnen bekoren. Wanneer de heer Vaes de grondslagen onzer meetkunde beschouwt als te berusten op „waarneming”, dan loopt hij hierover toch wel heen op een wijze, die voor de eenigszins gevorderde leerlingen, die de *stereometrie* bestudeeren, niet meer past. En wanneer hij dan als derde grondstelling noemt: Bij twee evenwijdige lijnen, die door een derde gesneden worden zijn de overeenkomstige hoeken gelijk en als vierde, *die van de vorige niet onafhankelijk is*: Door een punt buiten een (rechte) lijn kan men altijd één, maar niet meer dan één lijn trekken, die evenwijdig is met de eerste, terwijl de bewijzen der stellingen „Als twee platte vlakken drie niet op één rechte lijn gelegen punten gemeen hebben, moeten zij geheel samen-vallen” en „Als twee platte vlakken een punt gemeen hebben, dan hebben ze ook een rechte lijn gemeen” het zonder nieuw axioma moeten stellen, dan komt mij ook dit alles in een stereometrie-werk *van 256 bladzijden* niet erg passend voor.

In § 30 wordt de definitie van den hoek tusschen twee kruisende lijnen vooropgezet, terwijl de motiveering *eerst daarna* gegeven wordt. Dit is m.i. niet aan te bevelen.

De stelling in 102 van § 37 omtrent de grootte van de projectie van een hoek t/o. van de grootte van den hoek zelf is fout. Nu wordt in een noot en in het Aanhangsel wel een correctie gegeven, maar het komt mij voor, dat men nooit een stelling mag uitspreken, die op zich zelf genomen foutief is.

Dat de boltweehoek bij de beginselen behandeld wordt en dat ook drievlakshoek en boldriehoek te zamen besproken worden heeft zeer zeker voordeelen, maar onaangenaam vind ik 't nu weer te zien, dat bij de fundeering van den boltweehoek verwezen wordt naar het eerste deel van het boek. Ook het gebruik maken van omwentelings-cylindervlak en omwentelingskegelvlak in de beginselen heeft zijn voordeelen.

In § 63, handelende over de gelijk- en gelijkvormigheid van drievlakshoeken en boldriehoeken, zie ik den volgenden zin: „De 5 gevallen van de vlakke meetkunde kunnen letterlijk herhaald worden voor de ruimte (en den bol)”. Dit is onjuist. Het geval „b. 1 zijde, een hoek aan en den hoek over die zijde” vereischt evengood een „mits.....” (over het goede mits..... in de planimetrie heb ik al eens op een algemeene bijeenkomst gesproken) als „d. 2 zijden en den hoek over een er van”, maar dan is men er nog niet! Laat de heer Vaes hier eens over nadenken of 't anders in een of ander uitgebreid (ander) stereometrie-boek nazien! Ik heb bij het lezen van deze § nog een bezwaar ondervonden: Wat zijn symmetrische figuren? Deze vraag opperde ik al bij mij zelf bij de lezing van § 48, handelende *in 't algemeen* over symmetrie van figuren en lichamen (is een lichaam geen figuur?). Want bij de lezing van deze laatste § lijkt 't of deze figuren *een bepaalden stand t o. van elkaar* moeten innemen. En nu doe ik de vraag, of dat nu bij 't spreken over symmetrische drievlakshoeken en boldriehoeken ook nog het geval moet zijn of dat slechts (behalve natuurlijk de grootte der elementen twee aan twee) *de verschillende zin dergelijke aaneenschakeling hunner elementen* van belang is?!

Op blz. 153 lees ik „Men noemt twee lichamen gelijk en gelijkvormig, als zij verdeeld kunnen worden in deelen zoodanig, dat de deelen van het eene gelijk en gelijkvormig zijn met die van het andere lichaam, en bovendien.....” Men kan toch zeker hier moeilijk spreken van een definitie, die den viciëzen cirkelgang vermijdt!!!

Bij de bespreking van het gedeelte, dat over inhouden handelt, neemt de schr. als fundamenteele eigenschap aan: de stelling van Cavalieri. Dit zou ik nooit doen. Over die stelling met de leerlingen eens te praten kan geen kwaad — het is zelfs voor hen, wien men de integraalrekening niet wil onthouden, hoogst wenschelijk — maar die stelling tot onvoorwaardelijken grondslag van verdere afleidingen te kiezen, behoort in een *elementair* leerboek niet plaats te hebben: „Im allgemeinen ist es aber schwer, wenn nicht unmöglich, die genauen Bedingungen anzugeben, unter denen die Formel¹⁾ gilt” zeggen *Weber und Wellstein*.

In § 95 wordt een definitie der „prismatoïde” gegeven, die men in verschillende leerboeken nog wel meer aantreft. Het wordt toch eens wel tijd, dat iedereen weet, dat een prismoïde (prismatoïde) *een veelvlak*²⁾ is, waarvan de hoekpunten in twee evenwijdige vlakken liggen. Uit!

De figuren in het boek voldoen over het algemeen aan redelijke eischen. Onberispelijk zijn ze echter geenszins alle, o.a. niet de figuren 155 en 156 (pyramiden met doorsneden). En zoo vond ik bij de omwentelingslichamen toch ook wel een en ander, dat mij niet beviel.

De namen „blok”, „kapje” en „gordel” in plaats van de van ouds bekende kunnen mij niet bekoren. Ik voel voor dat verhollandschen en verkorten niet veel, zeker niet, wanneer nieuwe namen niet beter passend zijn dan oude. Met den naam „schijfsector” kan ik vrede hebben, met den naam „kom” (als in het boek bedoeld) echter weer niet.

Uit het vele, dat ik van dit boek kan zeggen, is door mij slechts een greep gedaan. Uitgeput ben ik evenwel in dit opzicht niet, hoewel ik het er thans maar bij zal laten.

Van het aantal vraagstukken wil ik alleen nog zeggen, dat het wel voldoende is.

D. P. A. V.

¹⁾ D. w. z. de formule, die het principe van Cavalieri inhoudt.

²⁾ Meer omvattend: een lichaam met rechte lijnige ribben, waarvan de hoekpunten in twee evenwijdige vlakken liggen en dat door snijvlakken evenwijdig aan die vlakken volgens rechte lijnige veelhoeken gesneden wordt.

DE UNIVERSITAIRE OPLEIDING TOT LEERAAR IN WISKUNDE EN AANVERWANTE VAKKEN.

(Rapport van de commissie, belast met de behartiging van de belangen van de opleiding tot leeraar in wiskunde en aanverwante vakken).

In een op 30 October 1926 te Utrecht gehouden vergadering is door afgevaardigden van de besturen van de vier volgende vereenigingen of vakgroepen:

De groep „Leeraren in Wiskunde en Natuurwetenschappen aan Gymnasia en Lycea” van het Genootschap van Leeraren aan Nederlandsche Gymnasiën,

De Vereeniging van Leeraren in de Wiskunde, de Mechanica en de Kosmographie aan Hoogere Burgerscholen met vijfjarigen cursus B, Lycea en Meisjes-Hoogere Burgerscholen met 5/6 jarigen cursus,

De Vereeniging van Leeraren bij het R.K. M. en V. H. Onderwijs Sint Bonaventura, namens de groep van leeraren in wiskunde van die vereeniging,

De Vereeniging van Leeraren bij het Chr. M. O., namens de groep van leeraren in wiskunde van die vereeniging, eene commissie ingesteld, waaraan werd opgedragen hare aandacht te wijden aan de vraag, hoe de opleiding tot Leeraar in Wiskunde en aanverwante vakken in het belang van het onderwijs, dat zij, die deze opleiding ontvangen, later zullen hebben te geven, het best zou kunnen worden geregeld.

De commissie besloot zich aanvankelijk alleen bezig te houden met de universitaire opleiding. Wat deze betreft, vereenigde zij zich in beginsel met de denkbeelden, welke zijn uitgesproken in het rapport van de Commissie, welke van het College van Inspecteurs bij het M. O. de opdracht ontving een onderzoek in te stellen naar den toestand van het onderwijs in Wiskunde en aanverwante vak-

ken op de H. B. Scholen, getiteld „Beschouwingen over de Universitaire opleiding tot leeraar in Wis- en Natuurkunde.”¹⁾

Den 12en Januari 1927 richtte de Commissie zich tot elk der faculteiten van Wis- en Natuurkunde aan de drie Rijksuniversiteiten en aan de Gemeentelijke Universiteit van Amsterdam met het verzoek, haar wel te willen mededeelen, of de leden der faculteit zich in beginsel met de in het bovengenoemde rapport uitgesproken denkbeelden over de leemten, die de universitaire opleiding tot leeraar in Wis- en Natuurkunde vertoont, konden vereenigen, of zij, in dat geval, genegen waren, de verwezenlijking dier denkbeelden te bevorderen, voorzoover dit nog niet was geschied en of de faculteit, in dat geval, bereid was aan de Commissie mede te deelen, welke maatregelen daartoe genomen waren of zouden worden.

Op dit verzoek werd achtereenvolgens antwoord ontvangen van de faculteiten te Leiden, Groningen, Utrecht en Amsterdam. Deze antwoorden, die hier met toestemming der faculteiten worden gepubliceerd, luiden, afgezien van aanhef of recapitulatie van het ontvangen schrijven, als volgt:

1. Van de faculteit te Leiden, namens de hoogleeraren in Wiskunde:

Leiden, 4 Maart 1927.

.... Dat de in het rapport genoemde leemten de Universitaire Opleiding aankleven geven wij toe. Evenals de stellers van het rapport zijn wij overtuigd van de vormende waarde van het onderricht in de lagere wiskunde, gezien in haar verband met de hoogere, en van het gewicht van de verdieping van het onderwijs, die een gevolg kan zijn door, meer dan thans geschiedt, den nadruk te leggen op de historische ontwikkeling en op de grondslagen der wiskunde. Wel zouden wij er op willen wijzen, dat een dergelijk onderricht o.i. alleen dan vruchtbaar kan zijn, wanneer de student reeds een redelijke kennis der hoogere wiskunde bezit.

In de tweede plaats: tot elk uitvoerbaar plan tot een verbetering van het onderwijs zullen wij gaarne medewerken. Zonder meerderen steun zullen wij echter weinig kunnen doen.

Te Leiden wordt het onderwijs in de wiskunde en de mechanica

¹⁾ Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde, 2e jaargang, 1925/26, pag. 81—95.

gegeven door drie docenten, die daardoor alle drie een vrij scherp omlinjnde taak voor zich hebben. Geen dezer zou bij het groote en steeds groeiende aantal tentamina en examina in staat zijn het aantal zijner colleges uit te breiden.

Ongetwijfeld zou een college over sommige onderwerpen uit de elementaire wiskunde, in hun verband met de hoogere beschouwd, van belang zijn en belangstelling ondervinden. Ook de mogelijkheid van historisch onderwijs zouden wij met vreugde begroeten. Maar de hier aanwezige docenten zouden een dergelijk onderwijs alleen kunnen geven, wanneer zij er van afzien de studenten eenigszins met de problemen der tegenwoordige wiskunde bekend te maken; bij de hedendaagsche ontwikkeling der wiskunde is dat doel niet dan na een vrij lange voorbereiding te bereiken.

Derhalve luidt onze conclusie, dat een uitbreiding van onze werkzaamheden onmogelijk is, en dat wij door ze te vervormen o.i. een middel zouden aanwenden erger dan de kwaal, dat wij echter gaarne zullen medewerken tot een aanvulling van ons onderwijs in elk der genoemde richtingen.

Mede namens Prof. Kluyver,
(w. g.) W. VAN DER WOUDE.

2. Van de faculteit te Groningen.

Groningen, 15 Maart 1927.

.... De faculteit wenscht voorop te stellen, dat de universitaire opleiding op wetenschappelijke vorming gericht is. Duidelijk werd deze van ouds gehuldigde opvatting nog eens door Minister de Visser omschreven in de M. v. Toelichting bij de wijziging van de H. O.-wet van 1 Maart 1920. Zich kantende tegen maatregelen waardoor het doctoraat zou worden „een acte van bekwaamheid in een bepaald vak”, vervolgt de Minister: „De universiteit krijgt daardoor het karakter eener vakschool. Dit nu is zij in haar wezen niet, al bereidt zij ook voor tot het bekleeden van maatschappelijke betrekkingen, waarvoor een wetenschappelijke opleiding wordt vereischt. Het leidend beginsel is dat men in staat wordt gesteld, zelfstandig de wetenschap te beoefenen.” In dit verband zou men zelfs in twijfel kunnen trekken, of het wel juist is van „universitaire **opleiding** tot leeraar in wiskunde” te spreken.

Bij den bestaanden toestand is de faculteit echter van meening,

dat aan de universiteit rekening behoort gehouden te worden met het feit, dat veel studenten in de wiskunde later als leeraar werkzaam zullen zijn. Met uw Commissie is zij van oordeel, dat voor den leeraar vertrouwdheid met de vakken, die hij doceeren moet, een vereischte is en dat kennis van de Axiomatiek der wiskunde en van de lagere wiskunde, uit een hooger standpunt beschouwd, voor hem van belang zijn.

Daarbij zij opgemerkt, dat de faculteit reeds geruimen tijd op het hier aangegeven standpunt heeft gestaan, maar dat zij tengevolge van het beperkte aantal leerkrachten voor wiskunde aan de Gron. Universiteit niet in staat geweest is het onderwijs geheel in overeenstemming daarmede te geven, aangezien zij meende dat anders zoowel de wetenschappelijke vorming van de studenten in de wiskunde alsook de belangen van andere categorieën van studenten, die wiskunde-onderwijs ontvangen, geschaad zouden worden.

In verband met de overige eischen, die bij de examens gesteld moeten worden, acht de faculteit het niet gewenscht, dat de geschiedenis der wiskunde als examenvak wordt toegevoegd.

Namens de faculteit,

(w.g.) H. J. BACKER, Voorzitter.

(w.g.) F. ZERNIKE, Secretaris.

3. Van de faculteit te Utrecht.

Utrecht, 28 Maart 1927.

In antwoord op Uw schrijven van 16 Januari 1927 heeft de faculteit van Wis- en Natuurkunde de eer U mede te deelen, dat zij van meening is, dat er leemten van den bedoelden aard bestaan;

2°. de meerderheid der Commissie, uit haar midden aangewezen, in beginsel genegen is, de verwezenlijking dier denkbeelden te bevorderen;

3°. die Commissie van oordeel is, dat de daartoe te nemen maatregelen van meer of minder ingrijpenden aard kunnen worden geacht.

De leiding, die den studenten zou kunnen worden verschaft om hen in hoogere mate tot het leeraarsambt te bekwamen, zou bijvoorbeeld kunnen bestaan in het geven van college-uren, bepaaldelijk voor bevordering van dat doel bestemd, en al of niet

verplicht gesteld. Maatregelen van meer ingrijpenden aard zouden daarentegen verandering van het Akademisch Statuut vereischen; als voorbereiding daartoe ware het wenschelijk, dat een Commissie van Onderzoek in het leven werde geroepen.

Namens de Faculteit van Wis- en Natuurkunde
a/d Rijks-Universiteit te Utrecht,

(w. g.) H. F. NIERSTRASZ, Voorzitter.

(w. g.) W. C. DE GRAAFF, Secretaris.

4. Van de faculteit te Amsterdam.

Amsterdam, 1 April 1927.

... Met het in Uw schrijven bedoelde rapport ... kunnen wij ons slechts in zooverre vereenigen, als daarin de aandacht gevestigd wordt op het groote belang van historische, didactische, elementair-methodologische en kentheoretische beschouwingen voor den a.s. docent in de Wiskunde. Inzonderheid de H.H. Prof. Dr. Hk. de Vries en Prof. G. Mannoury, die o.a. met de wiskundige opleiding der candidandi belast zijn, hebben zich steeds krachtig beijverd, in die richting werkzaam te zijn. Dat zulks uit de benamingen der door hen gegeven colleges weinig blijkt, vindt zijn oorzaak hierin, dat zij van oordeel zijn, dat beschouwingen als bovenbedoeld over het algemeen beter aan hun doel beantwoorden, indien zij aan het wiskundeonderwijs in engeren zin worden verbonden, dan bij het geven van afzonderlijke colleges over die onderwerpen kan worden verwacht.

Anderzijds meenen wij evenwel uit enkele uitlatingen in het rapport te moeten opmaken, dat de opstellers daarvan de in den laatsten tijd in de kringen der docenten vaak verkondigde meening deelen, dat verbetering in het onderwijs te verkrijgen zou zijn, door het z.g. „strenger maken” daarvan, wat in werkelijkheid neerkomt op een onmatige uitbreiding van dat onderwijs in de richting der abstracte axiomatiek. Ofschoon, gelijk reeds werd opgemerkt, dit punt in het bedoelde rapport slechts terloops wordt aangeroerd, missen wij daarin noode een krachtig protest tegen bedoeld streven, dat o.i. van een volkomen miskenning van de psychologische en paedagogische gezichtspunten getuigt, die bij de ontwikkeling van

het wiskundig denken in het oog gehouden dienen te worden.¹⁾

Wat het nemen van bepaalde maatregelen ter verbetering van de universitaire opleiding van a.s. docenten in ons vak betreft, komt het ons voor, dat inzonderheid het voor de studenten scheppen van gelegenheid tot practische oefeningen in het doceeren, echter buiten universitair verband, aanbeveling zou verdienen.

Namens de Faculteit voornoemd,

(w.g.) J. C. H. DE MEIJERE, Voorzitter.

(w.g.) P. VAN DER WIELEN, Secretaris.

De Commissie meent uit deze antwoorden de volgende conclusies te mogen trekken. Alle faculteiten van Wis- en Natuurkunde erkennen de wenschelijkheid, dat in het hooger onderwijs aan a.s. leeraren in wiskunde en aanverwante vakken aandacht wordt geschonken aan de onderwerpen, die in het boven geciteerde rapport der Commissie-Beth worden genoemd, terwijl de faculteiten der drie Rijks-Universiteiten tevens de in dat rapport verdedigde meening deelen, dat, zooals de toestanden thans zijn, de beoefening dier onderwerpen niet voldoende tot haar recht komt.

Op grond van de instemming met de ook door haar gehuldigde denkbeelden, welke de Commissie aldus van de zijde van het Hooger Onderwijs mocht verwerven, meent zij thans niet langer te mogen wachten met het publiceeren van een door haar bij den aanvang van hare werkzaamheden ontworpen plan voor de wijze, waarop het Universitair onderwijs rekening zou kunnen houden met den lateren leeraarswerkring van studenten in de Faculteit van Wis- en Natuurkunde.

Aan de uiteenzetting van dit plan wenscht zij, mede naar aanleiding van de boven gepubliceerde antwoorden, de volgende opmerkingen te laten voorafgaan:

1. Wanneer men als uitsluitend doel van de Universitaire studie stelt de vorming van hen, die in staat zijn zelfstandig de wetenschap te beoefenen in dien zin, dat zij de verdere ontwikkeling der wetenschap rechtstreeks kunnen bevorderen, zou men inderdaad kunnen

¹⁾ Naar aanleiding van deze alinea zij het der Commissie vergund, op te merken, dat de Commissie-Beth in haar rapport over de universitaire opleiding tot leeraar in Wis- en Natuurkunde geenerlei aanleiding had, zich over de bedoelde quaestie uit te spreken.

betwijfelen, of men wel van een universitaire opleiding tot het ambt van leeraar in wiskunde mag spreken en dus ook, of men verlangen mag, dat bij de inrichting van de studie met den toekomstigen leeraarswerkkring van een groot deel der studenten rekening wordt gehouden. Het lijkt echter wel zeer de vraag, of die doelstelling en die conclusie in de wet op het Hooger Onderwijs en in de geldende gewoonten steun vinden. Wanneer men toch bedenkt, dat art. 1 der H. O.-wet het doel van het hooger onderwijs mede omschrijft als vorming en voorbereiding tot het bekleeden van maatschappelijke betrekkingen, waarvoor een wetenschappelijke opleiding vereischt wordt, dat diezelfde wet aan het diploma van het met goed gevolg afgelegd doctoraal-examen onderwijsbevoegdheid verbindt, terwijl men de practijk ziet uitwijzen, dat het overgrootste deel der studenten in wiskunde na voltooiing hunner studie een werkkring bij het V. H. of M. O. zoekt, mag men toch zeker van de faculteiten van Wis- en Natuurkunde verwachten, dat zij zich niet op het star-theoretische standpunt zullen stellen, dat de latere werkkring harer leerlingen haar niet aangaat (men stelle zich voor, dat de medische faculteit hetzelfde standpunt innam) en dat zij het als plicht zullen voelen om, nu zij eenmaal onderwijs-bevoegdheden te verleenen hebben, ook zorg te dragen, dat zij den doctorandus tot de uitoefening dier bevoegdheid hebben voorbereid. Het lijkt der Commissie dus voor geenerlei twijfel vatbaar, dat men het recht heeft, om van universitaire opleiding tot leeraar in wiskunde te spreken.

2. De Commissie is van meening (een meening, die in het geciteerde rapport der Commissie-Beth met nadruk is uitgesproken), dat behandeling van de door haar voor den a.s. leeraar in wiskunde en aanverwante vakken gewenschte onderwerpen slechts zal mogen geschieden als aanvulling van de bij de tegenwoordige inrichting der studie ter sprake komende gebieden, niet ter vervanging van een deel daarvan. Het is noodzakelijk, dat de doctorandus op de hoogte zij van de problemen der hedendaagsche wiskunde en er mag dus geen sprake zijn van verlaging van het wetenschappelijk peil der studie. Wanneer men dan ook als argument tegen de gewenschte veranderingen hoort aanvoeren, dat de studietijd daarvoor te kort is, dan kan daarop slechts worden geantwoord, dat de duur der studie behoort af te hangen van de noodzakelijk te stellen eischen en dat een als redelijk erkend verlangen tot ver-

zware van die eischen niet op grond van een te korten studietijd kan worden afgewezen.

3. De Commissie heeft in mondeling onderhoud niet zelden hare denkbeelden hooren bestrijden met de redeneering, dat het toch eigenlijk niet aangaat, een uitbreiding van de studie in Wis- en Natuurkunde te bepleiten, wanneer men bedenkt, welk een slechte bezoldiging in onzen tijd aan het ambt van leeraar is verbonden. Deze redeneering lijkt haar principiëel onjuist: de eischen van het ambt bepalen de eischen der opleiding; naar beide tezamen heeft de bezoldiging zich te richten. Het gaat niet aan, om of de vervulling van het ambt of de verzorging van de opleiding te verwaarloozen, omdat de Overheid te kort schiet in materiele waardeering van een intellectueel beroep.

4. De Commissie is van meening, dat behandeling van onderwerpen, als de door haar bedoelde, in het algemeen beter aan het doel zou beantwoorden, wanneer zij gegeven zou worden door dezelfde docenten, die ook met het wiskunde-onderwijs in engeren zin zijn belast, dan wanneer zij aan afzonderlijke docenten zou worden opgedragen. Voorzoover het echter den thans in functie zijnden docenten niet mogelijk is hunne werkzaamheden in den verlangden zin uit te breiden, zou het wenschelijk zijn, dat de faculteiten van wis- en natuurkunde in samenwerking met de samenwerkende vereenigingen van leeraren in wiskunde naar uitbreiding harer samenstelling streefden.

5. De Commissie verwacht geen heil van een eventueele aanvulling van de universitaire studie in den door haar gewenschten zin, wanneer daarmee niet tevens een aanvulling van de op de examina te stellen eischen gepaard gaat. Een concreet daartoe strekkend voorstel zal aan het eind van dit rapport worden geformuleerd.

6. Een eventueele aanvulling der studie met het oog op latere onderwijsbevoegdheid in een zeker vak moet evenzeer gelden voor hen, die die onderwijsbevoegdheid in dit vak als bijvak van het doctoraal-examen verwerven, als voor hen, voor wie het hoofdvak is.

7. Voorzoover de in het hieronder te publiceeren ontwerp te maken opmerkingen niet uitdrukkelijk de wiskunde alleen betreffen, gelden ze ook voor a.s. leeraren in mechanica en kosmographie. De toepassing van de door de Commissie aanvaarde beginselen

Verschenen:

ANALYTISCHE MEETKUNDE

DOOR

Dr. J. A. BARRAU

TWEEDE DEEL

De Ruimte

Prijs geb. f 14.50.

Vroeger verscheen:

DEEL I

HET PLATTE VLAK

Prijs geb. f 10.20.

Verschenen:

Prof. Dr. Hk. DE VRIES en P. WIJDENES

Leerboek der Beschrijvende Meetkunde

5 druk van v. PESCH-WIJDENES Leerboek der Beschrijvende Meetkunde, 151 fig. in de tekst en 40 op uitslaande platen.

Geb. f 3.60.

Verschenen:

P. WIJDENES

Leerboek der Goniometrie en
Trigonometrie

3e druk geb. f 4.75.

Verschenen:

Dr. A. G. PLOEG

Hypergeometrische Funkties

f 2.50.

UITGAVEN VAN P. NOORDHOFF TE GRONINGEN

Verschenen :

B. P. HAALMEIJER en J. H. SCHOGT

Inleiding tot de leer der verzamelingen

Prijs geb. f 3.25.

J. H. SCHOGT

Beginselen der Theoretische Mechanica

Een leerboek met vraagstukken

Deel I. Kinematica, Krachtenleer, Arbeid en Arbeidsvermogen
f 3.—, geb. f 3.50.

Deel II, Massageometrie, Dynamica, Statica f 3.75, geb. f 4.25

Prof. Dr. G. SCHOUTEN

De Grondslagen der Rekenkunde

Met toepassing op de Grenswaarden, Oneindige Reeksen
en Producten, Gedurige Breuken, Dubbelreeksen,
2e druk geb. f 3.90.

Dr. M. SCHEFFER

**De Herleiding van eenige Randvraag-
stukken tot een Integraalvergelijking**

Prijs f 2.50.

UITGAVEN VAN P. NOORDHOFF TE GRONINGEN