

BIJVOEGSEL

VAN HET NIEUW TIJDSCHRIFT

□ □ VOOR WISKUNDE □ □

GEWIJD AAN ONDERWIJSBELANGEN

ONDER LEIDING VAN

J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

MET MEDEWERKING VAN

Dr. H. J. E. BETH
DEVENTER

Dr. E. J. DIJKSTERHUIS
OISTERWIJK

Dr. B. P. HAALMEIJER
AMSTERDAM

Dr. D. J. E. SCHREK
UTRECHT

Dr. P. DE VAERE
BRUSSEL

Dr. D. P. A. VERRIJP
ARNHEM

3e JAARGANG 1926/27, Nr. 6



P. NOORDHOFF — GRONINGEN

Het Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde zal met de 4e jaargang verschijnen onder de naam **Euclides**. Prijs per jaargang van 18 vel f 6.—. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (f 6.—) of op „Christiaan Huygens” (f 10.—) zijn ingeteekend, betalen f 5.—.

Voor nadere bijzonderheden wordt verwezen naar de Mededeeling achterin.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam, Frans-van-Mierisstraat 112; Tel. 28341. Aangeteekende zendingen met bijvoeging: „Bijkantoor Van-Eeghenstraat”.

Het honorarium voor geplaatste artikelen bedraagt f 20.— per vel.

De prijs per 25 overdrukken of gedeelten van 25 overdrukken bedraagt f 3,50 per vel druks *in het vel gedrukt*. Gedeelten van een vel worden als een geheel vel berekend. Worden de overdrukken buiten het vel verlangd, dan wordt voor het afzonderlijk drukken bovendien f 6.— per vel druks in rekening gebracht.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

IN H O U D.

Dr. H. C. SCHAMHARDT, Een wiskunde-boek uit het laatst der 17e eeuw (Vervolg)	177
D. VAN DANTZIG, Over de maatschappelijke waarde van onderwijs in wiskunde	186
P. WIJDENES, Over het onderwijs in rekenen in de tweede klas van de H. B. S.	197

 De redactie heeft het genoegen in deze aflevering het portret te geven van Prof. Dr. G. SCHOUTEN; zij hoopt de portretten van al onze hoogleraren den Intekenaars achtereenvolgens te kunnen aanbieden.

Voor de complete jaargangen 1 en 2 (samengebonden) zijn losse banden verkrijgbaar bij den uitgever P. NOORDHOFF te Groningen à f 1.25.

Verschenen:

Leerboek der Goniometrie en Trigonometrie .

door P. WIJDENES

Derde druk.

Prijs gebonden f 4.75.

Voor abonné's N. T. v. Wisk. en Chr. Huygens tot 1 Sept. f 3.90.

UITGAVE VAN P. NOORDHOFF TE GRONINGEN.

alles ten meesten nutte van den discipel strekt, is niet veel waart: die de fondamenten en de gevolgen van dien alle op een zelfde wijze verhandelt, verlengt de Study, en bewaart den leerling: die het verstant van iemant niet kan te gemoet komen, en zijne gedachten onderscheppen, is geen goede herder: en die alles niet op een lichte en een behagelijke wijze en weet voor te dragen is een melancolyken leytsman. Een goet onderwijzer moet de konst wel verstaan, hen kunnen intrekken en uitbreijden naar gelegenheid, de doolpaden kennen, en de rechte weg op een gemakkelijke wijze weten aan te wijzen, die middelen niet vergetende te gebruyken waardoor men komt te behouden, dat men ontfangen heeft; en daarom moet hem bewust zijn op wat wijze de Memory versterkt en ook verzwakt wert."

Wij zijn thans genaderd tot het derde deel van de voorrede, dat weer in drie stukken onderverdeeld is, nl.: De Methode, of de manier om wel te studeren; Van de goede Aandacht, en Van de goede Memory. Hierin wordt den leerlingen allerlei raad gegeven op eene wijze, die ons — hoe ernstig ze vermoedelijk bedoeld is — toch wel eens een glimlach om de lippen brengt. Zoo heet het b.v.: „de armgeestigheid is de eerste les, die een discipel heeft te betrachten; de ootmoedigheid moet deze volgen: men moet echter hierin maate houden; men moet niet denken dat men bot, of onbevattelijk is, ook niet dat de konst swaar is, omdat dit dingen zijn, die ons nadeel können toebrengen: men moet niet al te groote drift, of al te veel ijver gebruyken, en ook niet te weijnig." Iets verder wordt onderscheid gemaakt tusschen degenen, die „vogtig" van temperament zijn en die volgens den schrijver gemakkelijk studeeren, maar „swaarmoedig verstaan", en „drooge", die niet lang kunnen aanhouden, maar zeer veerdig bevatten. Ook moet men al weer niet „al te vogtig van harsenen" zijn en ook niet „al te droog".

In het tweede stuk worden de voorwaarden genoemd, waaronder men het best zijn aandacht op de studie kan concentreeren: „Als het lichaam gezont is, of dat het de ziel door eenige pijn niet lastig valt, zoo moet men het daarenboven, met soberlijk te eten en te drinken, in zulken staat houden, dat het niet te veel heumeuren ontfangt, dewijl die de aandacht hinderlijk zijn: als men zich altijd wil op vullen met spijs en drank, schoon ze niet fumeus is, zoo zalmen meestendeels de harsenen vol damp hebben, waardoor het

zal komen te gebeuren, dat, wanneer men zich wil voegen in de staat om aandacht te kunnen gebruyken, men liever zal willen slapen als mediteren: de stilte zal ons doen geuwen en gapen, daarze ons anderzints tot opmerken bequaam maakt. Men zal ook bevinden, dat men veel scherper en prompter van gedachten is als de spijs uyt de maag verteert is, als dan wanneer men even gegeten heeft. 't Is dan best dat men niet meer eet en drinkt als van noden is om het lichaam te voeden, en dat men, of geheel nuchteren studeert, of drie of vier uren na dat men spijs genoten heeft.

Een plaats, daar het stil is, en daar het oog weynig voorwerpen kan beschouwen, zal ons voordeel toebrengen."

In het derde stuk ten slotte wordt verteld hoe men het best het geleerde kan onthouden: „Als men een zaak herdenken wil, zoo moet men niet wilt te werk gaan: men moet met een bezadigt gemoet beginnen: men moet zorg dragen hen aan het rechte eynde aan te vatten; en men moet met een stille aandacht de draat opvolgen: die met een beslommerde geest begint, die het evenveel is waar hij een zaak komt aan te vatten, en die met een woelende drift, zonder eenige order te houden, hen achtervolgt, zal zeer licht zijn memory meer verswakken als versterken.

Men moet ook onderscheyt maken tusschen zaken-dat fondamenten zijn, of die veel moeten gebruykt werden, en tusschen andere die zoo veel niet te pas komen: indien men de gronden niet wel onthouden heeft, zoo zal men daar na, wanneerze moeten gebruykt worden, zich zeer verlegen vinden; en zoo men haar dan niet erinnert, zoo zal men of niet kunnen voortgaan, of men zal in veele dolingen vervallen."

Zooals men ziet konden ook vele van onze tegenwoordige leerlingen met deze raadgevingen hun voordeel doen.

Maar ik wil nu niet langer stilstaan bij de voorrede van het boek, maar nog enkele dingen aanstippen uit den eigenlijken inhoud. Om niet al te uitvoerig te worden, zal ik mij daarbij beperken tot die boeken, die meer de wiskunde in engeren zin behandelen, dus, het eerste, tweede, derde, vierde en dertiende. Naar ik hoop, zal dit ook zeker voldoende zijn om hen, die zich hiervoor interesseeren, er toe te brengen eens kennis te maken met werken van onze voorvaderen als dat, wat wij thans bespreken. Zulk eene kennismaking is zeker de moeite waard, vooral voor hen, die het

belang inzien van de studie der geschiedenis van ons wiskunde-onderwijs.

Het eerste boek dan behandelt de „Proportiën of Evenredigheden der grootheden in 't algemeen”.

Bij de lezing van dit deel valt het onmiddellijk op, dat — al mogen vele der thans geleerde eigenschappen dezelfde zijn als vroeger, — wij er toch wel iets op vooruit zijn gegaan wat betreft het scherpe definieeren. Men vergelijke maar eens de tegenwoordige definitie van eene evenredigheid als eene gelijkheid van twee verhoudingen met die van den heer *De Graaf*: „Bij proportie of evenredigheid verstaan wij de gelijke overeenkoming die zij onder elkander hebben, gelijk hierna bestiptelijk zal bepaalt worden.” En die nadere bepaling vinden wij dan iets verder: „Zoo van vier grootheden, het eerste het zooveelste deel is van het tweede als het derde van het vierde: of ook, zoo het eerste zooveel malen het tweede begrijpt als het derde het vierde, zoo noemen wij deze grootheden evenredige, of wij zeggen de eerste tot de tweede zoodanigen reden te hebben als de derde tot de vierde.”

In vergelijking met de tegenwoordige is deze definitie zeker wel niet vrij te pleiten van breedsprakigheid.

Na toelichting dezer definitie wordt onderscheid gemaakt tusschen eene evenredigheid als $b : c = c : d$ en eene als $b : c = d : f$, waarbij de eerste een „gebondene”, de tweede eene „ongebondene” genoemd wordt en wel „omdat c in de eerste aan beyde de redenen vast is.” (Terloops zij nog even opgemerkt, dat in plaats van onze tegenwoordige schrijfwijze eene eenigszins afwijkende gebruikt wordt, nl. $b - c = c - d$).

De middelste term c in de „gebondene” evenredigheid wordt dan de middelevenredige genoemd.

De rest van Boek I behandelt nu in een dertiental zoogenaamde „Voorstellen” de bekende eigenschappen der evenredigheden, beginnende met de hoofdeigenschap. Indien al niet overal vrij van dezelfde breedsprakigheid als boven werd genoemd, worden deze eigenschappen toch vrijwel op gelijke wijze behandeld en bewezen als tegenwoordig, zoodat hiervan verder niet veel bijzonders valt te zeggen.

In het tweede Boek „Van de Arithmetica” worden de hoofdzaken der Rekenkunde behandeld. „Arithmetica, Rekenkunst ofte

Telkunst"; zoo heet het, „is een wetenschap die wel leert tellen. Haar subject of haar onderwerp is het getal."

En dan worden een aantal definities gegeven: van getal, dat weer kan zijn heel of gebroken, van een „heeltal" en een „brooktal of breuk", van teller en noemer van de breuk. Ook hier heerscht nog niet overal volkomen klaarheid in de verschillende begrippen. Dit blijkt o.a. duidelijk als de schrijver meedeelt: „De breuken zijn onmeetbaar en meetbaar", maar dit onmiddellijk corrigeert: „of liever, ondeelbaar en deelbaar". Uit de daarop volgende nadere toelichting blijkt dan, dat met een ondeelbare breuk een onvereenvoudigbare breuk wordt bedoeld, terwijl „een deelbare breuk is welkers Teller en Noemer beyde door een heeltal, meer als de eenheid zijnde, effen deelbaar zijn". Overigens kan niet gezegd worden, dat de behandeling der verschillende bewerkingen der rekenkunde, die hierop volgt, belangrijk afwijkt van de nog heden gevolgde methode. Achtereenvolgens behandelt de schrijver: de optelling (vergaring of additio), de aftrekking of subtractio, de vermenigvuldiging of multiplicatio, en de deeling of divisio voor geheele getallen. Afzonderlijk worden nu enkele eigenschappen genoemd: „I. Indien het Deeltal en de Deeler, of het Dividendum en den Divisor, beide met een zelfde getal gemultipliceert, of daardoor, effen opgaande, gedeeld werden, en men dan divideert, het quotient zal gelijk zijn aan 't geene dat men bekomt, zulx niet doende.

II. Zoo men het vermenigvuldigde van twee tallen, a en b , moet deelen door een derde getal c , het geeft eene zelfde uytkomst, of men dit doet, dan of men eerst den Deeler c , met een vierde d , vermenigvuldigt, en dan het vermenigvuldigde van a , b , d , door malkander deelt door het gemultipliceerde van den Deeler; of ook, dat men eerst den Deeler door een vierde d deelt, en mede door dezelfde d divideert een van de Multiplicatores, a of b , en dan het vermenigvuldigde van dit quotient met de ongedeelde, deelt door het quotient van c .

III. Als er twee colommen van getallen zijn, van welke het vermenigvuldigde van de eene moet gedeelt worden door het vermenigvuldigde van de ander: het Quotient zal even groot zijn, of men dit zoo simpelijk doet, dan of men bij yder Colom een gelijk getal bij doet; of af neemt; of een van de eene Colom met een getal multipliceert, en den Multiplicator in de andere Colom stelt;

of dat men een van de eene Colom door een van de andere deelt, en den divisor uytlaat; of dat men van elke Colom een door een zelfde getal deelt."

Voor al uit de beide laatste eigenschappen blijkt, dat het geheim van het geven van korte, scherpe definities, den schrijver nog niet bekend was.

Een derde gedeelte van dit tweede Boek handelt volgens het opschrift „Van de Regelen op de Telling der groote Heeltallen, en ook op de Telling der Breuken". „Omdat," zegt de schrijver dan verder, „in deze — d. z. de bewerkingen met grootere geheele getallen — gemeenlijk de kinderen geoefent zijn, zoo zullen wij de zelve, als genoeg bekend zynde, overslaan, om U. L. niet lastig te vallen met zaken die gy alrede weet."

Bij de nu volgende bespreking van de bewerkingen met breuken, wordt vooropgesteld de eigenschap (Hoedanigheid) IV „Als van twee Breuken de Tellers en Noemers evenredig zijn, of dat de Teller van de eerste zoo menigmaal is begrepen in de Teller van de tweede, als de Noemer van de eerste in de Noemer van de tweede: zoo zijn deze Breuken even groot."

Tusschen de bedrijven door wordt dan bij de vereenvoudiging van breuken behandeld het zoeken van den grootsten gemeenen deeler van teller en noemer door deeling. Deze bewerking wordt door een voorbeeld toegelicht; bewijs wordt verder niet gegeven. Zoo wordt ook tusschen de „Regelen op de Vergadering en Aftrekking" door verteld hoe men het kleinste gemeene veelvoud van twee getallen kan vinden; ook hier geen spoor van bewijs, een voorbeeld verduidelijkt de omslachtig beschreven regel.

Achtereenvolgens worden zoo behandeld de optelling en aftrekking, vermenigvuldiging en deeling. Na deze regels echter gegeven te hebben volgt nog eene „verklaring over de regelen gegeven op de Multiplicaty en Divisy der Breuken"; de schrijver heeft dus hier wel degelijk de behoefte aan een bewijs gevoeld.

Uitvoerig wordt vervolgens stil gestaan bij het zoeken van de vierde evenredige, waarna geleidelijk overgegaan wordt op de toepassing op de practijk: „Regelen op de Telling met vergelijking, toepasselijk in de Negoty." Een belangrijke plaats neemt hierbij de regel van drieën in, die door verscheidene voorbeelden toegelicht wordt. Op den regel van drieën volgt de kettingregel, eveneens geïllustreerd door talrijke eenvoudige vraagstukjes, en de regel van

vijven, waarna het tweede boek besloten wordt met een zes- en zestigtal vraagstukken, „dienende tot oefening”.

Op een enkele uitzondering na meende de schrijver dus blijkbaar te kunnen volstaan met eene behandeling der rekenkunde, waarin alleen de toe te passen regels geponeerd werden, zonder dat overal een streng bewijs daarvoor gegeven werd. Verschillende onderwerpen, die in onze tegenwoordige leerboeken over rekenkunde voorkomen, als b.v. deelbaarheid, talstelsels, worteltrekking, ontbreken geheel.

Dat de schrijver — zooals boven reeds gezegd werd — toch wel de behoefte aan bewijzen heeft gevoeld, komt ook nog duidelijk aan het licht in het begin van het derde boek, dat over de „Geometria of Meetkunst” handelt. Nadat hij nl. de Meetkunde verdeeld heeft in de theorie en de praktijk, zegt hij in een soort van inleiding op de theorie: „In dit deel zullen wij nu een volmaakte bewijzende Redenkavelingh gebruiken. Hier voren hebben wij dit ten deele waargenomen, nu zullen wij het in 't geheel observeren. Wij zullen nu Methodicq, kort, en scherp zijn. Wij verkiezen nu deze volmaakte order omdat ons de matery hiertoe nodigt.” En een weinig verder: „Weet dan, dat tot alle zaken, die met vaste en onwrikbare redenering zullen gedoceert werden, vereist werden tweeërlei beginselen: *Axiomata* ofte *algemeene kundigheden*, en *Definitieën* ofte *Bepalingen*”. Nadat nu uiteengezet is, wat men onder deze beide te verstaan heeft, volgt allereerst eene opsomming van de volgende axiomata:

- I. De dingen de welke aan een ding even zijn, zijn ook even aan malkander.
- II. Gelijke dingen bij gelijke gedaan, de sommen zijn gelijk.
- III. Gelijke dingen van gelijke afgenomen, de resten zijn gelijk.
- IV. Van gelijke dingen zijn de gelijkvoudige mede gelijk.
- V. Van gelijke dingen zijn de gelijke delen mede gelijk.
- VI. Gelijke dingen zijn in gelijke dingen gelijke malen begrepen.
- VII. De gelijke dingen zijn gelijkredig tot een ding en omgekeert, een ding is gelijkredig tot gelijke dingen.
- VIII. De dingen, die gelijkredig tot een ding (of gelijke dingen) zijn, zijn even aan malkander; en omgekeert.
- IX. Het geheel is ongelijk aan zijn deel.
- X. Indien een van alle moet waar zijn en zoo ze alle op één na vals zijn, zoo is de laatste waar.

XI. Zo twee dingen te zamen even aan twee andere zijn, en zoo een van de twee eerste even is aan een van de twee andere, zoo zijn de overige mede gelijk.

Na deze opsomming van axiomata, die in onze tegenwoordige meetkunde-boeken niet voorkomt, volgt nu eene uiteenzetting van de wijze, waarop een bewijs geleverd zal worden. Er zijn „drieërlij manieren om de besluyten te bekrachtigen; of van vooren, of van achteren, of gemengt”. Met het eerste wordt dan bedoeld, dat men uitgaat van een axioma of eene reeds bewezen waarheid en geleidelijk komt tot het gestelde; met de tweede uitdrukking wordt de tegenovergestelde volgorde bedoeld, terwijl bij een bewijs, dat de schrijver „gemengt” noemt, van beide uitersten naar elkaar toe geredeneerd wordt. Verder wordt nog uiteengezet, wat men te verstaan heeft onder een bewijs uit het ongerijmde of „de demonstraty door ’t absurdum”.

Heel eigenaardig is wel de opmerking, die hierop volgt en waar de schrijver zegt: „Ik hebbe hiervoren beloofd niets te zullen stellen buijten deze Beginzelen, of liever dat ik niets zoude komen te besluyten of ik zoude het ook met eenen bewijzen onfeylbaar zoodanig te moeten wezen; maar ik herroepe dit, en meen mijn woort hier in niet na te komen. Ik ben van zins dit alleenlijk waar te nemen in dingen die duyster zijn, maar niet in die geene die zoo klaar zijn dat men ze zonder eenige schreum ter werelt kan toestemmen. De nettigheid vereist wel het beloofde, maar het gemak het geene ik voorneme. ’t Eerste zou mij verdrieten en u walgen. ’t Ontbreekt mij niet aan krachten, maar wel aan de lust om zulk uyt te voeren. Wij zullen deze, die wij zonder bewijs zullen invoeren, met de naam van Beginzelen doopen, niet omdat wij ze in der daat daar voor erkennen, maar alleenlijk omdat wij ze niet en demonstreeren”.

Mij dunkt, dat wel geen enkel schrijver van een wiskunde-boek zich in den tegenwoordigen tijd op zulk een naïef-oprechte wijze van de zaak zou durven afmaken. Nu kan het er nog wel mee door, waar het „beginzelen” geldt als in het begin voorkomen, zooals b.v.: „De rechte lijnen, wiens uytterste passen, zijn evenlang”, of wel „Het eene been van een scherpe hoek, aan de top verlengt zijnde, bepaalt met het ander been een *botte* hoek en omgekeert”. Maar min of meer bedenkelijk wordt deze wijze van doen toch, waar het waarheden geldt als: „Alle gelijkhoekige Driehoeken, en alle Vierkanten, zijn gelijkformig” of wel „Het verschil tusschen

een ontelbare gelijkzijdige Veelhoek, in of om een Ront beschreven, is minder als de minste grootte die bedacht kan worden, zoowel ten opzichte van de grootte der Figuren als van hare omtrekken". En niet minder bij het volgende, nog wel „Algemeen Beginzel" genoemde: „Het vermenigvuldigde der twee verknochte lijnen van een Rechthoek, of van een Vierkant, geeft de Inhoud; en van een Balk (Parallelepipedum) of van een Teerling (Cubicq) der drie verknochte in lengte, breedte en diepte."

Eigenaardig is het ook, dat er van de axioma's, welke gewoonlijk in het begin van onze tegenwoordige meetkunde te vinden zijn, niets te bespeuren valt.

Zooals men ziet, is er dus wel het een en ander aan te merken; maar het zou toch onrechtvaardig zijn alleen afbrekende kritiek te geven. Het boek bevat toch ontegenzeggelijk veel goeds. Zoo zijn de figuren, die afzonderlijk achterin afgedrukt zijn, uitstekend verzorgd en zelfs nu nog heel duidelijk te noemen. Ook is het misschien wel een voordeel te noemen boven de hedendaagsche leerboeken, dat allerlei overtolligheden, die langzamerhand ingevoerd zijn, nog niet voorkomen. Volledigheidshalve vermeld ik nog even de volgorde, waarin de verschillende onderwerpen behandeld zijn: de rechte lijn, de hoek, evenwijdige lijnen, de driehoek; hierbij wordt onmiddellijk na de congruentie de stelling behandeld: „Zoo twee driehoeken tussen evenwijdige passen, en een selfde, of gelijke gronden hebben, zoo zijnse even groot, en zoose ongelijke gronden hebben, zoo zijnse evenredig met hare gronden". En daarop volgen terstond de evenredige lijnen in een driehoek, de rechthoekige driehoek en de scheefhoekige. Het daarop volgende hoofdstuk behandelt volgens het opschrift „De Ramen, Rechthoeken en Vierkanten." Hierin zijn ook opgenomen de stelling van Pythagoras en de projectie-stelling, terwijl op het eind slechts enkele regels aan de veelhoeken gewijd worden. In een enkele bladzijde behandelt nu hoofdstuk V de gelijkvormige figuren, waarna nog een hoofdstuk besteed wordt aan de behandeling van den cirkel, waarin o.a. de stelling van Ptolemaeus voorkomt en tot slot de stelling, dat de omtrekken van twee cirkels zich verhouden als de stralen en de oppervlakken als de kwadraten der stralen.

In het tweede deel vinden wij een groot aantal werkstukken, die ook vrijwel alle in de nieuwere boeken voorkomen en die ik hier dus niet alle behoef op te sommen. Het derde deel tenslotte

draagt het opschrift „Van de telkunstige werkstukken”. Wat de schrijver daarin uiteenzet blijkt het duidelijkst uit zijne eigen woorden: „Zoodanig noemen wij hetgene in dit deel zal verhandelt werden, omdat het zal inhouden de ontbinding van de voornaamste werkstukken der Meetkunst, toegepast aan de getallen: de lenkte van sommige lijnen in getallen gegeven zijnde, zoo zullen wij daar-door leeren vinden de lenkte van andere lijnen, ook de Inhoud, of de grootte van de Figuren. Wij zullen alléénlijk de Rechte lijnen, en de Rechtlinische Figuren aan de getallen toe-eijgenen, en geen andere, dat is geen kromlinische, omdat de maat, noch de evenredigheid van deze, tot noch toe niet volmaaktelijk bekend is.”

Vermeld zij noch even, dat toch desondanks de omtrek en het oppervlak van een cirkel bepaald wordt, waarbij voor π de door Archimedes gevonden waarde $\frac{22}{7}$ wordt genomen.

In het dertiende boek, dat de Algebra behandelt, treft ons onmiddellijk de zeer van de tegenwoordige afwijkende wijze van behandeling. Het hoofddoel, het oplossen van vraagstukken door middel van vergelijkingen, wordt reeds in den aanvang vastgesteld en voortdurend in het oog gehouden. Onmiddellijk op de eerste bladzijde zegt de schrijver: „Algebra, anders Stelkunst genaamt, is een wetenschap, die met behulp van een teken voor het begeerde te stellen, en dat als bekend in de ontbinding gebruikende, vint het begeerde.” Iets verder wordt de algebra in drie deelen gesplitst met de volgende woorden: „Drie voorname zaken kunnen wij in deze wetenschap aanmerken, de bewerking van de voornoemde tekens ten aanzien van de addity, subtracty, multiplicaty, divisy, en worteltrekking, in 't geheel en in 't gebroken; in de vinding der aequatiën; en in hare oplossing; en daarom zullen wij deze konst in drie deelen afhandelen. Dat de laatste twee deelen geheel en al hoofdzaak zijn, blijkt wel zeer duidelijk hieruit, dat aan het eerste slechts een zevental pagina's gewijd worden, terwijl de volgende 23 handelen over „de natuur der aequatiën, van hare reducty en hare ontbinding”, en de laatste 28 bladzijden spreken over „de vinding der aequatiën en de ontbinding der questiën”.

Het spreekt van zelf, dat dus in het eerste deel alleen de allernoodzakelijkste hoofdzaken der algebraïsche bewerkingen behandeld zijn. Zoo wordt er van de breuken niets anders gezegd, dan dat men dezelfde regels als in de rekenkunde moet toepassen, welke

regels dan nog even gememoreerd worden. Van herleiding van groote vormen met breuken en wortelvormen dus geen spoor. Geene aanleiding dus ook tot de klacht, die den laatsten tijd meermalen vernomen werd, dat het toch tijd wordt om het snoeimes te zetten in de excessen, waartoe het goochelen met dergelijke vormen gevoerd heeft!

Om niet al te veel van het geduld van den lezer te vergen, zal ik niet in bijzonderheden stilstaan bij de wijze waarop de vergelijkingen behandeld worden. Het zij genoeg te vermelden, dat dit veel uitvoeriger geschiedt dan in onze schoolboeken: ook wordt niet gearzeld voor allerlei kwesties gebruik te maken van meetkundige figuren, waartoe achteraan een aantal goed verzorgde platen bijgevoegd zijn. Het derde of laatste deel is eigenlijk eene verzameling van 110 volledig uitgewerkte vraagstukken.

Als bijvoegsel wordt hierna nog gegeven eene korte verhandeling over de kegelsneden „algebraïze bewezen”.

De schrijver besluit dan zijn boek met een nareden, waarin nog tal van wijze raadgevingen voor de verdere studie gegeven worden en een bericht aan den boekbinder „om de figuren in dit werk wel in te binden”.

Moge, wat ik van dit interessante boek vermeldde, voldoende zijn om bij dezen of genen eenige belangstelling op te wekken voor het wiskunde-onderwijs van ruim twee eeuwen geleden.

OVER DE MAATSCHAPPELIJKE WAARDE VAN ONDERWIJS IN WISKUNDE.

D. VAN DANTZIG ¹⁾.

No man ever learns to do one thing by
doing something else.

(George Bernard Shaw) ²⁾.

1. In den laatsten tijd wordt dikwijls de vraag gesteld — en somtijds in ontkennenden zin beantwoord —, of het wel eenig

¹⁾ Een kort overzicht van den inhoud dezer studie heb ik op de vergadering van Liwenagel van 26 Februari 1927 medegedeeld.

²⁾ G. B. Shaw: “The Perfect Wagnerite” (Chapter: “The Nineteenth Century”).

doel heeft, de wiskunde op de middelbare scholen ook aan hen te onderwijzen, die haar in hun latere loopbaan niet rechtstreeks zullen behoeven toe te passen. Hieruit blijkt, dat velen van hen, die ons wiskunde-onderwijs „genoten” hebben, van het belang en de wenschelijkheid dit onderwijs te ondergaan, allerminst overtuigd zijn en dat dus dit onderwijs zeker niet *altijd* in eene *gevoelde* behoefte voorziet¹⁾. Dit moet als een gebrek in ons wiskunde-onderwijs worden beschouwd.

2. Aan de discussies over W. O.²⁾ ontbreekt maar al te vaak de beroemde „mathematische scherpste”, die den spreker of schrijver qualitate qua doorgaans zoo eigen en zoo dierbaar is. Zoo wordt het oordeel „Wiskunde bevordert het logisch denken” herhaaldelijk als gemeenplaats gebruikt, zonder dat men zich rekenschap geeft van de vragen, wát logisch denken is, wáárin het zich van andere denken onderscheidt, of en eventueel waarom het zoo uitermate wenschelijk is, onze discipelen juist in dezen specialen vorm te doen denken. Zoo worden ook de andere Schlagwörter „ruimtelijk aanschouwingsvermogen”, „functioneel denken” en „mathematische intuïtie” bij herhaling gebruikt zonder dat een eenigermate wel omschreven begrip van hun inhoud aanwezig is. Zelfs de eerste daad, die ieder rechtgeaard mathematicus doet wanneer hij een probleem tot oplossing wil brengen, is bij de vraag naar de waarde van het wiskunde-onderwijs tot dusverre bijna altijd achterwege gebleven³⁾:

¹⁾ Deze en verschillende der volgende opmerkingen zullen waarschijnlijk niet uitsluitend voor de wiskunde, doch evenzeer voor sommige andere onderwijsvakken gelden. Hoogstens zijn ze wellicht bij de wiskunde van meer belang, doordat het al of niet „slagen” van het onderwijs bij ons in hoogere mate dan bij andere leervakken van de in het bijzonder emotioneele psychische gesteldheid van den leerling afhankelijk is. (Vgl. § 4 seq. van den tekst). Alle dergelijke oordeelen zijn hier echter uitsluitend voor de mathesis uitgesproken, daar ik buiten dit gebied geenerlei competentie heb. Mogen de andere vakleeraren zelve onderzoeken, in hoeverre bovenstaande beschouwingen iets voor hun eigen gebied impliceren.

²⁾ Afkorting voor „Wiskunde-Onderwijs”.

³⁾ Sindsdien heb ik vernomen, dat op de in de jaren 1920 en 1921 door Mevr. Ehrenfest, Prof. G. Mannoury, Dr. W. F. de Groot e. a. gehouden, door het Nutsseminarium voor Paedagogiek te Amsterdam georganiseerde, besprekingen het probleem wel in alle scherpste is gesteld en onder oogen gezien.

Probleemstelling:

Bij de meeste mathematici bestaat de overtuiging, dat het ook voor hen, die na hunne schooljaren waarschijnlijk niet of nauwelijks tot de noodzakelijkheid zullen komen, de op school geleerde wiskunde toe te passen, wenschelijk is, aan het onderwijs in wiskunde deel te nemen. Waarop is deze overtuiging gegrond, bestaat zij terecht, en hoe laat zij zich eventueel op voor niet-wiskundigen overtuigende wijze aan de belanghebbenden mededeelen?

Indien deze wenschelijkheid daarin gelegen is, dat het wiskunde-onderwijs bij al wie het ondergaat eenigerlei geestelijke faculteit tot begeerenswaarde werking brengt, in welken vorm dient dan dit onderwijs gegeven te worden, opdat deze gewenschte invloed zoo groot mogelijk zij?¹⁾

Kort gezegd:

A. *Wat is het eigenlijk, dat wij onzen leerlingen willen mede-geven, en hoe kunnen wij dit het beste doen?*

3. Wanneer we „de” mogelijke waarde van wiskunde-onderwijs naar de aan het waardeeringsoordeel ten grondslag liggende gevoelens onderscheiden in „directe waarde”, die berust op onmiddellijke emotioneele belevenis, en „indirecte waarde”, die berust op meer verstandelijk beredeneerde verwachtingen omtrent toekomstige emoties, dan is de mogelijke *indirecte* waarde van onderwijs in wiskunde, daar deze vrijwel uitsluitend op „secundaire functie” berust, voor den jongeren leerling nihil, voor den ouderen leerling te verwaarloozen klein, en voor den ex-leerling (met uitzondering der weinigen, die eene der wiskunde verwante loopbaan gekozen hebben) van *abstract* maatschappelijken aard („vormende waarde”). terwijl de mogelijke *directe* waarde voor den leerling gelegen is in de gevoelens van „kunstgenot”, die hij bij de beoefening der wiskunst beleeft en voor den ex-leerling in de herinnering aan zulke gevoelens.

4. Daar primaire gevoelens van onwaarde (b.v. herinnering aan door het W. O. veroorzaakt kinderleed) niet alleen het *beseft* der indirecte waarde verdrijven („noodzakelijk kwaad”), maar veelal de vormende waarde *zelve* te niet doen, doordat zij tot geheele of gedeeltelijke psychische verdringing van het aan het woord „wis-

¹⁾ Dit probleem zal hier slechts eene zeer gedeeltelijke en voorloopige oplossing kunnen vinden.

kunde" gekoppelde complex, dus tot vergeten of niet-begrijpen; leiden, en daardoor het ontstaan der gewenschte psychische faculteiten verhinderen¹⁾, zal

B. *Wiskunde-Onderwijs, als het geen directe waarde heeft, (doorgaans) ook geen indirecte waarde, dus in het geheel geen waarde hebben.*

5. Aan de ervaring kan dan ook het feit worden ontleend; dat zij, die, naar het oordeel der wiskundigen, een juist inzicht in de mathesis hebben verkregen, als regel ook geen tegenzin in het wiskundig werken hebben. Deze uitspraak is een „natuurwet", die als zoodanig zeker niet altijd opgaat, zelfs niet exact geformuleerd kan worden, terwijl zij desalniettemin voldoende frequent blijkt uit te komen om haar als richtsnoer voor ons handelen betrouwbaar te kunnen achten:

C. *Tegenzin tot en goed begrip van de wiskunde gaan zelden samen.*

6. Hierop baseeren we den eisch (die eene op grond van **C.** noodige, maar geenszins voldoende voorwaarde inhoudt):

D. *Alle W. O. dient slechts in zoodanigen vorm gegeven te worden, dat het de liefde en de belangstelling verwerft en behoudt van hen, die het ondergaan. Waar dit, zooals bij de huidige methodiek te veelvuldig het geval is, niet bereikt wordt, is het als ondoelmatig en schadelijk voor de psyche der leerlingen te verwerpen.*

Dit is een sociaal-ethische eisch, die kan worden aanvaard of verworpen, maar niet bewezen of weerlegd. Verwerpen kan o.a. geschieden, 1e. door afstand te doen van de bewustmaking eener eventueel bestaande verdrongen neiging; 2e. door **C.** als eene al of niet juiste „natuurwet" te beschouwen, doch te weigeren, deze als richtinggevend voor onze daden te erkennen, b.v. op grond van een besef, dat uit onze eigen gevoelens niet kan worden afgelezen, wat voor ons waarde heeft, maar dat datgene wat volgens hooger oordeel tot ons heil geschiedt door ons dikwijls als last des levens wordt beschouwd en als zoodanig desnoods zonder liefde dient te worden aanvaard, zoodat W. O. zonder doorleefde waarde en zonder aantoonbare resultaten wellicht toch nog waardevol zou kunnen zijn.

¹⁾ Vgl. voor eene nadere uitwerking der hier schematisch weergegeven psychische verschijnselen mijne binnenkort te publiceeren studie: „Over Psycho-Genèse der Mathesis". Zie ook § 7 van den tekst.

Beide standpunten zijn metaphysisch wellicht houdbaar, doch voor eene discussie over wiskunde-onderwijs volslagen onvruchtbaar.

7. Hoewel immers ook van datgene wat men vergeet of niet begrijpt zeer wel eene nawerking in het onderbewuste kan blijven bestaan, zal men de wenschelijkheid dezer nawerking slechts kunnen betoogen op grond van een empirisch aantoonbaar verschil tusschen haar onbewust optreden en haar uitblijven, waartoe noodig is, dat zij (dus ook het W. O. zelf) in een causalen keten aan empirisch aantoonbare gevolgen („resultaten”) voorafgaat, terwijl deze gevolgen met groote regelmaat zullen moeten optreden en zelf begeerenswaard zullen moeten zijn.

Van dergelijke gevolgen van W. O., voorzooverre dit niet tot goed begrip geleid heeft, zijn er echter tot dusverre geen andere empirisch afdoende aangetoond dan de bovengenoemde verdringen, die door den al of niet van buiten af opgelegden eisch tot begrijpen en onthouden tot psychische conflicten leiden, die op hun beurt verdrongen moeten worden, waardoor een zich steeds uitbreidend complex van met de wiskunde associatief verbonden bewustzijnsinhouden „besmet” wordt. Dit leidt in extreme gevallen tot neurosen of psychosen, maar steeds tot een zoo groot leed (minderwaardigheidsgevoelens, enz.), dat eventueele empirisch aantoonbare maar nog niet aangetoonde begeerenswaardige gevolgen daartegenover niet in aanmerking genomen mogen worden, zoodat de wenschelijkheid van W. O., losgemaakt van goed begrip, niet met vrucht kan worden verdedigd. Op grond van C. dient dus de eisch D. als normatief te worden aanvaard.

8. Daar nu 1e. sterke affecten bij jonge kinderen in het geheel niet, bij oudere leerlingen nauwelijks gewekt worden door aesthetisch apperceptieve, maar vrijwel uitsluitend door energetisch creatieve ervaringen, zoodat de kennisname en beschouwing van een nog zoo schoon mathematisch systeem zonder actieve deelname aan den opbouw daarvan bij den leerling vrijwel geen waardeering kan wekken;

terwijl 2e. het vermogen tot creatief mathematisch werken („mathematische intuïtie”) door den gemiddelden goeden leeraar niet of nauwelijks kan worden aangekweekt tengevolge van onze onbekendheid met de psychische mechanismen, waardoor de mathematische „ontdekking” tot stand komt,

en daar 3e. eene uit eene bijzondere, uit individueele omstandig-

heden ontstane, psychische constellatie van den leerling voortspuitende aversie tegen de wiskunde alle positieve waarde van het W. O. onmogelijk maakt, den leerling daarvan slechts schadelijke gevolgen (psychische conflicten, verdringen, enz.) doet onder vinden en als regel door den leeraar niet kan worden geanalyseerd, nog minder met succes kan worden beïnvloed,

moet men concluderen: ¹⁾

E. Alle leerlingen, die hetzij gebrek aan creatieve „begaafdheid”, hetzij eene sterke aversie tegen de wiskunde hebben, dienen van het W. O. te worden vrijgesteld.

9. Eene uitzondering kan gemaakt worden voor het uiterste minimum aan wiskundige kennis, dat voor andere leervakken als technisch hulpmiddel noodig is. Dit omvat slechts de concrete kennis van enkele empirische (dus waarneembare, niet bewijsbare!) geometrische eigenschappen, en eenige vaardigheid in het toepassen van enkele eenvoudige algorithmen, heeft met „begrijpen” niets te maken, en kan door een ervaren docent (althans voor zooverre het binnen het kader der gebruikelijke H. B. S.-leerstof valt) zelfs aan jonge kinderen in luttele uren geleerd worden.

Voorts zal in E. het eerste alternatief kunnen vervallen, zoodra de bovengenoemde psychische mechanismen grondig bestudeerd zijn en door den leeraar beheerscht kunnen worden.

10. Blijft thans de vraag, of onderwijs in wiskunde voor het overblijvende deel der leerlingen, die dus liefde en „talent” voor het mathematisch werken hebben, naast de directe ook nog indirecte, dus maatschappelijke, „vormende” waarde kan hebben. In dit verband is het, gezien de praktisch gebleken onmogelijkheid, het W. O. door onmiddellijk als zoodanig herkenbare positieve sociale waarden te rechtvaardigen, noodlottig, dat men dit onderwijs tracht te verdedigen met een beroep op de aankweeking van zekere psychische faculteiten, terwijl er van een eenigermate diepgaand onderzoek naar de psychische werkingen, die de beoefening der wiskunde uitoefent, of zelfs van een eenigermate nauwkeurige omschrijving dezer gewenschte faculteiten, nog nauwelijks een spoor aanwezig is. Wegens het ontbreken eener voldoende psychologische basis zullen we geen andere dan aan het Schlagwort „logisch denken” gebonden psychische werkingen kunnen onderzoeken en waardeeren.

¹⁾ Opvattingen, na verwant met de hier volgende, zijn reeds sinds vele jaren door Prof. G. Mannoury verdedigd.

11. **Logisch denken.** Wanneer wij onder „denken” verstaan het min of meer bewust willend leiden der (psychische) aandachtscentra langs min of meer scherp begrensde, gedeeltelijk vooruit overziene associatiebanen, terwijl deze centra zooveel mogelijk uit voortdurend vervloeiende associatie-groepen tot woordkernen zijn geïsoleerd, dan zijn bij het *formeel* logisch denken de associatiebanen daardoor gekarakteriseerd, dat zij zich op woordenreeksen laten afbeelden, die in „geoorloofde” en „ongeoorloofde” onderscheiden worden volgens eenig expliciet gegeven (b.v. het van Aristoteles, Peano of Russell afkomstige) systeem van wetten, zoodanig, dat eene „gedachtenreeks” dan en slechts dan „juist” is, wanneer zij aan eene verzameling van woordrelaties is toegevoegd, waarin geen „ongeoorloofde” voorkomen.

12. Juistheid eener logische redeneering is eene relatie tusschen praemisse en conclusie, onafhankelijk van het al of niet „aanvaard” zijn der praemisse. Dit aanvaarden is eene min of meer aan den wil onderworpen daad, die nauw samenhangt met het waardeeringsoordeel „waar”, resp. „onwaar”, dat als zoodanig subjectief is, en waaraan eenigerlei objectiviteit eerst kan worden toegekend, hetzij op grond van een „besef van het bestaan eener absolute waarheid”, dat zelf weder eene subjectieve emotie is, hetzij op grond eener mogelijke empirische constatering eener convergentie van alle überhaupt gevelde waarheidsoordeelen tot eene empirisch min of meer nauwkeurig bepaalbare limes, die dan bij definitie als objectieve of absolute waarheid zou kunnen worden beschouwd. Voorshands geeft echter de ervaring allerminst aanleiding, het bewijs zulk eener convergentie als empirisch afdoende geleverd te beschouwen.

13. De logika zelve geeft geen middel, te voorspellen, of eene door juiste redeneering uit eene aanvaarde praemisse gewonnen conclusie eveneens aanvaard zal worden ¹⁾. De ervaring leert echter, dat dit bij eene uitgebreide groep van oordeelen bijna steeds het geval is. En wel is het aantal gevallen, waarin zulk eene conclusie doorgaans aanvaard wordt, des te grooter, naarmate de op de redeneering betrokken verschijnselen nauwkeuriger gedefinieerd zijn, d. w. z. naarmate zij door een beter georganiseerd en verder gediffe-

¹⁾ Vgl. L. E. J. Brouwer, „De onbetrouwbaarheid der logische principes”, Tijdschr. v. Wijsbegeerte II, 1908. Ook bij P. Noordhoff, Groningen, 1919.

rentieerd taalgebied beheerscht worden. Maar zelfs in het best georganiseerde taaldomein, nl. dat der natuurwetenschappen, blijft het al of niet aanvaarden eener conclusie van a-logische omstandigheden afhankelijk; eene eventueel optredende discrepantie wordt dan met behoud van het vertrouwen van de toepasbaarheid van logika doorgaans daardoor te niet gedaan, dat men de oorspronkelijk aanvaarde praemisse voor onhoudbaar verklaart.

14. **F.** *De mogelijkheid, logika in het maatschappelijk leven te kunnen toepassen, is dus voor ieder gebonden aan het taalgebied, dat hij gebruikt of later zal gebruiken.*

In de praktijk beteekent dit, dat logisch denken alleen voor hen, die de mathesis, de natuurwetenschappen, of (volgens sommigen) de jurisprudentie tot arbeidsveld kiezen, van belang is. Alvorens men in andere wetenschappen, resp. in de dagelijksche omgangstaal, doelmatig logika zal kunnen gebruiken, dienen deze taalgebieden grondiger te worden georganiseerd.

15. Bevorderen van het logisch denken kan dus — zelfs al ware het „principe van de overdracht” wel gedefinieerd en empirisch bewezen! — als argument tot het onderwijzen van wiskunde ook aan scholieren, die later geen „logophilen” loopbaan zullen kiezen, niet met vrucht gebruikt worden.

Ook niet met betrekking tot de toekomstige wiskundigen zelf. Want als de wiskunde slechts het logisch denken bevorderde en dit logisch denken niet buiten de wiskunde kon worden toegepast, dan ware daarmee een vicieuze cirkel gesloten, die slechts kan worden doorbroken door de wenschelijkheid van het geven van wiskunde-onderwijs buiten de toepasbaarheid der formeele logika te zoeken.

16. **Significa.** Toch ligt er echter aan het ondoordacht gebruik der gemeenplaatsen „vormende waarde” of „bevorderen van het logisch denken” wel eene onbewuste bedoeling en eene mogelijkheid van positieve sociale waarde ten grondslag.

Met de woorden „logisch denken” bedoelt men nl. doorgaans *niet* het formeele logisch denken, maar het vermogen 1e. onze ervaringen en voorstellingen op zoodanig nauwkeurige wijze in woorden weer te geven, dat eene zoo scherp mogelijke afgrenzing bestaat tegen vrijwel alle verwante woorden en begrippen, die tot misverstand of meerduidigheid zouden kunnen leiden (*taaldifferentiatie*); 2e. zichzelf en anderen scherp rekenschap te geven van de betee-

kenis, de bedoeling en de draagwijdte van door spreker of tegen-spreker geuite woorden (*woordkritiek*); 3e. een probleem scherp te stellen, zijne relaties tót, in het bijzonder aequivalentie mèt andere problemen te onderzoeken, het te bevrijden van zuiver terminologische schijnproblemen, het tot eenvoudiger problemen terug te voeren en vooraf eene kritische beschouwing van de oplossings-mogelijkheden en oplossingswegen en van de te verwachten resultaten te kunnen geven (*problematiek*).

Al deze geesteswerkzaamheden behooren echter tot het gebied, niet van het boven omschreven „logisch denken”, maar van „signifische bezinning” en zijn maatschappelijk van hooge waarde, daar hunne toepasbaarheid niet aan een bepaald taalgebied gebonden is, maar integendeel tot betere organisatie van ieder voorgelegd taalgebied kan leiden.

17. Blijft dus de vraag, of en in hoeverre W. O. tot signifisch inzicht voert. Dit nu is bij den *huidigen* vorm van het W. O. niet in voldoende mate het geval¹⁾. Met betrekking tot de eerste der drie genoemde geesteswerkzaamheden kan het onderwijs alleen dan iets uitrichten, wanneer de te formuleeren ervaringen en voorstellingen reeds vooraf in de psyche van den discipel aanwezig zijn en door hem op zijne eigen „gebrekkige” wijze in woorden kunnen worden gebracht — iets wat in ons land o.a. tengevolge van het ontbreken van uitvoerig onderwijs in vormleer („intuïtieve propaedeuse”) zelden het geval is. — Hoewel deze uitdrukkingswijze allermint „gebrekkig” maar integendeel binnen het gebied der kindertaal volkomen duidelijk en eenduidig is, kan het kind tot het besef van hare ontoereikendheid tot het mededeelen of vastleggen der ervaringen in *geschreven* („doode”) woorden worden gebracht, op grond van het sterk op den voorgrond treden van emotioneele woorden en van het levend gebaar, bij uitschake-

¹⁾ Wanneer hier over „het” huidige W. O. gesproken wordt, is daarmee natuurlijk alleen dat onderwijs bedoeld, dat 1e. in overeenstemming met de officiële programmata gegeven wordt, 2e. door middel van leerboeken, tijdschriftartikelen enz. voor de buitenwereldikbaar is. Zoo kan ook het door de commissie Beth c.s. voorgestelde programma ondanks de verschillende verbeteringen die het brengt, allermint als eene anders dan te verwaarloozen kleine vooruitgang in den hier bedoelden zin beschouwd worden.

ling waarvan de duidelijkheid en eenduidigheid verloren gaat. Tenzij echter dit besef door het kind *emotioneel beleefd* wordt en tenzij bij iedere nieuwe definitie en iedere nieuwe stelling de woordverscherpende overgang vanaf het kinderlijk vertellen der *noodzakelijk reeds bij ervaring bekende* feiten, via eene serie van hulpformuleeringen, die telkens een of meer der te ontdekken onduidelijkheden of dubbelzinnigheden overwinnen, tot de definitieve streng mathematische formuleering dierzelfde feiten, *geleidelijk* voltrokken wordt, tenzij dit alles het geval is, wordt het vermogen tot taaldifferentiatie door het wiskunde-onderwijs niet bevorderd.

18. Met betrekking tot de „problematiek” moeten we opmerken, dat, zoowel wat de verschillende onderdeelen der wiskunde in hun geheel, als speciale hoofdstukken, stellingen, „vraagstukken”, enz., betreft, eene tot de verbeelding van het kind sprekende probleemstelling zelden expliciet gegeven wordt, — hoe vaak gebeurt het b.v. dat een leerling het inderdaad wenschelijker vindt, een probleem op te lossen dan het maar onopgelost te laten? Vgl. in dit verband ook de uitdrukking „sommen maken”! —, dat aequivalentie van problemen en het noodig en/of voldoende zijn van voorwaarden niet of in de caricaturale ontaarding „omkeering van stellingen” te berde gebracht wordt, dat logisch of methodisch bijeenbehorende vraagstukken op hoogst onoverzichtelijke wijze over den cursus verspreid worden, kortom, dat men den leerlingen eenvoudig een wiskundig systeem voorzet in de verwachting, dat de jongens het verzwegene — dus meestal het belangrijkste — wel zullen raden, ... wat den snuggere na verloop van een jaar of drie ook wel eens gelukt!

Zoodat ook hier de huidige vorm van W. O. het streven naar datgene, wat als zijn eigenlijke doel aangevoeld wordt, verwaarloost ten bate van eene maatschappelijke waardeloosheid.

19. Hoewel ten slotte, wat de taalkritische bezinning betreft, welhaast geen enkele taalvorm zóó zeer als de mathematische geschikt is om als voorbeeld, toelichting en toepassing van taalkritische beschouwingen te dienen, toch zal W. O. *zonder meer* in het gunstigste geval wiskunde, maar zeker geen taalkritiek leeren¹⁾.

¹⁾ Vgl. G. Mannoury: „Wiskunst, Filosofie en Socialisme”, P. Noordhoff, Groningen, 2e druk, 1924, p. 48 en p. 30: „Schaken leert schaken, maar geen wiskunst. Wiskunst leert wiskunst, maar geen redelijkheid”.

Integendeel: om formeel wiskundig te redeneeren moet men tijdelijk alle taalkritiek op zijde zetten.

Vergeten we echter anderzijds niet, dat niet alleen paedagogische en methologische overwegingen eene verschuiving van het W. O. naar den signifischen kant eischen, *maar ook en vooral de mathesis zelf*. Immers de mathesis is eene kunstmatige taal, die niet slechts — zooals de andere op de middelbare scholen voorkomende kunsttalen (biologie, geographie, economie, enz.) — van speciale vakuitdrukkingen gebruik maakt, die zich in bekende woorden laten omschrijven (definieeren), maar vooral ook woorden die tevens in de natuurlijke taal voorkomen (b.v. beschrijven, dus, berekenen, kennen, bepalen, raken, treffen, snijden, verbinden, samenvallen, waarde, in, op, enz.), in sterk afwijkende beteekenis gebruikt, woorden die zich *niet* laten definieeren, daar ze het tekstmateriaal óók voor de definities vormen, maar welker afwijkende beteekenis aan voorbeelden signifisch moet worden onderzocht. En ondanks het feit, dat signifische beschouwingen ten onrechte als „philosophisch” worden beschouwd en hoogstens in de laatste klasse sporadisch voorkomen, is het mogelijk, zulke beschouwingen met kinderen van 12 jaar te voeren, door uit te gaan van en aan te sluiten bij de kindertaal.

Hier komen we echter op een gebied, dat overvoert naar het taalonderwijs, een leervak dat helaas veel te scherp van het wiskunde-onderwijs gescheiden is.

20. We kunnen de resultaten der paragrafen 16—19 in de volgende stellingen kort samenvatten:

G. *Datgene wat in ondoordacht woordgebruik „logisch denken” genoemd wordt, en wat we hier in drie hoofdbestanddeelen „taaldifferentiatie”, „problematiek” en „woordkritiek” hebben gedifferentieerd, is, in tegenstelling tot het formeel logische denken, maatschappelijk van hooge waarde.*

H. *Het is eene fictie, dat de genoemde geesteswerkzaamheden door het huidige wiskunde-onderwijs in eene dit onderwijs rechtvaardigende mate aangekweekt worden.*

I. *Een daarop gericht W. O., steunend op een, in voor jonge kinderen levenden vorm gegeven, sterk signifisch en linguistisch getint taalonderwijs, kan de genoemde psychische faculteiten in hooge mate aankweeken.*

OVER HET ONDERWIJS IN REKENEN IN DE TWEDE KLAS VAN DE H. B. S.

Ook in de tweede klas zijn zes lessen uitgetrokken voor Wiskunde; ook nu geldt weer, dat de beste uren voor Meetkunde worden bestemd, de minst goede voor Rekenen; het meer technische vak Algebra krijgt de tweede plaats, het minst belangrijke de derde.

In September begin ik met twee uur rekenen; de mondelinge lessen loopen eerst over de evenredigheden, zooals reeds gezegd op blz. 135.

Geheel overeenkomstig de bepaling schrijven we de evenredigheden in den vorm $pa : a = pb : b$ of $a : b = pa : pb$ en niet $a : b = c : d$, waarin een der termen afhankelijk is van de andere drie, zonder dat die afhankelijkheid tot uiting komt. Waarom dan toch in vele schoolboeken de zaak weer verduisterd en het eenvoudige, het doorzichtige, het eenig goede, in enge aansluiting aan de bepaling bovendien, niet gegeven, maar weer zware kost er van gemaakt? De hoofdeigenschap $a : b = pa : b$, welnu $a \cdot pb = b \cdot pa$; af. Een liefhebber van het verouderde doet het aldus: hij

maakt $a : b = c : d$ eerst tot $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, vermenigvuldigt beide leden met

bd , dus $bd \times \frac{a}{b} = bd \times \frac{c}{d}$ en vindt dan $ad = bc$. Nog erger wordt

het met de eigenschappen over sommen en verschillen, waarvan ik me de gewrongenheden nauwelijks meer herinner (er zijn genoeg schoolboeken, waarin ze voorkomen; de lezer kan ze opslaan). En het is toch zoo eenvoudig; uit $ap : a = bp : b$ volgt:

$$(ap + a) : (bp + b) = \dots$$

$$(ap + bp) : (a + b) = \dots$$

Nog nooit is het noodig geweest, dat ik zelf de tweede reden moest invullen; wat is het heele bewijs voor de kinderen anders dan de ontbinding $ap + a = a(p + 1)$ en de definitie van evenredigheid? Al die eigenschappen loopen in één les af; in druk bestaan ze maar uit één bladzijde; dat is genoeg; op de oude manier wordt het minstens driemaal zooveel, het lijkt dan alles zwaarwichtig. Laat ik verder over de bewijzen zwijgen, te veel eer aan den verouderden rommel, die toch en ondanks alles gehandhaafd blijft uit sleur, uit onkunde, uit onwil, uit gemakzucht (alsof het „inwer-

ken" eenige moeite kostte) en . . . omdat het in de meeste boeken voor kweekscholen nog zoo staat; eer op die scholen een frissche wind zal waaien en eer men daar eens enig inzicht in wiskunde zal toonen, scherpheid van formuleering en juistheid van bepalingen en bewijzen zal eischen . . . ! Aan den juisten vorm van een evenredigheid en dus het juiste begrip is nog een ander voordeel verbonden; het is zoo noodig voor de algebra en de meetkunde, dat grootheden, waarvan de verhouding gegeven is, worden uitgedrukt als kx en x of pa en qa of pb , qb en rb ; zelfs, als men de verhoudingen en evenredigheden naar den eisch heeft onderwezen, is het nog een toer, van de leerlingen gedaan te krijgen, dat ze gevraagde lijnstukken met verhouding $2 : 3$ stellen $2x$ en $3x$; als van de vierkantsvergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ gegeven is, dat de wortels zich verhouden als $p : q$, dat ze die dan ook dadelijk stellen pz en qz .¹⁾ Laten we vooral bij de meetkunde niet vergeten de

¹⁾ Als sprekend voorbeeld, hoe onvoldoend onderwijs in de grondslagen nog lang blijft nawerken en zich voortdurend blijft wreken, geef ik hier van een zeer goeden KI-candidaat de volgende oplossing van dit vraagstuk: *De vergelijking $x^3 - 7x + 6 = 0$ heeft twee wortels, die zich verhouden als $1 : 2$; los de vergelijking op.*

Stel de wortels c_1 , c_2 en c_3 , dan is $c_1 : c_2 = 1 : 2$; $c_2 = 2c_1$;

$$\left. \begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= 0 \\ c_1c_2 + c_2c_3 + c_3c_1 &= -7 \end{aligned} \right\} \text{ worden } \left\{ \begin{aligned} 3c_1 + c_3 &= 0 \\ 2c_1^2 + 3c_1c_3 &= -7 \end{aligned} \right.$$

 Eliminatie van c_3 geeft $-7c_1^2 = -7$, dus $c_1 = +1$ of $c_1 = -1$; nemen we $c_1 = -1$, dan wordt ook c_2 negatief, en c_3 positief, dus het product positief; dat gaat niet, want $c_1c_2c_3 = -6$; dus is $c_1 = 1$, $c_2 = 2$ en $c_3 = -3$.

Deze oplossing is goed, maar als hem goed geleerd was, dat grootheden, die zich verhouden als $1 : 2$ moeten worden gesteld z en $2z$ en als het begrip wortel hem goed was bijgebracht, dan zou hij deze oplossing hebben geleverd:

Stel de wortels z en $2z$, dan is

$$\begin{array}{l|l} z^3 - 7z + 6 = 0 & 8 \mid 42z = 42 \\ (2z)^3 - 7(2z) + 6 = 0 & 1 \mid z = 1, 2z = 2 \end{array}$$

en de derde wortel is $-(z + 2z) = -3$.

Een ellenlange oplossing levert hij van dit vraagstuk:

De vergelijking $x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 = 0$ heeft twee wortels, die samen gelijk zijn aan 1; los deze vergelijking op, nl. door invoering van $c_1 + c_2 = 1$ in de vier symmetrische functies. Veel eenvoudiger aldus: x is een wortel, ook $1 - x$; substitutie geeft $x^4 - 7x^2 - 6x = 0$, waaraan voldoen 0 , -1 , -2 en 3 ; als $x_1 + x_2 = 1$ is, is ook $1 - x_1$

gelijkvormigheidstransformatie (vermenigvuldiging) van figuren; nu is dat voor hen, die zich houden aan $a : b = c : d$ niet zoo'n bezwaar; voor hen bestaat die theorie (zeker, omdat die de eenig juiste is) niet.

De vraagstukken over evenredigheden beperke men tot een minimum; het soort als: „gegeven $a : b = x : y$, bewijs daaruit, dat $(a^2 + b^2) : a(a-b) = (x^2 + y^2) : x(x-y)$ is”, maar liever laten loopen; ik heb er mij ook wel aan bezondigd, maar vind den tijd, daaraan besteed, vermorst; dit geldt in niet zoo sterke mate van het vraagstuk „los x op uit: $(x + 5) : (3x + 7) = (2x + 5) : (6x + 11)$ zonder de hoofdeigenschap te gebruiken”, dat alleen wel eens mondeling kan worden behandeld, omdat ongeveer alle eigenschappen der evenredigheden daarbij te pas komen. Bij de eenige paragraaf, die nog zulke oefeningen bevat, heb ik in den nieuwsten (11en druk) van het Rekenboek de opmerking gezet, dat men beter doet die stof over te slaan.

De evenredigheden, ze mogen niet meer beslaan dan vijf of zes lessen, een stuk of vier voor schriftelijk werk op de manier als in het eerste artikeltje beschreven, er tusschen door.

We komen nu aan de worteltrekking; de theorie wijst van zelf; die is zeer eenvoudig; men bestede toch vooral de noodige aandacht aan $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, als a, b en c bepaalde getallen zijn; let eens op bij de meetkunde, hoe de leerlingen bijna altijd alle getallen vermenigvuldigen en daarna de worteltrekking uitvoeren, in plaats van na de ontbinding in factoren van de factoren van het product den wortel te bepalen.

De leerlingen vinden de techniek van het worteltrekken prettig werk; ze beoefenen die gaarne en ik laat veel worteltrekkingen maken; het nut? Niet anders dan vaardigheid in het cijferen, niet te onderschatten a.u.b. De nadruk wordt gelegd op het rationaal maken van den noemer; een mooie gelegenheid om inzicht te krijgen in de bewerking, die ze in de algebra zullen leeren. Ik heb zoo dikwijls $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$ laten uitrekenen aldus: $\sqrt{5}$ in 6 decimalen nauwkeurig, $\sqrt{6}$ eveneens en daarna laten deelen. Nadat de helft van de klasse

$+1 - x_2 = 1$; aan de gegeven vergelijking voldoen dus 3 en -2 ; de rest is eenvoudig; men deele door $x^2 - x - 6$. — Hierbij komt het begrip wortel sterk tot zijn recht, terwijl de oplossing met symmetrische functies slechts cijferwerk is.

die becijferingen had afgemaakt (onderwijl rondloopen en toezien en op rekenfouten letten) werd gezegd, dat ze nu eens moesten opletten, hoe ik het deed: $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{5}{6}} = \sqrt{\frac{30}{36}} = \frac{\sqrt{30}}{6}$, ik bepaal vlug $\sqrt{30}$ en deel door 6. „Had U dat maar eerder gezegd!” Paedagogisch is het niet, om het eerst te zeggen; nadat ze er tegenaan geloopt zijn, onthouden ze het des te beter en begrijpen ze beter, waartoe die omvorming dient. Ze zien dan in, dat het rationaal maken van den noemer niet maar zoo een herleiding voor de aardigheid is, maar dat het zijn grond vindt in de besparing van werk bij de berekening; nog eenige andere worden bewerkt van het soort $\frac{4}{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$. Toch, het meeste is en blijft techniek.

Van het grootste belang is echter, dat men de vraag onder de oogen ziet, wat $\sqrt{3}$ nu wel is. „U zegt? Wat $\sqrt{3}$ is? Theorie over het irrationale getal?”

„Nu, dat weet U ook wel, dat gaat niet; maar doodzwijgen en enkel maar eenige decimalen van den wortel bepalen, dat is heelemaal niets en geeft niets en zeggen, dat een onmeetbaar getal geen geheel getal en ook geen breuk is, dat geeft ook niets. (Bipolaire coördinaten zijn geen cartesische, ook geen homogene. Zoo, dat is een nauwkeurige bepaling, nu weet je precies, wat het wel zijn! Een kawi is geen herkauwer, ook geen insect. Dank U, nu weet ik, wat een kawi is). Ik lees in een boek voor de hoofdacte (waar het gros der examinatorén voor die acte niet boven staat): „De wortel uit een geheel getal is dus of een geheel getal of kan niet volkomen juist becijferd worden. Toch kan men zich gemakkelijk een vierkant voorstellen, dat bijv. 50 dM². oppervlakte heeft: de zijde van dat vierkant heeft dus eveneens een *bepaalde* waarde, die echter niet door eenig geheel of gebroken getal kan worden voorgesteld. Met het oog hierop noemt men den vierkantswortel uit 50, kortweg $\sqrt{50}$, een *onmeetbaar* getal”.

Een bladzijde verder: „in . . . is gevonden (daar staat alleen, wat hier tusschen aanhalingsteekens is geplaatst) . . . dat de wortel uit een geheel getal of een *geheel* getal of een *onmeetbaar* getal zal zijn.” Dat is nog eens taal; wie het niet te pakken heeft, is een ezel in het kwadraat. Zooals ik het doe in Rekenboek II, iets uitvoeriger in Nieuwe School-algebra II en weer iets meer in Lagere Algebra II (mede bedoeld als handleiding voor den aankomenden leeraar),

zoo *kan* het; heel eenvoudig een idee geven van de snede van Dedekind. „Hoe durft U? Daar snappen ze niets van!” Probeer het, ik heb het zooveel jaren al gedaan en steeds met meer plezier. U zult zien, hoe zelfs de middelmatige en minderwaardige leerlingen een opflikkering vertoonen, als hun iets omtrent het wezen van $\sqrt{3}$ aan het verstand wordt gebracht. Ze voelen, dat hun een begrip wordt bijgebracht. Animo voor de techniek van de bewerkingen met wortelvormen, voor de mikroskopie van den driehoek, voor de rekenkundige reeksen naar ouden trant opwekken, dat kunt U wel laten; dat is doode stof vergeleken bij het aanbrengen van zuivere begrippen. En het gaat, ik verzeker het U; U kunt ze het begrip onmeetbaar getal met $\sqrt{3}$ als eerste kennismaking bijbrengen; later bij de logaritmen en bij π komt de 2e en 3e herkenning. Ik hoor toch een lezer nog zoo iets mompelen van: „nu begrijp ik niets van U; eenvoudige stof wilt U schrappen b.v. bij de deelbaarheid, bij de evenredigheden en het moeilijke begrip $\sqrt{3}$ aanbrengen?” Ja, dat wil ik; technische rommel zonder zin, zonder begrip, zonder toepassing (b.v. uit $a : b = c : d$ afleiden $(a^2 - ab) : (c^2 - cd) = ab : cd$; breng 9234 *t* uit het elftallig stelsel over in het zestallig) opruimen. Door jarenlange sleur in den tredmolen van het dagelijks lesgeven in dufheden zijn velen zich niet bewust, wat ze aan de jeugd misdoen, als ze hun vaardigheden leeren zonder begrip, als ze hen met een kluitje in het riet sturen — kunnen velen zelf wel anders, zooals die schrijver van het boek voor de hoofdacte, dat ik zooeven aanhaalde?

Tegen de Kerstvacantie zijn de evenredigheden en de worteltrekking behandeld; 5 à 6 voor de eerste, 6 à 7 voor de tweede; samen 13 lessen van de 24; de rest gebruiken we voor het maken van vraagstukken in den trant van die, welke in de eerste klas werden opgelost en waarbij op netheid van vorm en inhoud wordt gelet; tevens dienen deze om eenige zaken uit de eerste klas te herhalen. Na de Kerstvacantie worden de beide uren voor rekenen gesplitst; met een daarvan gaan we door met de wortelvormen uit het algebra-boek; ik behoef daarover niet veel te zeggen; men kent mijn standpunt; zoo ergens, dan is hier gelegenheid voor verstandige beperking; met één les per week in de 2e klas vanaf Kerstmis moet men er mee klaar komen; zeker $\frac{5}{6}$ daarvan wordt er door de leerlingen schriftelijk gewerkt, waarbij de taak van den leeraar bestaat in het gestadig rondgaan om toe te zien, dat er gewerkt

wordt, om te helpen, waar het noodig blijkt, en tevens om goed te keuren, wat al goed is; waardoor hij den tijd noodig voor het nazien na afloop der les belangrijk bekort.

„Nu het andere uur; wat moeten we nog doen? En hoeveel tijd rest ons nog? Op z'n hoogst hebben we nog 5 maanden, dus twintig lessen; dat is niet veel; in elk geval moeten behandeld worden de benaderde waarden en de verkorte bewerkingen en de afhankelijkheid van grootheden, zoodat er vast en zeker geen tijd is voor een 200 „practische” vraagstukken over Gezelschapsregel, Intrestrekening, Mengingrekening, Winst en Verlies, Kettingregel, Goederenhandel, Effecten, Gemiddelde vervaltijd, waarvan de meeste niets anders kunnen zijn dan een dun aftreksel van de gelijkkluidende onderwerpen uit het Handelsrekenen; het is volmaakt uitgesloten, dat die onderwerpen in een tweede klas tot hun recht kunnen komen en dan is de behandeling zoo weinig vruchtdragend, dat de leerlingen aan het eind vrijwel even wijs zijn als voor de „behandeling”.

De beide onderwerpen, door mij genoemd, nl. de benaderde waarden met de verkorte bewerkingen en de evenredige afhankelijkheid moeten om de begrippen, die er aan ten grondslag liggen, en de menigvuldige toepassing naar den eisch worden behandeld. Beide wil ik in het kort bespreken.

„Hoe groot is ons land?” Een paar weten het: 33000 km² hebben ze in de aardrijkskunde-les geleerd (vroeger leerden wij 600 gm²). „Zoo? De Zuiderzee mee? De meren mee? De Wadden? De Zeeuwsche en Zuidhollandsche wateren? De Waal en de andere rivierarmen? Bij vloed of bij eb? Jullie weet, dat scheelt me wat!” Ik heb het eerst nagekeken thuis en kom dan met de cijfers: in 1920: Oppervlakte zonder tot de gemeenten behorende water 32603 km²; water 1598 km², samen 34201 km², op 1 Jan. 1925 samen 34218 km²; maar de totale oppervlakte met Zuiderzee, Wadden, Dollard, Zeeuwsche en Zuidhollandsche stroomen 40828 km². Ze vinden dat heel interessant, maar komen nu zelf met allerlei bedenkingen, waarmee ik geen raad weet, maar dit komen we overeen: we zullen een rond getal nemen voor het land en voor het water, dus voor 1920: 32600 km² en 1600 km². Daarna noemen we andere grootheden, waarvan ze dadelijk beseffen, dat ze met den besten wil der wereld door niemand nauwkeurig kunnen worden opgegeven: de bevolking der aarde; van ons land zelfs; zelfs van de stad onzer inwoning; de lengte van de kustlijn van ons land;

de regenval in ons land; de invoer van meel; waarom men leest: de uitvoer van bloembollen voor f 30.000.000 in 1924 in zoo'n rond getal; niet waar, al was dat getal nauwkeurig te bepalen en b.v. f 29.986.372,14, dan nog zou het onzin zijn het aldus op te geven. We komen tot deze twee zaken: 1. er zijn grootheden, die door niemand nauwkeurig kunnen worden gegeven en die dus moeten worden afgerond; 2. ter wille van het zicht op getallen, die nauwkeurig bekend zijn, zal men toch dikwijls afronden. Er wordt dan gesproken over volstrekte fout en betrekkelijke fout en er worden samen vraagstukjes gemaakt van het slag: Bepaal op f 1000.— nauwkeurig: f 143.816.—; op 1 km² nauwkeurig: 462539 ha. — Daarna gaan we getallen, die in een willekeurig aantal decimalen kunnen worden berekend, op een vooraf bepaalde fout benaderen;

b.v. 3,1415926535 op $\frac{1}{10^2}$, $\frac{1}{10^4}$, $\frac{1}{10^6}$, daarna op $\frac{1}{10^3}$, enz., hierbij

vooral niet te vergeten, dat nullen op het eind van een benaderd getal beteekenis hebben. Vooral moet men ook getallen in benaderden vorm laten opschrijven, als de fout b.v. 7; 65; 380; 2200 eenheden van de laagste orde bedraagt, door eerst de beide uiterste waarden te laten opschrijven en daarna den eisch te stellen, dat het getal benaderd wordt op een halve eenheid der daarna voorkomende laagste orde; dit is een hoog noodige vooroefening voor de bewerkingen met onnauwkeurige getallen; stevig wordt behandeld en aan vele voorbeelden getoetst: *verschillen de uiterste waarden een aantal eenheden van de laagste orde, dat geschreven wordt met p cijfers, schrap dan rechts p cijfers; het cijfer op de $p+1$ ^{ste} plaats van rechts afgerekend wordt met 1 verhoogd, als dat op de p^{de} plaats 5, 6, 7, 8 of 9 is; als door deze bewerking de benadering gegeven is in 10³-tallen b.v., dan zetten we voor de laatste drie cijfers nullen.*

7,5636; f < 4 edld; verschil 8 edld; benadering 7,564;
 7,5636; f < 32 edld; verschil 64 edld; benadering 7,56;
 7,5636; f < 270 edld; verschil 540 edld; benadering 7,6;
 232886; f < 385 ; verschil 770 edld; benadering 233000.
 7
 81,2659; f < 12 edld; 265,64243; f < 2900 edld.
 3000 000000
 742786; f < 300 ; 865432603; f < 2.10⁵.

De laatste vier voorbeelden laten zien, hoe men de benadering werkelijk maakt.

De bewerkingen met onnauwkeurige getallen zijn verder eenvoudig; men wake voor overdrijving, waaronder ik versta: 1. het aangeven telkens of een benadering te groot of te klein is; 2. te veel vraagstukken. Het begrip moet worden aangebracht, opdat ze later bij de logaritmen kunnen nagaan, op welke eenheid een uitkomst nauwkeurig is; opdat ze bij metingen van proeven zich bewust zijn van de onnauwkeurigheid der resultaten.

Daar het mij niet te doen is, om de theorie hier te behandelen; zou ik met dit onderwerp kunnen eindigen. Toch zou ik nog gaarne zeggen, hoe ik b.v. de verkorte deeling behandel.

„Deel 45,26438 op 692,5143; beide getallen zijn nauwkeurig; tot in honderdsten is genoeg”. Ik loop rond en zie of ze flink werken, echter zonder naar rekenfouten te kijken. De deeling ziet er dan zóó uit:

45,26438) 693,5143 (15,32, door een der leerlingen op het bord gemaakt.

452 6438	
<u>240 87050</u>	45,26438) 693,5143 (15,32
$a \rightarrow$	<u>4526438</u>
$b \rightarrow$ 14 548600	<u>2408721</u>
13 579314	<u>2263295</u>
$c \rightarrow$ 9692860	<u>145428</u>
9052876	<u>135820</u>
<u>639984</u>	<u>9628</u>
	<u>9042</u>

„Nu moet je eens zien, hoe ik het doe”:

Het regent protesten; stikvol fouten; U schrijft maar wat op. (Met het voorbeeld er naast gaat mijn deeling heel vlug; ik zorg natuurlijk, dat de eerste cijfers in overeenstemming zijn met de deeling, die de leerling heeft gemaakt). „Ik kom er toch ook!” We beredeneeren samen, dat het er eigenlijk niets toe doet, wat vele rechts staande cijfers in den staart zijn; de rest is heelemaal niet noodig en als ik maar weet, dat het laatste aftrektal 96 of 97 of daaromtrent is, dan wordt het laatste cijfer van het quotient een 2; van b zijn dan alleen noodig de vier links staande cijfers, van a de vijf linksche, dus ook van het deeltal; we halen een verticale streep beginnende tusschen de 1 en de 4 van het deeltal en schrappen met horizontale strepen van

alle getallen in den staart de rechts daarvan staande door; ook doen we dat op mijn deeling, die dan blijkt, op een enkel cijfer na, gelijk te zijn aan de eerste deeling. „Waarom zullen we cijfers uitrekenen en opschrijven, die ter verkrijging van het quotient volmaakt onnoodig zijn? Laten we met verstand te werk gaan. Als we slechts 5 cijfers nemen van het deeltal, dan is dat genoeg, dus ook 5 van den deeler en als we dan maar niet „bijhalen”, dan wordt de deeling vanzelf goed.” De deeling wordt nu $45,264 \overline{) 693,51} \quad (15,32$

Daarna wordt een geval nagegaan, waarbij men geen cijfers bij mag halen, omdat beide, deeltal en deeler of een van beide benaderd zijn. Verder worden er wat deelingen uitgevoerd, vooral om te laten zien, welke besparing van tijd en moeite de verkorte deeling geeft.

$$\begin{array}{r} 45264 \\ \hline 24087 \\ 22632 \\ \hline 1455 \\ 1358 \\ \hline 97 \end{array}$$

Voor de behandeling van de benaderde waarden en de verkorte bewerkingen heeft men 7 à 8 lessen nodig. We komen nu aan de evenredige afhankelijkheid.

Welk belang steekt er in de behandeling? M.i. alleen dit, dat de leerling in andere vakken, in meetkunde, stereometrie, driehoeksmeting, werktuigkunde, natuurkunde, het ontstaan van formules kunnen begrijpen en formules kunnen lezen. Hoe wordt de omtrek van cirkel bepaald? Na de definitie van lengte van een cirkel bewijst men: de omtrekken van twee cirkels verhouden zich als hun stralen of anders gezegd: de omtrek O is recht-evenredig met den straal R ; daaruit volgt dan $O = cR$; nu is $c = 2\pi$, dus $O = 2\pi R$. — Het is dan echter noodig, dat de behandeling zoo zuiver mogelijk geschiedt en niet slechts rust op een paar praatjes over A en B , die laken koopen, A 12 m en B 4 m, over kapitalen en renten, over wegen en tijden, over arbeidsloonen en werktijden, die inderdaad wel aanleiding geven tot evenredigheden, maar die niet tot de formules $y = cx$ en $y = \frac{c}{x}$ leiden. Ook mag men zich niet op de volgende luchtige manier van de zaak afmaken (overgenomen uit een algebra-boek): „Twee grootheden, die zoo samenhangen, dat het n -maal zoo groot worden van de eene gepaard gaat met het n -maal zoo groot worden der andere, heeten evenredig (bedoeld is natuurlijk: recht-evenredig). Zijn die grootheden, gemeten met een

bepaalde eenheid, x en y eenheden, dan geldt de betrekking $y = mx$, waarin m de evenredigheidsfactor heet”.

Dat is de heele theorie, volgt de tweede zin uit de bepaling? Enkel uit de bepaling of moeten nog eigenschappen te hulp worden geroepen? ¹⁾ Het moet als volgt (8e druk Rekenboek II): men zegt, dat y recht-evenredig is met x , als het eenige malen zoo groot worden van x het evenveel maal zoo groot worden van y tengevolge heeft, daarna *bewijst men*, dat de betrekking tusschen y en x wordt uitgedrukt door $y = cx$; op dezelfde wijze behandel men „omgekeerd evenredig”. — Daarna kan men als toepassing eenige vraagstukken geven, hoogstens een stuk of tien. Het is ons niet te doen om die vraagstukken over koffie, werklui, thee, kapitalen, stukken linnen, suiker, treinen, wevers, aardappelen, nog minder om een garnizoen, dat op rantsoen is gesteld (zeker wegens belegering), waarvan er dan eens een 5000 man vertrekken (wat wordt er van de stakkerds?) dan weer 10000 bijkomen, zonder dat deze laatsten het in hun hoofd krijgen mondvoorraad mee te nemen; wel treurig; de eenige troost is, dat er onder die mannen ongetwijfeld een paar zijn, die als gevolg van hun rekenlessen in staat zijn uit te rekenen, wanneer voor allen tegelijk het laatste uur geslagen is; de belegeraars zijn wel slim geweest om die 10000 opeters maar in de stad te laten trekken. — De kracht van de les over afhankelijkheid van grootheden moet gezocht worden in het aanbrengen van juiste begrippen, in het opstellen van de formules en in het lezen van meer ingewikkelde, zooals ze die later ontmoeten.

En hiermee ben ik aan het eind van het tweede jaar; men kan misschien nog wat aan de rekenkundige en meetkundige reeksen doen; heel beknopt; in geen geval meer; thuis late men wat van de vraagstukken maken achter uit het boekje en ook kan men er wel een paar lessen op school voor afnemen. P. W.

¹⁾ Gisteravond op den K I-cursus: „Aan welke voorwaarden moeten m , n en p voldoen, opdat $\frac{x^m + 3x^{m-n}y^n + 3x^{m-2p}y^{2p} + y^m}{(x+y)^3}$ tot een geheel vorm kan worden herleid?” (K I 1921). Een juffrouw zegt: „dan moet de teller zijn van den vorm $x^q + y^q$ ”, q oneven”. Inderdaad, als de teller van die gedaante is, dan is hij deelbaar door den noemer en na uitwerking blijkt inderdaad de teller van dien vorm te worden. Maar zoo lichtvaardig gaat het niet! — Dit geval is volmaakt gelijksoortig aan de „afleiding” van $y = mx$, in het bedoelde boek gegeven.

MEDEDEELING.

OP de vergadering van redactie en medewerkers van het Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde, gehouden 4 Juni 1927 is besloten:

1. dat voortaan ook kunnen worden opgenomen artikelen, die van belang zijn voor het onderwijs in de Natuurkunde;
2. het Tijdschrift te herdoopen in

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN;

3. uitbreiding te geven aan den inhoud; de medewerkers hebben zich bereid verklaard een overzicht te geven van belangrijke artikelen, voorkomende in gelijksoortige buitenlandsche tijdschriften;
4. dat de Jaargang wordt geopend met een **hoogst belangrijk artikel van Dr. H. J. E. Beth**: *Eenvoudige beschouwingen uit de Meetkunde van Gauss*.

Op blz. 1 zegt de Heer Beth: „Het is mij nl. gebleken, „dat het geen zeldzaamheid is, wanneer men zich bij „de bestudeering der Niet-Euclidische Meetkunde be- „paalt tot de verovering van het inzicht in de mogelijk- „heid van zulk een meetkunde, doch van een verder „binnendringen in haar gebied afziet.”

Wie het laatste wenscht, vindt in Dr. Beth's artikel een uitstekende inleiding.

In verband met de noodzakelijke uitbreiding, moet de omvang gebracht worden op 18 vel en de prijs op f 6.— per jaar. Abonné's op Christiaan Huygens en het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde betalen f 5.—.

DE REDACTIE.

Dezer dagen verscheen:

BIJLAGE

BEHOORENDE BIJ DEN 21STEN DRUK VAN
SCHRIFTELIJKE OPGAVEN
VAN DE EINDEXAMENS DER HOOGERE
BURGERSCHOLEN VANAF 1868

DOOR

Dr. G. C. GERRITS.

LEERAAR AAN DE 1e H. B. S. MET 5-JARIGEN CURSUS
TE AMSTERDAM.

Verschenen:

SCHRIFTELIJKE EXAMENS WISKUNDE L. O.

1921—1926

MET DE UITVOERIGE EN VOLLEDIGE
UITWERKINGEN

DOOR

H. G. A. VERKAART.

Prijs f 1.40.

Dezer dagen verschijnt:

LEERBOEK DER NATUURKUNDE

BESTEMD VOOR HET MIDDELBAAR, VOORBEREIDEND EN
PROPAEDEUTISCH ONDERWIJS

door Dr. W. J. H. MOLL en Dr. H. C. BURGER.

TWEDE DEEL:

ELECTROSTATICA, MAGNETISME, STROOMENDE ELECTRICITEIT.

Prijs f 3.90 geb. f 4.50.

UITGAVE VAN P. NOORDHOFF TE GRONINGEN.

Zoo juist verscheen:

INLEIDING TOT DE LEER DER VERZAMELINGEN

DOOR

Dr. B. P. HAALMEIJER

EN

J. H. SCHOGT.

Prijs gebonden f 3.25; voor abonné's N. Tijdschr. v. Wisk.
en „Chr. Huygens” tot 1 Sept. a.s. f 2.75.

Zoo juist verscheen:

Leerboek der Geometrische Kristallografie

DOOR

Dr. P. TERPSTRA,

Privaat-docent aan de Rijks-Universiteit te Groningen.

Prijs f 8.25, gebonden f 9.00.

Verschenen:

HET REKEN-EXAMEN

voor voorbereidend gemeente-administratie, Kommies,
Rijksklerk, Politie-diploma enz.

Repetitieboek met meer dan 600 vragen van deze examens, vele
practische opmerkingen en raadgevingen, zoowel voor het schrif-
telijk als voor het mondelinge gedeelte en aanwijzingen waar de
oplossingen van vele vragen te vinden zijn.

Samengesteld door J. v. MOURIK, nagezien door P. WIJDENES.

Prijs f 1.25.

UITGAVEN VAN P. NOORDHOFF TE GRONINGEN.