

BIJVOEGSEL

VAN HET NIEUW TIJDSCHRIFT

□ □ VOOR WISKUNDE □ □

GEWIJD AAN ONDERWIJSBELANGEN

ONDER LEIDING VAN

J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

MET MEDEWERKING VAN

Dr. H. J. E. BETH
DEVENTER

Dr. E. J. DIJKSTERHUIS
OISTERWIJK

Dr. B. P. HAALMEIJER
AMSTERDAM

Dr. D. J. E. SCHREK
UTRECHT

Dr. P. DE VAERE
BRUSSEL

Dr. D. P. A. VERRIJP
ARNHEM

3e JAARGANG 1926/27, Nr. 3



P. NOORDHOFF — GRONINGEN

Prijs per Jg. van 10 à 12 vel f 4.—. Voor intekenaars op het
Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde en Christiaan Huygens f 3.—.

Het Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde verschijnt in zes tweemaandelijksche afleveringen, samen 10 à 12 vel druks. Prijs *f* 4.— per jaargang. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6.—) of op „Christiaan Huygens” (*f* 8.—) zijn ingeteekend, betalen *f* 3.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam, Frans-van-Mierisstraat 112; Tel. 28341. Aangeteekende zendingen met bijvoeging: „Bijkantoor Van-Eeghenstraat”.

Het honorarium voor geplaatste artikelen bedraagt *f* 20.— per vel.

De prijs per 25 overdrukken of gedeelten van 25 overdrukken bedraagt *f* 3,50 per vel druks *in het vel gedrukt*. Gedeelten van een vel worden als een geheel vel berekend. Worden de overdrukken buiten het vel verlangd, dan wordt voor het afzonderlijk drukken bovendien *f* 6.— per vel druks in rekening gebracht.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

I N H O U D.

Dr. PAUL DE VAERE, Naar aanleiding van de verdeling in de uiterste en middelste reden. (Vervolg)	
VERSLAG, door de Vereeniging van Directeuren van Hoogere Burgerscholen met 5 jarigen cursus, inzake het rapport der Commissie-Beth, uitgebracht aan den Inspecteur Dr. E. JENSEMA	69
OPMERKINGEN naar aanleiding van het Verslag, door het Bestuur van de Vereeniging van Directeuren van Hoogere Burgerscholen met vijfjarigen cursus, uitgebracht in zake het ontwerp-leerplan voor Wiskunde en aanverwante vakken	73
RAPPORT van het Bestuur van de Vereeniging van Leeraren in de Wiskunde, de Mechanica en de Kosmographie aan Hoogere Burgerscholen met vijfjarigen cursus B, Lycea en Meisjes Hoogere Burgerscholen met 5-6 j. cursus	80
Eenige opmerkingen betreffende het ontwerp van een leerplan der commissie-Beth	84
Boekbespreking (Wordt vervolgd)	92

Voor de complete jaargangen 1 en 2 (samengebonden) zijn losse banden verkrijgbaar bij den uitgever P. NOORDHOFF te Groningen à *f* 1.25.

VERSCHENEN:

A. A. D. BOUWHOF en J. C. LAGERWERFF

HANDELSREKENEN.

Deel I *f* 2.25. Antwoorden *f* 0.50. — Deel II *f* 2.30. Antwoorden *f* 0.50
Deel III *f* 2.90. — Deel IV verschijnt begin 1927.

Uitvoerige uitwerkingen der vraagstukken voor leeraren I III à *f* 1.00.
Hiervan worden geen pres.-exem. verstrekt.

UITGAVE VAN P. NOORDHOFF TE GRONINGEN.

Schrijven we nu

$$BX' - AB = AX', \quad BX' \cdot AB = AX'^2,$$

dan leiden we daaruit af, in verband met het slot van nr. 3, dat

$$(AX')_a = BX', \quad (AX')_i = AB,$$

wat met (9) en (8) gelijkstaat.

Daar verder

$$(AX')_j = AX' - (AX')_i = AX' - AB = AX,$$

is ook (10) bewezen.

De betrekkingen (3), (8), (2), (7) leveren dadelijk de oplossing van de vier vraagstukken:

Het segment AB terugvinden (door een meetkundige constructie) als gegeven is één van de vier stukken AX, AX', BX, BX'.

III. REGELMATIGE TIENHOEKEN.

1. Verschillende soorten van regelmatige n -hoeken.

Is een cirkelomtrek in n gelijke deelen verdeeld en verbindt men de deelpunten om de p ($p < n$) — zoodat elke koorde een boog $= \frac{p}{n}$ van den cirkelomtrek onderspant — dan ontstaat steeds een regelmatige veelhoek, al of niet convex. Het aantal zijden van dien veelhoek is gelijk aan het quotiënt van n door den grootsten gemeenen deeler van n en p . Opdat de gevonden veelhoek een n -hoek zij, is het dus noodzakelijk en voldoende, dat p onderling ondeelbaar is met n . Daaruit leidt men gemakkelijk deze stelling af:

Er bestaan zooveel soorten regelmatige n -hoeken, als er getallen zijn kleiner dan $\frac{n}{2}$ en onderling verdeelbaar met n , dus $\frac{\varphi(n)}{2}$.

s bijv. $n = 15$, dan mag men $p = 1, 2, 4, 7$ nemen.

Er zijn dus vier soorten regelmatige vijftienhoeken, waarvan we de zijden voorstellen door

$$C_{15,1}, \quad C_{15,2}, \quad C_{15,4}, \quad C_{15,7};$$

de eerste alleen is convex. Hunne middelpuntshoeken bedragen opvolgend:

$$\frac{360^\circ \times 1}{15}, \quad \frac{360^\circ \times 2}{15}, \quad \frac{360^\circ \times 4}{15}, \quad \frac{360^\circ \times 7}{15}.$$

[Daar niet-convexe regelmatige veelhoeken de gedaante aannemen van sterren, zou men ze *regelmatige ster-veelhoeken* kunnen noemen.]

2. *De twee soorten regelmatige tienhoeken.*

Is $n = 10$, dan mag men $p = 1, 3$ nemen.

Er zijn dus twee soorten regelmatige tienhoeken: de convexe en de stervormige. De eerste ontstaat, als men de opeenvolgende deelpunten verbindt van een in tien gelijke deelen verdeelden cirkelomtrek; zijn zijde noemen wij $C_{10,1}$; de tweede ontstaat, als men diezelfde deelpunten om de drie verbindt; zijn zijde noemen wij $C_{10,3}$.

3. *Stelling.*

1) *De zijde van den convexen regelmatigen tienhoek in een cirkel beschreven is het grootste stuk van den inwendig in U. M. R. verdeelden straal.*

2) *De zijde van den stervormigen regelmatigen tienhoek in een cirkel beschreven is het kleinste stuk van den uitwendig in U. M. R. verdeelden straal.*

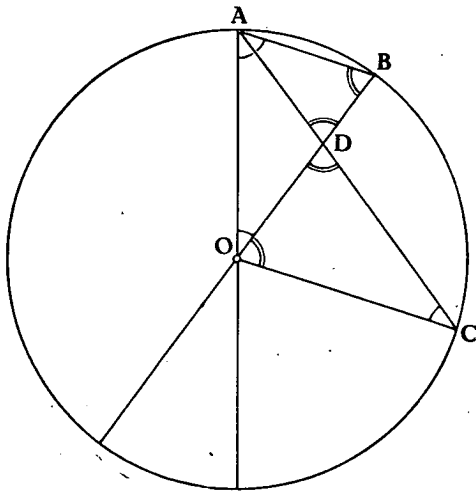


Fig. 17.

Bewijs. Noemen we R den straal, dan kunnen we vo met te bewijzen dat

$$\begin{aligned} & C_{10,3} - C_{10,1} = R, & C_{10,3} \times C_{10,1} &= R^2 \\ \text{of} & AC - AB &= R, & AC \cdot AB &= R^2. \end{aligned}$$

Alle hoeken in de figuur met één boogje aangeduid zijn gelijk (36°) daar zij gelijke boogmaat hebben; hetzelfde geldt voor de met twee boogjes gemerkte hoeken (72°). Bijgevolg is

$$AC - AB = AC - AD = DC = OC = R.$$

De gelijkbeenige driehoeken OAD en ACO zijn gelijkvormig (een basishoek gemeen); dus is

$$\frac{OA}{AC} = \frac{AD}{CO} \text{ of } \frac{R}{AC} = \frac{AB}{R} \text{ of } AC \cdot AB = R^2.$$

Gevolgtrekking: $C_{10,1} = \frac{R}{2} (\sqrt{5} - 1);$

$$C_{10,3} = \frac{R}{2} (\sqrt{5} + 1).$$

4. *Constructies voor de regelmatige tienhoeken in een cirkel beschreven.*

Elke constructie van § II, nr. 4, levert een oplossing. De fig. 18, 19, 20 behoeven dan ook geen verdere verklaring.

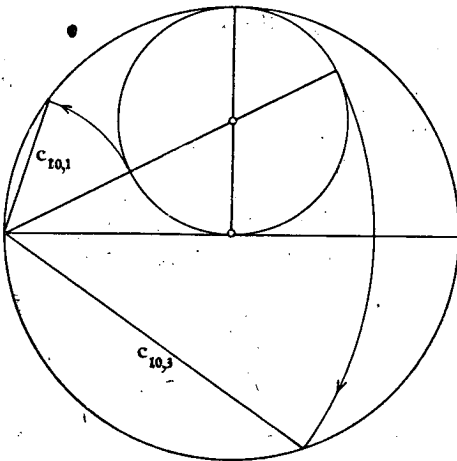


Fig. 18.

Men merke op, dat in fig. 19 en 20 ook $C_{5,1}$ en $C_{5,2}$ direct te vinden zijn.

5. *Vraagstukken.*

1) *Een convexe regelmatige tienhoek construeeren als gegeven is a) zijn zijde of b) het verschil tusschen straal en zijde.*

2) *Een stervormige regelmatige tienhoek construeeren als gegeven is a) zijn zijde of b) de som van straal en zijde.*

Gegeven is dus één der vier stukken R_i , R_j , R_u , R_v . De slotopmerking van § II, nr. 6 doet dus het middel aan de hand om

R te bepalen, en dan levert de constructie van den tienhoek geen moeilijkheid meer op.

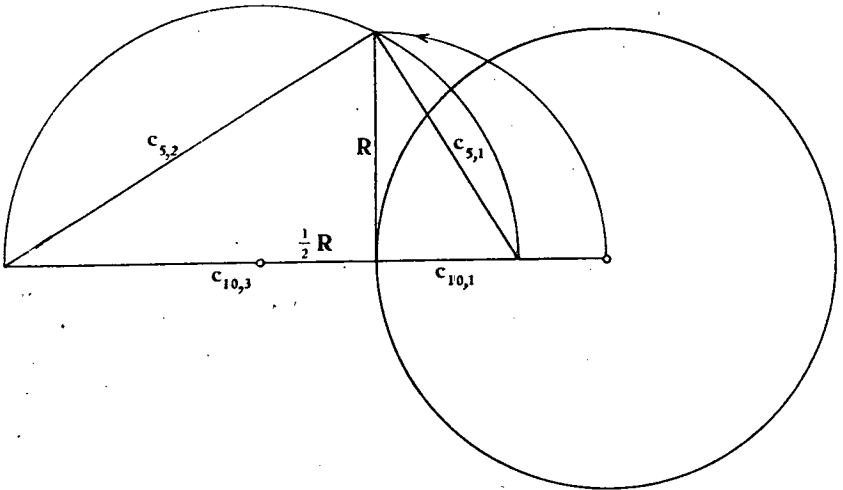


Fig. 19.

Een andere oplossing was natuurlijk deze: een regelmatig tienhoek T' teekenen (convex voor 1, stervormig voor 2); is l'

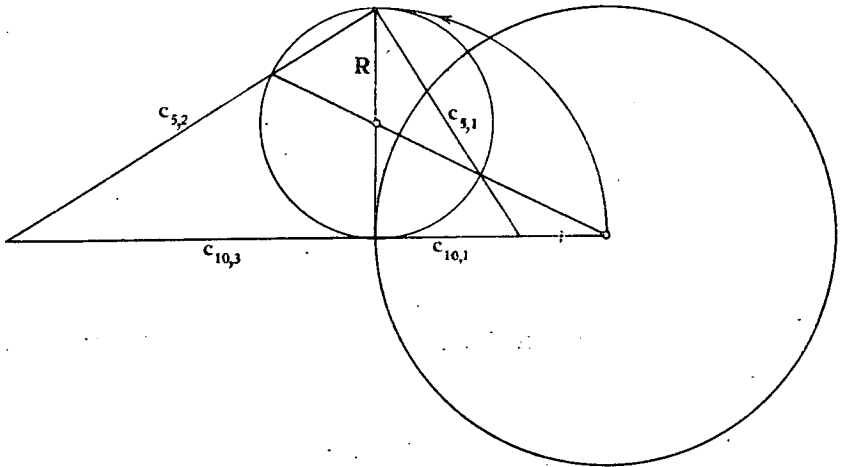


Fig. 20.

het element van T' , dat met het gegeven element l overeenstemt, dan vermenigvuldige men T' eenvoudig met $\frac{l}{l'}$.

VERSLAG,

door de Vereeniging van Directeuren van Hoogere Burgerscholen
met 5-jarigen cursus, in zake het rapport der Commissie-
Beth, uitgebracht aan den Inspecteur Dr. E. Jensema.

*Den Heer Inspecteur van het Middelbaar
Onderwijs Dr. E. Jensema te Groningen.*

Naar aanleiding van Uw schrijven d.d. 18 Mei 1926, no. 359, betreffende het bekende rapport der Commissie-Beth hebben wij gemeend het oordeel der leden onzer Vereeniging dienaangaande te moeten inwinnen en heeft ons Bestuur zich mitsdien bij rondschrijven van 22 Juni, no. 167, tot de leden gewend met de volgende vragen:

1e. Acht U het in bedoeld rapport uitgewerkt leerplan overladen?

2e. Lijkt U de leerstof geschikt voor de klassen, waarvoor ze aangegeven staat?

Op de 101 verzonden circulaires kwamen 88 antwoorden in, waarvan 65 ten aanzien van vraag 1 in bevestigenden zin, en 58 ten opzichte van vraag 2 in ontkennenden zin. Op vraag 1 gaven 9 directeuren een ontkennend en 14 een twijfelachtig antwoord; op vraag 2 antwoordden 10 bevestigend, terwijl 20 zich hierover niet uitspraken of een twijfelachtig antwoord inzonden. Door tal van collega's was het antwoord opgesteld in overleg met de betrokken leeraren der school.

Op grond der ingekomen en voor den geest van het ontwerp waardeerende beschouwingen, meent het Bestuur intusschen niet zonder meer tegen het rapport-Beth steling te mogen nemen en acht het een uitvoerige bespreking gewenscht. Uit tal van ingekomen antwoorden blijkt bovendien min of meer, dat het tegenwoordig leerplan der wiskundige vakken niet of niet meer bevredigt en wijziging gewenscht is.

Bij het opstellen van zijn uitspraak gaat het Bestuur uit van de onderstelling, dat ten opzichte der hierna volgende punten de toestand bestendig blijft, zonder in het minst vóór of tegen die bestending partij te trekken. Het ligt echter voor de hand, dat indien met wijziging in het wiskunde-programma een verandering in die punten gepaard mocht gaan, zulks van invloed zou geweest zijn op den uitslag der enquête en derhalve op het advies.

Bedoelde punten zijn de volgende:

- 1e. de cursusduur der H.B.S. blijft 5-jarig;
- 2e. het aantal lesuren voor de wiskundige vakken blijft onveranderd;
- 3e. de toelating tot de H.B.S. blijft op dezelfde wijze geregeld, m.a.w. het gehalte der leerlingen blijft op hetzelfde peil;
- 4e. de H.B.S. dient als opleidingsschool ook voor leerlingen met minder wiskundigen aanleg, 't geen des te sterker gevoeld wordt, nu er slechts aan enkele scholen een A-afdeeling is opgericht;
- 5e. het blijft de bedoeling, dat de geboden leerstof door de leerlingen zal worden verwerkt en de oppervlakkigheid zal worden tegengewerkt;
- 6e. door de vrijstelling bij het eindexamen worden alleen de zwakkere leerlingen mondeling geëxamineerd, als gevolg waarvan alleen deze onderzocht worden op hun theoretische kennis.

Met inachtneming van deze zes punten komen wij op grond der ingekomen antwoorden tot de volgende conclusies, die wij hier zonder nadere motiveering neerschrijven.

a. De aangegeven leerstof is een verzwarende van het wiskunde-programma der H.B.S., zoodat onder die omstandigheden zeker van *overlading* gesproken moet worden.

b. Het programma is veel te gedetailleerd; vooral bij een nieuw leerplan is het gewenscht de groote lijnen, de eischen van toelating en die van het eindexamen aan te geven en de verdeeling der leerstof eenigszins aan de practijk over te laten. (Uit tal van antwoorden blijkt, dat over de leerstofverdeling weinig eenstemmigheid bestaat, een soepel programma komt aan alle wenschen tegemoet).

c. Het is noodzakelijk veel tijd voor het maken van vraagstukken (natuurlijk geen gekunstelde) en herhaling over te laten.

d. Het oog der Commissie-Beth was te veel gericht op de leerlingen, die later in wiskundige richting verder studeeren (ondanks het gestelde op blz. 1 van het rapport).

e. Er is te weinig rekening gehouden met den gemiddelden leerling in de verschillende klassen. Al. 4 van blz. 2 ware ter verduidelijking aan te vullen met de woorden „en vooral met den leeftijd der leerlingen”.

f. Het is ongewenscht als regel voor te schrijven, dat alle wis- en natuurkundige vakken in dezelfde afdeeling in de hand van één leeraar worden gegeven (blz. 3 van het rapport).

g. Waar voorgesteld wordt, onderwerpen der thans gedoceerde leerstof of te schrappen, of te beperken, worden daarvoor veelal moeilijker onderwerpen in de plaats geboden. Het invoeren van vierdecimalige logarithmentafels b.v. geeft slechts weinig tijdwinst en vindt dan ook slechts luttele instemming.

h. De eisch, dat de middelmatige leerling bij inspanning van al zijn krachten het gegeven programma moet kunnen verwerken, is onbillijk tegenover de andere leervakken der middelbare school, die toch zeker ook op een deel van de kracht en den tijd der leerlingen recht hebben.

In aansluiting met deze opmerkingen van meer algemeenen aard volgen hier nog eenige, die op bijzonderheden betrekking hebben.

i. Bij de rekenkunde (blz. 4) bestaat ernstig bezwaar tegen de voorgestelde veranderingen, als zijnde deze te moeilijk voor leerlingen van 12 à 13 jaar; het bijbrengen der fundamenteele logische begrippen enz. geschiedt gemakkelijker bij de meetkunde.

k. Het werken met onnauwkeurige getallen wordt weinig noodig geacht.

l. Het vervallen van de vergelijkingen van den eersten graad in klasse I vindt weinig instemming, evenmin de rekenwijze van Horner in kl. II en de gebroken lineaire functie $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ in kl. III.

m. Indien bij den tegenwoordigen stand (zie vooral punt 4) de differentiaalrekening al worde ingevoerd, moet deze wel tot een *minimum worden beperkt*; de integraalrekening in V vindt veel tegenkanting. Zelfs met inachtneming hiervan zal voor uitbreiding van het programma in V de noodige tijd ten eenenmale ontbreken.

n. Dat volgens de Commissie-Beth de algebra het meest lijdt

aan het euvel der verwaarloozing van fundamenteel-theoretische inzichten (blz. 8) ligt niet in de eerste plaats aan het huidige programma, doch veel meer aan het bevattingsvermogen en den leeftijd der leerlingen. Binnen het raam van het tegenwoordige leerplan zouden anders ook wel idealen der Commissie te verwezenlijken zijn.

o. De behandeling der formules voor sinus en cosinus van veelvouden van hoeken (blz. 18) is geheel overbodig; de toepassing van de goniometrie op meetkundige vraagstukken vindt wel instemming.

p. De behandeling van ellips, parabool en hyperbool vindt sympathie; men vreest echter ook hier gebrek aan tijd.

q. De herziening van de grondbeginselen der planimetrie in IV ontmoet bijna algemeene afkeuring; evenzoo het vervallen der beschr. meetkunde als leërvak en de uitsluiting van den drievlaks-hoek. Wat de aanvullende onderwerpen betreft, geldt ook hier het bezwaar van gebrek aan tijd.

r. Voor zoover er antwoorden zijn ingekomen over *mechanica* en *cosmografie* blijkt, dat men in het algemeen er niet mee ingenomen is, dat het mechanica-onderwijs voor sommige leerlingen in klasse IV een einde neemt.

Het zou onbillijk zijn, hier onvermeld te laten de talrijke be-tuigingen van sympathie voor de degelijkheid van den arbeid der Commissie-Beth, zooals die zich meermalen uitsprak in antwoorden ook van hen, die overigens tegenstanders van den inhoud bleken te zijn.

Ten slotte: Mocht een algemeene herziening van het Middelbaar onderwijs aan de orde komen, dan vertrouwen wij, dat met meerdere uitgesproken wenschen rekening zal worden gehouden.

Namens het Bestuur:

Dordrecht, }	19 Oct. 1926.	(w.g.) J. J. PRINS, Voorzitter.
Kampen, }		„ H. J. VAN DE STADT, Secr.

OPMERKINGEN NAAR AANLEIDING VAN HET VERSLAG,

door het Bestuur van de Vereeniging van Directeuren van Hoogere
Burgerscholen met vijfjarigen cursus uitgebracht in
zake het ontwerp-leerplan voor Wiskunde
en aanverwante vakken.

Het Bestuur van de Vereeniging van Directeuren van Hoogere Burgerscholen met vijfjarigen cursus zond ons een afdruk van het verslag ¹⁾, dat naar aanleiding van een onder de leden der vereeniging gehouden enquête aan den inspecteur Dr. Jensema werd uitgebracht in zake het door onze commissie opgestelde ontwerp-leerplan voor wiskunde, mechanica en kosmographie.

Het zal aan een ieder begrijpelijk voorkomen, dat, waar wij in het algemeen steeds met groote belangstelling hebben uitgezien naar de over ons ontwerp-leerplan uitgesproken meeningen, onze aandacht wel in het bijzonder gericht was op het advies van de vereeniging, welker leden in de eerste plaats geroepen moeten worden geacht, om over het onderwijs op de H. B. Scholen met vijfjarigen cursus te oordeelen. Niet alleen, omdat wij verlangend waren, te vernemen, of de meerderheid van hen invoering van het ontwerp-leerplan al dan niet verkieselijk zou vinden, maar ook, omdat wij uit de samenvatting van de door hen uitgesproken meeningen kennis hoopten te nemen van de denkbeelden, welke op tal van bijzondere, in ons rapport aangeroeide punten waren geuit en van de argumenten, die ter verdediging of ter bestrijding, hetzij van de door ons gehuldigde principes, hetzij van de daaruit voortvloeiende voorstellen waren aangevoerd, om daarna die kennis te kunnen benutten bij een herziening van ons ontwerp.

Wij kunnen nu echter niet verhehlen, dat wij in deze verwach-

¹⁾ Zie blz. 69 van dezen jaargang.

tingen in meer dan één opzicht zijn teleurgesteld. Het uitgebrachte rapport toch bevat naar onze meening ten eerste geen volledig en ondubbelzinnig oordeel over onze voorstellen en het kan ons, ten tweede, slechts van zeer gering nut zijn bij onze pogingen, het ontwerp zoo te amendeeren, dat wij, met handhaving onzer beginselen, aan algemeen uitgesproken verlangens tegemoet kunnen komen.

Ter verdediging van deze meening willen wij in de eerste plaats wijzen op enkele gebreken, welke de gestelde vragen ons toeschijnen te vertoonen. Die gebreken zijn tweërlei: de vragen handelen over punten, die, hoewel niet van belang ontbloomt, niet in de eerste plaats doorslaggevend mogen zijn bij de beoordeeling van een leerplan en ze laten na te vragen naar datgene, waar het voor die beoordeeling juist in de eerste plaats op aankomt.

Inderdaad, wanneer van de 88 uitgebrachte stemmen een meerderheid van 65 de vraag:

Acht U het in bedoeld rapport uitgewerkt leerplan overladen? bevestigend en een meerderheid van 58 de vraag:

Lijkt U de leerstof geschikt voor de klassen, waarvoor ze aangegeven staat?

ontkennend beantwoordt, wat is daarmede dan eigenlijk bewezen voor of tegen de noodzakelijkheid en de mogelijkheid, het wiskunde-onderwijs in den door ons aangegeven zin te hervormen? Wanneer, om een voorbeeld te noemen, een directeur het Algebra-programma in klasse II te moeilijk vindt, de behandeling van de kegelsneden in klasse III onuitvoerbaar en het mechanica-programma in klasse V te uitgebreid en wanneer hij zich dan, op deze en dergelijke gronden, verplicht acht, de eerste vraag bevestigend en de tweede ontkennend te beantwoorden, heeft hij dan eigenlijk door zijn stem een volledig en ondubbelzinnig oordeel over ons ontwerp uitgesproken? Bevat zijn stem dan een oordeel over de beginselen, die aan ons rapport ten grondslag liggen, beginselen, die noch door een andere verdeling van de leerstof over de klassen, noch door het schrappen van sommige der voorgestelde onderwerpen zouden worden aangetast en waarvan de handhaving ons vrij wat meer ter harte gaat dan de volledige aanvaarding van elk der voorstellen, waarin wij ze hebben trachten te verwezenlijken. Of meent men, dat ons leerplan staat

en valt met de rekenwijze van Horner, de methode der volledige inductie, de homographische functie en de botsing van volkomen veerkrachtige lichamen?

Maar hoe denken de directeuren over datgene, waarmee het leerplan wèl staat en valt? Het rapport zegt het ons niet, althans niet uitdrukkelijk en niet algemeen en het laat ons dus in het duister over de meeningen der directeuren op de punten, waarop wij die het liefst zouden hebben vernomen.

Was dit noodig? Waren er bezwaren tegen, nog andere vragen te stellen, dan het tweetal, dat nu aan de leden der vereeniging is voorgelegd? Was het uitgesloten, iets te vragen als het volgende:

Hoe denkt gij in beginsel over het voorstel der Commissie, om, meer dan tot dusver geschiedde, in het onderwijs op de H.B.S. den nadruk te leggen op de theoretische zijde van de wiskunde en de mechanica?

Hoe over de aanbeveling, het historische element sterker in het onderwijs te laten doordringen?

Kunt gij u in beginsel vereenigen met het streven, het functioneele denken te bevorderen en, als consequentie daarvan, de beginselen der infinitesimaalrekening in te voeren?

Hoe denkt gij over het voorstel, de leervakken Mechanica en Kosmographie te herstellen in de positie, die zij vóór 1920 innamen?

En eerst dan de vragen te laten volgen:

Welke opmerkingen hebt gij te maken over de wijze, waarop deze beginselen in het ontwerp-leerplan zijn verwezenlijkt?

Acht gij het tot stand gekomen leerplan overladen?

Acht gij de leerstof overal geschikt voor de klassen, waarvoor zij is voorgeschreven?

Intusschen, wij hebben thans te maken met wat wèl aan de leden der vereeniging is gevraagd en zonder de hoop op te geven, dat het hierbij wellicht niet blijven zal, hebben wij ons thans bezig te houden met de antwoorden, die zij op de nu gestelde vragen gegeven hebben. De beschouwing hiervan brengt echter nieuwe redenen tot teleurstelling met zich mee.

In de eerste paats bevreemdt het, op niet minder dan vijf plaatsen in het door het Bestuur uitgebrachte verslag opmerkingen aan te treffen, die òf niet anders dan door een niet overal ver-

klaarbaar misverstand kunnen worden verklaard òf die onvermijdelijk tot misverstand aanleiding zullen geven.

Verklaarbaar misverstand heerscht er, wanneer onder *b* geklaagd wordt, dat het programma te gedetailleerd is. Het is namelijk niet onze bedoeling, dat de definitieve redactie van een bij Koninklijk Besluit vast te stellen programma voor het onderwijs in de door ons behandelde vakken de leerstof zoo in details zou regelen, als ons ontwerp de voorstellen formuleert. Wij wilden vóór alles duidelijk zijn en wij meenden, daartoe onze opvatting over de te behandelen leerstof tot in onderdeelen te moeten uiteenzetten. Hadden wij dit nagelaten, dan zouden wij zonder verweer hebben gestaan tegen het verwijt van vaagheid, dat ons dan onvermijdelijk zou hebben getroffen.

Minder verklaarbaar is het misverstand dat onder *h* ons den eisch toeschrijft, dat wij alle krachten der leerlingen op de wiskunde en de aanverwante vakken zouden willen concentreren. Men zal ons er wel niet in ernst van verdenken, dat wij ooit zouden vergeten, dat de wiskunde één vak is onder vele andere en wij meenden daarom, voldoende duidelijk te zijn, als wij schreven, dat de leerling met ernst al zijn krachten behoorde in te spannen, zonder nog eens nadrukkelijk te vermelden, dat wij daarmee dat deel zijner krachten bedoelden, dat voor de wiskunde beschikbaar is.

Geheel onverklaarbaar echter wordt de misvatting onzer bedoelingen, wanneer tot tweemaal toe bijna algemeene afkeuring wordt uitgesproken over het doen vervallen van onderwerpen, die in het leerplan zeer uitdrukkelijk met name worden genoemd en waaraan zelfs nog een afzonderlijke toelichting is verbonden. Zoo lezen wij onder *q*, dat men het uitsluiten van den drievlakshoek betreurt, terwijl ons programma voor klasse V vermeldt: „meetkunde op den bol in verband met den drievlakshoek”, en de toelichting nader aangeeft, waarom dit onderwerp naar een andere plaats is overgebracht, dan waarop het tegenwoordig voorkomt. Ook is het ons onbekend, dat wij de Beschrijvende Meetkunde zouden hebben laten vervallen. Wij hebben integendeel de leerstof voor dit vak, dat wij met den naam „methode der orthogonale parallel-projectie” voldoende duidelijk aangeduid waanden, in veel grootere uitvoerigheid behandeld, dan in het thans van kracht zijnde programma geschiedt; de aandachtige lezer zal er ongetwijfeld in slagen, in ons ontwerp het voorstel voor deze leer-

stof en de daarop betrekking hebbende toelichting op te sporen.

Tot misverstand aanleiding gevend is ten slotte de opmerking onder *r*, waarin wordt meegedeeld, dat men er in het algemeen niet mede was ingenomen, dat het mechanica-onderwijs voor sommige leerlingen na klasse IV een einde neemt. Wij kunnen niet aannemen, dat in deze opmerking een critiek op ons leerplan besloten ligt, waarin immers het Mechanica-onderwijs na klasse IV voor niemand ophoudt. Maar wat beduidt ze dan? Zoo het een critiek is op den huidige toestand, wat doet ze dan in dit rapport, dat op alle andere punten de thans vigeerende regelingen zonder critiek aanvaardt? En waarom is ze dan niet geformuleerd als een betuiging van instemming met ons streven, de mechanica in den vroegeren staat te herstellen?

In de tweede plaats treft het ons pijnlijk, zonder nadere motivering (welk bezwaar was er tegen, die te geven?) de bewering te lezen, dat wij ontrouw zouden zijn geworden aan een onzer meest uitdrukkelijk beleden beginselen, aan het beginsel namelijk, dat het wiskunde-onderwijs op de H.B.S. geschikt moet zijn voor alle leerlingen, die in staat zijn tot het ontvangen van Middelbaar Onderwijs en dat de belangen van hen, die de wiskunde bij hun verdere studie noodig zullen hebben, niet dan in de tweede plaats mogen worden behartigd. In de opmerking *d* toch lezen we, dat het oog der Commissie, ondanks het gestelde op blz. 1 van het rapport, te veel gericht was op de leerlingen, die later in wiskundige richting verder studeeren, terwijl de onder 4e geformuleerde voorwaarde schijnt te impliceeren, dat de H.B.S. na invoering van ons leerplan hare geschiktheid als opleidingsschool voor leerlingen met minder wiskundigen aanleg zou kunnen verliezen.

Naar aanleiding van het eerste willen wij slechts opmerken, dat wij de overtuiging bezitten, bij het opstellen van het leerplan getrouw te zijn gebleven aan het op blz. 1 van het rapport uitgesproken beginsel en dat wij ons in die overtuiging niet geschokt voelen door de ongemotiveerde bewering van het tegendeel.

Wat echter het tweede betreft, zouden wij de vraag willen stellen, wat men eigenlijk verstaat onder dien wiskundigen aanleg, dien de H.B.S. niet bij al hare leerlingen aanwezig mag onderstellen. Bedoelt men hiermede, dat de H.B.S. niet van al hare leerlingen mag eischen, dat zij in staat zijn onder behoorlijke

leiding een zoodanige ontwikkeling van het vermogen tot abstractie, tot logisch denken en tot exact spreken te verkrijgen, dat zij de fundamenteele mathematische en mechanische begrippen kunnen hanteeren en deze begrippen in eenvoudige oefeningen kunnen toepassen? Of wil men er mee zeggen, dat zij niet bij alle leerlingen dat wiskundig uitvindingsvermogen mag onderstellen, dat in staat stelt tot eigen productie, tot de zelfstandige vorming van nieuwe begrippen en de zelfstandige oplossing van problemen?

Bedoelt men het laatste, dan kan men in volle gerustheid ons leerplan aanvaarden, omdat daarin juist de studie der theoretische beginselen, die van den leerling veel meer het vermogen tot opnemning en reproductie eischt, dan dat tot eigen schepping, op den voorgrond gebracht wordt. Vereenigt men zich echter met de eerste formuleering en verwerpt men, wat dan consequent is, op grond daarvan ons leerplan, dan mag de vraag gesteld worden, of men daarmee dan niet tevens het beginsel opgeeft, dat de H.B.S. aan hare leerlingen zekere eischen op intellectueel gebied moet stellen en dat het haar plicht is, een programma te bezitten, dat het mogelijk maakt, te onderzoeken, in hoeverre aan die eischen wordt voldaan. Dit beginsel geeft ons leerplan echter *niet* op; het is zoodanig geconstrueerd, dat het met leerlingen, die wij op intellectueel gebied „normaal begaafd” zouden willen noemen, bij ernstige krachtsinspanning, zoowel van hunne zijde, als van die hunner docenten, kan worden uitgevoerd. Maar het is niet geschikt — *wil* niet geschikt zijn — voor hen, die middelbaar onderwijs volgen, waar meer uitgebreid lager- of ambachts-onderwijs verkieslijker zou zijn.

Vraagt men ons nu echter, ter bestrijding van dit betoog, of wij exact kunnen definieeren, wat wij onder normale begaafdheid verstaan, of wij criteria kunnen aanwijzen, die in staat stellen, uit te maken, of normale begaafdheid aanwezig is en of wij kunnen bewijzen, dat uit die criteria de toelaatbaarheid van ons leerplan volgt, dan zullen wij op al deze drie punten ons onvermogen moeten erkennen. Dit drukt ons echter slechts weinig, daar toch zij, die ons op deze wijze zouden willen bestrijden, evenmin in staat zullen zijn, de verlangde definities en criteria te geven en daaruit de ontoelaatbaarheid van ons leerplan te bewijzen. Wij meenen echter, dat wie niet misverstaan *wil*, zal moeten toegeven, dat in onderwijskringen de

term „normaal begaafd” een tot op vrij geringe individueele schattingsverschillen bepaalde beteekenis heeft en dat men doorgaans vrij goed in staat is, zonder wetenschappelijke criteria te beslissen, of een leerling voor Middelbaar Onderwijs geschikt is of niet. In dien zin nu meenen wij den term „normaal begaafd” te kunnen handhaven: de bewering toch, dat een leerling, die bij de tegenwoordige organisatie van de H.B.S. als zoodanig wordt beschouwd, de in ons leerplan voorgestelde onderwerpen niet in hoofdzaak zou kunnen volgen, is, naar onze meening, nog steeds niet door redelijk overtuigende gronden gesteund.

Wij willen ter voltooiing van ons betoog thans nog de volgende losse opmerkingen maken:

Onder *g* wordt geklaagd, dat, waar voorgesteld wordt, onderwerpen der thans gedoceerde leerstof òf te schrappen òf te beperken, daarvoor veelal moeilijker onderwerpen in de plaats geboden worden; waarbij als voorbeeld vermeld wordt, dat het invoeren van vierdecimalige logarithmentafels slechts weinig tijd-winst geeft. Wij kunnen de overtuigende kracht van dit voorbeeld niet inzien. Hoe men ook over de invoering van de bedoelde tafels moge denken, men zal toch kwalijk kunnen volhouden; dat het rekenen met logarithmen er moeilijker of bewerkelijker door wordt.

Onder *n* lezen wij, dat de (blijkbaar toegegeven) verwaarloozing van de fundamenteel-theoretische inzichten op het gebied der algebra moet worden toegeschreven aan den leeftijd en het bevattingsvermogen van den leerling, met welke opmerking blijkbaar wordt bedoeld, dat men de hier bestaande euvelen door invoering van een nieuw leerplan niet zal kunnen wegnemen. Het is ons niet gelukt, de juistheid van deze opmerking zonder nadere toelichting in te zien, daar wij ons niet kunnen voorstellen, welke onderwerpen uit de algebra zich in beginsel aan een correcte behandelingswijze zouden onttrekken.

De opmerkingen, onder *i*, *k*, *l*, *m*, *o*, *p*, gemaakt, zullen door ons in ernstige studie worden genomen.

De Commissie:

Deventer,	} Nov. 1926.	(w.g.) H. J. E. BETH, Voorzitter.
's-Gravenhage,		„ J. VAN ANDEL.
Rolduc,		„ P. CRAMER.
Oisterwijk,		„ E. J. DIJKSTERHUIS, Secr.

R A P P O R T

van het Bestuur van de Vereeniging van Leeraren in de Wiskunde,
de Mechanica en de Kosmographie aan Hoogere Burger-
scholen met vijfjarigen cursus B, Lycea en Meisjes-
Hoogere Burgerscholen met 5-/6-jarigen cursus.

*Aan den Weledelzeergeleerden Heer
Dr. E. Jensema, te Groningen.*

Ter voldoening aan het verzoek, gedaan in Uw brief van 18 Mei 1926, no. 358, hebben wij hieronder onze meening op schrift gesteld aangaande het rapport van de commissie-Beth, daarbij in het bijzonder de vragen overwogen hebbende, of het leerplan al of niet overladen is, en of de leerstof, voor de verschillende klassen aangegeven, geschikt is voor leerlingen in die klassen.

Wij hebben het leerplan uitvoerig in al zijne onderdeelen besproken, en enkele punten voor ons zelf nader uitgewerkt teneinde een helderder inzicht in aard en omvang der in die punten neergelegde leerstof te verkrijgen.

Op grond van onze besprekingen en onderzoeken meenen wij te mogen verklaren, dat invoering van het ontwerp-leerplan eene zeer belangrijke verbetering van het onderwijs in de exacte vakken zou beteekenen, en dat de voor de verschillende klassen aangegeven leerstof zoodanig behandeld kan worden, dat zij voor de leerlingen dier klassen geschikt is. Bij de beantwoording der vraag, of het programma overladen is, moet men rekening houden met de bedoeling der voorstellers, het maken van vraagstukken tot het (voor het verkrijgen van voldoende inzicht in de theorie en van voldoende technische vaardigheid) noodzakelijke te beperken; doet men dit, dan kan onzes inziens het programma niet overladen genoemd worden, behalve op enkele punten, die in het volgende nader zullen worden aangegeven. De beperking in de

vraagstukken kan trouwens niet overal even groot zijn; zoo zal men naar onze meening de vraagstukken voor algebra in de eerste en voor stereometrie in de vierde klasse niet sterk kunnen beperken.

Wij veroorloven ons thans eenige opmerkingen over de afzonderlijke alinea's van het programma en over de toelichting.

Rekenkunde. Bij het punt „practische oefeningen in het rekenen” zouden wij gaarne den nadruk op het woord „practisch” gelegd zien: wij denken hier bijvoorbeeld aan de in natuurkundige vraagstukken zoo nuttige benaderingen uit het hoofd.

Algebra. Het programma voor de eerste klasse is niet omvangrijk, dat voor rekenkunde voor die klasse wel, daarom schijnt het ons wenschelijk, die onderdeelen zoo veel mogelijk als één vak te behandelen, en dus bijvoorbeeld één rapportcijfer voor rekenen stekunde toe te kennen.

De ingekleede vraagstukken worden in het programma voor de tweede klasse niet genoemd; het komt ons niet juist voor, ze geheel weg te laten, maar men dient er voor te zorgen, dat het in vergelijking brengen gemiddeld niet moeilijker is dan bij de vraagstukken, waartoe de natuurkunde leidt.

Bij de algebraïsche behandeling van een stelsel van n vergelijkingen met n onbekenden behoorde te worden aangegeven, dat men zich kan beperken tot de practische oplossing, en niet behoeft in te gaan op de mogelijkheden van afhankelijkheid, enz.

Het schijnt ons aanbevelenswaardig, bij de behandeling der worteltrekking niet verder te gaan dan $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$; en zich bij het rationeel maken van noemers te beperken tot die met twee vierkantswortels. Waar de commissie-Beth het gebruik van rentetafels meent te moeten toelaten, zijn wij van meening, dat men met de interestrekening zeker niet zoo ver moet gaan, dat het gebruik van zulke tafels voordeelig wordt.

De theorie van het irrationeele getal is zeer moeilijk; o.i. moet niet meer *geëischt* worden dan het aanbrengen van het begrip; zeker mag niet worden gevorderd, dat de leerlingen eene onberispelijke theorie zullen kennen.

De onderwerpen: continuïteit, theorema van Rolle, middelwaardstelling, welke eene inleiding vormen tot de reeksontwikkeling, kunnen gevoegelijk bij de facultatieve onderwerpen worden gebracht, daar anders het algebraprogramma voor de vierde klasse

overladen zou worden. Met de behandeling van hogere afgeleiden zal men wel niet verder gaan dan de tweede.

Trigonometrie. Het wil ons voorkomen, dat de stof een weinig anders over de klassen verdeeld moet worden, en wel zoodanig dat de derde (waar veel meetkunde behandeld moet worden) en de vierde (met haar groot algebraprogramma) een weinig verlicht worden.

Meetkunde. Het schijnt ons moeilijk, als na de behandeling van de projectiestelling de goniometrische functies ter sprake komen, deze te beperken tot scherpe hoeken. Men zou dus misschien beter doen de scheefhoekige driehoeken aan het einde der desbetreffende alinea te plaatsen.

De begrippen macht, machtlijn en machtpunt zouden o.i. in aansluiting aan de cirkelbundels naar de facultatieve onderwerpen kunnen worden overgebracht. Het voorgeschreven programma schijnt ons alleen dan te realiseeren, wanneer veel minder tijd dan tegenwoordig geschiedt, aan vraagstukken wordt besteed.

Het komt ons voor, dat het programma voor de vierde klasse te omvangrijk is: de behandeling ervan vordert veel tijd, niet het minst door het optreden van nieuwe begrippen. Bij eene besnoeiing lijkt ons de herziening der grondbeginselen der vlakke meetkunde het eerst in aanmerking te komen om te worden opgeofferd; wij gelooven echter niet, dat dit onderwerp niet op eene voor de leerlingen begrijpelijke manier kan worden behandeld. In de beschrijvende meetkunde moet men niet te ver gaan met constructies over bollen.

Mechanica. De eenige opmerking die wij over dit fraaie programma zouden kunnen maken is, dat de splitsing van de mechanica in die van het punt in de vierde en die van het vaste lichaam in de vijfde klasse het bezwaar meebrengt, dat men geen eenvoudige evenwichtsvraagstukken in de vierde klasse kan behandelen; en dat de balans niet het gelukkigste voorbeeld van een werktuig is.

Kosmographie. Bij onze besprekingen is de vraag naar voren gekomen, of het niet wenschelijk zou zijn, de kosmographie weder over de vierde en de vijfde klasse te verdeelen. De cursus is voor de vijfde klasse reeds kort, en het is misschien minder gewenscht, in deze klasse nog nieuwe leervakken te beginnen. In geen geval zouden wij echter aan deze wijziging het derde mechanica-uur in

de vierde klasse willen opofferen. Mocht in de practijk het kosmo-graphieprogramma wat te omvangrijk blijken, dan zou men gevoegelijk de leerstof der laatste drie alineae kunnen weglaten.

Utrecht	} September 1926.	(w.g.) P. G. TIDDENS.
Amsterdam		„ N. G. W. H. BEEGER.
		„ J. H. SCHÖGT.

EENIGE OPMERKINGEN BETREFFENDE HET ONTWERP VAN EEN LEERPLAN DER COMMISSIE-BETH.

*τὰ πολλὰ σε γράμματα εἰς
μανίαν περιτρέπει.*

Waar het volgende herhalingen bevat van hetgeen reeds is gezegd door de heeren *Vollewens, Heyting, Prins* e.a., ¹⁾ beschouwen men dat als teeken van instemming. Er zal niet steeds worden verwezen.

Een woord van waardeering zij nogmaals gebracht aan de Commissie, die heel wat van het verouderde durft opruimen en een programma heeft samengesteld, dat ook m.i. in vele opzichten aantrekkelijk is.

Invoering van een nieuw leerplan brengt uit den aard der zaak risico mee. Blijft dit tot het redelijke beperkt, dan behoeft men hiervoor niet op zij te gaan. Het volgende stukje berust echter op de overtuiging dat we hier te veel wagen, dat invoering en bona fide uitvoering van het ongewijzigde concept mogelijk de genadeslag zou beteekenen voor de toch reeds verminderde populariteit der H.B.S. 5. Voert men het programma in en licht men de hand met de uitvoering, dan ontstaat een chaos.

Een deel van de voorgestelde leerstof lijkt mij te lastig. Hierdoor wordt de vraag, welk aantal lesuren voor dit programma voldoende is, voor mij practisch zinledig. De Commissie acht voor de wiskunde alleen, het aantal uren van de bestaande regeling toereikend. Allen nu, die het met de voorgestelde leerstof vrijwel

¹⁾ Eerst nadat dit stukje naar den zetter was, kreeg ik inzage van het verslag der Vereeniging van Directeuren en de betreffende opmerkingen der Commissie-Beth.

eens zijn, geef ik dringend in overweging nog eens grondig na te gaan of zij zich bij deze uitspraak kunnen aansluiten. Men vergelijkte wat er afgaat met wat er bijkomt. Besnoeiingen betreffen in hoofdzaak (m.i. zeer terecht) de vraagstukken. Tijdsbesparing geeft dit ongetwijfeld, vooral bij de wortelvormen, logaritmen en samengestelde interestrekening¹⁾. Er zij echter aan herinnerd dat de Commissie toch een zekere mate van technische vaardigheid wenscht en tevens de gewoonte wil aankweeken van het leveren van zorgvuldig samengesteld, net en accuraat werk. Bovendien komt er geen feitelijke verandering in het onderdeel dat bijna geheel uit vraagstukken bestaat en wel zeer tijdroovende n.l. de beschrijvende meetkunde. Verder zij nog gewezen op de mogelijkheid dat sommige nieuwe onderwerpen zeer veel tijd zullen eischen. Een aanduiding in die richting lijkt mij de, vermoedelijk reeds door vele collega's ingevoerde behandeling der lineaire functie in klasse II. Persoonlijk heb ik daarvoor lang noodig.

De kwestie van benodigde tijd laat ik verder terzijde, en beperk mij tot uiteenzetting mijner meening, dat een deel der stof te moeilijk is.

De Commissie wenscht op den voorgrond het aanbrengen van fundamenteele theoretische inzichten. Verderop wordt gezegd dat aangaande de subtiele kwestie van de mate van strengheid wel geen bindend voorschrift is te geven. Dit laatste moge juist zijn, maar de uitdrukking „fundamenteele theoretische inzichten” staat er nu eenmaal en ik zie geen kans hieraan een beteekenis te geven, die het plan voor mij uitvoerbaar maakt. Acht men het nu werkelijk mogelijk de fundamenteen van een wetenschap op een middelbare school te onderwijzen, voordat jarenlange gedegen arbeid een betrekkelijk breede kennis heeft gegeven en zoolang geen rijp oordeel een diepere kennis mogelijk maakt? Het is natuurlijk te probeeren maar de poging lijkt gewaagd.

Eigenaardig doet het aan, wanneer het rapport er iets verder aan herinnert dat het H.B.S.-onderwijs grootendeels wordt gegeven aan jeugdige en voor abstracte beschouwingen niet speciaal

¹⁾ In hoeverre het de bedoeling der Commissie is, de vergelijkingen welke de onbekende in een of meer noemers bevatten, uit te schakelen, is mij niet duidelijk geworden.

aangelegde leerlingen. In het bijzonder dit laatste klopt met mijne ervaring en tenzij de bevolking onzer scholen sterk verandert, lijkt de kwestie der fundamenteele theoretische inzichten hiermee afgedaan. Voor de Commissie echter blijkbaar niet.

Een vreemden indruk maakt verder de volgende zinsnede uit het ontwerp: „maar aan den anderen kant mag niet uit het oog worden verloren, dat het M.O., terwille van het intellectueele peil der maatschappij zekere eischen moet stellen aan de capaciteiten van hen, die het onderwijs willen volgen en dat die eischen niet te hoog mogen worden genoemd, zoolang de middelmatige leerling er bij ernstige inspanning van al zijn krachten aan kan voldoen”. Hoe zit het nu, worden de leerlingen door de eischen bepaald, of omgekeerd?

Gaan we over tot afzonderlijke beschouwing van eenige punten. Wat betreft de rekenkunde lijkt de zwakke plek van het program wel de logische ontwikkeling van het getalbegrip in klasse I. In hoeverre dit onderwerp, dat zeker den blik zeer kan verruimen, in het leerplan van een hoogere klasse op zijn plaats is, zij in het midden gelaten, maar men moet toch wel erg optimistisch wezen om te meenen dat er bij kinderen van 12 à 13 jaar iets van terecht komt. Onbegrijpelijk is verder dat de Commissie de resultaten, welke zij meent dat met het juist genoemde onderwerp bereikt kunnen worden, weer in gevaar wil brengen door de repeeteerende breuken in het leerplan van klasse I op te nemen. Een eenigszins strenge behandeling hiervan is volgens het concept toch eerst veel later mogelijk.

Het algebra-programma voor de klassen I, II en III is in hoofdzaak zeer sympathiek. Juist gezien lijkt de plaatsing van de lineaire functie vóór de vergelijkingen van den eersten graad, al blijft het de vraag of hierdoor alle verwarring tusschen veranderlijke en onbekende zal verdwijnen. Het leerplan voor klasse II is misschien wat overladen met moeilijke onderwerpen als daar zijn de reststelling met hare gevolgen, de bewijsmethode der volledige inductie met toepassingen, de identiteiten en het begrip van aequivalente stelsels vergelijkingen. Mogelijk kan een en ander hiervan in klasse III komen. Mocht het noodig blijken hiertegen iets weg te laten vallen, dan zou daarvoor misschien de gebroken

lineaire functie in aanmerking komen. Het limietbegrip dat voor klasse III genoteerd staat, komt straks ter sprake.

De mate van strengheid wenschelijk voor de behandeling van de theorie van het irrationale getal in klasse IV, laat de Commissie, als steeds, in het midden. Uit den aard der zaak dient men de hoofdbewerkingen te behandelen en met het oog op de logaritmen ook de machtsverheffing met irrationale exponent. Men is hierbij, dunkt me, toch aangewezen op een van de nu wel klassieke definities van het irrationale getal [mogelijk eenigszins gecamoufleerd wat gewoonlijk de zaak niet gemakkelijker maakt]. Om dit alles met succes op de H.B.S. te verwerken, komt mij onmogelijk voor. Vermoedelijk zouden slechts enkele leerlingen min of meer begrijpen waarover het ging, terwijl het voor de rest duister zou blijven en daardoor vervelend en geestdoodend.

Wat betreft de infinitesimaalrekening betoogt de Commissie dat ook nu op de H.B.S. herhaaldelijk dit deel der wiskunde wordt toegepast. Zij wil hiervan voor de leerlingen geen geheim maken, maar de dingen noemen bij den naam, dien ze nu eenmaal hebben en in de klassen IV en V systematisch de beginselen der differentiaal- en integraalrekening behandelen. Deze verdediging lijkt wel wat oppervlakkig. De voorgestelde regeling zou iets essentieel nieuws beteekenen. Tot heden waren de toepassingen der infinitesimaalrekening in den regel slechts noodig om hier en daar een formule of stelling af te leiden en werden dan weer vrijwel vergeten. Alleen sommige kinematische en dynamische begrippen vormen hierop uitzonderingen. De moeilijkheid wordt daar echter eenigszins gecompenseerd door de omstandigheid dat de meeste leerlingen bij de mechanica contact houden met de materiele ervaringswereld. Anders wordt het wanneer de infinitesimaalrekening om haar zelf wordt onderwezen. De Commissie schijnt hier in de eerste plaats theorie te wenschen en slechts weinig toepassingen, wat vooral uit het eindexamen-programma blijkt. De mate van strengheid blijft weer onbepaald. Wel wordt aanbevolen het begrip differentiaalquotient langs geometrischen en kinematischen weg in te voeren, maar het leerplan voor klasse III bevat het „limietbegrip” als onderwerp en bij de stof voor klasse IV leest men: „continuïteit”. Waarschijnlijk worden hier geen meetkundige of kinematische begrippen bedoeld en als men strenge definities op het oog heeft, mogen die toch wel

gebruikt worden. Of is het de bedoeling eerst een populaire en later een strenge methode te volgen? Het is moeilijk zich van het huidige standpunt der commissieleden een idee te vormen. De heer *Volléwens* wees er reeds op dat de voorzitter in 1921 de differentiaal- en integraalrekening te lastig voor de H.B.S. achtte. Wat heeft hem bekeerd? De ondervinding bij het onderwijs in de laatste jaren, of is zijn opinie gewijzigd aangaande de gewenschte graad van strengheid?¹⁾ De heer *Dijksterhuis* liet zich nog in 1925 als volgt uit: „het strengheidspeil, dat tot voor 100 jaren de grootste mathematici bevredigde, ontoereikend te achten voor ons schoolonderwijs, sluit een ontkenning in van het inzicht, dat het onderwijs zich altijd meer te richten heeft naar de wetenschap, zooals ze in een vorige periode was, dan zooals ze nu bezig is zich te ontwikkelen.” Hoe is dit te rijmen met een voorstel de theorie van het irrationale getal en critisch-meetkundige beschouwingen in klasse IV te geven? Niets is natuurlijker dan verandering van opinie, maar het is jammer dat de Commissie zich niet in positieven zin heeft uitgelaten over de mate van exactheid die zij zich momenteel voor de infinitesimaalrekening op school denkt. Hier toch ligt de kern van de zaak. Het geheele onderwerp, voor zoover het de theorie betreft, is doortrokken van het limietbegrip. Om dit slecht te definieeren lijkt ongewenscht en aan den anderen kant is het mijn vaste overtuiging dat de middelmatige leerlingen van onze huidige schoolbevolking het strenge, abstracte limietbegrip niet kunnen verwerken. Het is eenvoudig genoeg hen de grondslagen van buiten te laten leeren en op vraagstukken te dresseeren, maar het werkelijke inzicht krijgt de groote meerderheid m.i. niet.

Wel is waar worden ook andere onderdeelen van de wiskunde voor de H.B.S. ongeschikt als men moderne eischen van strengheid stelt, maar de zaak is daar toch veelal anders. Nemen we als voorbeeld de planimetrie, zooals die gewoonlijk behandeld wordt. Het begin is hierbij onbevredigend, maar al spoedig verkrijgt men een zeker systeem van axioma's en stellingen en ook eenige sous-entendus (slechts bij uitzondering realiseert een leer-

¹⁾ Dat de Commissie haar plannen zou baseeren op selectie, mogelijk gemaakt door de literair-economische H. B. S. heb ik niet uit haar motiveeringen kunnen lezen.

ling uit zichzelf het bestaan van deze laatste) waarmee men zeer wel voet bij stuk kan houden, het methodisch denken bij de leerlingen kan aankweeken en hen leeren een min of meer streng gebruik van de taal te maken. Het onaangename begin is dan spoedig verdoezeld. Bij de differentiaal- en integraalrekening is dit anders. Hier is het limietbegrip dier mate essentieel dat een slordige definitie hiervan zich bij iederen stap wrekt, althans wanneer men bij de theorie blijft.

Een conclusie trek ik niet, maar op grond van het voorgaande is wel duidelijk dat de invoering van de infinitesimaalrekening mij zeer bezwaarlijk voorkomt. Gaarne zou ik mij van het tegendeel laten overtuigen, want naast de algemeen vormende waarde is er nog steeds een practische beteekenis en voor velen die gaan studeeren is het belang van eenige bekendheid met het onderwerp in kwestie, zeer groot. Gedurende een paar jaar gaf ik les aan twee artsen, die blijkbaar behoefte gevoelden aan eenige vertrouwdheid met deze zaken. Wel is mij toen gebleken dat zij ten slotte de moderne verfijningen met een zekere practische intuïtie voorbijgingen om zich begrippen eigen te maken, welke waarschijnlijk vóór *Cauchy* algemeen gangbaar waren.

Het concept voor de gonio- en trigonometrie lijkt zeer geslaagd.

Wat betreft de meetkunde, geloof ik, dat herziening van de grondbeginselen der vlakke meetkunde in klasse IV, eventueel aangevuld met bespreking van het denkbeeld eener niet-Euclidische meetkunde, wel wat veel van de leerlingen eischt. Vele collega's brengen waarschijnlijk ook nu deze dingen wel eens ter sprake. Bij mij laat dit steeds den indruk achter dat slechts een klein deel der leerlingen werkelijk heeft meegedaan. Voor een enkele maal kan dit geen kwaad, maar de zaak verandert wanneer het systematisch onderwijs van een examenvak wordt.

Tegen het onderwijs van meetkunde op den bol zooals de Commissie dit blijkbaar in klasse V bedoelt, voel ik hetzelfde bezwaar.

Nog een enkel woord over de mechanica. Mits de strengheid binnen het redelijke blijft, kan ik mij met het betreffende programma vrijwel vereenigen. Echter vermoed ik, dat althans een deel der Commissie hier een mate van exactheid mogelijk acht, waarvoor ik beef. In verband met het onderwerp: „Historische

motiveering van de axioma's der mechanica", heb ik nog eens nagelezen het artikel dat de heer *Dijksterhuis* in het weekblad der A.V.M.O. (3 Maart 1926) heeft gewijd aan het, voor de H.B.S. bedoelde leerboek der mechanica van den heer *Schogt*. In dit boek wordt aan de dynamica ten grondslag gelegd een stel axioma's dat op sommige puntjes misschien nog aanvechtbaar is¹⁾, wat wel niemand den schrijver kwalijk zal nemen. Echter komt het mij voor, dat slechts bij uitzondering een leerling er iets van zal begrijpen en dat lijkt bezwaarlijker. Ook de heer *Dijksterhuis* schijnt aanvankelijk gemeend te hebben, dat het hier voor de leerlingen toch wel wat bar werd, doch ziet, eenig nadenken gaf hem de overtuiging, dat de bedoelde paragraphen niet te lastig waren, mits voorafgegaan door een historische inleiding. Mogelijk is het slechts mijn gemis aan historische ontwikkeling, dat mij sceptisch stemt.

Eenige bespreking van het boek van den heer *Schogt* ligt hier natuurlijk niet in de bedoeling. Om echter het standpunt van den secretaris der commissie-Beth duidelijker te maken, kan misschien het volgende nog dienen: Aan het eind van genoemde recensie zegt de heer *Dijksterhuis* dat wie het boek in kwestie bij eerste lezing te lastig voor de school mocht oordeelen, moge bedenken, dat het niet moeilijker is dan de mechanica zelve.

Er bestaat een analoog argument voor de invoering op onze scholen van eene vertaling van het bekende boekje van *Hilbert*, daar dit niet lastiger is dan de planimetrie zelf en als men toch met de boekenlijst bezig is, voelt misschien iemand iets voor de publicaties van *Einstein*, *Weyl*, *Bohr* e.a. voor het onderwijs in de natuurkunde.

Aan de zoo juist gesignaleerde opvattingen van althans één lid der Commissie heb ik gemeend de vrijheid te mogen ontleenen het bekende woord van den Romeinschen stadhouder *Festus* boven dit stukje te plaatsen. Het is waar, de vermeende razernij van *Paulus* was van wereldbeteekenis en is dat na vele eeuwen nog. Laten wij hopen, dat er analogie bestaat in dien zin, dat toekomstige geslachten van H.B.-scholieren in toenemend percentage het geheele

¹⁾ In geval de heer *Schogt* van het tegendeel overtuigd mocht wezen, wil ik hier gaarne op terugkomen.

voorgestelde leerplan kunnen verwerken. Momenteel echter lijkt invoering van het ongewijzigde concept riskant.

A'dam, Januari 1927.

B. P. Haalmeijer.

Naschrift.

De Commissie zal geen gebruik maken van de haar geboden gelegenheid, een naschrift bij het artikel van den heer Haalmeijer te plaatsen, omdat zij in een zoo kort bestek moeilijk de drieledige taak kan vervullen, het misverstand op te helderen, dat den schrijver menigmaal belet tot een zuiver oordeel over haar ontwerp te komen, hare opvattingen te verdedigen tegen de principiële bezwaren, die hij daar op andere punten tegen aanvoert, en twee harer leden individueel in de gelegenheid te stellen, te antwoorden op die passages van het artikel, die hen persoonlijk betreffen. Zij stelt zich voor, aan de Redactie te verzoeken, haar de gelegenheid tot een uitvoeriger antwoord in de eerstvolgende aflevering te verschaffen.

BOEKBESPREKING.

Dr. *Fred. Schuh*, Lessen over de Hoogere Algebra. Derde deel. P. Noordhoff, Groningen, 1926. f 19.—.

Met het verschijnen van het derde en laatste deel is thans Schuh's groote studiewerk over de Hoogere Algebra beëindigd. Als een overtuigend bewijs van de onverwoestbare werkkraft van den schrijver, van zijn naar omvang en diepte gelijkelijk bewonderenswaardige kennis der mathesis en van zijn gave, de te behandelen stof uiteen te zetten met die beheerschte en heldere gestrengheid, die het schoonste kenmerk van den mathematischen stijl vormt, staat het complete werk nu voor ons. Reeds alleen het feit van zijn voltooiing wettigt een woord van gelukwensch aan den schrijver bij het bereiken van wat met recht een hoogtepunt in zijn veelomvattende didactische werkzaamheid mag heeten, een woord van hulde tevens aan den ondernemenden uitgever, aan wiens energie de Nederlandsche beoefenaren der wiskunde het opnieuw te danken hebben, dat zij kunnen profiteeren van de uitingen van het groote mathematisch-paedagogische talent, dat reeds in zoo menig opzicht zijn stempel op veler ontwikkeling heeft gedrukt.

Het zal wel niemand, die op de hoogte is met des schrijvers onweersaanbare neiging tot grondigheid en volledigheid en die zich herinnert, hoe reeds meer dan één maal een, oorspronkelijk als tijdschrift-artikel opgezette, verhandeling onder het schrijven tot een compleet boekwerk uitgroeide, verbazen, dat het derde deel van de, aanvankelijk in twee deelen ontworpen, Lessen over de Hoogere Algebra een boek van bijna 800 bladzijden geworden is en dat daarin nog niet eens het geheele in het vooruitzicht gestelde onderwerp der oneindige processen kon worden afgehandeld. Inderdaad moest het blijven bij de theorie der limietovergangen, der reeksen en der kettingbreuken, terwijl de z.g. oneindige producten met nog tal van andere onderwerpen moesten worden weggelaten. Het stemt echter tot voldoening, dat het tijdschrift Christiaan Huijgens den schrijver de gelegenheid opent, zijn groote werken met tal van kleinere verhandelingen aan te vullen. Zooals waarschijnlijk wel algemeen bekend zal zijn, verschenen als zoodanig reeds een artikel over de toepassing van kettingbreuken op de vergelijking van Pell en een over de transcendentie van de getallen e en π .

Het is niet wel mogelijk, om in het raam van een boekbespreking een volledigen indruk van den rijken inhoud van het nieuwe werk te geven; mogen de velen, in wier handen wij het wenschen, zelf ervaren,

wat voor schatten hier liggen opgestapeld. En het zal ongetwijfeld niet noodig zijn, in een uitvoerige karakteristiek van de wijze van behandeling te treden; men kent tegenwoordig wel allerwege Schuh's werkmethode: naast de reeds geroemde grondige volledigheid, die zich mede openbaart in het geduldig verzamelen van honderden vraagstukken, die nog veel meer uitbreidingen dan toepassingen van de theorie bevatten, het nooit aflatend streven naar het korte, maar exacte en alle denkbare gevallen omvattende bewijs en de zorg van den ervaren docent, om door verwijzingen naar vroegere plaatsen den lezer steeds weer aan te sporen tot telkens hernieuwden opbouw van alle beweringen vanaf de grondbeginselen. Men kent ook zijn betoogtrant: de volstrekte gelijkmatigheid en doorzichtige helderheid van een zakelijke en sobere voordracht, die het ten eenenmale versmaadt, om aan de stof een andere aantrekkelijkheid te geven, dan aan de mathesis in haar zuiversten vorm eigen is en welker strakke lijnen dan ook eerst bij langere kennismaking en rijper oordeel op hare juiste waarde plegen te worden geschat.

Enkele algemeene opmerkingen over den inhoud echter, enkele vragen en bedenkingen, die de lectuur deed rijzen, mogen hier in alle bescheidenheid, waartoe een werk, dat hij als geheel verre boven zijn lof verheven acht, den bespreker stemt, een plaats vinden.

De min of meer conventionele grenzen, waardoor men het gebied van de Hoogere Algebra ten opzichte van de andere deelen der Analyse pleegt te bepalen, zijn in Schuh's werk in opvallende mate naar de zijde van de Differentiaalrekening en de theorie van de functies eener complexe veranderlijke verschoven. In oudere werken hield men zich bij voorkeur van het gebied der infinitesimaalrekening afzijdig en wanneer men bij de theorie der hoogeremachtsvergelijkingen niet buiten het begrip der afgeleide functie kon, vermeed men, niet bepaald ten bate der helderheid, toch het begrip differentiaalquotient en zeker de toepassing daarvan op andere functies, dan de geheele rationale, waarvoor men het noodig had. Hierin is nu wel een groote verandering gebracht. Weliswaar is de invoering van het begrip der afgeleide functie in deel I nog niet bevrijd van het gekunstelde, dat daaraan in de Hoogere Algebra steeds eigen placht te zijn, maar verderop wordt toch in het algemeen over differentieerbare functies van een reële veranderlijke gesproken en worden verschillende fundamentele stellingen der differentiaalrekening afgeleid. Deze stof wordt in Deel III nog belangrijk uitgebreid en tevens aangevuld met een behandeling van de eerste beginselen van de theorie van de functies eener complexe veranderlijke. Dit is, zooals alles, wat de verschillende deelen der mathesis verlossen kan uit het isolement, waarin het onderwijs ze vaak plaatst, zonder voorbehoud toe te juichen. Alleen komt het mij voor, dat de schrijver goed zou hebben gedaan, nog wat verder voort te gaan op den ingeslagen weg, door ook nog de algemeene behandeling van de reeksontwikkelingen van Taylor en Maclaurin te geven en daarvan gebruik te maken in de Zesde Les, waarin de reeksontwikkelingen van eenige eenvoudige functies eener reële veranderlijke worden behandeld. Thans worden deze reeksontwikkelingen namelijk gevonden door insluiting van de te ontwikkelen functie tusschen de

sommen van twee eindige reeksen, die beide, hetzij door simpele afbreking, hetzij door afbreking met begrenzing van de rest uit de te vinden ontwikkeling zijn afgeleid. De bedoelde insluiting wordt dan bewezen, door het verschil van de te ontwikkelen functie met elk der twee grenzen te differentieëren en uit het teeken der afgeleide functie in verband met het voor $x = 0$ bekende teeken tot het teeken van het verschil voor alle beschouwde waarden van x te besluiten. Daarna wordt aangetoond, dat het verschil der gevonden grenzen bij onbeperkte toename van het aantal termen tot nul nadert, waaruit dan de kennis der reeksontwikkeling volgt.

Er zit, zooals men ziet, in deze methode iets, dat onweerstaanbaar aan den stijl der Grieksche mathesis doet denken: de redeneering is vernuftig, onweerlegbaar, maar gekunsteld en ze zal, dunkt mij, den lezer niet meer kunnen geven, dan het verdrietige gevoel, dat hij er niets tegen kan zeggen, maar dat hij toch nog niet door de zaak heen ziet. De wijze toch, waarop de als grens benutte reeksen gevormd zijn, is wel zeer doorzichtig voor wie uit de Differentiaalrekening de te vinden reeksontwikkeling reeds kent, maar ze moet noodzakelijk volkomen raadselachtig blijven voor iemand, die zonder die kennis tot het onderwerp nadert. Voor hem vallen de beschouwde verschillen eenvoudig uit de lucht; in ieder geval zal hij alle gevonden reeksen trouw van buiten moeten leeren, wanneer hij nog eens ooit het betoog zal willen reproduceeren.

Zou dus eenerzijds door een wat dieper doordringende behandeling van de Differentiaalrekening de bespreking van de bedoelde reeksontwikkeling vruchtbaarder hebben kunnen worden, anderzijds zou door een meer geconcentreerde bespreking van de uit de Differentiaalrekening ter sprake gebrachte onderwerpen den lezer beter tot bewustzijn te brengen zijn geweest, hoeveel hem eigenlijk op dit gebied geboden wordt. Nu staat alles zoo verspreid, dat het, weer voor hem, die nooit een zelfstandig werk over Differentiaalrekening heeft bestudeerd, moeilijk moet zijn, het meegedeelde anders dan als een verzameling van betrekkelijk onsamenvhangende feiten te zien.

Er is een ander onderwerp aan te wijzen, waarvan men niet alleen een meer geconcentreerde behandeling noode mist, maar dat zelfs ook niet in verspreide opmerkingen en vraagstukken behandeld wordt. Ik bedoel de theorie van het irrationale getal. Wanneer we eens nagaan, hoe een lezer, die, na de inleidende werken van Wijdenes te hebben bestudeerd, met Schuh's *Lessen* begint, eigenlijk tegenover deze theorie staat, dan blijkt, dat hij in het eerste deel van Wijdenes' *Lagere Algebra* een uiteenzetting van de theorie van Dedekind heeft leeren kennen, die ongetwijfeld zeer voldoende is voor het huidige examen Wiskunde L. O., maar die uit den aard der zaak niet volledig en grondig genoeg is voor wie een verder gaande studie van de wiskunde wil maken. In Schuh's werk vindt hij zich dan op de plaats, waar een van de meest belangrijkste toepassingen van de theorie gemaakt wordt, namelijk bij het bewijs van de stelling (Deel I, blz. 287), dat een naar boven begrensde verzameling van reële getallen een bovenste grens heeft, naar de rekenkunde verwezen, terwijl verder vrijwel overal stilzwijgend wordt aangenomen, dat de lezer met irra-

tionale getallen volkomen vertrouwd is. Dat zal echter de op de aangegeven wijze voorbereide lezer zeker niet in voldoende mate zijn en het lijkt me dan ook wel zeer twijfelachtig, of hij, op blz. 39 van Deel III lezende, dat het getal e als grondtal van een logaritmenstelsel wordt gekozen, er zich volledig rekenschap van zal kunnen geven, wat dat nu eigenlijk precies beteekent. De schrijver voelt dit bezwaar zelf blijkbaar ook wel en hij geeft dan ook op blz. 65 nog eens een definitie van a^x voor irrationale waarden van den exponent; de kennis van deze definitie is echter op blz. 39 reeds noodig.

Er mag daarom wel eens de nadruk op worden gelegd, dat, zooals de zaken nu staan, de Lessen over de Hoogere Algebra als onmisbaar complement het inmiddels verschenen werk van den zelfden schrijver over de theorie van het irrationale getal vereischen, wat alleen de practische vraag doet rijzen, of de lezer, die zich het kostbare eerstgenoemde werk heeft aangeschaft, er niet eenigszins recht op heeft, daarin dan ook een volledige behandeling aan te treffen van een gebied, waarvan de kennis voor het juiste begrip van het werk onmisbaar is, terwijl het voorbereidend onderwijs niet geacht kan worden; die kennis in voldoende mate te hebben aangebracht. Dit is een materiele kwestie; belangrijker lijkt mij de vraag, of het uit didactisch oogpunt te verdedigen is, dat de theorie van het irrationale getal uitsluitend in een afzonderlijk werk is ondergebracht. Men moet niet vergeten, dat het voorbereidend wiskunde-onderwijs, vooral wanneer dit op een Gymnasium of H. B. S. genoten wordt, in sterke mate de tendenz vertoont, de principiële moeilijkheden, die het bestaan van het irrationale reeds bij de behandeling van de beginselen der wiskunde doet rijzen, hoogst lichtvaardig weg te doezelen. Dit is te betreuren, maar niet te ontkennen en we moeten het feit aanvaarden, dat de overgrootste meerderheid van hen, die een voortgezette wiskundestudie aanvangen, op het gebied der irrationale getallen niet meer bezit dan een vage voorstelling van haar wezen en een niet al te best gefundeerde overtuiging, dat men er mee mag rekenen als met rationale (een inzicht van twijfelachtige waarde, wanneer men de beteekenis der uitgevoerde bewerkingen niet kent). De voortgezette studie behoort dan echter te beginnen met een volstrekte bekeering tot strengheid juist op dit gebied; immers ons merkwaardig uitgebreid avondlandsch getalbegrip verschaft aan de moderne wiskunde wel een fundament van onschatbare waarde, maar hoe kan de kennis der wiskunde betrouwbaar worden geacht, wanneer dat getalbegrip niet aanwezig is?

Feitelijk behoorde de toestand zoo te zijn, dat elk leerboek van de Hoogere Algebra, de Differentiaalrekening of de Analytische Meetkunde begon met een exacte theorie van het irrationale getal; zoo alleen zou de fundamentele beteekenis van dit begrip in voldoende duidelijkheid kunnen worden ingeprent.

In het algemeen hebben klachten over een nieuw verschenen werk uit den aard der zaak niet veel practisch resultaat. Ik kan echter de hoop niet opgeven, dat er in dit geval iets zal kunnen worden gedaan, om den boven uitgesproken wensch te verwezenlijken. De voltooiing van Schuh's Lessen beteekent namelijk tevens de voltooiing van de samen-

hangende reeks van leerboeken der Algebra, die vanaf Wijdenes' Lagere Algebra over de Middel-Algebra naar de Lessen voert. In de Middel-Algebra, die toch juist de propaedeuse voor verdere studie wil geven, hoort het verlangde hoofdstuk thuis. Zouden de schrijvers niet willen overwegen, om, nu een deel van de in dit werk behandelde onderwerpen naar den nieuwen druk van het Tweede Deel der Lagere Algebra is overgebracht, de hierdoor vrijgekomen ruimte op de boven aangegeven wijze te besteden? Dit zou mijn laatste bezwaar wegnemen, om de geheele reeks met groote ingenomenheid te begroeten als een, zoowel wetenschappelijk als didactisch hoogstaande en in zijn soort zeer waarschijnlijk eenige uiteenzetting der algebra, die in ononderbroken geleidelijkheid den aandachtigen lezer vanaf de aller-eerste beginselen tot op een aanzienlijke hoogte van modern-mathematische ontwikkeling voert.

Ik sprak in het bovenstaande voortdurend over irrationale en niet over onmeetbare getallen, daarbij een spraakgebruik huldigend, dat de schrijver van de Lessen, in den tijd, waarin ik het voorrecht had, zijn leerling te zijn, eveneens placht te volgen, maar dat hij sindsdien blijkbaar heeft opgegeven. Over de motieven, die hem daartoe hebben geleid (is het neiging tot taalzuivering of bestaan er wetenschappelijke argumenten voor?) tasten wij in het duister. In ieder geval lijkt het mij zeer te betreuren, dat in een zóó gezaghebbend werk als dit, dat de mathematische terminologie van tal van opgroeiende wiskundigen zal beheerschen, een internationaal gebruikelijke en historisch volkomen gemotiveerde term vervangen wordt door een slechts voor Hollanders verstaanbare uitdrukking, die noch historisch, noch etymologisch te verdedigen is en waarvan de toepassing op het begrip getal als zinledig moet worden aangemerkt. Inderdaad, wat is een meetbaar en wat een onmeetbaar getal? Hoe kan men een getal meten? Wordt het resultaat van een meting, hoeveel verschillende beteekenissen dit woord ook kan hebben, niet door een getal uitgedrukt en is dus een getal niet juist datgene, dat zich principiëel onttrekt aan iedere verbinding met het woord meetbaar?

Het is natuurlijk duidelijk, hoe men er toe gekomen is, om van onmeetbare getallen te spreken: de Grieksche wiskunde kent de termen *onderling meetbaar* ($\sigma\acute{\upsilon}\mu\mu\epsilon\tau\omicron\varsigma$) en *onderling onmeetbaar* ($\alpha\sigma\acute{\upsilon}\mu\mu\epsilon\tau\omicron\varsigma$) met betrekking tot lijnstukken; voor ons is de verhouding van twee lijnstukken een getal, onverschillig of die lijnstukken al dan niet onderling meetbaar zijn. Blijkbaar is men nu een getal meetbaar of onmeetbaar gaan noemen, al naar gelang het de verhouding van twee onderling meetbare of van twee onderling onmeetbare lijnstukken kon uitdrukken. Hiertegen is echter, behalve het bovengenoemde bezwaar, dit in te brengen, dat bij deze wijze van uitdrukken het onmisbare *onderling* (het $\sigma\upsilon\mu$ van $\sigma\acute{\upsilon}\mu\mu\epsilon\tau\omicron\varsigma$, het *com* van *commensurabilis*) verloren is gegaan. Want van meetbare of onmeetbare lijnstukken zonder meer kunnen wij en konden ook de Grieksche mathematici niet spreken: meetbaar is ieder lijnstuk, b.v. door zijn eigen helft.

Lijkt dus zoo de term *onmeetbaar* noch logisch, noch historisch te verdedigen, met den term *irrationaal*, als letterlijke vertaling van het Grieksche $\alpha\lambda\omicron\gamma\omicron\varsigma$ (geen $\lambda\acute{o}\gamma\omicron\varsigma$, verhouding hebbend tot iets, dat als

UIT HET VOORBERICHT

VAN

Dr. B. GONGGRIJP'S TAFEL D.

Derde druk, 231 blz. geb. f 2.50.

■ ■ ■

Natuurlijke waarden.

Een verder belangrijk verschil met de gewone tafels is de toevoeging — *even uitvoerig als die der goniometrische logaritmen* — van de tafel der natuurlijke waarden van de gon. functies.

De voor berekeningen dikwijls schitterende, soms haast mystieke hulp, die eigenschappen van logaritmen kunnen bieden, is de oorzaak geweest, dat de logaritmen reeds honderden jaren lang, en *in vele opzichten* geheel verdiend, op den voorgrond zijn gebracht en gehouden. Het in logarithmischen vorm brengen van formules heeft ook menig elegant resultaat geleverd.

Evenwel zijn rechtstreeksche berekeningen en tafels daardoor te veel op den achtergrond geraakt en gebleven. Er zijn genoeg goniometrische questies en vormen, die eenvoudiger en *nauwkeuriger*¹⁾ rechtstreeks dan logarithmisch te behandelen en te bepalen zijn.

Rechtstreeks zullen wel het eenvoudigst te berekenen zijn vormen als:

$$\sin A + \sin B + \sin C, \quad \text{tg } A + \text{tg } B + \text{tg } C, \quad \text{enz. enz.}$$

ook al kan men, als voldaan is aan zekere voorwaarden, soms zeer elegante logarithmische vormen voor deze uitdrukkingen opgeven. Er moeten dan 3 à 4 logaritmen van soms nog te herleiden getallen opgezocht en opgeteld worden; daarna moet weer het getal, beantwoordend aan die log., worden opgezocht.

¹⁾ Dikwijls 10 maal zoo nauwkeurig.

In eenvoud en nauwkeurigheid staat hier de logarithmische berekening zeker achter bij de rechtstreeksche.

Onmiddellijk zijn verder met behulp van de tafel der natuurlijke waarden der gon. functies de bases op te geven van gelijkbeenige driehoeken, waarvan de tophoek en een been of de tophoek en de hoogte gegeven zijn. Koorden, getrokken in cirkels met straal = 1 en met gegeven middp. hoek α worden gegeven door de zeer eenvoudige vergelijking $k = 2 \sin \frac{1}{2} \alpha$ en zijn dus terstond uit de natuurlijke tafel op te schrijven. Tot deze koorden behooren alle zijden van *regelmatige ingeschreven veelhoeken*; bijv. heeft men :

$$a_{15} = 2 \sin \frac{1}{2} \times \frac{360^\circ}{15} = 2 \sin 12^\circ;$$

$$a_{192} = 2 \sin \frac{1}{2} \times \frac{360^\circ}{192} = 2 \sin 56' 15'', \text{ enz.}$$

Zijden van omgeschreven regelmatige veelhoeken behooren tot de bases van gelijkbeenige driehoeken met gegeven tophoek en gegeven hoogte ($r=1$). Bijv. is $A_{192} = 2 \operatorname{tg} 56' 15'', \text{ enz.}$ Zie bijtabels L. en M.

Verder is de berekening van een zijde van een driehoek, wanneer de overstaande hoek gegeven is en ook de beide andere zijden, het eenvoudigst langs rechtstreekschen weg te verrichten, wanneer die gegeven zijden eenvoudige waarden hebben.

Als bijv. gegeven is: $a = 3 \text{ cM.}$, $b = 5 \text{ cM.}$ en $C = 47^\circ 18' 39''$, is $c^2 = 9 + 25 - 30 \cos C = 34 - 20,3406 = 13,6594$.

Een enkele worteltrekking geeft gemakkelijk $c = 3,6959$. Men kan die worteltrekking natuurlijk logarithmisch uitvoeren.

Ook het berekenen van de hoeken van een driehoek, welks zijden gegeven en dan eenvoudige getallen zijn, geschiedt het eenvoudigst rechtstreeks. Als bijv. gegeven is: $a = 5 \text{ cM.}$, $b = 6 \text{ cM.}$ en $c = 7 \text{ cM.}$, is

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{36 + 49 - 25}{84} = \frac{5}{7} = 0,71429,$$

waaruit terstond blijkt $A = 45^\circ 35' 6'', \text{ enz.}$

De logarithmische formules voor $\sin \frac{1}{2} A$ enz., $\cos \frac{1}{2} A$ enz., en $\operatorname{tg} \frac{1}{2} A$ enz., zijn zeer elegant, maar vereischen dikwijls nog al veel rekenwerk en geven meermalen resultaten met vrij belangrijke onzekerheid.

Sommen en verschillen.

Het bezit van rechtstreeksche tafels der goniometrische functies spoort aan tot het zoeken van formules, waarin alleen *sommen* en *verschillen* voorkomen. De „logarithmische” formules tracht men altijd zooveel mogelijk in de gedaante van producten en quotienten te brengen.

Kent men mijne formules:

$$\sec a = \operatorname{tg} a + \operatorname{tg} (45^\circ - \tfrac{1}{2} a);$$

$$\sec a = \frac{\operatorname{tg} (45^\circ - \tfrac{1}{2} a) + \cot (45^\circ - \tfrac{1}{2} a)}{2};$$

$$\operatorname{cosec} a = \cot a + \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} a \text{ en } \operatorname{cosec} a = \frac{\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} a + \cot \tfrac{1}{2} a}{2}?$$

Men kan er voorreerst uit zien, dat er in een rechtstreeksche tafel geen secanten en cotangentenlijsten behoeven te worden opgenomen.

Verder is het merkwaardig, dat met deze formules door sommen en verschillen hetzelfde gedaan kan worden, waarbij anders een deeling of logarithmische berekening noodig is.

Interessant is ook, en bijvoorbeeld nuttig voor contrôle de formule:

$$\cot 2a = \frac{\cot a - \operatorname{tg} a}{2} \text{ of } \cot a = 2 \cot 2a + \operatorname{tg} a.$$

Met behulp van formules als:

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2} \text{ en } \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

kan men quadraten van gon. functies rechtstreeks in de tafel opzoeken.

In de formule van DE MOIVRE:

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$$

ligt het gebruik der rechtstreeksche tafel zeer voor de hand.

Zoo zijn er vele gevallen op te noemen, waarin de rechtstreeksche goniometrische tafels werkelijk van groot nut kunnen zijn ¹⁾.

Een belangrijke eigenschap er van is, dat $\sin a$ en $\operatorname{tg} a$ juist in de nabijheid van 0° zoo evenredig met het argument varieeren en dus „gewone” of evenredige interpolatie toelaten, hetgeen bij $\log \sin a$ en $\log \operatorname{tg} a$ niet mogelijk is.

L. i. W. e. N. a. G. e. L. (de Vereeniging van Leeraren in Wis- en Natuurkunde aan Gymnasia en Lycea) uitte de wenschelijkheid van het gebruik in deze woorden:

Aanbevolen wordt ¹⁰. het gebruik van tafels met de directe waarden der gon. functies.

 Pres.-ex. van Dr. B. GONGGRIJP **Tafel D** en van J. VERSLUYS **Tafel H** worden U gaarne met het oog op invoering bij Uw onderwijs toegezonden.

Vraag ze nog heden aan bij den Uitgever

P. NOORDHOFF. — GRONINGEN.

¹⁾ Veel nut heeft men van de tafels bij het oplossen van gon. vergelijkingen en bij het onderzoek of de gevonden waarden voldoen.

Dezer dagen verschijnt:

BESCHRIJVENDE MEETKUNDE

door J. VERSLUYS

Eerste deel

Tiende druk, bezorgd door P. WIJDENES. — Prijs gec. *f* 2.25

Dezer dagen verschijnt:

Leerboek der Beschrijvende Meetkunde

door Prof. Dr. Hk. DE VRIES en P. WIJDENES

5e druk van v. PESCH—WIJDENES, **Leerboek der Beschrijvende Meetkunde**. Met 151 figuren in den tekst en 40 op uitslaande platen
Prijs geb. *f* 3.60

P. WIJDENES en Dr. D. DE LANGE

LEERBOEK DER ALGEBRA

Eerste deel, 9e onveranderde druk gec. *f* 1.90
Tweede deel, 7e onveranderde druk gec. *f* 1.90
Derde deel, 5e druk gec. *f* 1.90
Antwoorden I 3e druk *f* 0.30; II 3e druk *f* 0.75; III 2e druk *f* 0.50

P. WIJDENES

ALGEBRAÏSCHE VRAAGSTUKKEN

voor H. B. Scholen 5 j.c. en Gymnasia

I 5e onveranderde druk geb. . . *f* 2.40

II 5e druk geb. *f* 3.25

Antwoorden I 2e druk *f* 0.75. II 2e druk *f* 1.00

Volledige uitwerkingen van de Logarithmen vraagstukken uit Algebraïsche vraagst. 2e deel uitsluitend voor leeraren. Gratis verkrijgbaar bij den schrijver.

ALGEBRAÏSCH TEEKENSCHRIFT

behoorende bij Algebraïsche vraagstukken 3e druk *f* 1.00

DEFINITIES EN FORMULES

behoorende bij Algebraïsche vraagstukken 3e druk *f* 1.00

UITGAVEN VAN P. NOORDHOFF TE GRONINGEN

P. WIJDENES
THEORIE DER REKENKUNDE
in 't bijzonder voor Kweekscholen *f* 2.75

P. WIJDENES
Voorlooper op de Rekenboeken
voor de H.B.S. en voor M.U.L.O.
tevens slotstukje voor het Rekenonderwijs op de Lagere School
gec. *f* 0.60

P. WIJDENES
REKENBOEK VOOR M.U.L.O.
en voor verschillende Inrichtingen van Onderwijs met
beperkt Wiskunde—program
1e stukje, 4e druk gec. *f* 1.60. — 2e stukje, 3e druk gec. *f* 1.60.
3e stukje bevattende 375 vraagst. ter herhaling, alle schriftelijke opg.
der M.U.L.O. examens en 36 mondelinge verslagen. 2e dr. gec. *f* 1.50
Antwoorden I *f* 1.50; II *f* 1.50; III *f* 1.00

P. WIJDENES
Rekenboek voor M.U.L.O.,
vereenvoudigde uitgave B.
Deel I, gec. *f* 1.40. II, gec. *f* 1.40. Antwoorden I en II à *f* 1.00.

P. WIJDENES
Vraagstukken uit Rekenboek I
7e druk. — Gec. *f* 1.00. Antwoorden *f* 0.40.

Vraagstukken uit Rekenboek II
en Rek. Opgaven der M.U.L.O. Examens.
4e dr. Gec. *f* 1.00. Antwoorden, 2e dr. *f* 0.50

P. WIJDENES en Dr. D. DE LANGE
Rekenboek voor de Hoogere Burgerschool.
Eerste deel. 11e dr. Gec. *f* 1.70. Tweede deel. 8e dr. Gec. *f* 1.70.
Antwoorden I, 5e dr. *f* 0.50. II, 3e dr. *f* 1.00

UITGAVEN VAN P. NOORDHOFF TE GRONINGEN