

BIJVOEGSEL

VAN HET NIEUW TIJDSCHRIFT

□ □ VOOR WISKUNDE □ □

GEWIJD AAN ONDERWIJSBELANGEN

ONDER LEIDING VAN

J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

MET MEDEWERKING VAN

Dr. H. J. E. BETH
DEVENTER

Dr. E. J. DIJKSTERHUIS
OISTERWIJK

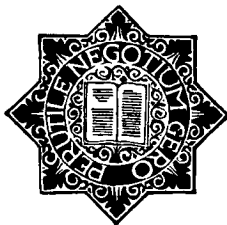
Dr. B. P. HAALMEIJER
AMSTERDAM

Dr. D. J. E. SCHREK
UTRECHT

Dr. P. DE VAERE
BRUSSEL

Dr. D. P. A. VERRIJP
ARNHEM

2e JAARGANG 1925/26, Nr. 4



P. NOORDHOFF — GRONINGEN

Prijs per Jg. van 10 à 12 vel f 3.—. Voor inteekenaars op het
Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde en Christiaan Huygens f 2.—.

Het Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde verschijnt in zes tweemaandelijksche afleveringen, samen 10 à 12 vel druks. Prijs *f* 3.— per jaargang. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6.—) of op „Christiaan Huygens” (*f* 8.—) zijn ingeteekend, betalen *f* 2.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam, Saxen-Weimarlaan 46; Tel. 28341. Aangeteekende zendingen met bijvoeging: „Bijkantoor Saxen-Weimarlaan 48”.

Na 15 Mei is het adres: Frans-van-Mierisstraat 112.

Het honorarium voor geplaatste artikelen bedraagt *f* 20.— per vel.

De prijs per 25 overdrukken of gedeelten van 25 overdrukken bedraagt *f* 3,50 per vel druks *in het vel gedrukt*. Gedeelten van een vel worden als een geheel vel berekend. Worden de overdrukken buiten het vel verlangd, dan wordt voor het afzonderlijk drukken bovendien *f* 6.— per vel druks in rekening gebracht.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

INHOUD.

Ontwerp van een leerplan voor het onderwijs in
Wiskunde, Mechanica en Kosmographie op de H. B.

Scholen met vijfjarigen cursus 113—139

Dr. D. P. A. VERRIJP, Vierdecimale tafels 140—144

 Verschenen de 17^{de} druk van Wijdenes Algebra voor
M. U. L. O. I.

 Verschenen de 5^{de} druk van Wijdenes Algebraïsche
Vraagstukken II.

Firma MARTINUS NIJHOFF, Haag, verzoekt aanbieding van
BIERENS DE HAAN, Tables d'intégrales définies.

ONTWERP VAN EEN LEERPLAN VOOR HET ONDERWIJS IN WISKUNDE, MECHANICA EN KOSMOGRAPHIE OP DE H. B. SCHOLEN MET VIJFJARIGEN CURSUS.

De Commissie, die zich op verzoek van het College van Inspecteurs bij het M.O. heeft belast met een onderzoek naar den toestand van het wiskunde-onderwijs op de H. B. Scholen met vijfjarigen cursus en die daarbij is uitgenoodigd, voorstellen te doen tot het aanbrengen van wijzigingen, die aan dat onderwijs ten goede zouden kunnen komen, deelt hierbij het resultaat van hare schriftelijke en mondelinge gedachtenwisseling mede in den vorm van een concept-leerplan, voorzien van verdediging en toelichting.

Alvorens tot de uiteenzetting van het door haar ontworpen leerplan over te gaan, wenscht zij aan te geven, door welke algemeene gezichtspunten zij zich bij haar werk heeft laten leiden.

De H. B. School heeft bij de tegenwoordige organisatie van ons onderwijs een tweeledige taak te vervullen; zij bereidt eenerzijds voor tot onmiddellijke werkzaamheid in de maatschappij, anderzijds tot voortgezette studie aan inrichtingen van Hooger Onderwijs. De tweeslachtigheid, die haar daardoor, in tegenstelling tot het Gymnasium, in hooge mate eigen is, kan haar slechts dan niet deren, indien zij zich onthoudt van eenzijdige behartiging van de belangen van een enkele der talrijke groepen, waarin hare leerlingen naar hun toekomstige loopbaan kunnen worden ingedeeld: zij mag evenmin een handelsschool zijn als een voorbereidende school voor studie in exacte wetenschappen. Zij moet niet in de eerste plaats streven naar het aanbrengen van kennis, die hare leerlingen later zullen kunnen benutten, maar ze moet zorgen, dat ze hun geest in voldoende mate vormt en ontwikkelt, om hen tot het verwerven der kennis, die ieder op zijn eigen terrein zal behoeven, in staat te stellen.

De Commissie meent zich ontslagen te mogen achten van de taak, te betoogen, dat, bij huldiging van deze opvatting, een intensief onderwijs in wiskunde en aanverwante vakken voor alle leerlingen onmisbaar is.¹⁾

¹⁾ Voor een nadere verdediging van deze meening moge worden verwezen naar een verhandeling van den secretaris der Commissie: *Over de waarde van grondig wiskunde-onderwijs voor alle leerlingen*

Tevens zal het echter duidelijk zijn, hoe zij zich dit onderwijs denkt: zij wenscht vóór alles de vormende waarde, die van beoefening der wiskunde kan uitgaan, in het oog te houden en eerst in de tweede plaats te letten op het practische nut, dat de kennis van sommige gebieden der wiskunde voor een deel harer leerlingen later kan hebben; zij acht daarom het aanbrengen van fundamentele theoretische inzichten belangrijker dan het ontwikkelen van technische vaardigheid.

Het spreekt echter vanzelf, dat wiskundig denken geoefend moet worden aan opzettelijk daarvoor gekozen onderwerpen en dat het wiskunde-onderwijs dus steeds, ook zonder dit als hoofddoel na te streven, tot het aanbrengen van een zekere hoeveelheid kennis zal voeren. Het ware nu een moedwillig en kortzichtig verbreken van alle contact met de werkelijkheid, indien bij de keuze uit verschillende mathematisch-vormende onderwerpen niet eenigszins rekening zou mogen worden gehouden met een overweging, die het hoofddoel niet mag beïnvloeden, met de vraag namelijk, hoe men den leerlingen, die later hooger onderwijs in exacte wetenschappen zullen genieten, den vaak zoo moeilijken overgang van de H. B. S. tot de Hoogeschool gemakkelijker kan maken.

Samenvattende meent de Commissie hare meening omtrent het doel van het Wiskunde-onderwijs op de H. B. S. als volgt te kunnen formuleren:

Hoofddoel van het wiskunde-onderwijs is het bijdragen tot geestelijke vorming en ontwikkeling; nevendoel het aanbrengen van nuttige kennis. Bij de keuze der onderwerpen, die tot het bereiken van het hoofddoel kunnen worden gebruikt, dient rekening te worden gehouden met de belangen van hen, voor wie de H. B. S. een voorbereiding is tot verdere studie.

De Commissie heeft gemeend geene voorstellen te moeten doen tot het opnemen van voorschriften of aanwijzingen in het leerplan, die de vrijheid van den docent op punten, welke uitsluitend de methode van onderwijs betreffen, aan banden zouden kunnen leggen. Zij meent, dat iedere docent zelf moet mogen beslissen over de mate van zelfstandigheid in intellectueel werk, die hij bij zijn leerlingen meent te kunnen aankweeken, over de keuze der oefenstof,

van scholen voor middelbaar en voorbereidend hooger onderwijs. (Handelingen van het XXe Nederlandsch Natuur- en Geneeskundig Congres, pag. 117 seq.) gewijzigd herdrukt onder den titel *Het wiskunde-onderwijs.* (De Gids, 1925, No. 10, pag. 73 seq.).

die hij bij zijn onderwijs wil bezigen, over de volgorde, waarin hij de voor een schooljaar door het programma voorgeschreven onderwerpen wil behandelen en over de uitbreidingen, die hij aan het programma meent te kunnen geven.

Zij zal zich echter veroorloven, om daar, waar zij eenstemmig een oordeel kan uitspreken, ook over methodische onderwerpen opmerkingen te maken, die aan den lezer ter overweging worden aangeboden, te wijzen op oefenstof, die haar of bijzonder geschikt of bijzonder ongeschikt voorkomt, denkbeelden te opperen over onderwerpen, waarmee zij het door haar voorgestelde minimum-programma, indien mogelijk, gaarne zou zien uitgebreid en hare meening te uiten over de practische inrichting van het onderwijs.

Zoo wenscht zij reeds onmiddellijk te wijzen op de wenschelijkheid, om overal, waar de bevoegdheden der aanwezige docenten dit mogelijk maken, alle wis- en natuurkundige vakken (wiskunde, mechanica, natuurkunde en kosmographie) in eenzelfde klasse door eenzelfde docent te doen onderwijzen, om zodoende het vaak ontbrekende besef van den nauwen onderlingen samenhang dier wetenschappen te verlevendigen. In ieder geval behooren naar hare meening alle wiskundevakken in eenzelfde klasse in één hand te zijn, wat uit den aard der zaak steeds mogelijk is. Ook beveelt zij aan, om, voorzoover dit zonder inbreuk op de juist uitgesproken beginselen kan geschieden, ter wille van de continuïteit in het onderwijs, zooveel mogelijk den docent met een klasse te laten opgaan en waar dit met die beginselen in strijd zou geraken of om andere redenen onmogelijk zou zijn, een eventueele discontinuïteit bij voorkeur tusschen de klassen III en IV te leggen.

Alvorens thans over te gaan tot de uiteenzetting van haar ontwerp-leerplan, wenscht de Commissie met nadruk te verklaren, dat zij met haar voorstel slechts verbetering, geen verzwaring van het wiskunde-onderwijs beoogt. Zij heeft weliswaar op verschillende plaatsen onderwerpen in het programma opgenomen, die tot dusver in het H. B. S. onderwijs niet voorkwamen, maar daartegenover staat een groot aantal gevallen, waarin zij of deelen der thans gebruikelijke leerstof geheel heeft geschrapt of naar sterke beperking van den omvang dier leerstof heeft gestreefd.

De Commissie is dan ook overtuigd, dat het voor invoering van het door haar voorgestelde leerplan niet noodig zal zijn, een grooter aantal uren aan het geheel der leervakken wiskunde, mechanica en kosmographie te besteden, dan vóór de wijziging van

het programma der H. B. Scholen in 1920 voor die vakken beschikbaar was.

R e k e n k u n d e.

Programma.

Klasse I.

Logische ontwikkeling van het getalbegrip, uitgaande van de rij der natuurlijke getallen.

Tellen. Gelijkheden en ongelijkheden. Optellen. Grondeigenschappen en afgeleide eigenschappen.

Aftrekken. Invoering van het getal nul en de negatieve getallen. Definitie van de bewerkingen met negatieve getallen.

Vermenigvuldiging van rekenkundige getallen. Machtsverheffing.

Deelen van rekenkundige getallen. Invoering van de gebroken getallen.

Definitie van de bewerkingen met gebroken getallen.

Deelbaarheid. Talstelsels. Grootste gemeene deeler en kleinste gemeene veelvoud. Repeteerende breuken. Verhoudingen. Evenredigheden.

Practische oefeningen in het rekenen.

Klasse II.

Rechtstreeks en omgekeerd evenredige afhankelijkheid.

Worteltrekking. Voorloopige invoering van irrationale getallen.

Vierkantsworteltrekking. Bewerkingen met onnauwkeurige getallen.

Toelichting.

De leerlingen, die de Lagere School hebben doorloopen en op grond van een getuigschrift of van een met goed gevolg afgelegd toelatingsexamen tot de H. B. S. zijn toegelaten, moeten worden geacht, de techniek van de hoofdbewerkingen met geheele getallen, tiendeelige en gewone breuken te beheerschen. Het wezen van die bewerkingen kan hun echter nog niet duidelijk zijn, reeds hierom niet, omdat een behoorlijk begrip van „getal” bij hen nog niet aanwezig mag worden ondersteld.

Het behoort nu tot de taak van het M. O., de leerlingen te leeren, zich rekenschap te geven van de bewerkingen, die zij tot dusver machinaal hebben verricht, hen er van te doordringen, dat het getalbegrip slechts door geleidelijke uitbreiding van de oorspronkelijke beteekenis van het woord getal gevormd wordt en dat het steeds de beperkte uitvoerbaarheid eener gedefinieerde bewerking in de tot op dat oogenblik bekende getallen is, die tot zulk een

uitbreiding leidt. Deze behandelingswijze legt niet alleen een stevigen grondslag voor de verdere ontwikkeling van de wiskunde; zij verschaft tevens een ongezochte gelegenheid tot het aanbrengen van de fundamenteele logische begrippen: axioma, definitie, bewijs, stelling enz.

Op dezen gedachtengang is het programma gebouwd. Wanneer de bewerkingen met negatieve getallen zijn gedefinieerd, kan voor verdere behandeling hiervan naar de algebra worden verwezen en kan de rekenkunde zich verder tot rekenkundige getallen bepalen.

Ter beantwoording van de vraag, welke mate van strengheid bij de uitvoering van het voorgestelde programma in acht zou moeten worden genomen, wil de Commissie de ook voor hare overige voorstellen geldende opmerking maken, dat het haar onmogelijk voorkomt, om over deze subtiële kwestie eenig bindend voorschrift te geven. Het is nu eenmaal de groote moeilijkheid van alle wiskunde-onderwijs — een moeilijkheid, die iedere docent telkens weer met het oog op zijn leerlingen zal hebben op te lossen — hoever men de mathematische exactheid kan opvoeren. Een te veel is hier evenzeer schadelijk als een te weinig. Er zal nooit mogen worden vergeten, dat het H. B. S. onderwijs grootendeels wordt gegeven aan jeugdige, in wiskundig denken aanvankelijk niet geoefende en grootendeels voor abstracte beschouwingen niet speciaal aangelegde leerlingen, maar aan den anderen kant mag niet uit het oog worden verloren, dat het M. O., terwille van het intellectueele peil der maatschappij, zekere eischen moet stellen aan de capaciteiten van hen, die het onderwijs willen volgen en dat die eischen niet te hoog mogen worden genoemd, zoolang de middelmatige leerling er bij ernstige inspanning van al zijn krachten aan kan voldoen.

De opneming van het onderwerp „talstelsels” beoogt niet het behandelen van een groot aantal vraagstukken ter oefening van het rekenen in verschillende talstelsels en van den overgang van het eene stelsel tot het andere. Het is echter noodzakelijk, dat de leerling zich rekenschap geve van de willekeur, die in de keuze van *tien* als grondtal van het practisch gebruikelijke stelsel gelegen is.

Het voordeel van de repeteerende breuken ziet de Commissie hoofdzakelijk hierin, dat men hier een eerste gelegenheid heeft tot het voorzichtig naderen van het limietbegrip en bovendien een welkome aanleiding, om dieper op de deelbaarheid in te gaan.

Zij acht het voorts gewenscht, dat de op de Lagere School verworven technische vaardigheid in het rekenen op de H. B. S. onderhouden worde, doordat het geheele jaar door praktische oefeningen in het rekenen worden gehouden. Men hoede zich hier echter voor de overdrijving, die het rekenonderwijs steeds dreigt te schaden: men vermijde te ingewikkelde vraagstukken, zoowel wanneer zij door beredeneering, als wanneer zij door becijfering moeten worden opgelost; evenzoo de vraagstukken, waarin handels-usances een rol spelen en die, welker rekenkundige oplossing slechts in schijn van de algebraïsche verschilt.

In Klasse II behoort veel aandacht te worden geschonken aan de rechtstreeks en omgekeerd evenredige afhankelijkheid, wegens haar belang voor de ontwikkeling van het functioneele denken.

Strengte invoering van het irrationale getal kan in klasse II uit den aard der zaak nog niet plaats hebben. Dit sluit niet in, dat de essentieele moeilijkheid, waarvoor het wiskundig denken hier komt te staan, zou mogen worden weggedoezeld; integendeel moet alles worden gedaan, om de leerlingen te doen beseffen, dat hier een probleem moet worden opgelost en hen te doordringen van het besef, hoezeer alles, wat nu verder met de irrationale getallen geschiedt, nadere bespreking en rechtvaardiging behoeft.

Het werken met onnauwkeurige getallen moet behandeld worden met het oog op het praktische rekenen in natuurkundige vraagstukken.

Algebra.

Programma.

Klasse I.

Hoofdbewerkingen met geheele vormen. Eenvoudige merkwaardige producten en quotienten. Eenvoudige gevallen van ontbinding in factoren.

Rechthoekige coördinaten. Functies; graphische voorstellingen.

Klasse II.

De lineaire functie $y = ax + b$. (Graphiek; positieve en negatieve toestand; nulpunt; ongelijkheden). De rekenkundige reeks.

Gebroken vormen. De rekenwijze van Horner. De reststelling en hare gevolgen. De bewijsmethode der volledige inductie.

Algemeene behandeling van de theorie der merkwaardige quotienten.

De formule voor de macht van een binomium voor geheele rekenkundige waarden van den exponent.

Identiteiten. Ontbinding in factoren. Eenvoudige gevallen van het bepalen van G. G. D. en K. G. V. van twee vormen.

Meetkundige en algebraïsche behandeling van een stelsel van twee lineaire vergelijkingen met twee onbekenden. Afhankelijkheid en strijdigheid. Homogene en niet homogene vergelijkingen.

Algebraïsche behandeling van een stelsel van n lineaire vergelijkingen met n onbekenden.

Rekenkundige wortels. Worteltrekking uit eentermen en vierkantsworteltrekking uit tweetermen van den vorm $a \pm \sqrt{b}$. Het rationaal maken van den noemer van een gebroken vorm, waarvan de noemer geen hogere dan vierkantswortels bevat.

Klasse III.

Gebroken en negatieve exponenten. Logarithmen. Gebruik van de logarithmentafel met vier decimalen. Reken- en meetkundige reeksen. Het limietbegrip. De quadratische functie $y = ax^2 + bx + c$. (Graphiek; ontbinding in factoren; positieve en negatieve toestand; nulpunten; extreme waarden; de vierkantsvergelijking $ax^2 + bx + c = 0$; symmetrische functies van de wortels eener vierkantsvergelijking).

Irrationale vergelijkingen en andere vergelijkingen, die tot vierkantsvergelijkingen kunnen worden herleid.

De gebroken lineaire functie $y = \frac{ax + b}{cx + d}$.

Klasse IV. Theorie van het irrationale getal. Herhaling van de onderwerpen waarbij vroeger irrationale getallen zijn opgetreden.

Beginnelsen van de differentiaalrekening. Het differentieëren van de geheele rationale functie, van de functies $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, van een product van functies, een quotient van functies en van samengestelde functies. Toepassingen op graphische voorstellingen en op meetkundige en kinematische vraagstukken.

Continuïteit; theorema van Rolle; middelwaardstelling.

Hogere afgeleiden. Kinematische beteekenis van de tweede afgeleide van den weg naar den tijd.

Klasse V.

Algebraïsche behandeling van het complexe getal. Herhaling van de achtereenvolgens tot stand gebrachte uitbreidingen van het getalbegrip.

Beginnelsen der integraalrekening. Bepaalde integralen. De bepaalde integraal als functie van de bovenste grens; differentiaalquotient naar de bovenste grens; onbepaalde integralen, voorzoover

correspondeerende met de in Klasse IV behandelde differentiaal-quotienten. Meetkundige, mechanische en natuurkundige toepassingen van het begrip bepaalde integraal. Algemeene herhaling.

Als onderwerpen, waarmee het programma in klasse V zoo mogelijk zou kunnen worden uitgebreid, worden aanbevolen:

Reeksontwikkeling van de geheele rationale functie. Het getal e ; de logarithmische en de exponentieele functie. Reeksontwikkelingen voor $\log(1+x)$, voor $\sin x$ en voor $\cos x$.

Toelichting.

Van alle door de Commissie voorgestelde wijzigingen zijn die in het leerplan voor Algebra de meest ingrijpende; met het oog daarop moge hier uitvoerig worden betoogd, welke overwegingen tot het indienen van dit voorstel hebben geleid.

In de eerste plaats lijdt van alle takken der H. B. S.-wiskunde de Algebra wel het meeste aan het euvel der verwaarloozing van fundamenteele theoretische inzichten ter wille van de ontwikkeling der technische vaardigheid, zoodat in vele gevallen slechts sporadisch een les aan behandeling der theorie wordt gewijd, terwijl alle overige tijd aan het maken van vraagstukken wordt besteed. De wensch, om voor dat uitgebreide vraagstukkenbedrijf steeds weer nieuwe oefenstof te hebben, heeft gevoerd tot het samenstellen van steeds gecompliceerdere oefenvoorbeelden (voornamelijk op de gebieden: wortelvormen, oneigenlijke exponenten, berekeningen met logarithmen, logarithmische en exponentieele vergelijkingen), die zoo duidelijk de sporen dragen, ter wille van de moeilijkheid te zijn ineengezet en die zoo weinig aan reële mathematische behoeften zijn ontsproten, dat ze onvermijdelijk moeten medewerken tot het scheppen van verkeerde denkbelden over de wiskunde; daardoor wordt de waarde, die zij als oefenmateriaal bezitten, ruimschoots teniet gedaan.

In de tweede plaats was een ingrijpende verandering in het programma voor Algebra in de klassen IV en V reeds hierdoor geboden, dat voor die beide klassen bij de thans bestaande regeling vrijwel geen leerplan aanwezig is. Voor klasse IV vindt men alleen het onderwerp Logarithmische en Exponentieele vergelijkingen met name genoemd; verder vindt men voor IV en V niets anders vermeld dan Herhaling. Deze vaagheid van het programma veroorzaakt een volkomen stelselloosheid in het algebra-onderwijs. De wensch, hierin verandering te brengen, heeft geleid tot het opstellen van een geheel nieuw leerplan voor de hoogste klassen.

Ten slotte echter wenscht de Commissie in het leerplan voor Algebra de overtuiging tot uiting te brengen, die tegenwoordig wel door alle mathematici zal worden gedeeld, maar die in de thans vigeerende regeling van het wiskunde-onderwijs op de H. B. S. nog geenerlei invloed uitoefent, de overtuiging namelijk, dat het Algebra-onderwijs in de eerste plaats de ontwikkeling van het functioneele denken moet nastreven. Deze opvatting heeft niet alleen de richting bepaald, waarin de wijzigingen van het thans bestaande leerplan zijn aangebracht; zij heeft tevens als logische consequentie het voorstel met zich meegebracht, voor de klassen IV en V de beginselen van de differentiaal- en integraalrekening in het programma op te nemen.

De volgende bespreking van het ontwerp-leerplan voor de verschillende klassen zal duidelijk maken, hoe de Commissie de uitgesproken denkbeelden heeft trachten te verwezenlijken.

In Klasse I zal zoo vroeg mogelijk een begin moeten worden gemaakt met de invoering van het vlakke rechthoekige coördinatenstelsel; dit biedt op zich zelf reeds waardevolle oefenstof voor de in klasse I voltrokken uitbreiding van het getalbegrip tot negatieve getallen; er bestaat voortdurend gelegenheid, het onderscheid tusschen de absolute en de algebraïsche waarde van een getal te doen uitkomen, terwijl de opvatting van het teeken van een coördinaat als aanwijzer van de richting, waarin een uit den aard der zaak positieve lengte moet worden uitgezet, een belangrijke meetkundige verheldering van het begrip negatief verschaft.

Met behulp van het coördinatenstelsel kan daarna worden overgegaan tot de invoering van graphische voorstellingen, waarbij de begrippen functie, onafhankelijk en afhankelijk veranderlijke zullen kunnen worden geïllustreerd. De voor te stellen functies zullen of door een tabel, of door een algebraïsche uitdrukking gegeven kunnen worden; in het laatste geval kan men weliswaar nog geen theorie van de verkregen lijnen geven, maar men kan zich dan beperken tot het voortbrengen der teekeningen.

Uit het thans voor klasse I geldend programma is geschrapt het onderwerp: vergelijkingen van den eersten graad met een onbekende. Dit onderwerp komt in de tweede klasse vanzelf ter sprake als één der vragen, waartoe de studie der lineaire functie $y = ax + b$ aanleiding geeft. In klasse I komt het begrip onbekende dus nog niet voor; op deze wijze zal een eind worden gemaakt aan de thans als regel bij de leerlingen heerschende verwarring tusschen een

veranderlijke en een onbekende, welk laatste begrip het eerste soms geheel dreigt te verdringen.

Voor het onderwijs in klasse I beveelt de Commissie voorts een zoo sober mogelijke behandeling aan van de merkwaardige producten en quotienten. Men ga bij de quotienten niet verder dan tot den exponent 4, bij de producten niet verder dan 3.

Bij de ontbinding in factoren zal de versobering meer den graad van gecompliceerdheid der oefenvoorbeelden moeten betreffen dan het aantal der te behandelen gevallen, waarin ontbinding mogelijk is; alleen kan de ontbinding van den vorm $ax^2 + bx + c$ beter worden uitgesteld tot de klassen II en III.

De Commissie wenscht nog de opmerking te maken, dat het tegengaan van overdrijving van de ontwikkeling der technische vaardigheid niet mag ontaarden in een miskenning van de waarde dier vaardigheid. Het moet een der doeleinden van alle wiskunde-onderwijs blijven, de gewoonte van het leveren van zorgvuldig samengesteld, net en accuraat uitgevoerd werk aan te kweeken en daarbij tevens de technische vaardigheid zoover te ontwikkelen, dat het gemis daaraan aan het bereiken van het hoofddoel, het ontwikkelen van wiskundig inzicht, althans geen moeilijkheden in den weg legt.

In klasse II kan op grond van de inmiddels in de meetkunde behandelde evenredigheid van lijnen de theorie van de lineaire functie $y = ax + b$ en haar graphische voorstelling volledig gegeven worden. Door het voorschrijven van de ordinaatwaarde komt hierbij vanzelf de vergelijking van den eersten graad met een onbekende aan de orde.

Aan de graphische voorstelling der lineaire functie sluit in de eerste plaats de behandeling van de rekenkundige reeks ongedwongen aan, terwijl men eveneens vanzelf tot de beschouwing van twee lineaire vergelijkingen met twee onbekenden wordt gevoerd. Bij de oplossing daarvan behoort de meetkundige verduidelijking steeds de algebraïsche redeneering te vergezellen; het kan zelfs de meetkundige vraag naar het snijpunt van twee rechten zijn, die tot het stellen van het probleem van de oplossing van twee lineaire vergelijkingen voert. Wenschelijk is verder vooral (wat vaak verwaarloosd schijnt te worden) een nauwkeurige behandeling van de theorie (het begrip gelijkwaardige stelsels, afhankelijkheid, strijdigheid). Voor het zuiver algebraïsche deel van het algebra-onderwijs in klasse II lijkt het verder gewenscht, om, ter vereenvoudiging

van een veel voorkomende bewerking, de rekenwijze van Horner voor de deeling van een veelterm door een tweeterm in te voeren; vervolgens echter eischt het beginsel, om, met vermijding van gedachteloos gereden, fundamenteele theoretische inzichten te ontwikkelen, de behandeling van de reststelling met hare gevolgen. Een zoo fundamenteele algebraïsche stelling kan nergens anders dan in de beginselen der Algebra worden opgenomen; de bezwaren, die men wellicht bij eerste beschouwing tegen het voorstel, om haar reeds in klasse II te behandelen, zou willen opperen, en die bij de tegenwoordige organisatie van het Algebra-onderwijs menigmaal niet ongegrond zouden kunnen blijken, zullen bij leerlingen, die reeds eenigszins functioneel zijn ontwikkeld en die meer met vormen dan met vergelijkingen hebben gewerkt, vanzelf vervallen. De reststelling en hare gevolgen kunnen nu verder goede diensten bewijzen bij de behandeling van de stelling, dat een veelterm, die voor meer waarden, dan de graad bedraagt, nul wordt, identiek nul is en daardoor bij het bewijzen van identiteiten (belangrijk vooral ter bevordering van het inzicht in het verschil tusschen een vergelijking en een identiteit); verder bij de algemeene behandeling der merkwaardige quotienten, bij de ontbinding in factoren en bij het bepalen van den G. G. D. en het K. G. V. van twee vormen. De behandeling van den G. G. D. door de methode van Euclides kan daarnaast gevoegelijk vervallen.

De voor de geheele wiskunde zoo fundamenteele bewijsmethode der Volledige Inductie behoort in klasse II besproken te worden, zoowel ter wille van het principe der methode als omdat zij het mogelijk maakt, zonder moeite de formule voor $(a \pm b)^n$ voor geheele positieve waarden van n af te leiden. In de latere schooljaren zal het wiskunde-onderwijs nog herhaaldelijk gelegenheid bieden, dezelfde bewijsmethode toe te passen.

Bij de behandeling van wortelgrootheden stelt de Commissie een sterke versoering voor, die in het boven meegedeelde leerplan gedetailleerd is.

De behandeling van de vierkantsworteltrekking uit tweetermen van den vorm $a \pm \sqrt{b}$ beveelt zij aan, niet zoozeer om de vele, opzettelijk in elkaar gezette oefenvoorbeelden, maar meer ter wille van de theorie der herleiding.

De voornaamste wijzigingen, die de Commissie voor klasse III voorstelt, zijn als volgt samen te vatten:

Beperking van het logarithmisch rekenwerk door invoering van tafels in vier decimalen.

Sterke beperking van de Samengestelde Interestrekening.

Verdere ontwikkeling van het functioneele denken door behandeling van de graphieken van de exponentieele en de logarithmische functie, van de geheele rationale functie van den tweeden graad en van de gebroken lineaire functie.

Verder worden resp. blijven uit het programma voor de klassen III en IV geschrapt de onderwerpen:

Exponentieele en logarithmische vergelijkingen, voorzover deze niet bij de behandeling van de logarithmen of van de vergelijkingen, die tot vierkantsvergelijkingen kunnen worden herleid, voorkomen. Vergelijkingen met kunstgrepen. Onbepaalde vergelijkingen.

Hieronder volgt een korte toelichting van deze voorstellen.

De invoering van de logarithmentafels met vier decimalen zal zeer zeker een groote vereenvoudiging in het cijferwerk beteekenen en dus veel tijd vrij maken, die beter besteed kan worden.

De behandeling van de theorie der logarithmen zal, voorzover het irrationale logarithmen betreft, een even voorloopig karakter moeten dragen, als bij de bespreking van het irrationale getal in klasse I het geval was. Wenschelijk is de meetkundige verlevendiging van het verloop der logarithmische functie door de bespreking van de graphiek van $y = a \log x$ in verband met die van $y = a^x$.

Als gecombineerde toepassing van meetkundige reeksen en logarithmen kunnen eenige vraagstukken uit de Samengestelde Interestrekening besproken worden. Men blijve zich hierbij echter beperken tot de fundamenteele begrippen; het is niet zoozeer om de interestrekening te doen, als wel om het opstellen van de algebraische gedaante van een ingekleed vraagstuk. Te diep op dit onderwerp ingaan beteekent op de H. B. S. een practische toepassing van de wiskunde onderwijzen, die slechts voor vakmensen belang heeft, maar die het doel van algemeen vormend wiskunde-onderwijs niet dient. Er is geen bezwaar tegen, om ter vereenvoudiging van het rekenwerk het gebruik van rentetafels voor S_n , A_n , s_n , a_n , toe te laten.

De vierkantsvergelijking worde behandeld in den vorm $ax^2 + bx + c = 0$, niet in den vorm $x^2 + px + q = 0$; men hoede zich hier voor het oplossen van vergelijkingen, die grootere getallen bevatten, dan bij ingekleede vraagstukken kunnen worden verwacht.

Afzonderlijke behandeling van het onderwerp Logarithmische en exponentieele vergelijkingen leidt blijkens de ervaring spoedig tot opzettelijke constructie van moeilijkheden. De eenvoudigste soorten kunnen worden ondergebracht op de wijze als boven is aangegeven.

Bij de irrationale vergelijkingen, die tot vierkantsvergelijkingen kunnen worden herleid, beveelt de Commissie aan, de irrationale vergelijking als gelijkwaardig te beschouwen aan de rationale vergelijking, die er uit wordt afgeleid.

De behandeling van de gebroken lineaire functie aan de hand van een graphiek is voorgesteld, omdat zij als bijzonder geval de omgekeerd evenredige afhankelijkheid omvat en omdat zij ongeveer gelijktijdig kan plaats hebben met de behandeling van de hyperbool in de vlakke meetkunde.

Het voorstel der Commissie, om in de klassen IV en V de beginselen van de differentiaal- en integraalrekening in te voeren, is eenerzijds een logisch gevolg van de boven uiteengezette grondbeginselen, die zij ten aanzien van het Algebra-onderwijs in het oog heeft willen houden, anderzijds een uitvloeisel van haar begeerte, de dingen te noemen bij den naam, dien ze nu eenmaal bezitten en, waar het Middelbaar onderwijs niet buiten de begrippen der hoogere wiskunde kan, van dit feit voor den leerling geen geheim te maken.

Vooreerst voert reeds het streven, om het wiskunde-onderwijs dienstbaar te maken aan de ontwikkeling van het functioneele denken en daarbij gebruik te maken van het hulpmiddel der graphische voorstelling, om een levendige aanschouwing te wekken van de wijze, waarop een grootheid in afhankelijkheid van een veranderlijke grootheid verandert, onvermijdelijk tot de behandeling van de grondbegrippen der differentiaalrekening. Dit is althans het geval, wanneer men als doel van het gebruik van graphische voorstellingen niet *alleen* verlevendiging van het intuïtieve zien, maar tevens verheldering van het abstracte begrippen stelt. Immers dan voert bij iedere beschouwing van een geleidelijke verandering, die door een graphiek is toegelicht, de wensch, zich werkelijk rekenschap te geven van de juiste beteekenis der gebruikte termen tot nauwkeuriger onderzoek van termen als raaklijn, extreem, concaaf, convex, woorden dus, waaraan iedereen van nature wel een min of meer heldere voorstelling verbindt, maar waarvan het onberedeneerde gebruik bij een opvatting van wiskunde-onderwijs, zooals hier wordt voorgestaan, niet kan worden geduld. Tegelijkertijd wordt in het mechanica-onderwijs in klasse IV gesproken over snelheid en ver-

snelling, begrippen, die nu eenmaal niet kunnen worden omschreven zonder van het begrip differentiaalquotient gebruik te maken en die dan ook reeds sedert jaren noodzakelijk hebben gemaakt, om in de mechanicalessen in klasse IV te kiezen tusschen een min of meer verkapte behandeling van de grondslagen der differentiaalrekening of bedrog van den leerling met behulp van doorzichtige sophismen. Is het niet een eenvoudige eerlijkeheidsplicht, aan dezen toestand van halfheid een einde te maken?

Vrijwel dezelfde opmerkingen gelden voor de integraalrekening; indien het middelbaar onderwijs het zonder integralen kon stellen, zou er wellicht geen voldoende motief zijn aan te voeren, om van de integraalrekening ook maar iets op te nemen. Maar dat is niet het geval. Geïntegreerd wordt er op tal van plaatsen; om slechts enkele voorbeelden te noemen: bij het bepalen van den afgelegden weg in een beweging, waarbij de snelheid als functie van den tijd gegeven is; bij de invoering van de begrippen zwaartepunt en traagheidsmoment, arbeid van een veranderlijke kracht, potentiaal van een electrostatisch veld; bij de berekening van de kracht, die een electrische stroom op een magneetpool uitoefent. Wat is er tegen, om in al dergelijke gevallen den waren naam te noemen van de bewerking, dit uitgevoerd moet worden en in de eenvoudigste gevallen die uitvoering ook werkelijk te doen plaats hebben?

Het is niet alleen ter wille van een consequente doorvoering van het grondbeginsel, vóór alles tot de ontwikkeling van fundamenteele mathematische inzichten mede te werken en niet alleen als uitvloeisel van de behoefte aan intellectuele eerlijkheid, dat de Commissie een beperkte invoering van de differentiaal- en integraalrekening op de H. B. S. wil bepleiten.

Zij doet dit ook vanuit een ander gezichtspunt, dat ook op verschillende andere onderdeelen van het hier voorgestelde leerplan invloed heeft uitgeoefend, op grond namelijk van den wensch, om door het wiskunde-onderwijs op de H. B. S. bij te dragen tot de verspreiding van betere denkbeelden over het wesen der mathesis en over de groote rol, die zij gespeeld heeft en nog speelt in de geestelijke ontwikkeling der menschheid. Niet dat zij daartoe op de H. B. S. allerlei onderwerpen zou willen binnenhalen, tot welker beoefening slechts een bijzondere studie der wiskunde in staat stelt en evenmin, dat zij zich zou hebben laten meeslepen door het tegenwoordig maar al te zeer verspreide streven, om aan alle menschen alles te willen leeren, wat wetenswaard is. Maar juist

de infinitesimaalrekening vormt een zeer bijzonder geval. Dat het in onzen tijd nog altijd niet beschouwd wordt als een normaal bestanddeel van geestelijke ontwikkeling, dat men althans in principe op de hoogte is van dien onvergelykelijken stap vooruit, dien het menschelijk denken door de ontdekking der infinitesimaalrekening in den loop der 17e eeuw heeft gedaan, dien stap, waardoor niet alleen voor de wiskunde de toegang tot nieuwe en onvermoede ontwikkeling werd geopend, maar waardoor tevens, naar men in volle gerustheid zeggen kan, de moderne natuurwetenschap met haar onafzienbaren invloed op het leven van maatschappij en enkeling eerst mogelijk is gemaakt; dat men het normaal vindt, dat ieder, die geacht kan worden, eenige ontwikkeling te bezitten, wel eenig denkbeeld heeft van de groote historische gebeurtenissen op politiek, philosophisch en artistiek terrein, maar in het geheel geen begrip van de voor de geheele menschheid toch minstens even belangrijke groote feiten uit de historie der wis- en natuurkundige wetenschappen, dat alles getuigt van een zoo ingeworteld misverstand ten aanzien van de rol, die die wetenschappen voor het intellectueele leven vervullen, dat het waarlijk een verzaken van plicht zou moeten heeten, indien thans een door de ontwikkeling van het onderwijs logisch gegeven middel, hierin verandering te brengen, ongebruikt bleef liggen.

Temeer, waar dat middel zoo voor de hand ligt als in het geval der infinitesimaalrekening, waar de gelegenheid bestaat, om met vermijding van dat onsolied gefundeerde en tegen geenerlei kritiek bestand blijkende schijnweten, waarmee de ontwikkelde leek van onze dagen zich zoo gaarne tevreden stelt, wanneer het er om gaat, van de nieuwste ontwikkeling der natuurwetenschappen iets te weten te komen, een degelijke, zoo men wil schoolsche (dit woord als lof bedoeld) kennis van grondbeginselen van denzelfden graad van exactheid aan te brengen, als in het overige wiskunde-onderwijs het geval is.

Want wat men gewoonlijk met een soort van schuw respect, dat alle onwetendheid als bij voorbaat moet verontschuldigen, hoogere wiskunde noemt, heeft immers zijn wortels in die allerbekendste begrippen (snelheid, raaklijn), die het middelbaar onderwijs toch niet kan nalaten te gebruiken en er is immers slechts het boven gewenschte besluit noodig, om de dingen nu maar voortaan bij hun naam te noemen en, met den naam niet tevreden, iets dieper dan tot nu toe geschiedde, in het wezen door te dringen, om gedaan

te krijgen, dat de beginselen dier geheimzinnige wetenschap even-goed algemeen geestelijk bezit worden, als de grondslagen der Euclidische meetkunde (vroeger ook wel eens beschouwd als geestelijk voedsel voor slechts enkele uitverkorenen) het reeds sedert vele tientallen jaren zijn.

Lijkt dus zoo de invoering van de beginselen der infinitesimaal-rekening voor alle leerlingen reeds een logische consequentie van de vooropgestelde principes, in nog veel sterkere mate blijkt de wenschelijkheid van deze wijziging in het programma, wanneer men nu ook nog let op de belangen van de a.s. studenten in de faculteiten van wis- en natuurkunde en medicijnen en aan de Technische Hoogeschool, belangen, die, zooals boven reeds werd uitgesproken, niet den doorslag mogen geven, maar die de H. B. S. toch, voorzoover ze dat kan, goed doet, mede te behartigen.

In de eerste plaats is in vele gevallen voor de a.s. studenten in de wiskunde of de technische wetenschappen de overgang van het in de laatste jaren steeds meer elementair gehouden middelbaar onderwijs tot het vaak onmiddellijk in te groote strengheid gegeven hooger onderwijs zoo moeilijk en daardoor zoo ontmoedigend, verwarrend en teleurstellend, dat vergemakkelijking van dezen overgang in ieder geval zal moeten worden nagestreefd. Dit zal wel in hoofdzaak daardoor moeten worden bereikt, dat het Hooger Onderwijs, meer dan nu vaak geschiedt, rekening houdt met het gemiddelde peil van ontwikkeling der aankomende studenten, maar aan den anderen kant kan het Middelbaar Onderwijs, juist, waar het de beginselen der infinitesimaalrekening betreft, een vak, dat men beter onder degelijke schoolsche leiding leert bestudeeren, dan in de plotselinge zelfstandigheid van het academische leven, door iets van wat tot dusver steeds tot het Hooger Onderwijs gerekend werd, over te nemen, veel tot het opheffen van die discontinuïteit bijdragen.

Wat verder de a.s. studenten in de chemie, biologie en medicijnen betreft, zoo wordt hun wiskundige opvoeding tegenwoordig of sterk verwaarloosd of geheel nagelaten. Toch spelen in hun aller studie (het lijkt overbodig, dit nader te betoogen) de fundamenteele begrippen der infinitesimaalrekening een belangrijke rol; men zal hun dan ook een onschatbaren dienst bewijzen, door hun op de H. B. S. de beginselen dier wetenschap bij te brengen. Wellicht, dat wanneer daardoor opnieuw zal zijn bewezen, dat men niet bepaald wiskundige van beroep behoeft te zijn, om uit de vondsten der hoogere

wiskunde verrijking voor den geest te putten, ook aan de universiteiten, meer dan tot dusver geschiedt, aan de wiskundige ontwikkeling van niet-wiskundigen aandacht zal worden geschonken.

Het leerplan voor differentiaal- en integraalrekening, dat de Commissie voorstelt, is met opzet zoo sober mogelijk gehouden, omdat alleen de ervaring kan uitwijzen, hoever men op de H. B. S. met deze vakken kan gaan. Uit de bovenstaande beschouwingen zal zonder meer duidelijk zijn geworden, volgens welke beginselen zij zich het onderwijs gegeven denkt. Onbekommerd om het feit, dat het begrip differentiaalquotient noch geometrisch noch kinematisch van aard is, wil zij het, in overeenstemming met de historische ontwikkeling, langs geometrischen en kinematischen weg ingevoerd zien. Een soortgelijke opmerking geldt voor de methodiek der integraalrekening. Ook hier zal voeling met de historie vanzelf den juisten weg wijzen.

Gonio- en Trigonometrie.

Programma.

Klasse III.

De goniometrische verhoudingen van een scherp hoek.

Verruiming van het hoekbegrip.

Algemeene definitie van sinus, cosinus en tangens. Waardebeloop; graphieken.

Algemeene definitie van cosecans, secans, cotangens. Waardebeloop; graphieken.

Herleiding van goniometrische verhoudingen van willekeurige hoeken tot die van scherpe hoeken.

Algemeenheid van de betrekkingen tusschen de goniometrische verhoudingen van eenzelfde hoek.

Oplossing van de eenvoudigste goniometrische vergelijkingen: $\sin x = a$; $\cos x = a$; $\operatorname{tg} x = a$. Gebruik van de directe tafels der goniometrische verhoudingen en van de tafels voor hare logarithmen in vier decimalen.

Toepassing van de goniometrie op den rechthoekigen driehoek.

Sinus- en cosinusregel voor den scheefhoekigen driehoek.

Optellingstheorema's. Formules voor sinus, cosinus en tangens van den dubbelen hoek.

Formules voor sommen en verschillen van sinussen en cosinussen van verschillende hoeken.

De radiaal als hoekmaat.

Klasse IV.

De functie $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x$. (Graphiek, afleiding harer eigenschappen door middel van den draaienden vector). De goniometrische vergelijking $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c$.

Tangensregel. De vijf gevallen van berekening van den scheefhoekigen driehoek.

Eenvoudige berekeningen in den driehoek. Verdere toepassingen van de goniometrie op meetkundige vraagstukken.

Klasse V.

Behandeling der complexe getallen in de gedaante $r(\cos x + i \cdot \sin x)$. Meetkundige beteekenis der hoofdbewerkingen.

Theorema van de Moivre voor geheel positieve waarden van den exponent.

Formules voor sinus en cosinus van veelvouden van hoeken.

Goniometrische oplossing van binomiaalvergelijkingen.

Toelichting.

De voornaamste wijziging in het thans bestaande leerplan voor gonio- en trigonometrie, welke de Commissie door haar boven geformuleerd voorstel wil teweegbrengen, bestaat in een zeer sterke vermindering van het gebruik van de tafels der logarithmen der goniometrische verhoudingen. Zij stelt zich voor, dat hierdoor een aanzienlijke beperking van vrijwel gedachteloos technisch werk ten gunste van de mogelijkheid van verdieping van inzicht in de goniometrie en in haren samenhang met de andere deelen der wiskunde zal kunnen worden verkregen.

Om het gestelde doel te bereiken, wenscht zij de leerlingen in den regel niet de tafels van de logarithmen der goniometrische verhoudingen te laten gebruiken, maar de directe tafels der functies sinus, cosinus, tangens en cotangens voor hoeken van 0° tot 90° met opklimming van $1'$; in overeenstemming hiermede wil zij de behandeling van de formules van den scheefhoekigen driehoek beperken tot den sinusregel, den cosinusregel en den tangensregel en dus laten vervallen de z.g. formules van Gauss voor de goniometrische functies van de halve hoeken en het logarithmisch maken van den cosinusregel.

Bij de behandeling der goniometrische identiteiten en vergelijkingen, die, hoewel in het minimum-programma niet uitdrukkelijk genoemd, uit den aard der zaak wel eens als oefenstof voor de kennis van de goniometrische formules zullen worden gebruikt, beveelt zij soberheid aan; vergelijkingen, die aanleiding geven tot moei-

lijkheden over het al of niet voldoen der wortels of die slechts met behulp van bijzondere kunstgrepen kunnen worden opgelost, moeten worden geweerd.

Zeër wenschelijk acht zij de toepassing van de goniometrie op meetkundige vraagstukken, die tot eenvoudige goniometrische vergelijkingen aanleiding geven.

De behandeling van de functie $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x$ is gedacht in nauw verband met de bespreking van de harmonische trilling in de mechanica.

Meetkunde.

Programma.

Klasse I.

Beginnels der vlakke meetkunde tot aan evenredigheid van lijnen, maar met inbegrip van de eenvoudigste eigenschappen van den cirkel.

Klasse II.

Evenredigheid van lijnen. De transformatie vermenigvuldiging; ook met een negatieven factor. Gelijkvormigheid; de gelijkvormigheidstransformatie.

De eigenschappen van den rechthoekigen driehoek. Berekeningen in rechthoekige en schreefhoekige driehoeken. Het begrip en de eenvoudigste eigenschappen van de goniometrische verhoudingen sinus, cosinus en tangens voor scherpe hoeken. Het gebruik van directe tafels voor deze verhoudingen.

Eigenschappen van merkwaardige lijnen in den driehoek. Oppervlakken. De constructies $x = \sqrt{a^2 \pm b^2}$, $x = \frac{ab}{c}$.

Klasse III.

Hervatting van de behandeling van den cirkel. Nauwkeurige behandeling van het begrip raaklijn in verband met het limietbegrip. Driehoeken in een cirkelsegment. Hoek van twee cirkels. Macht van een punt ten opzichte van een cirkel; machtlijn van twee cirkels; machtpunt van drie cirkels.

Gelijkvormigheidspunten van twee cirkels. Constructies, die op de eigenschappen van evenredigheid van lijnen in den cirkel berusten.

Beknopte behandeling van drie- en vierhoeken met om- en ingeschreven cirkels. De eenvoudigste eigenschappen van de regelmatige veelhoeken. Oppervlak en omtrek van den cirkel.

Meetkundige behandeling van de eenvoudigste eigenschappen van parabool, ellips en hyperbool.

Klasse IV.

Herziening van de grondbeginselen der vlakke meetkunde. Logische bewijzen van vroeger intuïtief aanvaarde stellingen op grond van een meer volledig stelsel van axioma's. Voortzetting der Planimetrie.

Beginselen der Stereometrie tot aan de berekening van inhouden met uitsluiting van den drievlakshoek. Stereometrisch teekenen. Ruimteconstructies. Doorsneden en netwerken.

Cylinder, kegel en bol, voorzoover ze een rol spelen bij ruimteconstructies.

Beginselen van de methode der orthogonale parallelprojectie. Het teekenen van punten, lijnen en vlakken. Doorsnijding van lijnen en vlakken.

Dit programma kan, zoo mogelijk, worden aangevuld met de volgende onderwerpen:

De rol van het parallel-axioma in de Euclidische meetkunde; denkbeeld eener niet-Euclidische meetkunde. Invoering van oneigenlijke elementen.

Als onderwerpen, die in aanmerking komen, om bij de voortzetting der Planimetrie dienst te doen, mogen worden genoemd:

Cirkelbundels; stellingen van Menelaos en Ceva. Harmonische ligging; theorie van pool en poollijn. Inversie.

Klasse V.

Eenvoudige inhoudsberekeningen (prisma, pyramide, eenvoudige boldeelen).

Meetkunde op den bol in verband met den drievlakshoek.

Regelmatische lichamen. Symmetrie-elementen.

Stelling van Dandelin. Meetkundige behandeling der kegelsneden vanuit dit nieuwe gezichtspunt.

Uitbreiding van de methode der orthogonale parallel-projectie. Neerslaan van platte vlakken. Hoeken en afstanden. Doorsnijding met platte vlakken van door platte vlakken begrensde lichamen. Kegel, cylinder en bol in eenvoudige ligging.

Als onderwerpen, die bij een mogelijke uitbreiding van het programma in aanmerking komen, worden genoemd:

Beginselen der kristallographie. Beginselen van de scheeve parallel-projectie.

Toelichting.

Het bovenstaande leerplan zal weinig toelichting behoeven. Een der hoofddoeleinden bij de samenstelling ervan is geweest de

beperking van de berekeningen van lengtes van lijnen in de Planimetrie, van oppervlakken en inhouden in de Stereometrie en daartegenover het op den voorgrond brengen van het constructieve element.

Ter wille daarvan bepleit de Commissie het denkbeeld, om het programma voor Lijnteekenen in dien zin te wijzigen, dat daarin duidelijk uitgesproken worde, dat het hoofddoel van het Lijnteekenonderwijs bestaat in het verleen van gelegenheid tot oefening in meetkundige constructies. Ter bereiking daarvan ware het gewenscht, dat in elk der klassen III, IV en V een uur lijnteekenen als verplicht vak werd gegeven.

Aangaande het onderwijs in de planimetrie in klasse I is de Commissie eenstemmig van oordeel, dat de toepassing van de gematigde Euclidische methode vooralsnog aanbeveling verdient. Het spreekt echter vanzelf, dat men de strengheid der redeneering niet te hoog mag opvoeren; om de daardoor veroorzaakte leemten aan te vullen, stelt zij een herziening van de grondbeginselen der vlakke meetkunde in het begin van klasse IV voor, die dan tevens de natuurlijke inleiding tot de behandeling van de beginselen der Stereometrie kan vormen.

In klasse II kunnen de goniometrische functies gevoeglijk worden ingevoerd; met het oog op het ook later te handhaven verband tusschen planimetrie en goniometrie is dit zeer gewenscht. Om eenige oefenstof te kunnen benutten, geve men den leerlingen reeds in klasse II de directe tafels der goniometrische verhoudingen in handen.

In klasse III is het gebruikelijke programma voor de vlakke meetkunde eenigszins beperkt in de onderwerpen: koorden- en raaklijnvierhoeken en regelmatige veelhoeken, ten einde tijd te winnen voor een eenvoudige meetkundige behandeling der kegelsneden. De wenschelijkheid hiervan vanuit het standpunt der wiskundige vorming zal wel niet behoeven te worden bepleit. De behandeling ervan is bovendien wenschelijk met het oog op den samenhang met de andere wis- en natuurkundige vakken, omdat de kegelsneden zoowel in de algebra, als in de mechanica, de kosmographie en de natuurkunde voorkomen.

De indeeling van de Stereometrie over de klassen IV en V gaat uit van het beginsel, dat in IV zooveel mogelijk alles, wat op constructies in de ruimte betrekking heeft, plaats moet vinden, terwijl de inhoudsberekeningen beter in verband met de integraal-

rekening in V kunnen worden behandeld. Op het gebied van inhoudsberekeningen wenscht de Commissie sterke versoering; naar hare meening kunnen de inhoudsformules van het afgeknotte driezijdige prisma, van de prismoïde, van de bolschijf en de bolschil gemist worden.

De drievlakshoek is naar Klasse V overgebracht, om daar met den boldriehoek een geheel te vormen. Het is gewenscht, dat aan de meetkunde *op* den bol voldoende aandacht worde geschonken, om het besef te doen doordringen, dat ieder oppervlak zijn eigen meetkunde heeft. De Commissie wenscht uitdrukkelijk te verklaren, dat zij met „meetkunde op den bol” geen boldriehoeksmeting bedoelt.

De methode der orthogonale parallel-projectie worde zooveel mogelijk met de Stereometrie tot een geheel versmolten. In dit verband moge het denkbeeld worden aanbevolen, om de vraagstukken in de Stereometrie (b.v. ruimteconstructies, waarbij kegels en cylindrs een rol spelen) van een teekening in orthogonale parallel-projectie vergezeld te doen gaan.

Mechanica.

Programma.

Klasse IV. 3 uren per week.

De mechanica van het stoffelijk punt.

Vectoren. Samenstellen van vectoren met gemeenschappelijk beginpunt. Vectorenveelhoek.

Eenparige en veranderlijke rechte lijnige beweging. De snelheid als differentiaalquotient van den weg naar den tijd. Het weg-tijd diagram.

Eenparige en veranderlijke kromlijnige beweging. De vector-grootheid snelheid.

Eenparige en veranderlijke cirkelbeweging. Hoeksnelheid.

Versnelling bij de rechte lijnige beweging als differentiaalquotient van de snelheid naar den tijd. Het snelheid-tijd diagram. Beschouwing in verband met elkaar van weg-tijd, snelheid-tijd en versnelling-tijd diagrammen. De eenparig veranderlijke rechte lijnige beweging. Afleiding van de formule voor den weg als functie van den tijd met behulp van het snelheid-tijd diagram.

Vallende en opgeworpen lichamen. Harmonische trillingen.

De vectorgrootheid versnelling bij de kromlijnige beweging. Ontbinding van den versnellingsvector langs raaklijn en normaal.

Verandering van omgeving; de snelheid der resulterende beweging; de versnelling der resulterende beweging voor het geval, dat de meevoeringsbeweging een translatie is. Samenstelling van rechtlijnige bewegingen. Samenstelling van rechtlijnige bewegingen langs dezelfde rechte, ook langs graphischen weg; samenstelling van harmonische trillingen van dezelfde periode langs dezelfde rechte met behulp van draaiende vectoren.

Historische motiveering van de axioma's der mechanica. Formulering der axioma's. De begrippen: kracht, massa, stootkracht, kinetische energie, impuls. Eenheden-stelsels. Kracht als vector; samenstelling van krachten, werkende op een stoffelijk punt in het platte vlak en in de ruimte; voor het vlakke stelsel ook langs graphischen weg.

Statica van het stoffelijk punt. Gewicht, druk, wrijving, spanning in koorden.

Bewegingsvergelijkingen voor de rechtlijnige en kromlijnige beweging van het stoffelijk punt. Toepassingen: beweging langs gladde hellende vlakken; kogelbaan; beweging langs ruwe horizontale en hellende vlakken onder constante krachtswerking; rechtlijnige beweging van door staven en koorden verbonden punten. Eenparige cirkelbeweging.

De begrippen: arbeid, arbeidsvermogen, arbeidseffect. Eenheden.

De wet van Levende kracht en Arbeid voor recht- en kromlijnige beweging van het stoffelijk punt. Toepassing op bewegingen langs ruwe horizontale en hellende vlakken en op door staven of koorden verbonden rechtlijnig bewegende punten.

De wet van behoud van mechanisch arbeidsvermogen; hare beperkte geldigheid; toepassing op de beweging in een verticaal geplaatsten cirkel.

Het krachtveld van een aantrekkend of afstootend krachtcentrum, waarin de veldsterkte omgekeerd evenredig is met de tweede macht van den afstand tot het centrum. Potentiaal.

Klasse V. 1 uur per week.

De mechanica van het vaste lichaam.

Het vaste lichaam. Translatie en rotatie. Krachten, op het vaste lichaam werkende. Twee evenwijdige krachten. Koppels. Het koppel als vector. Samenstelling van een willekeurig stelsel.

Stelsel evenwijdige krachten; middelpunt. De zwaartekracht, werkende op het vaste lichaam; zwaartepunt. Bepaling van het

zwaartepunt door berekening of constructie voor de eenvoudigste lichamen.

Statica van het vaste lichaam voor een vlak krachtenstelsel. Toepassing op eenvoudige evenwichtsvraagstukken.

Het begrip werktuig. Balans.

De wet van Levende Kracht en Arbeid voor een vast lichaam.

Traagheidsmoment. Reversieslinger. Botsing.

Toelichting.

Alvorens over te gaan tot een toelichting op het boven medegedeelde leerplan, wenscht de Commissie te verklaren, dat zij herstel van mechanica en kosmographie als verplichte leervakken in de klassen IV en V met hetzelfde totaal aantal lesuren, als daaraan vóór 1920 werd besteed, als een onmisbaar bestanddeel van iedere wijziging beschouwt, die werkelijk het doel nastreeft, het onderwijs in de wis- en natuurkundige vakken op de H. B. S. te verbeteren.

Er zal tegenwoordig wel algemeen worden toegegeven, dat de facultatiefstelling der mechanica in klasse V en de afschaffing als eindexamenvak, gepaard aan de beperking van de kosmographie tot een uur in klasse IV, een misgreep is geweest, die het wis- en natuurkundige onderwijs op de H. B. S. in bedenkelijke mate heeft ontwricht.

Het mechanica-onderwijs blijft voor de leerlingen, die er na klasse IV om min of meer waardevolle motieven de voorkeur aan geven, zich met boekhouden tevreden te stellen, noodzakelijk onvolledig en daardoor onvruchtbaar; het natuurkunde-onderwijs ondervindt schadelijke gevolgen van de ongelijke mechanische ontwikkeling van de leerlingen der vijfde klasse; het noodlottig en onbegrijpelijk misverstand, dat velen, zelfs in onderwijskringen, in de mechanica een bij uitstek technisch vak doet zien, dat slechts waarde heeft voor a.s. Delftsche studenten en dat bij voorkeur door een ingenieur moet worden onderwezen, wordt door de geringe waardeering, die, blijkens de facultatiefstelling, van hooger hand voor dit leervak als vak voor alle leerlingen wordt getoond, versterkt.

Het kosmographie-onderwijs, dat ook bij de vroegere regeling al belemmerd werd door de omstandigheid, dat het moest worden begonnen op een oogenblik, waarop van geen der vakken, die daarbij als hulpvak optreden (voornamelijk meetkunde op den bol en optica) ook nog maar de eerste beginselen bekend zijn, kan, nu het de gelegenheid mist, in klasse V in te halen, wat in IV moest worden verzuimd en daar bovendien een zekere afronding te bereiken, niet

anders meer dan op hoogst onbevredigende wijze worden gegeven; hierdoor is de H. B. S. feitelijk beroofd van de waardevolle beoefening van een leervak, welks cultuurhistorische waarde wellicht door geen ander wordt overtroffen.

Om deze redenen acht de Commissie het noodzakelijk, dat voortaan weer in de klassen IV en V in totaal 6 uren voor Mechanica en Kosmographie beschikbaar zullen zijn. Zij meent echter, dat de meest vruchtbare indeeling van deze uren zal worden verkregen, door in Klasse IV drie uren per week aan Mechanica te besteden en geen Kosmographie te onderwijzen en in klasse V per week twee uur Kosmographie en een uur Mechanica te geven.

Bij deze regeling toch zou het onderwijs in Kosmographie kunnen beginnen op een tijdstip, dat het ruimteinzicht der leerlingen reeds aanzienlijk verbeterd is ten opzichte van de ontwikkeling, die het bij het begin van klasse IV bezit, dat tegelijkertijd in de Stereometrie de meetkunde op den bol behandeld wordt en dat men beschikken kan over de kennis van de mechanica van het stoffelijk punt en van de optica.

Voor het Mechanica-onderwijs brengt de regeling geenerlei bezwaren mede; in de vierde klasse kan een afgerond geheel worden behandeld: de mechanica van het stoffelijk punt; voor de vijfde kan dan de mechanica van het vaste lichaam overblijven.

Thans overgaande tot de bespreking van het leerplan voor Mechanica, merkt de Commissie in de eerste plaats op, dat het niet hare bedoeling is geweest, den omvang der leerstof uit te breiden, wel de behandelingswijze daarvan te verdiepen. Dit geldt vooral de bespreking van de kinematische en dynamische grondbegrippen.

Wat de kinematische grondbegrippen snelheid en versnelling betreft: uit het in de toelichting op het ontwerp-leerplan Algebra betoogde zal wel zonder meer duidelijk zijn, dat de Commissie hier een eind gemaakt wenscht te zien aan de misleidende wegdoezeling van de moeilijkheden dezer begrippen, die nog in menig leerboek der mechanica wordt toegepast en dat zij de kinematica in nauw verband met de in dienzelfden tijd in de Algebrales behandelde beginselen der differentiaalrekening beoefend wenscht te zien. Gelijk reeds in de inleiding opgemerkt werd, zal het zeer gewenscht zijn, indien de beide leervakken in één hand zijn.

Ook bij de beginselen der Dynamica zal het voor het verkrijgen van een zuiver begrip noodig zijn, dieper op de zaken in te gaan,

dan tot dusver in den regel geschiedt. De aangewezen weg lijkt hier wel de behandeling van de geschiedenis van het ontstaan der dynamische grondbegrippen, die, tegelijk met het besef van de cultuurhistorische beteekenis der mechanica, het juiste inzicht in de motiveering harer, noch door logische redeneering bewijsbare, noch door rechtstreeksche proefneming verifieerbare axioma's doet ontstaan.

De Commissie beseft echter, dat, wanneer zij hier en elders toepassing der historische methode aanbevelenswaardig acht (ook in de wiskunde, de sterrenkunde en de natuurkunde kan daarvan menigmaal groote opvoedende werking uitgaan), zij niet meer kan doen dan wenschen voor de toekomst uitspreken, die slechts bij betere verzorging van de historische opleiding van de a.s. leeraren in de wis- en natuurkunde voor verwezenlijking vatbaar zullen kunnen zijn.

Evenals aan de behandeling van de fundamenteele kinematische en dynamische begrippen van de mechanica van het stoffelijk punt in klasse IV, zal aan de overeenkomstige begrippen voor het vaste lichaam in klasse V veel zorg moeten worden besteed. Hoewel het, streng genomen, aan de zuiverheid van het systeem afbreuk afdoet, zal er practisch wel geen overwegend bezwaar tegen bestaan, om in klasse IV bij het onderwerp Verandering van omgeving reeds van het begrip translatie gebruik te maken.

De Commissie waarschuwt tegen overdrijving op het gebied van oplossing van vraagstukken, in het bijzonder, waar het berekening van zwaartepunten en traagheidsmomenten betreft.

Dat de harmonische trilling uit de Natuurkunde naar de Mechanica is overgebracht, waar ze feitelijk thuishoort, zal wel geen nadere motiveering behoeven.

Bij de behandeling der botsing kan men zich beperken tot het geval van de rechte centrale botsing van volkomen veerkrachtige of volkomen onveerkrachtige lichamen.

Als onderwerpen, waarmee het programma eventueel zou kunnen worden uitgebreid of aangevuld, noemt de Commissie:

voor Klasse IV: behandeling van het begrip versnelling met behulp van de hodograaf.

voor Klasse V: Toepassing van de leer van het zwaartepunt op meetkundige vraagstukken; barycentrische coördinaten.

Het relativiteitsbeginsel van de mechanica van Newton. Toepassing op de afleiding van de botsingsverschijnselen volgens Huijgens.

K o s m o g r a f i e.

Programma.

Klasse V. 2 uren per week.

De hemelbol met hare merkwaardige punten en groote cirkels.
Plaatsbepaling op een boloppervlak; toepassing op de plaatsbepaling op aardbol en hemelbol.

Dagelijksche beweging van den hemel ten opzichte van de aarde.
Jaarlijksche beweging van de zon ten opzichte van de vaste sterren.

Verklaring van de verschijnselen van dag en nacht en van de jaargetijden op grond van deze opvatting der bewegingen.

De beweging van de maan ten opzichte van de vaste sterren.
De beweging van de maan om de aarde. Schijn gestalten; verduisteringen.

De beweging van de planeten ten opzichte van de vaste sterren.

Geschiedenis van het ontstaan van het tegenwoordige wereldbeeld: Aristoteles, Ptolemaeus, Copernicus, Tycho Brahe, Kepler, Galilei, Huygens, Newton.

Herhaling van de vroeger besproken verschijnselen vanuit Copernicaansch standpunt. De gravitatie-theorie van Newton.

De moderne hulpmiddelen der astronomie: refractor, telescoop, spectroscop, camera.

Methoden van afstands-bepaling en massabepaling in ons zonnestelsel.

Natuurlijke gesteldheid van de lichamen van ons zonnestelsel.

Toelichting.

Over de wenschelijkheid, het Kosmographe-onderwijs uitsluitend in klasse V te geven gedurende twee uren per week werd reeds gesproken in de toelichting op het leerplan-Mechanica.

Behandeling van het onderwerp Vaste Sterren lijkt de Commissie niet gewenscht.

De Commissie:

H. J. E. Beth, voorzitter.

J. van Andel.

P. Cramer.

E. J. Dijksterhuis, secretaris.

VIERDECIMALE TAFELS.

(Medegedeeld op de bijeenkomst van Wiskunde-docenten op 6 Februari 1926 te Utrecht).

Der Mangel an mathematischer Bildung giebt sich durch nichts so auffallend zu erkennen wie durch masslose Schärfe im Zahlenrechnen. (G. Hagen, Wasserbaukunst III).

Bij het onderwijs aan Hoogere burgerscholen verdient het gebruik van logarithmentafels met vier decimalen aanbeveling. (Dissertatie J. W. Lem, 1899).

Door de Wiskunde-Commissie van L.i.W.e.N.a.G.e.L. werd in haar laatste vergadering (December 1925) door alle aanwezige leden der Commissie de wensch geuit over te gaan tot het invoeren van vierdecimalige tafels. Hierbij zal zich aansluiten een te verwachten Rapport van de Commissie—Beth; dit laatste werd mij op de vergadering te Utrecht van 6 Februari j.l. persoonlijk medegedeeld door den Inspecteur van het M.O. dr. Jensema en aan de vergadering door dr. Dijksterhuis, secretaris der Commissie—Beth.

Met een enkel woord moge hier de wenschelijkheid van de invoering der genoemde tafels betoogd worden.

De nauwkeurigheid gaat in het propaedeutisch onderwijs en in de techniek (daaronder zoowel de mechanische, de physische, de chemische als de gewone landmeetkundige techniek verstaan) zelden verder dan $\frac{1}{1000}$. Wel zijn er uitzonderingen; maar degenen, die zich met die uitzonderingen bezighouden, zullen dan ook wel de beschikking hebben over tafels, die mèèr dan 5, dus b.v. 7 decimalen bevatten. Ons schoolonderwijs naar die uitzonderingen of naar speciale vakken van dienst te richten is zeer onpaedagogisch. Paedagogisch is 't trouwens niet de leerlingen maar in 't wilde weg te laten cijferen, maar te laten cijferen met overleg. „Men moet steeds rekening houden met de nauwkeurigheid der getallen, die men heeft en die, welke men verkrijgt” (Bijvoegsel N. T. v. Wisk. jg. II No. 1, blz. 13.) Het gebruik van een vijf-decimalige tafel bij het gewone schoolonderwijs is niets anders dan sleur. Misschien denkt men wel eens aan de gewenschte nauwkeurigheid bij vraagstukken van samengestelde interestrekening. Ik geloof echter, dat de oplossing dier vraagstukken bij het onder-

wijs meer van belang is uit een oogpunt van verstandelijke ontwikkeling aan de *hand* van voorbeelden uit de practijk, dan dat die oplossing nu juist *letterlijk* in de practijk gevolgd wordt. En het is merkwaardig, dat, terwijl men in boeken over landmeetkunde logarithmen met 5 (en meer) decimalen ziet gebruikt, dit gebruik in vele gevallen wel door dat van vierdecimalige tafels vervangen *moest* worden. Wanneer bij de meting van een stuk land, in decimeters nauwkeurig, getallen van 3 of 4 cijfers worden verkregen, wanneer men zelfs bij een coördinaten-berekening, bij de controle der meting [welke meting zoowel lengten (c.M.) als hoeken bevat] verschillen in projecties ziet optreden, die reeds in het 4e cijfer plaats vinden, dan begrijpt men bij eenig nadenken wel, dat het werken met vijf- (of meer-) decimalige tafels soms wel eens eenigszins komisch aandoet. Ieder weet trouwens, hoe moeilijk het is een lengte met eenige nauwkeurigheid te meten, maar ook is 't toch bekend, dat er geen sprake van is, dat gewone theodolieten, zooals die bij landmetingen gebruikt worden, hoekmetingen in seconden nauwkeurig (denk aan het werken met onze vijfdecimalige tafels!) toelaten. Aan de T. H. te Delft is in 't algemeen bij het physisch practicum 't gebruik van vierdecimalige tafels voldoende en prof. M. de Haas noemde mij maar twee uitzonderingen, waarbij bepalingen in 5 of 6 cijfers plaats vinden. Maar in dit laatste geval zal, zooals ik boven zei, dan ook wel eens een meer-dan-5-decimalige tafel wenschelijk zijn.

In hoever trouwens hier wellicht later nog meerdere aansluiting van 't schoolonderwijs aan wetenschap en techniek mogelijk is, kan ik hier nog niet uiteenzetten. Ik moet daartoe vooreerst eens nader overleg plegen.

Wat nu de inrichting der door mij bij Noordhoff uitgegeven tafels aangaat, heb ik gemeend, dat die tafels aan verschillende eischen moesten voldoen. Ik hoop, dat ik in de verwezenlijking van die eischen zoo goed mogelijk geslaagd ben. Het oordeel, dat ik mocht vernemen, inhoudende, dat mijn tafels met vrucht door de studenten der T. H. kunnen gebruikt worden, is mij daarbij reeds zeer aangenaam. Ik houd mij echter aanbevolen voor op- of aanmerkingen.

In de eerste plaats kwam het mij voor, dat de inrichting der vierdecimalige tafels zich zoo nauw mogelijk bij die van de groote tafels moest aansluiten. Het moet zoo zijn, dat iemand, die met de vierdecimalige kan werken, dat ook met een grootere tafel kan.

De nauwkeurigheid, waarmede men werkt, moet zoo groot mogelijk zijn. Zoo min mogelijk moet de 4e decimaal een fout ver-

toon en als er een fout is, dan moet die zoo klein mogelijk zijn.

De tafels moeten liefst een zoo klein mogelijken omvang hebben. Dit is vooral practisch met 't oog op het voor 't bord staan werken. Ook kan men dan de tafels gemakkelijk steeds bij zich hebben (desnoods in tweeën gevouwen en in den zak gestoken, misschien ook aan de achter- en rugzijde met linnen beplakt). Tè klein formaat is ook weer verkeerd, want dan vervalt men licht in tè kleine, dus onduidelijke, cijfers. Hiervoor waarschuwde mij voor eenigen tijd mijn collega Schrek.

Maar dan moeten de tafels ook niet alle verstandelijk overleg opheffen. Iemand vroeg mij, waarom ik mijn leerlingen niet liever met een vijfdecimalige tafel liet werken. Hij kan dan de 5e decimaal verwaarloozen (in een bepaald geval — een 5 — treedt hier trouwens een moeilijkheid op!) Interpoleeren behoefde dan in 't algemeen nergens te geschieden! Kijk, dat zou ik nu bij het op school-werken niet goed vinden. Het zou dezelfde fout zijn, die een kerngezond mensch zou begaan, als hij niets anders dan lichtverteerbaar voedsel tot zich nam. Er is toch wel eens gezegd, dat het werken met logaritmen zoo weinig vormende waarde heeft, omdat 't te machinaal gaat. Misschien niet ten onrechte, want het is mij meermalen opgevallen, dat tafels — vooral van den lateren tijd; de een na den anderen schrijver van leerboeken voelt zich geroepen een logarimentafel te laten verschijnen — het den leerlingen veel te gemakkelijk maken. Ik hoop echter, dat mijn beschrijving van 't gebruik der eerste en laatste tafels dit oordeel over deze tafels tot een minimum zal beperken!

Gebruik. De inrichting van de tafel op de bladz. 4 en 5 spreekt haast wel voor zich zelf. Men ziet terstond, dat 't niet de bedoeling is, dat de *rijen* der P. P. correspondeeren met de *rijen* der mantissen. Moet men P. P. zoeken voor een verschil van 14 eenheden der laatste decimaal van twee opeenvolgende mantissen, dan zoeken men in de rij, waarin *vooraan* 1,4 voorkomt. De methode, door mij hier ingevoerd, is voor de vierdecimalige tafels niet algemeen gebruikelijk. Ze heft een bezwaar op (sommige interpolaties), dat velen tegen eenige vierdecimalige tafels hadden.

Bij het gebruik der tafels op de blz. 3 en 6 werke men bij rechtstreeks zoeken in 't algemeen niet verder dan met tienden van minuten. Die tienden zullen bij terugzoeken veelal lang niet meer betrouwbaar zijn.

Wat de interpolatie verder betreft, doe ik hier een middel aan de-

hand, dat ook bij vijfdecimalige log sin- en log tg-tafels is toe te passen, in 't bijzonder daar voor hoeken, die kleiner dan 2° zijn. Men kan die methode bij laatstgenoemde tafels zelfs toepassen op hoeken vanaf $20'$. Bij mijn vierdecimalige tafels passe men de methode meestal eerst toe, zoo de op elkaar volgende d.1' 's minstens 5 eenheden van de laatste decimaal verschillen. Ik kies 't volgende voorbeeld: Op te zoeken op blz. 3: tg $40^\circ 23'4$. Telt men bij 8391 op $23,4 \times 5,03$, dan krijgt men 0,8509, terwijl de juiste waarde is 0,8508. Beter gaat men nu aldus te werk: Het verschil van de onder elkaar staande d.1' 's 4,88 en 5,03 is 15 eenheden der laatste decimaal. Trekt men $\frac{1}{2} \times 15$ eenheden der laatste decimaal van 5,03 af, dan krijgt men de d.1' in de buurt van 40° . Nu moet men de d.1' voor omstreeks $40^\circ 20'$ hebben (d.w.z. de d.1', die noodig is voor de berekening van tg $40^\circ 23'4$). Deze hoek is van 41° omstreeks $40'$ dus $\frac{1}{6}$ van een graad verwijderd. Men zal dus $\frac{1}{6} \times \frac{1}{2}$ of $\frac{1}{12}$ van 15 eenheden van de laatste decimaal van 5,03 moeten aftrekken. (Bedenk wel, dat 5,03 eigenlijk de d.1' is voor $60'$). Het zijn dus altijd een aantal *twaalfden*, welke men in een dergelijk geval in die tafels moet optellen of aftrekken en altijd voor een „complementair” aantal minuten. Alzoo neemt men in dit geval niet 5,03 maar liever 4,98. $23,4 \times 4,98$ opgeteld bij 8391 geeft nu tg $40^\circ 23'4 = 0,8508$.¹⁾

Stel, dat men moet hebben cot $49^\circ 36' 6$, dan neemt men, aanzien $36' 6$ ongeveer $\frac{2}{6}$ van een graad van $60'$ verwijderd is, $\frac{2}{12} \times$ 't verschil van 5,18 en 5,03 en telt dit bij 5,03 op. Neem dus 5,06. $36,6 \times 5,06$ afgetrokken van 8693 geeft 0,8508.

Als men de leerlingen zich op deze wijze een paar maal heeft laten oefenen, zien ze zeer vlug, welke de waarde van de d. 1' is, die ze moeten gebruiken. Ik wijs er hier uitdrukkelijk op, dat men de methode toepasse, als men de laatste decimaal zoo nauwkeurig mogelijk wil hebben. Wil men de uitkomst slechts in 3 decimalen nauwkeurig, dan interpoleere men natuurlijk op de gewone wijze.

Stel, dat men den hoek wil bepalen bij cot $x = 0,8508$. Deelt men nu het verschil van 0,8693 en 0,8508 of 185 eenheden der laatste decimaal door 5,03, dan krijgt men $36' 8$, dus $x = 49^\circ 36' 8$. Schat men echter eerst 't aantal minuten op 40 en telt men weer

¹⁾ Men zie — in verband hiermede — hetgeen ik over de bepaling van de logarithmen van rentefactoren gezegd heb in mijn voordracht op 28 Aug. 1925 te Amsterdam gehouden. (Bijvoegsel II blz. 31).

$\frac{6-4}{12}$ of $\frac{2}{12}$ van 15, dat is 3 eenheden der laatste decimaal bij 5,03

op, dan krijgt men 5,06. Deelt men nu 185 door 5,06, dan krijgt men 36' 6. Bedenkt men echter, dat in het getal 185 't laatste cijfer wel (bij een nauwkeurige waarde van $\cot x$, wat in 't algemeen natuurlijk ook niet 't geval is) tot een halve eenheid fout kan zijn, dan is te begrijpen, dat de tienden in 36' 6 geen volkomen vertrouwen meer verdienen.

Daar men op blz. 3 in de kolom voor 45° — 89° met groote sterk varieerende verschillen te doen heeft, zijn in de 3 (bovenaan 5) laatste kolommen de d. 1' 's niet zooals eigenlijk gewoonlijk voor 60', maar voor 10', 30' en 50' opgegeven (bovenaan ook voor 20' en 40'). Wil men dus b.v. hebben tg. $64^\circ 23'$, dan telt men $\frac{13}{20}$ van het verschil van 15,40 en 15,20 dus 13 eenheden van de laatste decimaal bij 15,20 op. Men werkt dus met 15,33. $23 \times 15,33$ bij 20503 opgeteld geeft tg. $64^\circ 23' = 2,0856$. Het spreekt vanzelf, dat het bovenste gedeelte van de tafel hier bij interpolatie in 't algemeen hoe langer hoe minder betrouwbare uitkomsten oplevert. Maar dat is in dit gedeelte van *elke* tafel onvermijdelijk.

Moet men bepalen $\cot. 25^\circ 37'$, dan wenne men zich er aan dit te beschouwen als $\cot (26^\circ - 23')$ want de laatste 3 (of 5) kolommen gelden natuurlijk niet rechtstreeks voor $\cot. 1^\circ$ — 45° . Ik heb 't onnoodig gevonden hiervoor nog andere interpolatietafeltjes op te nemen.

Op blz. 6 zijn voor de d' 1' 's van $\log \sin 1^\circ$ — $22^\circ 30'$ en ook van $\log \tg 1^\circ$ — $22^\circ 30'$ „hulpkolommen” opgenomen. Moet men nu opzoeken $\log \cos 78^\circ 13'$, dan neemt men $\log \sin 11^\circ 47'$. $47 \times 6,28$ geeft 295; opgeteld bij 92806 krijgt men 9,3101—10.

Voor $13^\circ 23'$ bedenke men weer, dat de gewone d. 1' eigenlijk die is voor 60'. De hulpkolom voor $\log \tang.$ geldt natuurlijk ook voor $\log \cotang.$ $\log \cot 76^\circ 24'$ zet men om in $\log \tg. 13^\circ 36'$; zoo ook $\log \tg 76^\circ 24'$ in $\log \cot 13^\circ 36'$.

Wil men voor hoeken kleiner dan 2° $\log \sin$ en $\log \tg$ bepalen en wil men de nauwkeurigheid van den vierden decimaal zoo groot mogelijk, dan gebruike men in 't algemeen de formules (van Maskelyne) op blz. 7. Toch merk ik op, dat die formules ook voor grootere hoeken gelden. Men kan er wel mee werken tot circa 10° .

Met mijn B-leerlingen heb ik de laatste weken (eerst met drukproeven) geregeld met de tafels gewerkt. Inderdaad verblijdde mij zelf het prettige werken er mee. De handigheid omtrent de keuze

der d. 1' hebben ze verrassend snel te pakken. En wat mij ook opviel, is, dat 't gebruik van de directe tafels voor sinus enz. (in plaats van dat van die der logarithmen van die verhoudingen) zoo voldeed.

Ik hoop, dat ik er ten slotte in geslaagd ben de tafels vrij van druk- of rekenfouten te houden. Het is een lastig — ik zou haast zeggen een angstig — werk. Dit bleek mij een dezer dagen, toen mij andere pasuitgekomen vierdecimalige tafels vertoond werden. Reeds oppervlakkig die tafels controleerende, vond ik er 7 fouten in.

D. P. A. VERRIJP.

N a s c h r i f t.

Het komt mij bij deze gelegenheid niet ondienstig voor er op te wijzen, dat het wenschelijk is, dat men eens breke met de gewoonte — niet het minst op examens — om lange en met veel cijfers behepte trigonometrische berekeningen te laten uitvoeren. Dergelijke becijferingen hebben noch uit een paedagogisch noch uit een practisch oogpunt eenigen zin. Van uit een paedagogisch of methodisch oogpunt is het meestal voldoende, als men „goniometrisch” of „trigonometrisch” de oplossing van een gesteld probleem kan geven, maar „becijferingen zelf” komen in de practijk *in 't algemeen* meer met gewone getallen, dan met goniometrische verhoudingen voor. Het is ook daarom, dat men met de zoo weinig omvangrijke tafels als de boven besprokene in 't algemeen kan volstaan.

V.



ALGEBRA

VOOR

HOOGERE HANDELSSCHOLEN EN VOOR DE ACTE K XII

DOOR

P. WIJDENES en Dr. P. G. VAN DE VLIET

Prijs gebonden f 2.50.

ANTWOORDEN f 1.00

Dit boek is bestemd voor het Wiskunde-onderwijs in de 4^{de} en 5^{de} klasse van de Hoogere Handelsscholen. Het boek is tevens bestemd voor hen, die zich voorbereiden voor de acte M.O. Boekhouden (K XII en Q); vooral met het oog op deze gebruikers zijn achterin enkele hoofdstukken uit de Rekenkunde als aantekeningen opgenomen.

LOGARITHMEN-, RENTE- EN DISCONTO-TAFELS

UITGAVE E

VAN

NOORDHOFF's LOG.- EN RENTETAFELS

DOOR

P. WIJDENES en Dr. P. G. VAN DE VLIET

Prijs met Hulpboekje f 3.25

BEKNOPT STATISTIEK

vooral ten dienste van hen,

die zich voorbereiden voor de practijk-examens in het Boekhouden

DOOR

Dr. P. G. VAN DE VLIET

Prijs f 1.25

UITWERKINGEN VAN DE OPGAVEN,

voorkomende in Beknopte Statistiek f 0.50

TEEKENSCHRIFT

behoorende bij de Beknopte Statistiek

DOOR

Dr. P. G. VAN DE VLIET

f 0.70

UITGAVEN VAN P. NOORDHOFF TE GRONINGEN.