BIJVOEGSEL

VAN HET NIEUW TIJDSCHRIFT
□ □ VOOR WISKUNDE □ □
GEWIJD AAN ONDERWIJSBELANGEN

ONDER LEIDING VAN

J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

MET MEDEWERKING VAN

Dr. H. J. E. BETH
DEVENTER

Dr. E. J. DIJKSTERHUIS
OISTERWIJK

Dr. B. P. HAALMEIJER
AMSTERDAM

Dr. D. J. E. SCHREK
UTRECHT

Dr. P. DE VAERE
BRUSSEL

Dr. D. P. A. VERRIJP
ARNHEM

3e JAARGANG 1926/27, Nr. 4

P. NOORDHOFF — GRONINGEN

Prijs per Jg. van 10 à 12 vel f 4.—. Voor inteekenaars op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde en Christiaan Huygens f 3.—.

Het Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde verschijnt in zes tweemaandelijksche afleveringen, samen 10 à 12 vel druks. Prijs *f* 4.— per jaargang. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6.—) of op „Christiaan Huygens" (*f* 8.—) zijn ingeteekend, betalen *f* 3.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam, Frans-van-Mierisstraat 112; Tel. 28341. Aangeteekende zendingen met bijvoeging: „Bijkantoor Van-Eeghenstraat".

Het honorarium voor geplaatste artikelen bedraagt *f* 20.— per vel.

De prijs per 25 overdrukken of gedeelten van 25 overdrukken bedraagt *f* 3,50 per vel druks *in het vel gedrukt.* Gedeelten van een vel worden als een geheel vel berekend. Worden de overdrukken buiten het vel verlangd, dan wordt voor het afzonderlijk drukken bovendien *f* 6.— per vel druks in rekening gebracht.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

INHOUD.

De redactie heeft het genoegen in deze aflevering het portret te geven van Prof. Dr. D. J. KORTEWEG; zij hoopt de portretten van al onze hoogleeraren den inteekenaars achtereenvolgens te kunnen aanbieden.

rationaal, $\acute{\rho}\eta\tau\grave{o}\varsigma$[1]) wordt opgevat, daarbij $\lambda\acute{o}\gamma o\varsigma$ genomen in den prae-Eudoxischen zin van het woord, waarin het slechts op onderling meetbare grootheden betrekking heeft, blijven we daarentegen èn met de logica der etymologie[2]) èn met de historie in harmonie en richten we ons bovendien (punt van principiëel belang in de internationale wetenschap, waarin purisme uit den booze is) naar het Europeesche spraakgebruik, waarin men de termen numeri irrationales, nombres irrationnels[3]), Irrationalzahlen, irrational numbers[4]), numeri irrazionali aantreft.

Ik heb met de laatste opmerking het gebied der terminologie betreden en zou daarop nog gaarne eenige oogenblikken willen verwijlen, omdat de lectuur van de Lessen juist hier vaker aanleiding tot opmerkingen geeft, althans wanneer men, wat toch redelijk is, op de uitdrukkingswijze van den schrijver dezelfde mate van critiek uitoefent, die zijn bewijsvoering zoo volkomen verdraagt. Vooreerst vallen dan hier en daar kleinigheden op: men kan niet nalaten, op te merken, dat uitdrukkingen als „een reëele reeks" voor „een reeks met reëele termen" (blz. 379), „het convergente deel van het kenmerk" voor „het deel van het kenmerk, dat in staat stelt, tot convergentie te besluiten" (blz. 333) wel geen aanleiding tot misverstand zullen geven, maar toch niet voldoende correct mogen heeten; dat de omschrijving van een monotoon stijgende functie als een functie, waarbij bij een grootere

---

[1]) Het woord $\acute{\rho}\eta\tau\grave{o}\varsigma$ is uit den aard der zaak ontstaan als tegenstelling tot $\check{\alpha}\rho\rho\eta\tau o\varsigma = \check{\alpha}\lambda o\gamma o\varsigma$ (niet omgekeerd!) en moet dus ook wel door ons, in tegenstelling tot *irrationaal* gevormde woord *rationaal* vertaald worden, hoewel het feitelijk *uitspreekbaar* beduidt ($\check{\alpha}\rho\rho\eta\tau o\varsigma$ beduidt *onuitspreekbaar*, d.w.z. niet door (geheele) getallen uit te drukken).

[2]) Oorspronkelijk heet weliswaar de grootheid zelve, die met de als $\acute{\rho}\eta\tau\grave{o}\varsigma$ aangenomen grootheid onderling onmeetbaar is, $\check{\alpha}\lambda o\gamma o\varsigma$ ten opzichte van deze. Het is echter volkomen gerechtvaardigd, dat men later ook de verhouding van deze grootheden (de tweede als eenheid opgevat) irrationaal is gaan noemen. Waar het op aankomt is, dat de grootheid zelve $\check{\alpha}\lambda o\gamma o\varsigma$ heette, terwijl men slechts kon zeggen, dat twee grootheden $\grave{\alpha}\sigma\acute{\upsilon}\mu\mu\epsilon\tau\rho o\iota$ waren.

Dat bij Euclides (Liber X, definitio 3) een grootheid nog als $\acute{\rho}\eta\tau\grave{o}\varsigma$ wordt beschouwd, indien ze quadratisch commensurabel is met de eenheid, doet in dit verband niet ter zake.

[3]) Men vermijde echter in onze taal het woord *irrationeele* getallen, daar irrationeel den indruk wekt, alsof er iets onredelijks aan deze getallen zou zijn. De dubbelzinnigheid van de woorden $\lambda\acute{o}\gamma o\varsigma$ en ratio (ze beduiden beide o.a. zoowel *rede* als *reden* = verhouding) kan zoo nog tegenwoordig gevoeld worden.

Men spreekt in het Fransch wel van *nombres incommensurables;* dit heeft echter op ons *onmeetbaar* voor, dat het *com* er altijd nog inzit.

[4]) Dat de Engelschen ook van *surds* spreken, doet hier niet ter zake.

waarde van x een grootere waarde van $f(x)$ hoort, nogal slordig is en dat men, als omschrijving van een conforme afbeelding, toch eigenlijk niet kan zeggen, dat de correspondeerende figuren des te nauwkeuriger gelijkvormig zijn, naarmate ze kleiner zijn (blz. 178), omdat er geen graden van gelijkvormigheid bestaan. Zoo bevreemdt de langzamerhand onuitroeibaar lijkende taalfout: „laten c en d reëele varianten zijn" (blz. 3), een germanisme als: „begrippen, die zich dekken" (blz. 380).

Intusschen, dit zijn, zooals gezegd, kleinigheden. Belangrijker lijkt mij een terminologisch bezwaar, dat men, als ik goed zie, zou kunnen inbrengen tegen de zeer fundamenteele definitie van oneindige reeks in het begin van de vijfde Les en waarover ik tot slot iets wil zeggen.

Het begin van de vijfde Les luidt als volgt:

„Uit de variant u_n (of $u_1, u_2, u_3, \ldots$) kan men de variant

$$U_n = u_1 + u_2 \ldots . + u_n$$

„afleiden. Heeft U_n een limiet U voor $n = \infty$. dan wordt dit aldus „geschreven:

$$u_1 + u_2 + u_3 \ldots . = U \tag{157}$$

„of ook:

$$\sum_1^{\infty} u_n = U. \tag{158}$$

De uitdrukking in het eerste lid van (157) of (158) wordt een „*oneindige reeks* genoemd en u_n de *algemeene term der reeks.* Deze „benamingen worden ook gebruikt in het geval, dat U geen limiet „bezit; de uitdrukking $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ heeft dan echter verder „geen beteekenis.

„Al naar gelang de variant U_n convergeert of divergeert, dus al naar „gelang er al of niet een getal U bestaat, waarvoor geldt:

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} U_n = U$$

„wordt de reeks

$$u_1 + u_2 + u_3 \ldots .$$

„convergent of divergent genoemd. In geval van convergentie wordt „het getal U van (159) de *som der oneindige reeks* genoemd."

In deze passage valt nu vooreerst de uitdrukking op: „dan wordt *dit* aldus geschreven". Hierin kan „*dit*" toch wel niets anders beteekenen dan: „het feit, dat U_n een limiet heeft voor $n = \infty$". Het symbool $u_1 + u_2 + u_3 \ldots$ beteekent dus blijkbaar: men heeft de variant $U_n = u_1 + u_2 + u_3 \ldots + u_n$ gevormd en deze variant blijkt tot de limiet U te naderen. Of nog anders: $u_1 + u_2 + u_3 \ldots$ is een symbool voor de oneindige getallenrij

$$U_1,\ U_2,\ U_3,\ \ldots .$$

welker limiet U is [1]).

Indien dit de bedoeling is, moet dus U de limiet heeten van de variant U_n, dus van de getallenrij $U_1, U_2, U_3 \ldots$, die symbolisch door

[1]) De hier geschetste opvatting ontmoet men in het werk: K. Knopp, *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen* (2e Aufl. Springer 1924, blz. 98).

$u_1 + u_2 + u_3 \ldots$, wordt voorgesteld, maar dan kan U nooit de som van de reeks $u_1 + u_2 + u_3 \ldots$, heeten. Dit toch zou insluiten, dat de *limiet* van een variant voortaan de *som* van die variant zou genoemd worden. Zelfs mag men niet schrijven:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots = U,$$

want dit zou beteekenen

$$U_1,\ U_2,\ U_3,\ \ldots = U$$

en men schrijft toch ook niet

$$1,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{8} \ldots\ldots = 0$$

om aan te duiden

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

Men kan natuurlijk de schrijfwijze

$$u_1 + u_2 + u_3 \ldots\ldots = U$$

wel motiveeren, door

$$u_1 + u_2 + u_3 \ldots\ldots$$

te beschouwen als een symbool voor

$$\lim_{n\to\infty} U_n$$

maar het lijkt me niet aannemelijk, dat de schrijver dit zou bedoelen. In dat geval toch had hij in den boven aangehaalden zin moeten schrijven: „dan wordt *deze* (namelijk de limiet) aldus geschreven."

Bovendien rijzen, als men de zaak zoo opvat, andere moeilijkheden. Immers, als

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots$$

beteekent

$$\lim_{n\to\infty} U_n$$

dan zijn U en $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ twee verschillende schrijfwijzen voor een zelfde getal en dan rijst de vraag, wat het verschil is tusschen een oneindige reeks en haar som, daar toch $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$, een oneindige reeks heet en U haar som. In het eindige gebied heeft men die moeilijkheid niet: is

$$U = u_1 + u_2 \ldots\ldots u_n,$$

dan duidt het tweede lid aan, dat zekere bewerkingen moeten worden verricht en het eerste lid geeft het resultaat dier bewerkingen aan. De beide leden staan nu in de relatie der gelijkheid. Anders echter, bij de boven bedoelde opvatting, bij

$$u_1 + u_2 + u_2 + \ldots\ldots = U.$$

Het 1e lid, dat zonder afspraak niets beteekent, is gedefinieerd als $\lim\limits_{n\to\infty} U_n$ en het 2e lid ook. De beide leden staan nu in de relatie der identiteit.

Niet duidelijk is verder in de boven aangehaalde passage de zin: „heeft dan verder geen beteekenis". Wat is dan, als er geen limiet U

bestaat, de beteekenis van $u_1 + u_2 + u_3 \ldots$, voordat we aan een verdere beteekenis toe zijn? De naam „oneindige reeks", gegeven aan een voorloopig zinledige uitdrukking, kan toch nog geen beteekenis heeten.

Nu is allicht de bedoeling deze: het symbool

$$u_1 + u_2 + u_3 \ldots.$$

duidt aan, dat men in ieder geval de variant

$$U_1, U_2, U_3, \ldots.$$

moet vormen, onverschillig of deze al dan niet convergent is. Deze bedoeling zou passen bij de eerste der boven onderscheiden opvattingen. In dat geval was het echter minder gewenscht, het symbool

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots.$$

in te voeren, uitsluitend voor het geval, dat U wel bestaat. Nu blijft het duister, of het voor een divergente reeks nu eigenlijk iets beteekent of niets.

Hoe dit alles zij, het lijkt nog om een andere reden minder gewenscht, om, zooals tegenwoordig vrijwel overal gebruikelijk is, een oneindige reeks te beschouwen als een uitdrukking

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots.$$

en haar te onderscheiden van een rij (variant, Zahlenfolge, sequence):

$$u_1, u_2, u_3 \ldots.$$

Tenminste, als men wil blijven spreken van de *som* van een oneindige reeks, inplaats van van haar *limiet*. Liefst toch moeten in de afspraken voor het oneindige gebied die voor het eindige als bijzondere gevallen besloten liggen. Welnu, in het eindige vindt men algemeen reeksen gedefinieerd als rijen van getallen, die volgens een bepaalde wet gevormd zijn, dus als

$$a_1, a_2, a_3, \ldots. a_n$$

niet als

$$a_1 + a_2 + a_3 \ldots. + a_n.$$

Men kan niet zeggen: bepaal de som van

$$a_1 + a_2 \ldots. + a_n;$$

wel: bepaal de som van

$$a_1, a_2, a_3, \ldots. a_n,$$

of: bepaal:

$$a_1 + a_2 + a_3 \ldots. + a_n.$$

Dit in het oog houdend, zou men echter in het oneindige gebied ook niet moeten spreken van de som der reeks

$$u_1 + u_2 + u_3 \ldots.$$

of vragen, een zoo geschreven reeks te sommeeren.

Het is ook niet duidelijk, waarom het woord reeks (Reihe, series) eigenlijk zou moeten worden vastgekoppeld aan de bewerking optellen [1]). Men kan toch met een oneindige getallenrij zooveel andere dingen doen, dan er door optelling van n termen een variant uit vormen, b.v. er een z.g. oneindig product [2]) van maken of een oneindige kettingbreuk.

Tenslotte moge worden opgemerkt, dat wellicht een meer eenvoudige en meer logische terminologie te verkrijgen ware, door een consequenter gebruik van het woord variant te maken. Men versta daartoe onder een reeks of rij van getallen een oneindige getallenrij

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots.$$

bepaald door een voorschrift, dat in staat stelt, aan elk natuurlijk getal n een grootheid u toe te kennen. Bij de zoo gedefinieerde variant u hoort een somvariant

$$U_n = u_1 + u_2 \ldots . u_n.$$

De variant heet sommeerbaar, als de somvariant convergeert. De limiet van de somvariant heet de som van de variant (of de reeks).

Ook kan men een productvariant vormen:

$$P_n = u_1 \,.\, u_2 \,.\, u_3 \ldots . u_n.$$

Heeft deze productvariant een limiet, dan heet deze het product van de variant.

Ik geef deze opmerkingen voor wat ze waard zijn. In ieder geval lijken mij quaesties als de hier aangeroerde van voldoend belang, om ze uitvoerig te bespreken. Het streven naar het exacte bewijs kan op den duur niet bestaan zonder een nooit aflatend onderzoek, of de uitdrukkingswijze wel volkomen correct is.

E. J. Dijksterhuis.

Dr. *F. Schuh,* Beknopte Hoogere Algebra. Deel 12 van Noordhoff's verzameling van wiskundige werken. P. Noordhoff, 1926, Groningen, geb. *f* 15.—, voor int. op het N. T. v. W. en Chr. Huygens *f* 14.—.

Dit werk is een beknopte uitgave van het grootere, dat we boven bespraken; het sluit zoo nauw mogelijk aan bij de studie voor de acte Wiskunde KI, bevat verder verschillende onderwerpen, die bij de studie voor de acte KV van belang kunnen zijn en is ook bruikbaar voor hen, die zich op het propaedeutisch examen aan de Technische Hoogeschool voorbereiden. De schrijver machtigt de laatste categorie, de strengere bewijzen geheel over te slaan; ik zou hun, met het oog op hun latere onderwijsbevoegdheid, willen aanraden, het niet te doen.

---

[1]) In het woord *reeks* zit toch eigenlijk niets, waardoor het van *rij* kan worden onderscheiden.

[2]) Het woord „oneindig product" is natuurlijk zeer ondoeltreffend. Als het oneindige product wil bestaan, moet het eindig zijn en als het oneindig is, bestaat het niet. De consequentie zou eischen, dat men een reeks een oneindige som noemde.

Uit den aard der zaak valt over de beknopte uitgave niet meer te zeggen dan over de groote. De schrijver veroorlove mij echter nog één opmerking, die bij de bespreking van het derde deel der Lessen geen plaats kon vinden. Is het wel logisch, in het begin van Hoofdstuk VI een n^e machtsvergelijking te definieeren als een vergelijking van den vorm

$$A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots A_{n-1}x + A_n = 0$$

en daarna te zeggen, dat het eerste lid dezer vergelijking, dat ter afkorting door $f(x)$ zal worden voorgesteld, een geheele rationale functie van x heet? Is niet de functie het primaire en ontstaat de vergelijking niet eerst, wannneer men bij de studie van de functie de vraag stelt, of de functie een voorgeschreven waarde kan aannemen? Die vraag pleegt men in de wiskunde in den zonderlingen en voor beginnelingen eeuwig verwarrenden vorm

$$f(x) = 0$$

te schrijven, alsof het een bewering was, inplaats van een vraag. Deze verwarring kan, vrees ik, door definities als de bovenstaande slechts worden verergerd.

E. J. Dijksterhuis.

Prof. Dr. *Hk. de Vries. Die vierte Dimension.* Eine Einführung in das vergleichende Studium der verschiedenen Geometrien. Nach der zweiten holländischen Ausgabe ins Deutsche übersetzt von Frau Dr. R. Struik. Mit 35 Fig. im Text, 1927. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner.

Dr. *F. Schuh,* Het getalbegrip, in het bijzonder het onmeetbare getal. Groningen, P. Noordhoff, 1927. Prijs geb. *f* 7.50. Voor int. op het N. T. v. Wiskunde en Chr. Huygens *f* 6.—.

Door de verschijning van dit boek is de Nederlandsche wiskundige litteratuur weer een zeer belangrijk werk rijker geworden; waarmede ik niet zeggen wil, dat dit boek geen recht heeft op belangstelling buiten onze landsgrenzen, want een werk, dat de theorie van het reëele getal zoo van alle kanten bekijkt, bestaat voorzoover ik weet in het buitenland niet. Elke inleiding tot de Analyse begint met een overzicht van de eigenschappen der reëele getallen, maar deze korte en vaak wat vluchtige overzichten waren tot nog toe vrijwel het eenige waarover men beschikte.

De schrijver begint met eenige algemeene beschouwingen over getallen en over de gemeenschappelijke eigenaardigheden der achtereenvolgens tot stand komende uitbreidingen van het getalbegrip, wat het overzicht zeer vergemakkelijkt. Vervolgens behandelt hij ter wille van de volledigheid in het kort de elders uitvoeriger besproken invoering van het getal nul, de negatieve en de gebroken getallen, om daarna te komen tot het eigenlijke onderwerp: de invoering der onmeetbare getallen. Achtereenvolgens worden behandeld de theorieën van Cantor, Dedekind, Baudet en Weierstrasz. Daarna worden toepassingen van de theorie der reëele getallen op de differentiaalrekening en op goniometrische en cyclometrische functies behandeld, terwijl als slot eene hoogst interessante vergelijkende beschouwing der behandelde theorieën wordt geleverd.

Het boek bevat 457 „vraagstukken". Deze zijn voor een groot deel directe toepassingen en aanvullingen van de theorie; het nawerken ervan (want zij zijn gedeeltelijk uitgewerkt) kan het inzicht in de theorie zoowel verbeteren als vergemakkelijken.

Het is overbodig, iets te zeggen over de wijze, waarop Prof. Schuh de taak, die hij zich gesteld had, heeft volbracht. Het komt mij voor, dat dit boek voor studeerenden, die werkelijk wiskunde leeren, onontbeerlijk is en voor velen, die de studiejaren al achter den rug hebben, nog van groot nut kan zijn. J. H. S.

Dr. *F. Schuh,* Supplement 1926 op het tweede deel van de vraagstukken over Differentiaal- en integraalrekening en over analytische en beschrijvende meetkunde. Groningen, P. Noordhoff, 1927. Prijs *f* 0.75.

Zie de bespreking in jaargang II, bladzijde 178.

P. Wijdenes en Dr. *D. de Lange,* Leerboek der Algebra, deel I, 9e druk, 1926. Gec. *f* 1.90.

Rekenboek voor de H. B. S.. Deel I 11e druk, 1927 met 16 fig., gec. *f* 1.70

Rekenboek voor de H. B. S. Deel II, 8e druk 1927 met 5 fig., gec. *f* 1.70.

J. Versluys—P. Wijdenes, Beschrijvende Meetkunde I, 10e druk, 1927, gec. *f* 2.25.

Een boek, dat ten volle de aandacht verdient van docenten.

J. H. S.

Prof. Dr. Hk. de Vries—P. Wijdenes, Leerboek der Beschrijvende Meetkunde I, 5e druk, 1927, van Van Pesch—Wijdenes, geb. *f* 3.60.

Uitgaven van P. Noordhoff, Groningen.

ANTWOORD OP „EENIGE OPMERKINGEN" VAN DR. B. P. HAALMEIJER.

De opmerkingen van den heer Haalmeijer in de vorige aflevering van dit tijdschrift geven ons aanleiding tot het volgende antwoord:

Naar aanleiding van de passage: „zij (de Commissie) acht het aanbrengen van fundamenteele theoretische inzichten belangrijker dan het ontwikkelen van technische vaardigheid", merkt de schrijver op, dat hij geen kans ziet aan de uitdrukking „fundamenteele theoretische inzichten" een beteekenis te geven, die het plan voor hem uitvoerbaar maakt. Hij motiveert dit, door te vragen, of men het werkelijk mogelijk acht, de fundamenten van een wetenschap op een middelbare school te onderwijzen, voordat jarenlange gedegen arbeid een betrekkelijk breede kennis heeft gegeven en zoolang geen rijp oordeel een diepere kennis mogelijk maakt.

Het lijkt ons toe, dat de schrijver hier de dwaling begaat, de fundamenten, waarop vormend onderwijs moet bouwen, te verwarren met de grondslagen, waarop de wetenschap bij kritisch onderzoek blijkt te steunen. De laatste zijn het, welker bestudeering de aanwezigheid van een zekere mate van kennis van die wetenschap en een rijper oordeel vereischt; de eerste zijn echter noodig, om die kennis, die niet op niets kan rusten, aan te brengen en dat oordeel, dat niet uit zich zelven groeit, te ontwikkelen.

Wij meenden nu, dat het bij het schrijven van een ontwerp-leerplan voor de H. B. Scholen overbodig was, uitdrukkelijk te vermelden, dat wij het woord fundamenteel bedoelden in de eerste der boven onderscheiden beteekenissen. De vergissing van den heer Haalmeijer geeft ons thans aanleiding te constateeren, dat wij inderdaad niet van plan waren, op de H.B.S. onderwerpen te doceeren, waarvoor een in jarenlange gedegen arbeid verworven betrekkelijk breede kennis, alsmede een rijper oordeel aan de zijde van den leerling, wordt vereischt en bovendien nog eens aan enkele voorbeelden onze bedoeling toe te lichten.

Wanneer in de meetkunde de verhouding van twee lijnstukken aan de orde komt, is het veelal gebruikelijk, het geval, dat deze twee lijnstukken geen gemeene maat hebben, òf in het geheel niet te vermelden, òf slechts vluchtig te bespreken. Deze handelwijze stoort de ontwikkeling der technische vaardigheid niet in het minst en ze verkleint het practische nut der wiskunde geenszins. Wij achten het nu echter principiëel verkeerd, zoo te werk te gaan. De docent zal, naar onze meening, aan de moeilijkheid, die het bestaan van onderling onmeetbare lijnstukken met zich medebrengt, alle aandacht moeten wijden; hij zal, hoewel het hem op dit oogenblik nog niet mogelijk is, zijn leerlingen het exacte begrip van de verhouding van twee zulke lijnstukken bij te brengen, toch door insluiting van die verhouding tusschen twee rationale grenzen zoover moeten gaan op den weg der strengheid, als in dit stadium mogelijk is en hij zal, in afwachting van een diepergaande behandeling van dit onderwerp in klasse IV telkens weer (b.v. bij de behandeling van de verhouding van de oppervlakken van twee rechthoeken) de aandacht der leerlingen er op moeten vestigen, dat zij nog niet weten, wat men nu eigenlijk precies onder de verhouding van twee onderling onmeetbare grootheden verstaat. Uit den aard der zaak zal in het algebraonderwijs bij het optreden der irrationale getallen op dezelfde wijze te werk moeten worden gegaan.

Deze handelwijze achten wij een voorbeeld van ontwikkeling van een *fundamenteel theoretisch inzicht* en we zien niet, welke bezwaren de heer Haalmeijer tegen deze spreekwijze kan aanvoeren.

Een tweede voorbeeld uit vele ontleenen wij aan het algebraonderwijs. Het is niet ongebruikelijk, dat bij de oplossing van twee vergelijkingen van den eersten graad met twee onbekenden geenerlei aandacht wordt geschonken aan de gevallen, dat die vergelijkingen onderling afhankelijk of onderling strijdig zijn, maar dat men volstaat, met de methode der oplossing te onderwijzen voor het geval, dat de twee vergelijkingen een enkel stel oplossingen toelaten. Dit kan, opnieuw, zonder schade voor de technische vaardigheid en het practische nut der wiskunde geschieden. Wij achten dit, opnieuw, verkeerd en wij zouden willen aanbevelen, dat aan de voor de geheele theorie der vergelijkingen *fundamenteele theoretische* vraag naar de mogelijkheid van onderlinge afhankelijkheid of onderlinge strijdigheid de noodige aandacht werd gegeven.

Wij noemen als derde voorbeeld (men verontschuldige de uitvoerigheid, waartoe de heer Haalmeijer ons dwingt) de behandeling der complexe getallen. Het practische nut en de ontwikkeling der technische vaardigheid zijn hier weer voldoende gebaat door het maken der afspraak $i^2 = -1$ en men hoeft er zelfs niet eens over te spreken, of voor de complexe getallen nu wel dezelfde rekenregels gelden als voor de reëele. Het onderwijs, zooals wij ons dat denken, zal echter juist deze vraag in het middelpunt der belangstelling plaatsen; het zal, zooals het reeds voor negatieve, gebroken en irrationale getallen gedaan heeft, nauwkeurig bewijzen, dat de grondeigenschappen der optelling en der vermenigvuldiging ook hier onveranderd doorgaan; het zal bovendien door de meetkundige voorstelling der complexe getallen het inzicht in haar wezen trachten te verdiepen en wanneer het dan b.v. heeft laten zien, hoe in het meetkundige beeld vermenigvuldiging met een complexen factor identiek is met een gelijkvormigheidstransformatie, zal het zich vleien met de hoop, dat hiermee een *fundamenteel theoretisch inzicht* is gewekt, dat grootere vormende waarde heeft, dan een vergaande ontwikkeling van de techniek van het rekenen met complexe getallen.

Moeten we nog verder gaan? Is het noodig, nog te wijzen op de mogelijkheid, die de vergelijking van de eigenschappen van den boldriehoek (drievlakshoek) en die van den vlakken driehoek biedt, om het *fundamenteele theoretische* inzicht te wekken, dat het boloppervlak een eigen meetkunde heeft, welker eigenschappen afwijken van die van het platte vlak? Moeten wij nog de mechanica te hulp roepen, om daaraan het verschil te demonstreeren tusschen een op het practische gerichte en tot vaardigheid in het oplossen van vraagstukken voerende methode en het streven naar zooveel mogelijk exacte definities en behandeling der kinematische en dynamische grondbegrippen en moeten we opnieuw ons goed recht bepleiten, om in dit verband de uitdrukking *fundamenteele theoretische inzichten* te gebruiken, waaraan de heer Haalmeijer geen beteekenis kan hechten, die het plan voor hem uitvoerbaar maakt?

Wij komen thans tot een tweede bezwaar, dat de heer

Haalmeijer tegen ons betoog heeft. Hoe zit het, vraagt hij, worden de leerlingen door de eischen bepaald of omgekeerd?

Het antwoord op deze vraag kan kort zijn: zoolang de eischen constant blijven, bepalen zij het peil, waarop de leerlingen moeten staan, om het onderwijs te kunnen volgen. Wanneer men echter eens een enkelen keer verandering der eischen overweegt, haalt men zich een beeld van wat men een normaal begaafden leerling noemt voor den geest en vraagt men zich af, wat men van hem kan eischen. Dan bepalen de leerlingen dus tot op zekere hoogte de eischen.

De logische ontwikkeling van het getalbegrip in klasse I draagt geen definitief karakter (zie het algebra-programma voor klasse IV) en kan dus aangepast worden aan het bevattingsvermogen van jeugdige leerlingen. De overtuiging, dat zij dan mogelijk is, put een deel der Commissie uit persoonlijke ervaring. Het doel is, reeds in klasse I te beginnen met een bestrijding van machinaal en gedachteloos rekenen en er den nadruk op te leggen, dat elke bewerking op een in woorden formuleerbare eigenschap steunt. Een voorloopige behandeling van de repeteerende breuken is met het beginsel, waarop het voorstel steunt, niet in strijd. Men kan dit onderwerp behandelen met behulp van het begrip voortbrengende breuk en er dan een aanleiding in vinden tot een eerste voorzichtige nadering van het limietbegrip.

Wij gaan thans over tot wat ons de kern van 's heeren Haalmeijers betoog lijkt, zijn overtuiging namelijk, dat het strenge, abstracte limietbegrip voor de H.B.S. te moeilijk is en zijn daaruit logisch voortvloeiende bezwaren tegen ons voorstel tot behandeling van de beginselen van de Infinitesimaalrekening. Ter voorkoming van misverstand zij hier allereerst aangegeven, wat wij onder een strenge formuleering van het limietbegrip, zooals wij haar voor behandeling in de vierde klasse eener H.B.S. vatbaar achten, verstaan. Wij beweren dan, dat de definitie:

Een grootheid $f(x)$ nadert tot de limiet A voor $x \longrightarrow c$, wanneer bij elk willekeurig voorgeschreven getal δ een getal ε te vinden is, zoodat voor $|x - c| < \varepsilon$

$$|f(x) - A| < \delta$$

aan het algebra- en mechanica-onderwijs in klasse IV ten grondslag kan en moet worden gelegd. [1])

Wij beweren de mogelijkheid hiervan op grond van de ervaring, door sommigen onzer op dit gebied opgedaan en we steunen die bewering nog met den waarschijnlijkheidsgrond, dat er tegenwoordig leerboeken bestaan, waarin de definitie van limiet in deze formuleering of een daarmee gelijkwaardige voorkomt en die op verschillende scholen gebruikt worden, zoodat onze meening blijkbaar door vele collega's wordt gedeeld. De noodzakelijkheid echter van deze behandelingswijze betoogen wij op grond van de overtuiging, dat men slechts een gevaarlijk schijnweten schept, wanneer men den leerlingen toestaat, zich van de vage of onjuiste termen „naderen tot", „oneindig dicht bij", „steeds dichter" enz. te bedienen, zonder dat ze in staat zijn, exact de juiste bedoeling daarvan te omschrijven.

Beschouwen wij, om bij een eenvoudig voorbeeld te blijven, het geval, dat het argument x der functie de rij der natuurlijke getallen doorloopt: men heeft b.v. voor de meetkundige reeks met een positieve reden, kleiner dan 1, de formule voor de som van n termen afgeleid:

$$S_n = a\,\frac{1 - r^n}{1 - r}$$

en heeft daarna het vermoeden gewekt, dat deze uitdrukking tot de limiet $\frac{a}{1 - r}$ zal naderen, als n tot oneindig nadert. Wanneer men nu exact gaat omschrijven, wat dit beteekent, wanneer men het verschil $\frac{ar^n}{1 - r}$ vormt, een klein getal δ voorschrijft en de vraag stelt, hoe groot men n minstens moet nemen, om $\frac{ar^n}{1 - r} < \delta$ te maken, wanneer men in het bijzonder naast de algemeene theoretische behandeling dezer vraag aan concrete voorbeelden van convergente meetkundige reeksen met behulp van een logarithmentafel de grens voor n uit de gegevens a, r en δ laat berekenen, waar wordt dan een onredelijk beroep gedaan op inzicht of abstractievermogen van den leerling? Op welke moeilijkheid in deze rede-

---

[1]) Deze definitie moet natuurlijk gewijzigd worden gedacht voor het geval $x \longrightarrow \infty$.

neering baseert de heer Haalmeijer zijn vaste overtuiging, dat onze huidige schoolbevolking dezen betoogtrant niet zou kunnen verwerken?

En wanneer hij niet op de boven omschreven manier te werk wil gaan, hoe wil hij het dan wel doen? Hij zal toch wel niet willen zeggen, dat r^n natuurlijk heel klein wordt, als n heel groot wordt en dus nul, als n oneindig wordt?

Na het boven opgemerkte kunnen wij de bezwaren van den heer Haalmeijer tegen onze voorstellen inzake de Differentiaalrekening ook niet zoo heel gegrond noemen. Wij laten, om dit toe te lichten, hieronder een verduidelijking van onze bedoeling volgen.

Wanneer in de mechanica de gemiddelde snelheid van een door $s = f(t)$ bepaalde beweging gedurende den tijd van t tot $t + \Delta t$ is bepaald als

$$\frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

kan men zeggen, dat men, *indien* deze uitdrukking tot een limiet nadert, als Δt nadert tot 0, die limiet de snelheid ten tijde t noemt. Wat dit zeggen wil, moet, zooals we boven betoogden, duidelijk gemaakt kunnen worden. De vraag echter, òf de limiet bestaat, kan men des te onbekommerder buiten beschouwing laten, omdat men in de concrete gevallen, waarvoor men formules afleidt, het bestaan van de limiet bewijst. Nadat zoo langs kinematischen weg het begrip van een differentiaalquotient gewekt is, kan men in het s—t diagram de snelheid als tangens van den hoek van de raaklijn met de t—as leeren terugvinden en dan in het algemeen; verband leggend met de in klasse III reeds voor het bijzondere geval van een cirkel behandelde definitie van raaklijn van een kromme lijn, over de meetkundige illustratie van differentiaalquotient als richtingscoëfficient van de raaklijn eener kromme spreken, dit weer toelichtende b.v. aan de grafieken der goniometrische functies.

Waar nu de tegenstrijdigheden zitten, die de heer Haalmeijer ook hierin weer voelt, ontgaat ons. „Wel wordt aanbevolen", zegt hij, „het begrip differentiaalquotient langs geometrischen en kinematischen weg in te voeren, *maar* het leerplan voor klasse III bevat het limietbegrip als onderwerp en bij de stof voor klasse IV leest men: „continuïteit" ". Hierin zit niets vreemds: men voert het begrip differentiaalquotient langs kinematischen en geometrischen weg in en formuleert het streng met behulp van het limietbegrip.

Het lijkt ons zeer wel mogelijk, op dezelfde wijze het begrip continuïteit ook te behandelen. Echter hebben wij bij een herziening van ons ontwerp met het oog op de in verband met den beschikbaren tijd geuite bezwaren, het wenschelijk geacht, dit onderwerp, evenals enkele andere, te schrappen.

De Commissie:

H. J. E. Beth, *Voorzitter.*
J. van Andel.
P. Cramer.
E. J. Dijksterhuis, *Secretaris.*

NASCHRIFT VAN DEN VOORZITTER.

Nu ook, na den heer Vollewens, de heer Haalmeijer (pag. 88) wijst op het feit, dat mijne zienswijze op het punt van invoering van de beginselen der differentiaalrekening wijziging heeft ondergaan, meen ik niet langer te mogen zwijgen. Ik vond het jammer (hoewel begrijpelijk), dat de eerstgenoemde, door mijne uitlating op het Congres te Utrecht aan te halen, een persoonlijk element in de discussie bracht, omdat ik geloof, dat daardoor in het algemeen de juiste behandeling eener aangelegenheid niet bevorderd wordt. Daarom ook meende ik, dat het het meest practisch was, tot de opmerking van den heer Vollewens het zwijgen te doen, en niet door het schrijven van een toelichting nogmaals op het bewuste punt de aandacht te vestigen. Ik zweeg te liever, waar het altijd een gevoel van onbehagelijkheid geeft, indien men genoodzaakt is in den eersten persoon enkelvoud te schrijven, zelfs indien men, zooals hier het geval is, zich daarbij tot eigen tekortkomingen kan bepalen. Thans verbreek ik het stilzwijgen, vooreerst, omdat ik mij niet gaarne aan de onbeleefdheid zou schuldig maken, den heer Haalmeijer, die zijn opmerking door een vraag doet volgen, een antwoord te onthouden. Maar ook, omdat het zijn nut kan hebben, hier persoonlijke ervaringen mede te deelen, hoe weinig belangwekkend die overigens mogen zijn, en aldus te wijzen op — en te waarschuwen voor — een dwaling, van welke ik vermoedelijk niet alléén het slachtoffer geweest ben. Tevens heb ik gelegenheid te doen zien, dat de verandering van meening (die ik overigens zonder den geringsten schroom toegeef) niet zóó groot is als zij op het eerste gezicht wel moet lijken.

Ik begin met de opmerking, dat ik reeds in de eerste jaren van mijn werkzaamheid bij het onderwijs de stellige overtuiging bezat, dat het karakter van onze school eischt een strenge behandeling van de kinematische en de dynamische grondbegrippen; waar ik hier slechts een naschrift bij het antwoord der Commissie schrijf, zal het overbodig zijn, te zeggen, dat het woord „streng" ook hier niet in letterlijken zin moet worden genomen, maar dat zijn beteekenis aan het in dat antwoord medegedeelde is te ontleenen. Eene behoorlijke behandeling der kinematische grondbegrippen nu *eischt*, zoover ik toen zag en nog steeds zien kan, gebruikmaking van het limietbegrip. De heer Haalmeijer ontkent of twijfelt aan de mogelijkheid van het bijbrengen van het „strenge" limietbegrip, op grond van persoonlijke ervaring. Deze ervaring is met mijne eigene niet in overeenstemming; ik heb na de eerste jaren nooit behoeven vast te stellen, dat ik, althans op *dit* punt, blijkens de resultaten (ik behoef immers niet te zeggen, dat ik hiermede geen examen-„resultaten" op het oog heb?) mijn doel zóó ver had gemist. Aan de gebruikmaking van het limietbegrip liet en laat ik steeds voorafgaan een herhaling van de onderwerpen, bij welke de leerlingen reeds vroeger met dat begrip hadden kennis gemaakt of hadden kunnen kennis maken. Dat ik bij de behandeling van de genoemde begrippen heel wat van hen eischte en nog telken jare opnieuw eisch, is voor mij niet verborgen gebleven. Dat ik daarbij té veel eisch, kan ik nog steeds niet toegeven. Herbart heeft gezegd: „Den Hauptvorteil beim Unterrichten glaube ich nicht in einer künstlich erleichterten, die Schwierigkeiten umgehenden Lehrart zu finden, das bildet kein rechtes Nachdenken und keine kräftigen Menschen"; en ik twijfel geen oogenblik, of ook Dr. Haalmeijer is dat met hem eens.

In de boven aangegeven behandeling der kinematische grondbegrippen was echter iets, dat mij nimmer bevredigde. Het begrip „afgeleide" [1]) is geen kinematisch begrip; de kinematica is slechts één der vele gebieden, waar dat begrip toepassing vindt. Daarom scheen mij de gebruikelijke invoering ervan onlogisch, en heb ik op verschillende wijzen naar een meer bevredigende behandeling gestreefd. Zoo heb ik wel eens getracht het begrip „afgeleide" vooraf meer in het algemeen te behandelen, om daarna het verkregen inzicht op de kinematica toe te passen. Ook heb ik wel gepoogd tot het algemeenere begrip op te klimmen nà de kinematische behandeling. Het zijn deze en soortgelijke pogingen, van wier mislukking ik in de bedoelde vergadering bij de discussie gemeend heb in enkele woorden mededeeling te moeten doen. Ik zou deze mededeeling zeker achterwege gelaten hebben, indien niet anderen vooraf van hun succesvolle pogingen gewaagd hadden, waardoor bij mij de vraag gerezen was, of zij er zich misschien mede tevreden hadden gesteld, hunne leerlingen eenige techniek van het differentieeren bij te brengen. Dit laatste was mij óók wel gelukt, maar het „te moeilijk", dat ik uitsprak, had betrekking op het tekort aan inzicht, dat ik telkens opnieuw had moeten vaststellen, wanneer de leerlingen reeds over een zekere rekentechniek beschikten.

Uit de herhaalde pogingen, die ik gedurende eenige jaren in het werk had gesteld alvorens ik besloot den moed op te geven en mij voortaan te bepalen tot de kinematische behandeling van het begrip afgeleide functie, blijkt voldoende, dat ik volstrekt niet altijd zoo afkeerig ben geweest van het onderwijs in de beginselen der differentiaalrekening; de resultaten hadden mij echter van de onmogelijkheid overtuigd.

Dat ik thans en wel met volle overtuiging tot het ontwerpen van een leerplan kon medewerken, waarvan die beginselen deel

---

[1]) Den term „differentiaal-quotient" gebruik ik dit jaar, nu ik het leerboek van den heer Schogt volg, voor het eerst; mijn bezwaar tegen het gebruik van deze benaming was het laatste overblijfsel van een twijfel, dien ik een reeks van jaren met den heer Haalmeijer heb gedeeld; een bezwaar, dat ik niet zonder eenige inspanning heb kunnen overwinnen.

uitmaken, vindt zijn verklaring in de omstandigheid, dat op het punt van „te moeilijk" mijn meening inderdaad gewijzigd is; ik zal dit thans nader hebben toe te lichten.

Aanvankelijk heb ik voor de teleurstellende resultaten geen andere verklaring kunnen vinden dan deze: dat de bedoelde leerstof boven het bevattingsvermogen van het groote meerendeel der leerlingen gaat. Dit heeft mij wel in ernstige mate bevreemd, omdat ik meende in het programma voor wiskunde, voor mechanica en niet minder voor natuurkunde, meerdere onderwerpen te kunnen aanwijzen, die aan het verstand minstens even hooge eischen stellen en bij welker behandeling mij, althans zóó volkomen, teleurstellingen bespaard bleven. Het is mij op het oogenblik onbegrijpelijk, dat ik naar de juiste verklaring der opgedane ervaring zoo lang vergeefs heb moeten zoeken, en dat zij vermoedelijk nog voor mij in het verborgen zou rusten, indien niet door een gelukkig toeval een en ander tot mij was doorgedrongen van wat omtrent het begin dezer eeuw vooral in Frankrijk en Duitschland ter zake van het wiskunde-onderwijs was te doen geweest. Dàt ik eerst na een werkzaamheid van vele jaren bij het onderwijs belang ben gaan stellen in wat over didactiek van ons leervak geschreven was, en dat daarvoor een gelukkig toeval noodig was, mag stellig in niet geringe mate beschamend heeten. Wellicht zou ik niet den moed hebben gehad het te vermelden, indien ik geheel vreemd was aan de pogingen, die in het werk worden gesteld om tot een meer volledige verzorging te geraken van de opleiding tot leeraar in wiskunde.

Het werd mij thans n.l. duidelijk, aan welke fout ik mij had schuldig gemaakt. Het is niet mogelijk, zonder zich te bepalen tot een konkreet geval, zooals we in de kinematica vóór ons hebben, het begrip „afgeleide functie" te behandelen, indien het abstracte functiebegrip zelve nog niet in zekere mate het eigendom van de leerlingen geworden is. En dit „begrip" brengt men niet in enkele inleidende lessen aan, zelfs niet, indien de leerlingen reeds enkele jaren grondig onderwijs in de wiskunde genoten hebben. Hiervoor is noodig (de verschillende schrijvers zijn hierover eenstemmig), dat men hen opzettelijk tot het functioneele denken inleidt. Indien het algebra-onderwijs in de *lagere* klassen in dezen zin gewijzigd wordt, dan zal de behandeling van de veranderlijkheid der functie, zooals die voor de 4de klasse door onze Commissie wordt voorgesteld, een volkomen natuurlijke voortzetting zijn van het onderwijs in de lagere klassen. Mijn dwaling was deze, dat ik meende, ongestraft in de 4de en 5de klasse een programma te kunnen afwerken in meer modernen geest met leerlingen, aan wie het onderwijs in de eerste klassen op de thans vrijwel algemeen gebruikelijke (maar óók door het tegenwoordige weinig zeggende programma volstrekt niet uitdrukkelijk voorgeschreven) wijze gegeven is.

De vraag van den heer Haalmeijer: „wat heeft hem bekeerd?" zou ik dus, samenvattend, aldus kunnen beantwoorden: inderdaad „de ondervinding bij het onderwijs in de laatste jaren" (zooals de eerste onderstelling van den heer Haalmeijer luidt), nadat door, helaas wat late, kennisneming van de in het buitenland uitgesproken meeningen mij duidelijk was geworden, door welk dwaalbegrip ik was bevangen geweest.

Zijn onderstelling (in een voetnoot uitgesproken), dat onze plannen zouden gebaseerd zijn op een selectie, mogelijk gemaakt door de literair-economische H.B.S., is niet juist; onze plannen hebben betrekking op de oude, *on*gesplitste H.B.S.; met het bestaan der andere H.B.S. hebben wij gemeend geen rekening te mogen houden.

H. J. E. Beth.

NASCHRIFT VAN DEN SECRETARIS DER COMMISSIE.

ὅς δ' ἂν εἴπῃ τῷ ἀδελφῷ ἀυτοῦ μωρέ,
ἔνοχος ἔστάι εἰς τὴν γέενναν τοῦ πυρός.
(Matth. V : 22).

Daar de heer *Haalmeijer* mij als bij uitstek door razernij bezeten signaleert en mij in het bijzonder tot slachtoffer maakt van zijn vernuft in het ontdekken van tegenstrijdigheden, zij het mij vergund aan het bovenstaande een kort persoonlijk woord toe te voegen.

1. De heer *Haalmeijer* vraagt, hoe mijn op blz. 88 geciteerde uitlating te rijmen is met het voorstel, de theorie van het irrationale getal en critisch-meetkundige beschouwingen in klasse IV te doceeren.

De bedoelde passage had betrekking op de invoering van de Differentiaalrekening; hare strekking was, dat men zich van die invoering niet behoefde te laten weerhouden door de overweging, dat juist de grondbeginselen der Differentiaalrekening in de laatste 100 jaar zoo veel gecompliceerder waren gebleken, dan men vroeger meende, dat men dus rustig het bestaan van continue, maar niet differentieerbare functies mocht vergeten en zich er ook heelemaal niet in behoefde te verdiepen, of het differentiequotient wel altijd tot een limiet naderde. Ik koos de formuleering „100 jaar", omdat *Cauchy*, wiens *Analyse Algébrique* in 1821 verscheen, dan nog gerekend werd tot hen, wier strengheid in het schoolonderwijs wel behoorde te worden nagestreefd.

Overigens zal de heer *Haalmeijer* wel inzien, dat het mij meer om de algemeene formuleering „in een vroegere periode" te doen was, dan om de voor het concrete geval der Differentiaalrekening geldende 100 jaar. De theorie van het irrationale getal b.v. volgens *Dedekind* behoort nu tot zulk een vorige periode, d.w.z. ze is reeds zoo klassiek, dat het H. B. S. zich gerust tot doel kan stellen, als eindresultaat van haar wiskundeonderwijs den leerling tot het inzicht in het wezen van die theorie te brengen en dat ik mijn verleden niet verloochen, door dit aan te bevelen.

En wat de kritisch-meetkundige beschouwingen betreft, zooals de heer *Haalmeijer* met eenige vrijmoedigheid de door ons voorgestelde „herziening van de grondbeginselen der vlakke meetkunde" noemt, hier bestaat de contradictie al evenmin. Want, terwijl de heer *Haalmeijer* bij ons voorstel dadelijk aan *Pasch, Hilbert* en *Veronese* denkt, zouden wij al tevreden zijn met een bespreking in klasse IV van de in klasse I min of meer opzettelijk schromelijk verwaarloosde axiomata volgens *Euclides,* aangevuld met b.v. een critiek op het bewijzen door het op elkaar plaatsen van figuren (een methode, waar *Euclides* zelf blijkbaar al bezwaren tegen had en waarop *Peletarius* in ieder geval reeds in het midden der 16e eeuw critiek uitoefende) eenige opmerkingen over het parallelaxioma, de pogingen, dit te bewijzen (18e eeuw) en het ontstaan der Niet-Euclidische meetkunde (begin der 19e eeuw, dus toch ook al weer 100 jaar geleden). En wanneer ik dan b.v. de congruentie-axiomata eens volgens *Hilbert* geformuleerd zou willen zien, zou de heer *Haalmeijer* zelfs dan het recht hebben, mij te beschuldigen, dat ik zonder verantwoording mijn vroeger standpunt had verlaten? Moet het dan bepaald verboden zijn, eens iets in het onderwijs in te voeren, dat toevallig nog geen 100 jaar oud is?

2. Een volgend punt, waaraan de heer *Haalmeijer* de bedenkelijkheid van mijn opvattingen demonstreert, is mijn overtuiging, dat de axiomata der Dynamica, zooals ze zijn geformuleerd in het leerboek der Theoretische Mechanica van *J. H. Schogt,* aan de leerlingen zouden kunnen worden duidelijk gemaakt, door er een historische propaedeuse aan te laten voorafgaan. De schrijver ontwikkelt geen eigenlijke bezwaren tegen deze meening; hij uit slechts zijn skepsis, maar oppert zelf de mogelijkheid, dat deze zou kunnen voortkomen uit gemis aan historische ontwikkeling. Hoe kan hij dan echter die skepsis als argument voor mijn mania gebruiken? Hij houde mij bovendien de opmerking ten goede, dat op deze wijze geen discussie mogelijk is. Van tweeën een: òf hij verklare zich zelf tot oordeelen bevoegd en kome met argumenten, òf hij belijde incompententie en zwijge.

3. De heer *Haalmeijer* tracht mijn uitlating, dat het boek van den heer *Schogt* niet moeilijker is dan de mechanica zelve, ad absurdum te voeren, door de bewering, dat men op dezelfde gronden invoering van de werken van *Hilbert, Einstein, Weyl* en *Bohr* bij het H. B. S. onderwijs zou kunnen bepleiten. Deze redeneering lijkt mij in twee opzichten onjuist: de heer *Schogt* schreef een leerboek over een klassiek vak; de andere genoemde schrijvers schreven wetenschappelijke werken over theorieën, die zij geheel of ten deele zelve geschapen hadden. Bovendien staat mechanica wel op het leerplan der H. B. S. en axiomatica, relativiteitstheorie en theorie der quanta niet. Ik kan dan ook de dwaasheid van de opmerking, waarmee ik mijn bespreking van het leerboek van den heer *Schogt* besloot, nog niet inzien; dit boek behandelt de mechanica, zooals ze is en met het „sit ut est aut non sit", op het vak toegepast, is het boek gerechtvaardigd.

E. J. Dijksterhuis.

NASCHRIFT.

Gaarne betuig ik de Commissie mijne erkentelijkheid voor hare uitvoerige inlichtingen. De gegeven voorbeelden van aan te brengen theoretische inzichten stellen inderdaad geen overdreven eischen en vermoedelijk wordt ook nu het grootste deel der genoemde zaken aan vele scholen onderwezen. Dat ik er meer achter heb gezocht is mogelijk niet geheel onverklaarbaar, waar de Secretaris het vorige jaar een behandeling van de beginselen der dynamica aanbeval, die hem zeer onaanvechtbaar leek.

Het doel van de logische ontwikkeling van het getalbegrip, zooals de Commissie dit boven schetst, is sympathiek, maar moeilijk blijft mij toeschijnen een stelselmatige behandeling van deze zaken als voorgeschreven onderwerp in klasse I.

Wat betreft het limietbegrip en deszelfs toepassingen heeft het antwoord der Commissie mij nog niet geheel overtuigd. Het is lastig te zeggen waar precies de groote moeilijkheid voor de middelmatige leerlingen ligt, maar ik heb slechts zelden een bevredigend bewijs van $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = \frac{a}{1-r}$ van een hunner kunnen loskrijgen. Bij serieuze toetsing schoot gewoonlijk hun inzicht te kort.

De heer *Beth* betreurt dat een persoonlijk element in de discussie is gebracht. Aanvankelijk stond het ook mij tegen, maar achteraf ben ik blij dat het zoo geloopen is, daar wij hieraan danken de uiteenzetting welke de Voorzitter in zijn naschrift heeft gegeven. Dáár is aan het woord iemand van veel ervaring, die zijn meening durft herzien en het proces dier herziening op meesterlijke wijze weet te beschrijven. Gaarne erken ik, dat de heldere analyse zijner ondervinding voor mij nieuwe gezichtspunten heeft geopend. Van harte zeg ik hem dank en vertolk daarmee waarschijnlijk de gevoelens van vele jongere collega's.

Nog een kort woord in verband met het naschrift van den Secretaris.

Sub 1 betoogt de heer *Dijksterhuis,* dat hij zijn vroeger standpunt niet ontrouw is geworden. Terecht weigert hij aan de letter gebonden te zijn. In hoeverre hij den geest der geciteerde uitlating trouw is gebleven laat ik gaarne over aan het oordeel van derden.

Uiteenzetting van zijn standpunt was in de eerste plaats gewenscht als toelichting van het concept leerplan. Wij weten nu ten minste dat volgens zijne opvatting de H. B. S. zich gerust ten doel kan stellen den leerling te brengen tot het inzicht in het wezen van de theorie van het irrationale getal, b.v. volgens *Dedekind.* Verder schijnt het de bedoeling in stelselmatig onderwijs in klasse IV op gedeelten van het vroeger behandelde der planimetrie critiek te oefenen en aanvullende beschouwingen te geven. Deze herziening blijft uit den aard der zaak gebrekkig, is daardoor misschien voor de beste leerlingen onbevredigend en zal voor de middelmatige zeer veeleischend zijn.

Sub 2 verwijt de heer *Dijksterhuis* mij geen argumenten te geven en wijst er mij op, dat bij een discussie zwijgen de eenige gedragslijn is na beleden incompetentie. Dit laatste is natuurlijk toegegeven. Van een discussie kon hier echter wel nauwelijks sprake zijn. Ik maakte zonder meer een vermoeden (zoo men wil een overtuiging) kenbaar, zooals de Secretaris ook zonder argumenten zijn inzicht had gegeven. In deze zaak is toch, dunkt me, slechts aan de ervaring eenigszins objectieve bewijskracht toe te kennen, en daar het een nieuw boek betrof, kon wel niemand (behalve mogelijk de schrijver) de noodige ondervinding hebben. Verwijzing naar overeenkomstige experimenten leek onbevredigend. Wordt deze toegelaten, zoo geef ik, voor wat ze waard is, mijn ervaring bij de kosmographie. Toen nog voor dit vak gedurende twee jaar een uur beschikbaar was, heb ik wel eens getracht eerst het gedrag der planeten te verklaren met de epicykeltheorie om vervolgens te laten zien, welke groote vereenvoudiging de hypothese van *Coppernicus* meebracht. Het resultaat viel tegen en sedert dien heb ik mij aan de directe methode gehouden.

In verband met hetgeen de heer *Dijksterhuis* sub 3 aanvoert, meen ik dat, waar hij de mechanica klassiek noemt, dit eenige toelichting vereischt. Speciaal de moderne pogingen tot exacte fundeering (afgezien van de relativiteitstheorie), hebben nog niet geleid tot een algemeen geaccepteerde opvatting. Het boek van den heer *Schogt* bevat heel wat, dat men, voor zoover mij bekend, tevergeefs zal zoeken in de standaardwerken.

Het motto bij mijn stukje had waarschijnlijk beter weg kunnen blijven. Althans zal ik mij wel wachten een tweede op te zoeken, daar ik aan het tegenmotto voorloopig genoeg heb.

B. P. Haalmeijer.

Het voorgaande was reeds gezet, toen ik in handen kreeg het onlangs verschenen vierde deel van het leerboek der algebra voor voorbereidend hooger en middelbaar onderwijs, samengesteld door de heeren Dr. *L. Yntema, A. J. Drewes B.Fz.* en *Th. B. Bloten.* Op pag. 24 en 25 hiervan leest men:

„Bepaling. Doorloopt een veranderlijke een eindelooze getallenrij $u_1, u_2, u_3, \ldots\ldots\ldots\ldots u_n \ldots\ldots\ldots\ldots$ en bestaat er een getal u zoodanig, dat $|u - u_n| < \varepsilon$ is, waarin ε een willekeurig klein, te voren aangenomen, positief getal is, dan zegt men, dat u_n de grenswaarde (limiet) u heeft en schrijft: $\lim u_n = u$ voor $n \longrightarrow \infty$.

We nemen aan, dat u zelf niet tot de reeks behoort. Alle termen, op een eindig aantal na, liggen in het interval $u \pm \varepsilon$ en u."

Als dit nu het resultaat is van de vereenigde krachtsinspanning van drie ervaren docenten, lijkt de vraag niet misplaatst, wat de middelmatige *leerlingen* van het limietbegrip zullen maken.

Te wijzen op het verschil tusschen een noodige voorwaarde en een voldoende voorwaarde leek mij steeds nuttig werk. Het is, dunkt me, een goed voorbeeld van wat de Commissie-*Beth* verstaat onder het aanbrengen van fundamenteele theoretische inzichten. Nu staat in het genoemde boek op pag. 57 sub III: „Opdat de vgl. $ax^2 + bx + c = o$ reëele wortels bezit, is *noodig,* dat *a, b* en *c* reëel zijn." Een ieder vergist zich op zijn tijd, zelfs kan men dit en bloc doen en dan nog het woord cursiveeren, waar het op aankomt, maar bij het lezen van dit zinnetje kwam toch het vermoeden in mij op, dat ik vaak nog een te hoogen dunk heb gehad van de vermogens mijner *leerlingen.*

Het is hier niet de plaats voor een recensie van het genoemde werk. Echter schijnt het nu eenmaal mijn lot te zijn boeken van zeer geachte collega's in de discussie te moeten betrekken en ik maak dan ook nog maar een paar opmerkingen.

Op pag. 98 (laatste deel van § 68) blijkt dat de schrijvers een stelling bewezen achten als het gelukt is uit het gestelde een identiteit af te leiden. Als dergelijke opvattingen bij leeraren heerschen, wat is er dan van de *leerlingen* te verwachten?

In het derde deel wordt in de titels der hoofdstukken I, IV en IX gesproken van „functies met één onbekende". Ook elders in dit deel vindt men deze uitdrukking. In dit verband denke men eens aan het vertrouwen der Commissie-*Beth,* dat door behandeling van het functiebegrip de verwarring tusschen onbekende en veranderlijke bij de *leerlingen* tot het verledene zal gaan behooren.

Op pag. 96 van het vierde deel staat: „Wanneer een veranderlijke een rij van toenemende getalwaarden doorloopt, die naar boven onbegrensd is en dus geen maximum bezit, zegt men dat die veranderlijke oneindig groot is, als ze grooter is dan elk getal, hoe groot ook." Uitlatingen als deze zijn bijzonder interessant, als men bedenkt, dat de schrijvers nogal wat plaats geven aan de historie en dus waarschijnlijk ook wel weten, hoe men sinds het einde der 18de eeuw in de wiskunde heeft geworsteld ten einde zoo weinig mogelijk zinledige combinaties van woorden te bezigen. Mag ik misschien de attentie van den heer *Dijksterhuis* voor dit eigenaardige resultaat vragen?

Zoo is er meer, maar ik eindig, daar mijn doel slechts was te wijzen op de mogelijkheid, dat wij de capaciteiten onzer *leerlingen* soms te hoog taxeeren. B. P. H.

OVER HET ONDERWIJS IN REKENEN IN DE EERSTE KLAS VAN DE H. B. S.

Het opschrift noemt alleen de eerste klas van de Hoogere Burgerschool en niet van andere inrichtingen van onderwijs; het bedoelt te zeggen: van de H.B.S., van het Gymnasium en Lyceum, van de Handelsschool en van de M.U.L.O.-school; dus het onderwijs in rekenen aan leerlingen, die zes klassen van de lagere school doorloopen hebben en voortgezet onderwijs ontvangen.

Van de lagere school nemen de leerlingen allen vrijwel dezelfde kennis mee; van de eene school zullen de leerlingen wat beter zijn dan van de andere; de hoofden van scholen hebben misschien met de ouders overleg gepleegd en hun den raad gegeven: „liever niet naar de vijf" of „stuur hem naar het gymnasium" of „laat hem bij ons blijven", enz., maar deze schifting zal toch niet tot gevolg hebben, dat het verschil zoo groot is, dat ik de H.B.S., wat het rekenonderwijs in de eerste klas betreft, niet zou mogen bedoelen als verzamelnaam voor de genoemde scholen van voortgezet onderwijs.

Dit over de laatste woorden van het opschrift; over het lidwoord „het" ook nog wat; het is nl. voor den gewonen leeraar niet mogelijk over „het onderwijs" in welk vak ook te schrijven, zonder dat hij er een ernstige studie van gemaakt heeft en daarvoor is toch zeker de eerste eisch, dat hij niet enkel zich zelf heeft gehoord, maar ook eens een 20 of 30 anderen en .... in de jaren, dat ik bij het M. O. was, heb ik nooit, ook nog geen half uur, geen kwartier, een collega aan het werk gezien. Anderen, zeker 99 %, kunnen mij dat nazeggen; bij andere vakken is het niet anders; ieder vormt zich zelf (of niet), ieder moet zijn gang maar gaan zonder ooit een ander tot voorbeeld te hebben; hoogstens heeft hij vage herinneringen, hoe zijn leeraren het deden of „niet deden"; als vakleeraar heeft hij slechts een paar voorbeelden uit zijn eigen schooljaren. Het woord „het", het tweede woord van het opschrift, moet eigenlijk zijn „mijn”, eenvoudig, omdat ik niet *weet*, hoe anderen lesgeven; omdat ik geen uiting kan geven aan vermoedens als: „dat hoofdstuk wordt stiefmoederlijk behandeld”; „men hecht nog te veel waarde aan....”; „het hoofdstuk.... wordt nergens naar den eisch onderwezen”, om de eenvoudige reden, dat ik dat niet weet, U, lezer, weet het ook niet. Hoogstens kan men, gezien het gebruik van bepaalde leerboeken, zoo ongeveer nagaan, welke stof de leeraar onderwijst en over de keuze van die stof kan men praten. Maar daarmee weet men nog niet, hoe hij het doet.

Als U goedvindt, dat ik zal praten over *mijn* onderwijs in rekenen, dan mag ik U ook wel verzoeken het mij niet kwalijk te nemen, dat ik een enkelen keer het „Rekenboek voor de H. B. S.” noem.

Als ik in September een eerste klas krijg met zes lessen wiskunde, twee voor meetkunde, twee voor algebra, twee voor rekenen, dan is het eerste werk deze zes uren zóó te zetten, dat de meetkunde op een 1e of 2e uur valt, daarna heeft de algebra de keuze uit de overige 4 uren en voor het rekenen neem ik bij voorkeur een 5e of 6e uur, op Woensdag en Zaterdag een 3e of 4e uur; de beste uren voor meetkunde, dan komt de algebra en op het laatst het rekenen.

In September, October en November worden de beide uren rekenen, voor $\frac{4}{5}$ zeker, besteed aan het behandelen van de theorie; vat dat woord theorie niet al te zwaar op, lezer; mijn bedoeling zal U na verdere lezing duidelijk zijn. — Eerst bespreken we de begrippen: eigenschap, bewijs, bepaling, termen van de schaal, de drie waarden van een cijfer in een getal, het voorstellen van een getal door letters en meer van die dingen. Zeer degelijk wordt hun ingeprent, wat een bepaling is en hoe die zijn moet; eenige voorbeelden worden gegeven; alle bepalingen, door de leerlingen zelf gegeven, worden „afgemaakt”; we komen er toe, dat men alleen in de wiskunde juiste bepalingen kan geven; allerlei figuren uit de meetkunde worden in de rekenles gedefinieerd. En over „eigenschappen” weiden we uit en brengen ze onder woorden: $a + b = b + a$; ook $a : b = b : a$? Een tiental wordt genoemd en behoorlijk geformuleerd en de nadruk wordt gelegd op dit: als een verbinding van getallen iets bijzonders vertoont (b.v. verwisselbaarheid), dat andere verbindingen niet hebben, dan is dat een eigenschap van die verbinding, die moet worden vastgelegd in een bewering omtrent die verbinding; zoo'n bewering noemt men „eigenschap" of „stelling". Ook worden eenige meetkundige figuren besproken; verscheidene keeren heb ik in een van de eerste lessen reeds de stelling van Pascal voor den cirkel vertoond. „Wat gek!" hoor ik mompelen. En toch, met wat een glundere snuiten wijzen ze op hun teekening, als het bij hen ook „uitkomt". „Dat is geen toeval; het komt altijd uit; het *moet* uitkomen; en kunnen jullie nu begrijpen, dat er menschen zijn, die willen weten, waarom dat moet? Menschen, die er niet af kunnen blijven; die dit en zooveel honderden dingen meer, willen doorzien, doorvorschen en steeds nieuwe willen vinden en elkaar willen voorleggen? En dat een vraagstuk een mensch zoozeer in zijn greep kan hebben, dat hij net zoo lang werkt en wroet, tot hij omgekeerd het vraagstuk in zijn macht heeft". Ja, zeker, met nog een paar van dat slag oreer ik wel eens een kwartiertje door; kostelijke opwekking, geen verloren tijd, integendeel. — Er wordt zeer sterk gewezen op het bestaan van eigenschappen van figuren en van verbindingen van getallen en ingeprent, dat deze moeten worden bewezen. Dat er met het begin van hun Rekenkunde en hun Meetkunde de hand een beetje gelicht wordt, dat alles niet zoo formeel bevestigd wordt als in S c h u h's Rekenkunde voor volwassen studeerenden of zij het eenvoudiger, maar zuiver in mijn Theorie der Rekenkunde voor kweekelingen van 15—19 jaar, die later zelf moeten onderwijzen en dus scherp moeten leeren onderscheiden, nou, dat is zoo erg niet; de jeugd is, wat dat aangaat, nog zoo weinig critisch aangelegd; een volkomen deductieve behandeling (indien die al door den leeraar wetenschappelijk te geven is) is voor leerlingen volslagen onmogelijk. Niet, dat ik misbruik wil maken van hun gemis aan critiek; à propos, dat zelfde gemis hebben geslachten volwassenen voor ons ook getoond, wij allen tot na onze examens (de grondslagen zijn het eind, niet het begin van onze studie en velen komen er nooit aan toe); noem de groote wiskundigen van voor 1850, van voor 1900; hoevelen, die onvergankelijk werk hebben geleverd, hebben niet boven de aarde gewerkt aan den boom der wiskunde met zijn geweldige kroon en zich om de wortels niet bekommerd; de geleerden zijn thans bezig niet aan de groote wortels, die hebben al een beurt gehad, maar aan de wortelvezels, inderdaad de levensbron! Wie het goed meent met de wiskunde, juicht dat ten zeerste toe, maar ook, dat men daarover het diepste stilzwijgen voor kinderen van 12 à 13 jaar bewaart. Men late zich niet verleiden tot praten (meer kan het niet zijn) over vragen als: „wat is een getal, wat is een eenheid, wat is meten?" Als U wetenschap doceert, gaat het over de hoofden heen, als het dat niet is, ontaardt het in......; vul maar in. Geen van beide maken het beter noch gemakkelijker; hoogstens wekt het een onbehaaglijk gevoel van onzekerheid bij de kinderen.

Tot zoover over de inleiding van het rekenonderwijs; 2 à 3 lessen zijn voldoende om de begrippen op blz. 122 genoemd te bespreken en om een paar vraagstukjes mondeling te behandelen. Daarna ga men over tot de eigenschappen van de optelling, vervat in deze formules: 1) $a + b + c = b + c + a$; 2) $a + b + c + d = (b + c) + (a + d)$; 3) $a + b = a_1 + a_2 + b_1 + b_2$; 4) $(a + b) + p = (a + p) + b = a + (b + p)$. Hoe ik die behandel? De leerlingen hebben er nooit van gehoord en voor hen is dus de opzettelijke vermelding wat nieuws; ook het schrijven van heele zinnen met wat letters. De waarheid wordt op alle mogelijke wijzen aan hun verstand gebracht en de nadruk wordt gelegd op het feit, dat men met eigenschappen van sommen te doen heeft, dat de vervanging van de $+$-teekens door andere teekens niet mogelijk is, tenminste niet in alle genoemde eigenschappen. Dit wordt ook gedaan bij de eigenschappen van verschillen, producten, machten en quotienten. Verder wordt er op gewezen, dat de bewerking van optelling, die de leerlingen van de lagere school kennen, een noodzakelijk uitvloeisel is van deze eigenschappen, dat men ook na het onder elkaar zetten der getallen de kolommen van links naar rechts kan optellen; dat de algebra het volkomen goed doet en de schrijfwijze der getallen ons dwingt averechts te werk te gaan. Waarom dat alles gedaan?

Na de behandeling der eigenschappen, het leeren lezen van de formules, het betoog, hoe ze den grondslag voor reeds lang bekende bewerkingen leveren, komt het voornaamste, bestaande in haar toepassing op de algebra:

$7a + 3b + 2c + 2a + c + 5b$, waarvoor nu gezet mag worden $7a + 2a + 3b + 5b + 2c + c = 9a + 8b + 3c$ (dat $7a + 2a = 9a$ is, wordt terloops duidelijk gemaakt, later stevig bewezen; men kan er niet mee wachten); $7a + 3b + 2c + 8b = 7a + (3b + 8b) + 2c$; moet men $8a + 2b + 4c$ met $2a$ vermeerderen, voeg dan $2a$ bij $8a$; moet er $5b$ bij, tel dan op bij den tweeden term en $3c$ voegt men bij $4c$; dit zijn toepassingen van $(a + b) + p = (a + p) + b = a + (b + p)$. „Doet U dat nu wezenlijk zoo?"

„Zeker en heel stevig", „maar ieder kind doet dat uit zich zelf". „Zeker, hij kan inderdaad wel wat handigheden leeren, wat techniek, maar de techniek van de algebra moet toch steun hebben in de eigenschappen der verbindingen van de getallen. En dan moet ook het begin op een voor hen geschikte wijze stevig behandeld worden.

Waar moet men anders beginnen met de puntjes op de i te zetten? Bij de aftrekking „weten" ze ook alles nog vanzelf d.w.z. ze kunnen gedachteloos nadoen, wat hun voorgedaan is; bij de vermenigvuldiging, de producten, de gedurige producten, de machten? Sla maar over!! Neen, neen, integendeel, doe het stevig; de algebra steunt toch immers heelemaal op die eigenschappen. Niemand mag ze overslaan, noch kan ze overslaan, zonder dat zijn eerste jaar algebra verlaagd wordt tot onbegrepen techniek. „Ja, maar *ik* behandel die eigenschappen in de algebra-les". „Dus geeft U toch dezelfde leerstof? Maar waarom er dan niet een behoorlijk eenvoudig geheel van gemaakt en dat geheel besproken met toepassingen op de algebra?" Ik voor mij vind (het meerendeel zal het met mij eens zijn) dat de theorie der rekenkunde in eenvoudigen vorm moet worden gegeven en dat dit voor de algebra niet dan winst beteekent. En ernstig moet ik waarschuwen tegen het: „dat doen ze toch vanzelf wel goed". Hoe lang gaat dat? Tot ze zetten $(a+b)^2 = a^2 + b^2$? Dat kan men ze wel technisch leeren:

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ + \overline{\;2a+2b\;} \end{array} \qquad \begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \times \overline{\;a^2+b^2\;} \end{array}$$

Maar het tweede moet worden behandeld; het „vanzelf" eindigt dus voor U vóór de distributieve eigenschap der vermenigvuldiging; goed, dus zullen ook de eigenschappen der gedurige producten, machten en quotienten moeten worden behandeld; het gaat toch niet aan, als de leerlingen eenmaal hebben ondervonden, dat een bewijs noodig is, de volgende eigenschappen weer „vanzelf" te laten spreken.

Ik keer terug en begin aan de eigenschappen der aftrekking; daar heb ik bij de vraagstukjes dit: „Met hoeveel eenheden kan men laten zien, dat het verschil van 10 en 7 gelijk is aan 3?" Vraag het maar eens, de antwoorden zijn 20, 17; geen of een enkele meent van 10. Dit vraagstukje heeft een geschiedenis: een juffrouw zou in een eerste klasje van de lagere school proefles geven: rekenen, getallen tot en met 10. De juffrouw brengt 10 ballen van het telraam op de bovenste pen, 7 op die daar onder en beduidt een dreumes, dat hij moet aftrekken; hij kan het niet; een ander beklimt het trapje en weer een ander, maar geen een kan het; toen moest de juffrouw het wel zelf doen .... ze begreep toen pas (ze kon het natuurlijk ook niet) dat die 7, genoemd in den aftrekker, een deel zijn van die 10, die het aftrektal uitmaken. (Historisch). Het eenvoudige begrip van verschil was de juffrouw vreemd, al zal ze menig vraagstukje van het volgende slag hebben opgelost: van een aftrekking is de som van aftrektal, aftrekker en verschil 378, terwijl het verschil tweemaal den aftrekker is; bereken de drie getallen. Wel kan men zonder begrip techniek aankweeken; klaagde niet voor een jaar een professor, dat een leerling van de 3e klas H.B.S. tientallen vierkantsvergelijkingen met heel groote coëfficiënten had opgelost, maar dat het begrip „wortel" hem slechts vaag voor den geest stond of misschien wel gansch en al ontbrak. Men kan ze „leeren werken" met log — 8,25 = log 8,25 (n); dat ze er niets van begrijpen, wat nood; ze doen het toch maar!! Ik meen wel eens een schoolboek onder de oogen te hebben gehad, waarin zoowaar hetzelfde domme misverstand van die juffrouw zelfs door een figuurtje, in den trant van de twee rijen balletjes, was „opgehelderd"; zoo iets blijft je bij. Is het begrip fout, zelfs maar vaag, dan komt er van de rest niets terecht.

De eigenschappen van de aftrekking moeten goed behandeld worden, want ze leveren de noodige theorie voor het „haakjes weg-maken" uit de algebra; de 3 à 4 lessen over de aftrekking moeten die leerstof uit de algebra volkomen vastleggen. Ook moet men de theorie niet onderbreken met: „Jan en Piet knikkeren", „koffie à...... en thee à......", „vleesch, dat 12 % indroogt", enz.; de algebra eischt, dat we opschieten met de hoofdbewerkingen met letters. De weinige vraagstukjes moeten zijn versterking der theorie en oefening in het lezen van formules. Wat dat een werk is! En hoe bitter noodig het is! Laat ze eens lezen: $(a + b) - c = (a-c) + b = a + (b-c)$; vraag heelemaal niet naar het bewijs. Wees echter niet tevreden met: een som wordt verminderd met een getal, door het getal van een der termen af te trekken". Ik vraag: en dan? Let maar op: $(a + b) - c$; hier staan twee bewerkingen; nu komt volgens bovenstaanden zin daarvoor één bewerking, nl. de aftrekking $a-c$. „Zoo zie je het toch altijd; de rest begrijp je wel!" Gaarne weer iets „historisch". Op mijn KI-cursus had ik het over de zuiverheid van uitdrukking en zei, dat $(abc)^p = a^p b^p c^p$ niet aldus mocht worden gelezen: „een product wordt tot een macht verheven door elk van de factoren tot die macht te verheffen", maar dat daar noodwendig achter moest: „en het product te nemen van de komende machten"; (in mijn Rekenboek zet ik: een macht van een product is het product van de gelijknamige machten der factoren). Een der candidaten sputterde tegen: „zoo zie je het overal; b.v. in...... en...... en......" (namen van auteurs, die nu niet precies om hun degelijkheid bekend zijn): „Zeg ik het niet beter?" „Ja, dat is wel waar, maar iedereen weet de rest immers wel; dan hoeft het er niet bij". „Dan hoef je ook de halve stelling niet op te nemen, de eerste helft weten ze dan ook wel". Nu wil het toeval, dat we op denzelfden avond de vermenigvuldiging van determinanten behandelen; ik zeg hen, wat er bedoeld wordt met de uitdrukking: een rij wordt met een rij vermenigvuldigd en dan: men vindt het product van twee determinanten van denzelfden graad door ieder der rijen van den eenen met ieder der rijen van den anderen te vermenigvuldigen. Basta. En mijn opponent is de eerste, die vraagt: „en dan?" Ik had hem flink te pakken; hij is, ik hoop, voor goed genezen en zal als leeraar aan een kweekschool nu niet meer genoegen nemen met: een verschil wordt met een getal verminderd, als men dat aftrekt van het aftrektal.

Ja, *ook* de kinderen wennen aan zuiverheid van uitdrukking. Onbegonnen werk? Den Moriaan gewasschen? Wel neen, niet zoo erg als de juffrouw in de eerste klas van de lagere school, die de kleutertjes leert lezen of Uw pogingen om Uw zoon van 7 te leeren schaatsenrijden, of van den muziekleeraar met zijn eindeloos geduld om Uw dochtertje te leeren pianospelen. Eerst vrijwel een hopeloos geval, maar al doende wordt het beter en...... de kinderen willen en wenschen na eenige maanden niets liever dan nauwkeurigheid, waarvan de graad door ons in hun welbegrepen belang wordt bepaald; waar de leeraar en het leerboek niet voorgaan, komt er van de leerlingen niets terecht.

Over de aftrekking niet meer. De behandeling der vermenigvuldiging volgt er onmiddellijk op; deze beide worden niet gescheiden door „sommetjes"; ook nu: eenvoudige bewijzen, nauwkeurige uitdrukking, toepassingen op de algebra bij elke eigenschap en verwerking van de theorie-sommetjes, die alleen gemaakt zijn om de theorie er goed in te stampen en de begrippen te verhelderen. Nog voordat we in de algebra aan het product van twee veeltermen toe zijn, hebben we deze in de rekenles zeer soliede onder handen genomen, zoodat ze door en door weten, hoe ze zoo'n product moeten bepalen. Deze theorie overslaan? Maar men *mag* ze niet overslaan, men *kan* ze niet overslaan, dit ten tweeden male:

$$+\ \begin{array}{r} 12a + 6b \\ 3a + 2b \\ \hline \end{array} \qquad -\ \begin{array}{r} 12a + 6b \\ 3a + 2b \\ \hline \end{array} \qquad \times\ \begin{array}{r} 12a + 6b \\ 3a + 2b \\ \hline \end{array} \qquad \frac{12a + 6b}{3a + 2b}\,?$$

We *moeten* toch begrijpelijk maken, dat de bepaling van de som en van het product van twee tweetermen niet op dezelfde manier gaat. Ze doen het nog zoo dikwijls fout na een goede behandeling; hoe moet het gaan, als deze bewerkingen aan de intuitie worden overgelaten of althans niet opzettelijk worden behandeld? En hoe moeten we hun duidelijk maken, dat $\frac{12a + 6b}{3a + 2b}$ heelemaal „niet gaat"? Dan moet de bewerking van de overige verbindingen op iets gegrondvest zijn, waardoor de gevolgde gang daarbij wel goed is. — De behandeling van de vermenigvuldiging duurt 4 à 5 lessen. Over de gedurige producten (2 à 3 lessen), over de machten (GGD en KGV van ontbonden getallen worden vooreerst overgeslagen), die te behandelen zijn in 2 à 3 lessen en de deeling, die er 3 à 4 vordert, zeg ik verder niets om niet in herhalingen te vervallen. De algebra eischt, dat de leerlingen de theorie vervat in het volgende overzicht door en door kennen.

Daarvoor zijn noodig, zooals is voorgerekend:

Inleiding	2 à 3	lessen.
Sommen	2 à 3	„
Verschillen	3 à 4	„
Producten	3 à 4	„
Gedurige producten	2 à 3	„
Machten	2 à 3	„
Quotienten	3 à 4	„
	24	lessen.

Overzicht der eigenschappen.

$$\text{S.}\begin{cases}1.\ a+b+c=c+b+a.\\2.\ a+b+c=(a+c)+b.\\3.\ a+b=a_1+a_2+b.\end{cases}$$

$$\text{V.}\begin{cases}1.\ (a+b+c)-(p+q)=\\\qquad (a-p)+b+(c-q).\\2.\ \mathrm{A}-\mathrm{B}=(\mathrm{A}\pm p)-(\mathrm{B}\pm p).\\3.\ (\mathrm{A}-\mathrm{B})+p=\begin{cases}(\mathrm{A}+p)-\mathrm{B}\\\mathrm{A}-(\mathrm{B}-p)\end{cases}\\4.\ (\mathrm{A}-\mathrm{B})-p=\begin{cases}\mathrm{A}-(\mathrm{B}+p)\\(\mathrm{A}-p)-\mathrm{B}\end{cases}\\5.\ a+b-c-d+e=\\\qquad (a+b+e)-(c+d).\end{cases}$$

$$\text{P.}\begin{cases}1.\ ab=ba.\\2.\ p(a+b-c)=pa+pb-pc.\\3.\ (a+b-c-d)p=\\\qquad ap+bp-cp-dp.\end{cases}$$

$$\text{G.P.}\begin{cases}1.\ abcd=badc.\\2.\ abcd=a(bc)d.\\3.\ p(xyz)=x\,(py)z.\\4.\ xyz\times p=x\,\{y\,(zp)\}\end{cases}$$

$$\text{M.}\begin{cases}1.\ a^p\,.\,a^q=a^{p+q}.\\2.\ a^p:a^q=a^{p-q}.\\3.\ (abc)^p=a^pb^pc^p.\\4.\ \left(\frac{a}{b}\right)^p=\frac{a^p}{b^p}.\\5.\ (a^p)^q=a^{pq}.\end{cases}$$

G.G.D. en K.G.V.

$$\text{Q.}\begin{cases}1.\ \mathrm{D}=qd+r.\\2.\ \frac{a-b+c}{p}=\frac{a}{p}-\frac{b}{p}+\frac{c}{p}.\\3.\ abc:p=a\,.\,\frac{b}{p}\,.\,c.\\4.\ p:abc=\{(p:a):b\}:c.\\5.\ \frac{a}{b}\,.\,\frac{x}{y}=\frac{ax}{by}.\\6.\ \frac{a}{b}:\frac{x}{y}=\frac{a}{b}\times\frac{y}{x}.\end{cases}$$

Ruim gerekend dus 24 lessen, dus voor 12 weken, zoodat men voor de Kerstvacantie er mee klaar is; zooals meer gezegd, is dat ook noodig. „En laat U de leerlingen thuis die theorie leeren? En overhoort U mondeling of schriftelijk?" Noch het eerste, noch het tweede of derde. Die eisch zou te zwaar zijn en bovendien is hij onnoodig. Wel laat ik hen de eigenschappen lezen van het bovenstaande overzicht; eerst met de bladzijde voor zich, waarop dit overzicht afgedrukt is, daarna met het boek dicht, kris kras door elkaar, en geen les gaat er voorbij, waarbij we niet een kleine herhaling houden. Zoo worden de eigenschappen hun eigendom; bedenk ook, dat men zich in de 12 $\times$ 2 uur algebra bezighoudt met dezelfde stof, zoodat alles meewerkt om de eigenschappen er muurvast in te krijgen. Wordt er een fout gemaakt als deze $\frac{a^2+b^2}{a+b}=a+b$, dan wordt die zeer degelijk besproken; hoe? „Kijk, als je een bewerking uitvoert, jullie weet het, moet die steunen op eigenschappen; ga het rijtje maar langs; waar moet je zoeken?" „Bij de eigenschappen der quotienten". „Nu zie ik $(a + b) + p$, $(a + b) - p$, $(a + b) \times p$, $(a + b) : p$; $p + (a + b)$, $p - (a + b)$, $p\,(a + b)$ en...... $p : (a + b)$ zie ik niet; zeker vergeten. Jan, schrijf jij er het antwoord eens achter (ik schrijf op $\frac{p}{a+b}$)". De jongen schrijft op, dat is vast, $\frac{p}{a} + \frac{p}{b}$. „Keurig, hoor, ga maar zitten; wie is het met hem eens?" Alle vingers omhoog, hoogstens een enkele zittenblijver (die niet op wiskunde is blijven zitten) niet. „Eens probeeren: Marie, jij naar het bord en getallen nemen voor de letters: $\frac{48}{4+12} =$ ....". Marie wijfelt, maar als ik wijs op $\frac{p}{a} + \frac{p}{b}$, komt er toch wel $12 + 4$; nu komt er algemeen verzet, want het is toch heusch maar 3. Ten overvloede: „als 4 meisjes en 12 jongens 48 centen moeten verdeelen (letterlijk *op*deelen) en de dames beginnen $\frac{48}{4}$, dan...... is er voor de jongens niets meer te verdeelen. „Neen, dat is fout: $\frac{p}{a+b}$ is niet $\frac{p}{a} + \frac{p}{b}$. Wanneer is een deeling goed? Is $1048576 : 512 = 2048$ goed? Even op een kladje probeeren, maar niet deelen, hoor!" Ik loop rond en zie, dat ze door vermenigvuldiging de proef maken. Nu probeeren of $\frac{p}{a} + \frac{p}{b}$ wel goed is; ik laat uitrekenen $\left(\frac{p}{a} + \frac{p}{b}\right)(a + b)$; ze hebben direct te pakken, dat het niet p wordt. „Dus dan is het fout, wat Jan heeft opgeschreven. Wie is het nog met hem eens?" „Waarom ontbreekt een eigenschap Q... $\frac{p}{a+b} =$ ......?" „Omdat er geen andere manier is dan eerst $a + b$ optellen en daarna de som deelen op p. Iedere eigenschap drukt uit, dat er twee manieren zijn om een uitkomst te krijgen; alleen $\frac{p}{a+b}$ is maar op één manier te berekenen." Op het bord komt heel forsch te staan: $\frac{p}{a+b}$ is niet $\frac{p}{a} + \frac{p}{b}$; ik mag de termen van den deeler niet stuk voor stuk deelen op het deeltal. — Dan komt de fout $\frac{a^2 + b^2}{a+b} = a + b$ nog eens grondig aan de beurt. — De lezer vraagt, of ik dat nu echt zoo doe? Zeker en als het nog eens voorkomt, doe ik het nog eens dunnetjes, maar scherp, over, dat verzeker ik U.

Ik laat ze dus de theorie niet leeren, noch weergeven, zoodat ze thuis niets te doen zouden hebben voor rekenen tot Kerstmis, als daar niet de sommetjes en cijferoefeningen waren achter in het Rekenboek; voor iedere les laat ik 1 of 2 van die dingen maken, neem een enkelen keer van de les een kwartier af, om er nog een of twee bij te laten maken. Maar eerlijk gezegd werd daaraan geen bijstere zorg besteed tot Kerstmis; ik kijk ze na, geef zoo nu en dan een cijfer voor het werk en heb in dit schriftelijk werk een goeden steun voor mijn oordeel opgedaan bij de mondelinge lessen. Tot Kerstmis is het zoo veel en veel belangrijker, zooals gezegd, dat de theorie niet wordt onderbroken, noch dat de gedachten worden afgeleid in de rekenles met z.g. practische vraagstukken.

Ik ben nu gevorderd tot na de Kerstvacantie; ons resten nog 6 maanden, wat vacanties er af, zeg 22 schoolweken, dus 44 lessen; wat moet daarin gedaan worden? Kenmerken van deelbaarheid, G. G. D. en K. G. V. op beide manieren; alles met groote beperking; in mijn Rekenboek 2 + 6 bladzijden theorie en een 30 eenvoudige vraagstukjes, niet onderbroken noch gevolgd door vraagstukken uit de „practijk". Maak toch die eenvoudige zaken niet tot iets gewichtigs; van de lagere school brengen ze de kennis reeds mee; een korte behandeling is meer dan voldoende; in geen geval, o, summum van gebrek aan inzicht, kenmerken van deelbaarheid door 7, door 13, 17, 19; niet, omdat dit te moeilijk is; ik zie best kans mijn klas in een les of vier alle kenmerken van deelbaarheid door 7, 13, 17, 19, 23, enz., enz. te leeren, maar bedenk toch, dat we geen „Theorie der Rekenkunde" geven, dat dit heelemaal *niet* het doel van onze rekenlessen is. De schrijvers, die ze behandelen, weten zelf zeer waarschijnlijk niet, dat het kenmerk van deelbaarheid door 7, dat ze geven, niets beteekent zonder dit: 21 is slechts één der termen van den vorm $a \cdot 10^p + 1$, die deelbaar zijn door 7 en dat veelvouden van 7 zijn: 21, 301, 1001, 50001, 400001, 6000001, $2.10^7 + 1$, $3.10^8 + 1$, $1.10^9 + 1$, $5.10^{10} + 1$, enz., ook $1.10^{15} + 1$. Om dus te onderzoeken of het volgende getal deelbaar is door 7, gaan we als volgt te werk (verklaring is voor U overbodig; zoo noodig sla men mijn Theorie der Rekenkunde op blz. 82 op of Schuh Elementaire Theoretische Rekenkunde I).

```
45781436820042564|394.254.988.818.728
  394254988818728|
-----------------
453871818|31223836
 93671508|
---------
3602|0031
 155|
----
344
  8
---
26
```

Het getal is niet deelbaar door 7. „De rest?” „Ook eenvoudig te vinden; kijk anders maar in Schuh I of in zijn Rekenkunde voor K I”.

Die kenmerken voor 7, 13, 17, enz. uit de boekjes voor kinderen (daarin overgebracht uit de boeken voor hulp- en hoofdacte, waaruit wel meer rommel is overgeheveld tot groote schade van de H. B. S.) dienen nergens toe; ze zijn een armzalig rudiment van een heel mooi kenmerk uit de echte Rekenkunde. Aantal, som, product van deelers van een getal, ontbindingen van getallen in vreemde talstelsels, kenmerken van deelbaarheid voor getallen in vreemde talstelsels, ik doe ze in mijn Rekenkunde voor onderwijzers niet eens; dat is leerstof voor KI, maar dan naar den eisch natuurlijk. Later de hoofdbewerkingen met repeteerende breuken in andere talstelsels, al of niet in verbinding met evenredigheden en metriek stelsel!! Zie als een buitenstaander dat verneemt, dit leest, dan noemt hij leeraren, die dat met een eerste klas durven bestaan......; laat ik het niet zeggen, vul zelf maar in. Hij zal hetzelfde zeggen als U, als ik vertel, dat ze voor het politie-diploma noodig hebben repeteerende breuken (is dat om het begrip recidivist aan te brengen?) en voor het examen van kommies talstelsels!

Maar doet U zelf dan niets aan repeteerende breuken en talstelsels? Als ik tijd heb (wie heeft dien thans nog?), soms, een beetje; ik heb ze als aanteekening opgenomen en wie ze behandelen wil, mag dat doen. Ik heb ze dikwijls overgeslagen en niet gemerkt, dat er een gaping in hun kennis was. Leven we thans ook niet gelukkig zonder de derdemachtsworteltrekking in het rekenen, zonder de opzettelijke behandeling van de overgeleverde „practische” vraagstukken als daar zijn kettingregel (afgedaan in het Handelsrekenen, al tientallen jaren), Gezelschapsregel (17e en 18e eeuw's goed), Interestrekening (dat zijn sommen met % er in!), Mengingrekening, enz., enz., allemaal dingen, die kinderen niets en dan ook niets wijzer maken. Het wordt toch zoo hoog tijd, dat we dien rommel op onze H. B. S. opruimen, van het etiket „Uit de oude doos" voorzien en ergens in een hoek wegstoppen. „Repeteerende breuken, zoo waar opofferen; 't is toch zoo aardig en het gaat zoo gemakkelijk!" Zeker, ik schrijf over, wat ik in mijn Theorie der Rekenkunde schreef na de goede behandeling, die ik straks verkort laat volgen.

„Ongewoon, heel ongewoon, vooral dat laatste", zegt menigeen; nooit anders gezien dan aldus: $0,\dot{8}6\dot{2}$; noem deze breuk b (in een rekenkundeboek volgens ouden trant mag dat niet, dan moet je zetten: de repeteerende breuk!), dan heeft men:

$$\begin{array}{rll} 1000\,b = & 862,\dot{8}6\dot{2} & \text{of } 862,862862\ldots\ldots \\ b = & 0,\dot{8}6\dot{2} & 0,862862\ldots\ldots \\ \hline 999\,b = & 862;\ b = \frac{862}{999} & \end{array}$$

„Bezwaren?" Zeker, die zijn er en heel gegronde: 1) Heeft U gedefinieerd: het product van een repeteerende breuk en een natuurlijk getal? 2) Heeft U gedefinieerd: het verschil van twee repeteerende breuken? 3) Hoe zit dat daar geheel rechts? Geen leerling heeft nog ooit bevrediging gevonden met die twee rijen decimalen, die toch maar altijd en altijd een periode verschillen. „Och, jongen, dat is immers niet meer dan één korreltje in onze duinenrij!" Met zoo'n dooddoener wordt de jonge mensch, voor wien men *wiskunde* op den rooster zette, afgescheept. „Neen", zegt een ander, die mij gelijk geeft, „het gaat beter door een repeteerende breuk als meetkundige reeks te beschouwen; dus als volgt: $0,\dot{8}6\dot{2} = \frac{862}{10^3} + \frac{862}{10^6} + \frac{862}{10^9} + \ldots\ldots + \frac{862}{10^{3n}}$, waarin n elk willekeurig-groot getal kan overtreffen, dus $\lim\limits_{n=\infty} S = \frac{862}{999}$".

Welke begrippen moeten echter vooraf worden aangebracht? De begrippen: reeks, meetkundige reeks, afdalende reeks, oneindig voortloopende reeks, begrip convergentie, begrip limiet; men moet de som bepalen van n termen en het bewijs leveren van $\lim\limits_{n=\infty} r^n = 0$ voor $|r| < 1$. Voorwaar geen kleinigheid, maar dan wordt het goed. Collega's, laat toch schieten die repeteerende breuken; en als ge ze behandelt, doe het dan niet zoo prullig als boven.

De theoretisch juiste en zeer simpele manier hier even in het voorbijgaan: *ik krijg een repeteerende breuk, als het deeltal als rest terugkeert;* de voortbrengende breuk noem ik $\frac{t}{n}$; we deelen dus achtereenvolgens $\frac{t\,.\,10}{n}$, $\frac{t\,.\,10^2}{n}$, $\frac{t\,.\,10^3}{n}$, enz. en vinden weer t tot rest; is nu de periode b.v. 351, dan hebben we (omdat Deeltal $=$ deeler $\times$ quotient $+$ rest is)

$$t\,.\,10^3 = n\,.\,351 + t, \text{ dus } t \times 999 = 351.$$

Voor een gemengd repeteerende breuk 0,61486 aldus; eerst laat ik er een stuk of wat uitdeelen en dan komt de theorie (zonder steenen voor brood): de breuk $\frac{t}{n}$ gaat repeteeren, als een rest weer terugkeert; zij die rest r; dan is

$$\begin{array}{rcl} t.10^5 & = & 61486 \times n + r \\ t.10^2 & = & 61 \times n + r \\ \hline t.10^2.999 & = & 61486 - 61; \end{array}$$

de rest volgt wel. Beide „simpel comme bonjour" en volkomen in orde, zooals zoo dikwijls het ware het in eenvoud van vorm en zuivere gedachte wint van het onware en gewrongene. En waarom dan toch Uw leerlingen zand in de oogen strooien door hun een paar kunstjes te leeren?

Maar, zooals gezegd, ik vind het nog beter om er heelemaal niets aan te doen en ook om over de talstelsels te zwijgen. De leer der talstelsels behoort in het vak Rekenkunde, maar ook daar en daar alleen zijn ze noodig; daar heeft ons tientallig stelsel niets voor op ieder ander. Voor kinderen is het van nul en geener waarde; het geeft niets voor hun ontwikkeling, evenmin als in de algebra b.v. in de eerste klas de merkwaardige quotienten, ook al een onderwerp uit de Getallenleer; dat men daarmee dan toch maar $\frac{p}{\sqrt[5]{7}-\sqrt[5]{2}}$ tot een vorm met rationalen noemer kan herleiden, is geen reden tot behandeling, omdat zoo'n opgave hoe eer hoe beter behoort te verdwijnen.

Wat ik dan wel doe? — Zooals gezegd, na de Kerstvacantie hebben we nog 44 lessen. De deelbaarheid eischt bij mij niet meer dan 7 à 8 lessen, de verhoudingen nog een stuk of 3, 4, samen zeg 14 à 15 lessen, niet aaneengesloten, maar verdeeld over alle maanden, zonder regel; heeft de klas net een paar uur mondeling les gehad in andere vakken, dan geef ik ze wat schriftelijk werk; kinderen willen graag zelf bezig zijn. En de evenredigheden? Die heb ik in de eerste klas zelden of nooit behandeld; die bleven voor September in de tweede klas over; van de behandeling, ik moet het eerlijk zeggen, maak ik geen heilig werk; als men uitgaat van de eenig goede vormen, steunende op de bepaling $a : b = pa : pb$ of $ap : a = bp : b$, dan loopt alles zoo zeldzaam eenvoudig; ook weer als gevolg van de hulp- en hoofdacte-examens van vroeger, zijn die evenredigheden tot in het onzinnige uitgezet en opgeblazen tot iets, dat belangrijk scheen; het is bitter noodig, dat ze tot haar uiterst geringe proporties worden teruggebracht, „evenredig" aan haar onbelangrijkheid; maar waar er zooveel sleur heerscht en over ons onderwijs in wiskunde nog zoo'n dichte nevel hangt van dufheid en overlevering en schoolmeesterij en gebrek aan inzicht, gepaard met onverschilligheid en onderhouden door gemakzucht...... daar vrees ik, dat we nog langs houden:

$$19\tfrac{3}{4} : x = 9{,}351\text{m} : \frac{1}{2{,}62\dot{4}8\dot{6}}\ \text{a};$$

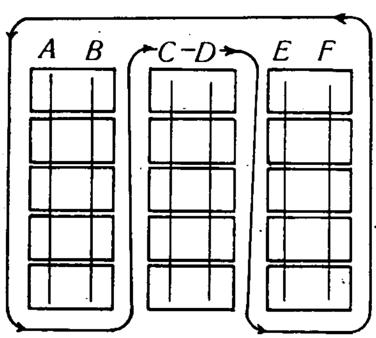
Van $a : b = c : d$ is gegeven $a + 3b = 5{,}\dot{8}5714\dot{2}$, $c + 3d = 11{,}\dot{7}1428\dot{5}$ en $a + c = 5{,}\dot{2}8571\dot{4}$; bepaal a, b, c en d.

Zelfs werd mij laatst nog te kennen gegeven, dat men in mijn boekje miste den naam „verzamelevenredigheid"; het was voor het eerst, dat ik het woord hoorde (ik heb toch wel eens iets aan Rekenkunde gedaan). Uit de bewoordingen kon ik opmaken, dat het als een gebrek werd opgevat; bij navraag bleek, dat bedoeld werd dezen naam te geven aan $a : b : c : d = 2 : 3 : 4 : 5$. Ik meen het ontbreken als een deugd aan te merken; daarover moeten zeker ook weer stellingen gemaakt worden! Het is een minder goede schrijfwijze voor $a : 2 = b : 3 = c : 4 = d : 5$; ik wijs daarop in één vraagstukje, dat is genoeg, eigenlijk al te veel. Een lezer werpt tegen: „Maar men zegt toch, ik zwijg met U over den gezelschapsregel, een lijnstuk AB wordt verdeeld in stukken, die zich verhouden als $p : q : r$?" „Niet fout, al zou ik liever zeggen, als de getallen p, q en r, maar $AX : XY : YB = p : q : r$ is zinloos"; „Goed, een symbool", „Maar men kan toch net zoo vlug zetten en dan is er niets op aan te merken $AX : p = XY : q = YB : r$; wil je het nu beslist zoo hebben, doe het dan op de oude, zeer oude manier, nog in Engeland in gebruik, en zet $AX : XY : YB :: p : q : r$; die manier is goed en sticht geen verwarring".

Aldus de evenredigheden met verstandige beperking in de tweede klas.

Ik heb nu nog een kleine 30 lessen over in de eerste klas. Deze besteed ik vooral aan de vraagstukjes achterin mijn Rekenboek. Daarin komen heel wat cijferoefeningen voor, heel wat eenvoudige theorievragen, allerlei wetenswaardige zaken en dan wat sommetjes, die een vervolg zijn op het geleerde in de lagere school; geen raadsels, noch verkapte algebra, maar voor het overgroote deel vraagstukjes met rechtstreeksche berekeningen, zoodat niet of nauwelijks voorkomt, dat ze een x kunnen stellen. „En welke waarde hecht U aan het maken van die sommetjes? U wilt schoonmaak houden en dan moeten die sommetjes toch zeker eerst opgeruimd worden?" „Dat de leerlingen ontwassen zijn aan de gewone cijferoefeningen, aan eenvoudige vraagstukjes, dat zult U toch niet meenen, zeker? Hoe menigvuldig zijn niet de klachten, dat de leerlingen zelfs de meest gewone bewerkingen niet kunnen uitvoeren, dat ze opzien tegen getallen van 4 of 5 cijfers, dat ze later in algebra, natuurkunde, handelsrekenen, onvoldoende resultaten te wijten hebben aan slecht rekenen, aan slordigheid, aan onnauwkeurigheid?" „Dus U denkt ze dat door die sommetjes af te leeren?" „Afleeren is wat veel, dat weet U ook wel, maar wel kunnen we veel doen. Ik zal U zeggen, hoe ik die lessen geef."

Zonder iets te zeggen, schrijf ik op (ik heb van te voren keuze gedaan) b.v. Serie XII, 1 en 5, XIII, 1, 5, 6; in een oogwenk zitten ze met hun boek en schrift en een stukje papier voor het uitcijferen voor zich en zitten te werken. Deze vraagstukken moeten alle zoo gekozen zijn, dat de leerlingen niet optornen tegen elk sommetje; het moet dus niet van het slag zijn, waarmee vroeger de leerlingen der normaal- en kweekscholen geplaagd werden en die voor hulp- en hoofdacte werden opgegeven en dus zijn overgebracht op de H. B. S. Zelf neem ik het antwoordenboekje in de



linkerhand (de meeste sommetjes zijn daarin voorzien van de volle becijfering) en gewapend met het roode of blauwe potlood loop ik regelmatig rond, waarbij ieder zijn beurt krijgt.

Loop ik langs rij A, dan kijk ik niets na van rij B of omgekeerd, noch geef ik antwoord aan een van rij E, die wat wil vragen; na een paar keer weten ze wel, dat ik bij allen eenige keeren kom; de rijen B en C, ook D en E worden gelijk nagezien; hoeveel keer ik rondloop? Geteld heb ik dat nooit, maar 10 keer zeker. Wat ik dan doe? De vraagstukken doen er niets toe, die schrijf ik hier niet op, ook niet de rekenfouten, wel de slordigheden, die men te zien krijgt. Het volgende is letterlijk overgeschreven van werk, door leerlingen gemaakt, een paar weken of een paar maanden na hun intrede in de 1e klas. De leeraren, die mij het werk van hun klasse leverden, zijn er in geen enkel opzicht voor verantwoordelijk.

1) ieder 13 15 over
$6 \times 13 = 78\ n$
ieder 2 meer
dus toen waren er 39 k
eerst waren er 39 $k + 6\ k = 45\ k$
er waren $45 \times 13n = 585n + 15 = 600n$

2) $^1/_{12}$ v/h werk; $^9/_{16}$ v/hw **3**) A + B doen

4) Als meervoud van het woord kind tref ik aan: k, kind, kinde, kinder, kinden, kindere, kinderen; als meervoud van noot deze: n, noot, noote, nooten. **5**) 12 dg. **6**) In die 12 d dat A weg is heeft gedaan $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$. Ze moet samen nog doen. C kan het werk dus doet in $7\frac{11}{19}$ d. **7**) B + C moeten nog doen $\frac{7}{16}$ v h werk B doet in die 3 dagen $\frac{3}{16}$. C doen $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ per dag doet C $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ hij kan het werk in 12 dagen doen. **8**) Een oplossing van 13 regels (8 te veel!) zonder een enkele hoofdletter, zonder één leesteeken; alleen achter w. die punt. **9**) A doen; nodig; gewoone breuken. **10**) 3 % van f 4800 = 3 × f 48. **11**) C heeft $\frac{7}{17}$ van B. de verh van de aandeelen van A B en C = 338 : 442 : 182. **12**) 3 % v f 4800 = f 147. **13**) De verhouden van A B en C = 13 : 17 : 7. **14**) Verhouding 338 : 442 : 154 = 934. **15**) A : B : C = 13 : 17 : 7 = 37. **16**) In eenzelfde vraagstuk: per week, p week, per w, pw **17**) De v loopt noch 12,5 KM voor ze elkaar ontmoeten = 2,5 uur (v = voetganger).

18) meegenomen f 150
over f 52

uitgegeven f 98

als hij er twee dag is heeft hij 4 hg uitgegeven in 2 d 2 gl 14 dagen heeft hij f 7 per dag uitgegev = f 98.

19) 4 m + 2 vr; 1 vr verdien; halfe; wand (wandelaar); 1 Minut; uitgeven (= uitgegeven).

20) Moet deelen door 10,7, vergist zich en plaats de koma tusschen de beide 1e getalen verschil $6\frac{12}{13}$, enz.

21) De wielrijder kan hem in 75 KM : 15 = 5 uur doen.

22) A vertr om 9 uur En kom 1 uur 36 m. — R moet nog 3 KM in Halen.

23) Hij had dus 2 × f 98 = 186 stuivers uitgegeven.

Dat versch met de 2 bilj van f 25 14 maal dus hij is 180 : 14 = 14 dagen op reis geweest.

24) plaas (plaatst); antwoor; get (getal) v vertrek 9 uur; voetg; wielr vertr; bij thuisk; uitgeg.

25) Hij had uitgegeven 52 — 150 = f 98. **26**) 4 m + 2 v in 12 w f 1008.

26) Weg lang 70 KM. V per uur 5 KM W per uur 15 KM verhouding V : W = 15 : 5 = 3 : 1 (V = voetganger en W = wandelaar).

27) Meegenomen f 150. Bij terugkeer f 52 over. Heeft verteerd f 98. **28**) voetganger 5000 M p uur wielrijder 15000 M p uur voetganger ligt van 9 uur tot 1 u 36 m = 4.36 21,80 KM wielrijder begint nu zij ontmoeten elkaar dus om 1 u 42 m.

Ieder van U kan deze fraaie verzameling met bladzijden vermeerderen; geen leesteekens, geen hoofdletters, puzzles van afkortingen, taalfouten bij dozijnen, alle mogelijke en onmogelijke rekenfouten, grenzenlooze slordigheid in alles en dan ook in alles, om nu maar te zwijgen van het schrift der leerlingen, dat over het geheel zelfs niet aan de allermatigste eischen voldoet. „En wilt U daarop wijzen? Maar dat is een onbegonnen werk!" In letterlijken zin niet onbegonnen; men moet er zoo spoedig mogelijk mee beginnen (zooals gezegd, is er voor Kerstmis wegens de dringende behoefte aan steun, die de algebra eischt, weinig of geen tijd voor); begin er aan, zooals de boer aan een akker vol onkruid; doe het met kracht en doe het aldus: loop rond; weiger vraagstukjes, die niet in zinnen met onderwerp en gezegde zijn opgeschreven; haal er een flinke streep door: „straks hoor, eerst netjes opschrijven". Vuil schrift met veel doorhalingen, het heele blaadje uitgescheurd. Geen hoofdletters, geen punten? Eerst verbeteren. Afkortingen? v/h kap, int, perc, pw, p dag, vertr, versch, pr, enz. enz. Die maak ik bespottelijk voor allen door op het bord te schrijven: 7 m + 2 v verd p w *f* 129 (ook geen phantasie, lezer, maar droeve werkelijkheid); kap = 200 + *f* 3000 = *f* 3200 = 5 % dus andere kap *f* 64000. Algemeen voorkomende slordigheden worden op het bord behandeld: „de pennen neergelegd, let op". Op het bord schrijf ik: „Jan + ik be — n + 1 goed + × tijd". Dat gaat niet, dat vinden ze ook wel, maar „A + B doen" schrijven ze met pleizier: „Als ik zoo iets weer zie, moet je toch de som overmaken". Na eenige weken is het werk wel niet volmaakt, maar reeds dragelijk; van lieverlede wordt het beter, mits men zelf niet versaagt in den strijd tegen knoeiwerk. — Meer werk heeft men met andere fouten, opgenomen onder 11—15. Het is niet voldoende, dat het antwoord er staat, wat, als gevolg van het knoeiwerk, ook te dikwijls mist; ook op den vorm en den inhoud dient gelet. Zulke slordigheden als $45 \times 13n = 585n + 15 = 600n$ en die onder 11—15 worden klassikaal besproken en er wordt uitgelegd en er wordt opgeschreven, hoe het wel moet. Op kleinigheden wordt elk der leerlingen bij de rondgangen afzonderlijk gewezen; zoo'n rekenuur is voor de leerlingen tevens een netheidskuur in vele opzichten. Als ik dan weer rond kom en het aangewezene is verbeterd, dan wordt de som met een groote G goedgekeurd. Voor de kinderen een genot, als ze zien, dat ze opschieten en voor mij ook nog zoo kwaad niet (we mogen ook wel eens aan ons zelf denken; ik durf dat hier gerust zeggen, want niemand zal mij verdenken van „liever lui dan moe"); als het uur immers om is, dan heb ik $^4/_5$ van het werk al gezien en goedgekeurd en heb ik tevens een norm voor de toe te kennen cijfers; de schriften opgehaald, meegenomen; de rest van het nakijken en het cijfers geven duurt nauwelijks nog een kwartier; slordigheden, waarvoor geen tijd meer was ter verbetering, worden niet zoo zwaar geteld, ook niet aangestreept. We kennen allen de uiterst geringe belangstelling (voor de jongeren onder ons, die zooveel uren besteedden aan het aangeven en verbeteren van foutjes zelfs sarrende onverschilligheid) voor al die roode en blauwe streepjes in het werk, dat ze na een paar dagen terugkrijgen: „Wat heb jij?" „Een 4"; ze zouden er liefst een prop van maken en die in den prullenmand keilen. „Fijn, jô, ik een 7". Dat is alles. Dwingen tot belangstelling veinzen? Laat het a.u.b.

En nu kom ik op een nog grooter voordeel van mijn rondgangen (bij de andere vakken, als er schriftelijk wordt gewerkt, gaat het net zoo). — Als men mij schrijft: „Op blz. ... regel ... van dit of dat boek staat ......; zou het niet beter zijn, dat U schreef ....?" Wat moet ik dan doen? Het boek opslaan, het heele vraagstuk weer doordenken en de verandering overwegen. Had iemand bij het schrijven over mijn schouder gekeken en dezelfde opmerking gemaakt, dan had ik direct zijn meening tegen de mijne kunnen wegen. De belangstelling voor afgedaan werk daalt spoedig; die daling is zeker recht evenredig met de derdemacht van den tijd tusschen de aflevering en de oprakeling. Bij leerlingen is de belangstelling 0,0; klassikale bespreking van al die slordigheden en foutjes in het werk van anderen geeft teveel tijdverlies en is voor hen, die ze niet maakten, onnoodig. *Het groote voordeel van het voortdurend en nooit aflatend toezicht is, dat het geschiedt op het oogenblik, dat het werk wordt gemaakt;* op elke slordigheid wordt onmiddellijk gewezen, elke fout wordt dadelijk aangestreept; de leerlingen worden om zoo te zeggen op heeterdaad betrapt bij het neerschrijven van domme dingen en van onvolkomenheden van den vorm met het niet geringe en door hen hoog geschatte voordeel, dat de som na verbetering nog wordt goedgekeurd; schrijft hij $\frac{265}{234} \times \frac{26}{53} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, dan zet ik door de 3 van $^3/_9$ een streepje; bij den volgenden rondgang, als $^3/_9$ in $^5/_9$ veranderd is, wordt de som goedgekeurd; zet hij: 3 % v. *f* 4800 = *f* 147, dan haal ik er een streep door, wijs even (zeg niets) op zijn foutjes; heeft hij bij den volgenden rondgang verbeterd: 3 % van *f* 4800 is *f* 144 of 3 % van *f* 4800 is 3 × *f* 48 = *f* 144, dan wordt de som, als dat de eenige fout was, goedgekeurd. — Nog een voordeel: als een goed deel der leerlingen een zelfde fout maakt of toont, niet voort te kunnen of een zelfde onhandigheid begaat, dan heb ik dat direct in de gaten; even de pennen neer en een soortgelijk geval op het bord heel kort behandeld. Een paar voorbeelden: 1) „1 cm³ kwik weegt 13,596 gram; bereken, hoeveel cm³ kwik zich bevindt in een kruikje, dat gevuld met kwik 6 kg weegt en met water 1 kg; het antwoord afronden naar boven in heele cm³." Dit vraagstuk slaan ze graag over. Ik teeken op het bord twee even groote kruikjes op elke schaal van een balans een; evenwicht; nu giet ik in het eene water (de kruik wordt van binnen met het platte krijt wat wit gemaakt), in het andere kwik (wordt dik met krijt bewerkt); in een oogwenk hebben ze te pakken, dat het verschil in gewicht van 5 kg ligt aan het verschil in gewicht per cm^3 van water en kwik; met andere getallen even voor laten doen op het bord. De som is nog niet af, of de helft begint het vraagstuk uit het boek al in het schrift uit te rekenen; laat ze maar gaan. De som wordt bij het cijfers geven meegeteld; dat houdt er den moed in. 2) Als ze moeten uitrekenen $\frac{8}{31}$ van $f\,300$ en ze rekenen uit $8 \times \left(\frac{1}{31} \times f\,300\right)$ in plaats van $\frac{8 \times f\,300}{31}$, dan wordt dit klassikaal even behandeld en uitgelegd, waarom het laatste beter is. 3) Ze weten eigenlijk niet goed weg met het vraagstukje: bereken x en y, als $257\,x\,35\,y$ deelbaar moet zijn door 99. Op het bord wordt een ander getal genomen, b.v. $61\,x\,25\,y\,42$; de som der vakjes van twee cijfers moet door 99 deelbaar zijn; dus

$$\begin{array}{l} 42 \\ 5\,y \\ x\,2 \\ 61 \\ \hline 99\text{-voud} \end{array}$$

; maar dat kan alleen, als de som 198 is, dus $y = 3$ en $x = 4$.

Een enkel vraagstukje, nauwelijks één op de twintig, behoeft opzettelijke behandleing; daarop zijn ze gemaakt.

Niet genoeg kan ik er op drukken, dat toch vooral gelet wordt op ordelijke en nette uitvoering van het werk; ik hoop U in het kort te hebben laten lezen, hoe ik dat trachtte te doen en met succes. Vitterig moet men niet zijn, men behoeft niet op alle slakken zout te leggen en als de oplossing ermee door kan, nou, keur dan maar eens een sommetje goed, al is er nog wel wat op aan te merken. Het werk van de leerlingen moet in elk geval worden nagezien, waarom dan maar niet, terwijl het gemaakt wordt? Ook het huiswerk, wat niet beteekent, dat men er telkens een cijfer voor moet geven. Niets zoo ontmoedigend voor een leerling, dan dat er geen nota wordt genomen van de vruchten van zijn inspanning; de ijver, waarmee hij begint, verflauwt al heel spoedig en zijn lust voor het heele vak wordt gebluscht; collega's: „het oog van den meester maakt het paard vet"; nu is een vet paard wel geen ideaal, maar het spreekwoord wil het nu eenmaal zoo. Voor U beteekent het: *terwijl het werk gemaakt wordt,* kijk dan, hoe het gaat, wijs terecht, verbeter, help den leerling over het doode punt heen, leid hem, moedig hem aan en als het werk af is, toon dan Uw belangstelling door het verder na te zien en te keuren; eisch weinig huiswerk (cijferoefeningen, metriek stelsel, zijn daarvoor zeer geschikt), maar neem daar ook nota van. Mishandeling van het kind noem ik het, als de klasse ervaart (geen phantasie, maar gemeene werkelijkheid): „je schrijft maar wat op, als het goede nummer er maar voor staat, dan is dat genoeg"; als je op je aandringen thuis om toch zijn best te doen van den leerling hoort: „waarvoor, hij kijkt er toch niet naar; ik kan mijn tijd beter besteden voor......"; noem maar een vak, lezer. „Rapport-cijfer? Eén repetitie; als je boft, heb-je een 8, als je wanboft een 3".

Uiteraard werkt een kind graag, maar het moet werk zijn naar zijn krachten; men wake er tegen, dat hij tegen de helft of meer van de stof optornt.

De rekenlessen, zooals ik die geschetst heb, zijn zoo'n kostelijke oefening, een genot voor de leerlingen, voor den leeraar ook en een welkome afleiding van de „zit-stil" en „luister"-lessen.

P. W.

DE ONTWIKKELING VAN HET RUIMTEINZICHT.

Met zeer veel belangstelling heb ook ik de polemiek gelezen over deze materie tusschen Mevr. Ehrenfest en den Heer Dijksterhuis in de eerste twee nummers van dit Tijdschrift en ik geloof met één der beoordeelaars van het Tijdschrift, dat de meeste collega's, die aan gevorderde leerlingen stereometrie hebben te onderwijzen, zich in hun overtuiging zullen plaatsen aan de zijde van den heer D. De heer D. formuleert zijn methode in de volgende bewoordingen: „synthetische opbouw van het ruimteinzicht, uitgaande van de correct bewezen stellingen van den systematischen cursus" [1]) en hij bedoelt er mee de gezette oefening in het leeren geven van een logische redeneering, die speciaal bij de stereometrische constructies door strenge scheiding der gegevens de oplossing leert vinden, zonder dat aan het voorstellingsvermogen van den middelmatigen leerling te hooge eischen worden gesteld.

Hij verwacht, dat, al zullen dan in het begin de oplossingen worden gegeven, zonder dat het voorstellingsvermogen in staat is alle gegevens te omvatten, dit voorstellingsvermogen geleidelijk door de logische redeneering zal worden ontwikkeld en er zoo langzamerhand meer van kan worden gevergd. Ik deel deze overtuiging van den heer D., ten deele ook door wat ik aan mezelf heb waargenomen, maar meen, dat zijn methode, die waarschijnlijk de methode is van den gemiddelden wiskundeleeraar, nog zeer kan worden versterkt, door niet enkel de stellingen der stereometrie *systematisch* te geven, maar ook door den door hem genoemden „synthetische opbouw van het ruimte-inzicht", langs *systematischen* weg tot stand te brengen.

Zeer stellig beschikken we in de constructieleer over het eenige afdoende middel om het ruimte-inzicht te ontwikkelen. Daarover wil ik het in het volgende dan ook hoofdzakelijk hebben. Maar

---

[1]) Zie bl. 22 t. a. p.

ook bij het bewijs der stellingen en bij het oplossen van andere dan constructievraagstukken kunnen we langs systematischen weg werken aan de ontwikkeling van het ruimteinzicht, nl. door veel meer dan in eenig stereometrieboek ten onzent geschiedt gebruik te maken van de analogie met de vlakke meetkunde. Die analogie is frappant, maar ook daar, waar ze ontbreekt, is het waardevol, na te gaan, *waarom* ze ontbreekt en we werken op deze wijze meer aan de ontwikkeling van het ruimteinzicht, dan we zelfs met de meest verfijnde uitlegkunst zouden kunnen, wanneer we niet meer gaven dan een correct bewijs van de stellingen uit den systematischen cursus. Het is mijn ervaring bovendien, dat juist met dit machtige middel van de analogie, de stereometrie er veel „gemakkelijker" op wordt voor de gemiddelde leerling en ook dat is van waarde. Over die analogie wil ik te gelegener tijd ook nog wel iets publiceeren, maar zal me in het volgende beperken tot de stereometrische constructies als inderdaad het machtigste middel ter ontwikkeling van het ruimteinzicht.

* * *

Er is een kenmerkend onderscheid tusschen de constructies der stereometrie, zooals we die door onze leerlingen laten maken en die der planimetrie. Waar bij de laatste het construeeren van *figuren* uit verschillende gegevens vooropstaat, daar blijven de meeste stereometrische constructies beperkt tot het construeeren van de ruimte-*elementen* punten, lijnen en vlakken, die aan bepaalde voorwaarden moeten voldoen en ontbreken de constructies van ruimte*figuren* vrijwel geheel. Waarschijnlijk ten deele, doordat de constructie dezer elementen alleen reeds voldoende verscheidenheid biedt, doch stellig ook, doordat de constructieleer der ruimte-elementen niet voldoende doorwerkt is, om met succes ook aan de constructie der ruimtefiguren te beginnen. Ik wil in het volgende een poging wagen tot een eersten opbouw van een dergelijke systematische bewerking, zonder daarbij aan te geven, wat er van op de middelbare school is te behandelen. Aan de collega's dan het oordeel, of er eenige waarde in steekt voor de gewenschte ontwikkeling van het ruimteinzicht.

Om te beginnen scheid ik scherp van elkaar de *richting* van lijnen en vlakken van hun *ligging* in de ruimte, bepaald door hun *afstand* tot gegeven punten, lijnen of vlakken. Verder wordt in het