

BIJVOEGSEL

VAN HET NIEUW TIJDSCHRIFT

□ □ VOOR WISKUNDE □ □

GEWIJD AAN ONDERWIJSBELANGEN

ONDER LEIDING VAN

J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

MET MEDEWERKING VAN

Dr. H. J. E. BETH
DEVENTER

Dr. E. J. DIJKSTERHUIS
OISTERWIJK

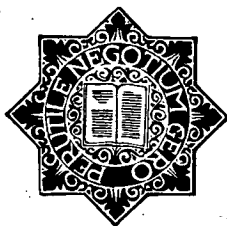
Dr. B. P. HAALMEIJER
AMSTERDAM

Dr. D. J. E. SCHREK
UTRECHT

Dr. P. DE VAERE
BRUSSEL

Dr. D. P. A. VERRIJP
ARNHEM

2e JAARGANG 1925/26, Nr. 2



P. NOORDHOFF — GRONINGEN

Prijs per Jg. van 10 à 12 vel f 3.—. Voor inteekenaars op het
Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde en Christiaan Huygens f 2.—.

Het Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde verschijnt in zes tweemaandelijksche afleveringen, samen 10 à 12 vel druks. Prijs *f* 3.— per jaargang. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6.—) of op „Christiaan Huygens” (*f* 8.—) zijn ingeteekend, betalen *f* 2.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam, Saxen-Weimarlaan 46; Tel. 28341. Aangeteekende zendingen met bijvoeging: „Bijkantoor Saxen-Weimarlaan 48”.

Het honorarium voor geplaatste artikelen bedraagt *f* 20.— per vel.

De prijs per 25 overdrukken of gedeelten van 25 overdrukken bedraagt *f* 3,50 per vel druks *in het vel gedrukt*. Gedeelten van een vel worden als een geheel vel berekend. Worden de overdrukken buiten het vel verlangd, dan wordt voor het afzonderlijk drukken bovendien *f* 6.— per vel druks in rekening gebracht.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

INHOUD.

J. H. S., [Oude Rekenboeken]	49—53
J. H. SCHOGT, Eenige opmerkingen over het onderwijs in de Mechanica.	54—75
Boekbespreking	76—77
B. COSTER, De loodrechte stand van lijn en vlak . . .	78—80

 Verschenen de 17de druk van Wijdenes Algebra voor M. U. L. O. I.

 Verschenen de 5de druk van Wijdenes Algebraïsche Vraagstukken II.

Proportio { in ghelijck / dat is / 3. teghen 3. 4. teghen 4. 7.
teghen 7. etc.
in onghelijck / dat is / 4. teghen 2. 5. teghen 7. 3.
teghen 6. etc.

Proportio { Groot onghelijck is { *Multiplex.*
Superparticularis.
Superpartiens.
Multiplex superparticularis.
Multiplex superpartiens.
Cleen onghelijck is { *Submultiplex.*
Subsuperparticularis.
Subsuperpartiens.
Submultiplex subsuperparticul.
Submultiplex subsuperpartiens.

Proportio Multiplex is als t'eerste ghetal etlic mael
ghetal t'ander. etlick mael in hem begrijpt.
Ende als t'eerste ghetal etlic mael
in t'ander begrepen wordt / dat
is / Proportio Submultiplex.

2	} teghen {	1 <i>Dupla.</i>	1	} teghen {	2 <i>Subdupla.</i>
6		2. <i>Tripla.</i>	2		6 <i>Subtripla.</i>
12		3 <i>Quadrupla.</i>	3		11 <i>Subquadrupla.</i>
20		4 <i>Quintupla.</i>	4		20 <i>Subquintupla.</i>
30		5 <i>Sextupla.</i>	5		30 <i>Subsextupla.</i>
42		6 <i>Septupla.</i>	6		42 <i>Subseptupla.</i>
56		7 <i>Octupla.</i>	7		56 <i>Suboctupla.</i>

Proportio.

Fol. 191.

Proportio superparticularis, is als t'eerste ghetal
t'ander een mael in hem begrijpt / ende noch een van
sijn deelen.

3	} teghen {	2 <i>Sesquialtera.</i>
4		3 <i>Sesquitercia.</i>
5		4 <i>Sesquiquarta.</i>
6		5 <i>Sesquiquinta.</i>
7		6 <i>Sesquisepta.</i>
8		7 <i>Sesquiseptima.</i>
9		8 <i>Sesquioctava.</i>

Ende als t'eerste met een van sijn deelen in t'an-
der begrepen wort / dat is / Proportio Subsuperpar-
ticularis.

2	} teghen {	3 <i>Subsesquialtera.</i>
3		4 <i>Subsesquitercia.</i>
4		5 <i>Subsesquiquarta.</i>
5		6 <i>Subsesquiquinta.</i>
6		7 <i>Subsesquisepta.</i>
7		8 <i>Subsesquiseptima.</i>
8		9 <i>Subsesquioctava.</i>

Proportio Superpartiens , is als t'eerste ghetal
t'ander een mael in hem begriipt / ende noch som-
mige van sijn deelen.

5	} teghen	3	<i>Superbipartiens tertias.</i>
7		4	<i>Supertripartiens quartas.</i>
9		5	<i>Superquadrupartiens quintas.</i>
11		6	<i>Superquinpartiens sextimas.</i>
11		7	<i>Superquadrupartiens septimas.</i>
15		8	<i>Superseptupartiens octavas.</i>
16		9	<i>Superseptupartiens nonas.</i>

Ende

Ende als t'eerste ghetal een mael met sommige van sijn deelen
in't ander begrepen wordt / dat is / Proportio Subsuperpartiens.

3	} teghen	5	<i>Subsuperbipartiens tertias.</i>
4		7	<i>Subsupertripartiens quartas.</i>
5		8	<i>Subsupertripartiens quintas.</i>
6		11	<i>Subsuperquinpartiens sextimas.</i>
7		12	<i>Subsuperquinpartiens septimas.</i>
8		11	<i>Subsupertripartiens octavas.</i>
9		14	<i>Subsuperquinpartiens nonas.</i>

Proportio Multiplex Superparticularis is, als t'eerste ghetal t'ander
etlick mael in hem begriipt / ende noch een van sijn deelen.

5	} teghen	2	<i>Dupla sesquialtera.</i>
10		3	<i>Tripla sesquitercia.</i>
21		4	<i>Quintupla sesquiquarta.</i>
16		5	<i>Tripla sesquiquinta.</i>
37		6	<i>Sextupla sesquisepta.</i>
50		7	<i>Septupla sesquiseptima.</i>
41		8	<i>Quintupla sesquioctava.</i>

Ende als t'eerste ghetal etlick mael met een van sijn deelen in
t'andere begrepen wort / dat is / Proportio Submultiplex Super-
particularis.

2	} teghen	7	<i>Subtripla subsesquialtera.</i>
3		16	<i>Subquintupla subsesquitercia.</i>
4		17	<i>Subquadrupla subsesquiquarta.</i>
5		26	<i>Subquintupla subsesquiquinta.</i>
6		43	<i>Subseptupla subsesquisepta.</i>
7		36	<i>Subquintupla subsesquiseptima.</i>
8		33	<i>Subquadrupla subsesquioctava.</i>

Proportio Multiplex Superpartiens is / als t'eerste ghetal t'ander
etlick mael in hem begriipt / met noch sommighe van sijn deelen.

8	} teghen	3	<i>Dupla superbipartiens tertias.</i>
15		4	<i>Tripla supertripartiens quartas.</i>
22		5	<i>Quadrupla superbipartiens quintus. [sic]</i>
17		6	<i>Dupla superquinpartiens sextimas.</i>
24		7	<i>Tripla supertripartiens septimas.</i>
45		8	<i>Quintupla superquinpartiens octavas.</i>
44		9	<i>Quadrupla superoctipartiens nonas.</i>

Ende als t'eerste ghetal etlick mael met sommighe van sijn deelen in t'ander begrepen wordt / dat is / Proportio Submultiplex Subsuperpartiensi.

3	} tegen	8	<i>Subdupla subsuperbipartiens tertias.</i>
4		15	<i>Subtripla subsupertripartiens quartas.</i>
5		24	<i>Subquadrupla subsuperquadrupartiens quintas.</i>
6		35	<i>Subquintupla subsuperquinpartiensi sextimas.</i>
7		46	<i>Subsextupla subsuperquadrupartiensi septimas.</i>
8		59	<i>Subseptupla subsupertripartiensi octavas.</i>
9		76	<i>Suboctupla subsuperquadrupartiensi nonas.</i>

Proportio gheheel teghen ghebroken / of ghebroken teghen gheheel / of ghebroken teghen ghebroken can door divisio bekent worden / als 2. teghen $\frac{3}{5}$ / stellet $\frac{10}{5}$ teghen $\frac{3}{5}$ comt $\frac{10}{3}$ / Proportio tripla sesquitercia, Item $\frac{3}{5}$ teghen 2. stelt $\frac{3}{5}$ teghen $\frac{10}{5}$ comt $\frac{10}{3}$ Proportio Subtripla subsesquitercia. Item $\frac{3}{5}$ teghen $\frac{3}{4}$ comt $\frac{8}{5}$ Proportio Subsesquioctava, &c.

Medium Proportionale.

Dat is een middel-ghetal tusschen twee andere / alsoo dat het minste hem houdt teghen dit / ghelijck dit teghen t'meeeste / ende is tweederley / als Medium Proportionale Arithmeticum, ende Medium Proportionale Geometrium.

Medium Proportionale Arithmeticum.

Om te vinden een middel-ghetal tusschen 5. ende 9. Soo addeert 5. ende 9. comt 14. dat medieert is 7. het middel ghetal. Om te vinden 2. middelghetallen tusschen 6. ende 12. Soo deelt hare differentie door 3. Watter comt / addeert by 6. ende treckt van 12. comt 8. ende 10. voor middel-ghetallen. Om te vinden 3. middel-ghetallen / tusschen 11. ende 19. Soecht eerst het rechte middel-ghetal t'welck is 15. ende dan een middel-ghetal tusschen 11. ende 15. oock tusschen 15. ende 19. comt 11. 13. 15. 17. 19. in Proportio continue.

Medium Proportionale Geometrium.

Om te vinden een middel-ghetal / tusschen twee ander / soo multipliciert de ghetallen door malsanderen / ende treckt daer upt $\sqrt{3}$.

Het middel-ghetal tusschen	}	3. ende 12. is 6. Proportio Subdupla.
		64. en 4. is 16. Proportio Quadrupla.
		3. en $5\frac{1}{3}$ is 4. Proportio Subsesquitercia.

Om te binden 2. middel-ghetallen doet alsoo / multiplicceert het minste ghetal in hem selven / ende dan met het meeste daer uyt trecht $\sqrt{x}$ dat brengt uyt het minste middel-ghetal / dan multipli- ceert het minste middel-ghetal met het meeste ghetal / ende trecht daar uyt $\sqrt{3}$. dat brenght uyt het meeste middel-ghetal.

Als tusschen 4. ende 108. comen de twee middel-ghetallen 12. ende 36. ende is Proportio Subtripla.

Om tusschen 2. ende 32. drie middel-ghetallen te binden / soecht eerst het recht middel-ghetal t'welc is 8. ende dan het middel-ghetal tusschen 2. ende 8. oock tusschen 8. ende 32. soo comt u 2. 4. 8. 16. 32. in Proportio Subdupla.

Maar dat tusschen sommighe ghetallen gheen recht middel- ghetal te binden en is / dat doen d'irrationale ghetallen / daer den wortel niet recht en can uytghetrocken worden / want voor middel- ghetal tusschen 2. ende 5. comt $\sqrt{10}$. in Proportio Subdupla Sub- sesquialtera, ende tusschen 4. ende 8. comt $\sqrt{32}$ in Proportio Subdupla.

Om verhoelghende Proportionale ghetallen te binden / en behoest men anders niet dan eenen Reghel van Orien / als

$$3 - 4 - 4 \mid \text{comt } 5\frac{1}{3}$$

$$3 - 4 - 5\frac{1}{3} \mid \text{comt } 7\frac{1}{3}$$

$$3 - 4 - 7\frac{1}{3} \mid \text{comt } 9\frac{13}{27}$$

Ende comen alsoo :

3. 4. $5\frac{1}{3} / 7\frac{1}{3} / 9\frac{13}{27}$ in Proportio Subsesquitertia.

Additio in Proportionale ghetallen.

Wildeby adderen d'eene Proportio met d'ander / steltse alsoo $\frac{3}{2}$ tot $\frac{3}{2}$ / dat is Sesquialtera, tot Subsesquitertia doet als in Multiplicatio in't ghebroken / comt $\frac{9}{8}$ Sesquioctava.

Soustractio in Proportionale ghetallen.

Wildeby afstrecken d'eene Proportio van d'ander / als $\frac{3}{2}$ van $\frac{9}{8}$ / dat is / Sesquialtera van Sesquioctava, Soo doet als Divisio in't ghebroken.

$$\frac{9}{8} \times \frac{3}{2} \text{ comt } \frac{18}{24} \text{ of } \frac{3}{4} \text{ Subsesquitertia.}$$

Multiplicatio wordt in Additio begrepen / ende Divisio in Sou- stractio, derhalven ist onnoodich hier meer verclaringhe daar van te maken.

Vindt 2. ghetallen in Proportio Subdupla, die door malcanderen gemultipliceert maken 6.

Facit $\sqrt{3}$. ende $\sqrt{12}$.

Vindt 4. ghetallen in Proportio Quadrupla, die t'samen gheaddeert uyt brengen 170.

Facit 128. 32. 8. 2.

Vindt 3. getallen in Proportio Dupla sesquialtera die door malcanderen gemultipliceert maken 125.

Facit $12\frac{1}{2}$ 5. 2.

Vindt 4. ghetallen in Proportio Subquadrupla, welker differentie t'samen gheaddeert uytbrenght 126.

Facit 2. 8. 32. 128.

Vindt 3. ghetallen in Proportio Subsesquiquinta, die door malcanderen gemultipliceert makē 1728.

Facit 10. 12. $14\frac{2}{3}$

Vindt 5. ghetallen in Proportio Subdupla Subsupertripartiens quartas, sulcke als men beyde d'eerste t'samen addeert / ende t'agregat treckt van het derde / ende dan met de reste t'vierde multipliceert / ende dat product dibideert door t'vijfde / dat het quotient dan sij $352\frac{8}{11}$

Facit 256. 704. 1936. 5324. 14641.

EENIGE OPMERKINGEN OVER HET ONDERWIJS IN DE MECHANICA

DOOR

J. H. SCHOGT.

Het leervak Mechanica wordt door velen niet zeer gunstig beoordeeld, getuige de facultatiefstelling en de pogingen die tegenwoordig gedaan worden om het in te lijven bij de natuurkunde. Ik mag mij ontslagen rekenen van de plicht, het bestaansrecht der mechanica als afzonderlijk vak te bepleiten, nadat Dr. E. J. Dijksterhuis over dit onderwerp geschreven heeft. Deze scherpzinnige en welsprekende verdediger der wis- en natuurkundige vakken heeft in een opstel, verschenen in het Weekblad voor Middelbaar en Gymnaasiaal Onderwijs (17e Jrg., no. 22, 21 Jan. 1921, p. 947) deze quaestie uitvoerig behandeld; hoewel bedoeld artikel gericht is tegen zekere plannen, aan welker verwezenlijking thans niemand meer denkt, is het nog zeer lezenswaard wegens de erin neergelegde denkbelden omtrent het onderwijs in de wis- en natuurkundige wetenschappen.

Ik wil in dit opstel een paar mogelijke oorzaken van de impopulariteit der mechanica bespreken, en iets uitvoeriger ééne daarvan behandelen: de methode volgens welke de mechanica op de hogere burgerscholen wordt gedoceerd. Het is waarschijnlijk, dat de mechanica op zeer vele scholen op weinig verschillende manieren wordt voorgedragen, want een statistiekje heeft mij doen zien, dat onder de vele leerboeken er één is, dat zeer veel meer gebruikt wordt dan alle andere: het Leerboek der Mechanica van Ir. C. van Drogen. De „Gronden der Werktuigkunde” van Prof. H. G. van der Sande Bakhuizen, herzien door Dr. P. Molenbroek worden nog veel gebruikt, maar dit zeer oude boek is door het eerstgenoemde, waarvan in 1917 de eerste druk is verschenen, sterk verdrongen. Ook de „Werktuigkunde” van Dr. Joh. A.

Vreeswijk wordt veel gebruikt, alle andere leerboeken veel minder. Daarom hebben aanhalingen uit deze boeken, speciaal uit dat van den heer V a n D r o o g e, bijzondere waarde ter kenschetsing van geest en methode van ons mechanica-onderwijs.

De beteekenis der mechanica voor het onderwijs op de hogere burgerscholen wordt miskend door allen, — en hieronder zijn velen die beter behoorden te weten —, die er een technisch vak, een ingenieursvak in zien, een vak dat alleen beteekenis heeft voor hen, die ingenieur of architect willen worden of op andere wijze in hun loopbaan iets met de techniek te maken zullen hebben. Dezen zien niet in, dat de theoretische werktuigkunde, de leer van bewegingen en krachten, den grondslag vormt voor alle natuurwetenschappelijke studie, dus een vak is, dat grondig gekend moet worden door allen, die zich met natuurwetenschap willen bezighouden en dat volstrekt niet en passant behandeld mag worden, maar recht heeft op eene degelijke en uitvoerige behandeling. Het is deze miskenning, die de facultatiefstelling der mechanica tot gevolg heeft gehad, waardoor het onderwijs in de natuurkunde van een belangrijken steun werd beroofd, en die in samenwerking met de inkrumping van het onderwijs in de kosmographie het onderricht in de natuurwetenschappen in de 4e en 5e klasse der H.B.S. heeft ontworicht ¹⁾. Bijzonder duidelijk treedt de verkeerde opvatting van den aard der werktuigkunde in het licht, als men let op de dwaze koppeling van dit vak aan lijntekenen; met hoeveel minder bezwaar

¹⁾ De heer G. Bolkestein schrijft in „Volksontwikkeling” van October 1925:

„Voor elk der drie typen van middelbare school is noodig een groote kern van verwante, elkander aanvullende en verduidelijkende vakken, die leeren denken, leeren werken, en die een bepaalde sfeer in de school brengen. Die vooral daardoor het geestelijke leven van den leerling afhouden van te mijden oppervlakkigheid, en zijn kennis tot een betrekkelijke eenheid brengen,” en verlangt dan als een der drie typen eene middelbare school „met de natuurwetenschappen, dat zijn in casu de wiskunde, *mechanica*, natuurkunde; scheikunde, biologie, *cosmografie*, geologie, physiogeografie als kern van onderwijs.” De cursiveeringen zijn van mij. De H.B.S. is door de slagen, die men haar in 1920 heeft toegebracht, zoo bijzonder gevoelig getroffen, doordat zij geraakt is in haar vakkenkern.

had dit laatste vak kunnen worden samengenomen met beschrijvende meetkunde.

Het is niet onwaarschijnlijk, dat veel van dit wanbegrip is veroorzaakt door de namen van het vak: „mechanica”, die den oppervlakkigen niet-deskundige afschrikt door zijn automatische klank, en „werktuigkunde”, die hem ten onrechte een wetenschap van uitsluitend tandraderen, katrollen en takels suggereert.

Wat evenmin van gunstigen invloed is op de beoordeeling der mechanica is, dat zij door de ter oefening opgegeven vraagstukken veel kans loopt te ontaarden in eenvoudig rekenwerk, oefenmateriaal voor de wiskunde, dat misschien door beter en aardiger kon worden vervangen. Wanneer men nagaat, wat voor vraagstukken gewoonlijk op het eindexamen werden opgegeven, ziet men dat deze op enkele uitzonderingen na behooren tot de volgende vijf rubrieken:

- a) kinematische vraagstukken (kogelbaan, val e. d.),
- b) samenstellen van krachten en koppels,
- c) bepaling van zwaartepunten,
- d) evenwichtsvraagstukken,
- e) dynamische vraagstukken (verticale cirkel, hellend vlak e. d.).

De sub b) en c) genoemde vraagstukken missen elk mechanisch element; wel wordt bij de oplossing gebruik gemaakt van formules, bij welker afleiding mechanica te pas kan worden gebracht, maar bij de oplossing zelve speelt de mechanica geen rol meer. En de vraagstukken dezer rubrieken zijn na die van rubriek d) de talrijkste. Terwijl eenerzijds de behandeling van sommige onderwerpen veel te weinig mathematisch is, wordt aan den anderen kant te veel aandacht geschonken aan uit mechanisch oogpunt niet zeer belangrijke berekeningen.

De eenige goede zijde, die de facultatiefstelling heeft, is, dat de leeraar niet meer verplicht is de leerlingen af te richten op het maken van tot zekere bepaalde typen behorende opgaven, en zodoende (het blanco-programma voor de vijfde klasse bevestigt dit) vrijheid heeft gekregen in de keuze der te behandelen onderwerpen. Men kan van deze vrijheid gebruik maken, om met besnoeiing van sommige onderwerpen (zwaartepunten, evenwichtsvraagstukken) allerlei quaesties te behandelen, die binnen het bereik der leerlingen vallen, zooals samenstelling van rotaties, iets uit de

kinematica der vaste lichamen (tijdelijke rotatie-as, e.d.), iets uit de dynamica der vaste lichamen (beweging van het zwaartepunt en beweging om het zwaartepunt), iets over gyrostaten¹⁾, stootkrachten. Ook meetkundige onderwerpen, die zich bij de mechanica aansluiten (barycentrische coördinaten, schroefas van een stelsel glijdende vectoren) zouden behandeld kunnen worden, evenals zeer eenvoudige toepassingen der integraalrekening zooals de berekening van enkele traagheidsmomenten. Of in deze richting veel ondernomen wordt, is mij niet bekend; de docent die het doen wil, mist totnogtoe den steun van een leerboek. De belagers der mechanica mogen bedenken, dat bij onderbrenging van dit vak bij natuurkunde de boven geschetste weg tot ontwikkeling is afgesneden, die het in staat zou stellen zijn onmisbare rol in de wis- en natuurkundige propaedeuse beter dan totnogtoe te vervullen.

Wat het onderwijs in de mechanica zoo moeilijk maakt is, dat men als men in de vierde klasse ermee begint, niet genoeg heeft aan de in de vorige klassen behandelde wiskunde. Immers de mechanica eischt kennis van de beginselen van twee onderdeelen der wiskunde, die op de H.B.S. niet afzonderlijk worden behandeld: vectoralgebra en differentiaalrekening. Men kan natuurlijk de notaties en terminologieën van deze vakken wel vermijden, maar de begrippen niet. Speciaal het limietbegrip kan niet worden vermeden²⁾: zelfs bij de behandeling van een zoo eenvoudig onderwerp als de eenparig veranderlijke rechtlijnige beweging heeft men het limietbegrip noodig bij de definitie der snelheid³⁾. Men heeft dan

¹⁾ B. v. naar aanleiding van H. Crabtree, *Spinning Tops and Gyroscopic Motion*, Longmans, Green and Co., 1914 (7/6).

²⁾ Eene recente poging om dit wel te doen moet ik, zooals trouwens vanzelf spreekt, als mislukt beschouwen.

³⁾ De „definitie” der snelheid eener veranderlijke beweging zonder limietbeschouwingen, welke hierop neerkomt, dat de snelheid is wat zij worden zou als zij bleef wat zij was, vindt men voorzover ik weet nog slechts in niet meer gebruikte boeken: Michaëlis, *Beknopt Leerboek der Werktuigkunde* (1896) blz. 3; Brongersma, *Leerboek der Werktuigkunde* (1888), blz. 9 (in verband met dynamische beschouwingen!).

ook niet anders kunnen doen, dan de beginselen der vectoralgebra en de grondbegrippen der differentiaalrekening in den leergang der mechanica in te vlechten. En het is zeer begrijpelijk, dat men deze onderwerpen niet in eene abstracte behandeling heeft willen vooropstellen, maar de noodige abstracte, wiskundige begrippen heeft willen aanbrengen, steunend op betrekkelijk concrete kinematische begrippen als voorbeelden. Het is nu opmerkelijk, dat dit wat betreft het begrip „differentiaalquotient” zonder bezwaar kan geschieden, terwijl het bij de vectoranalytische grondbegrippen (vectorsom, vectorverschil, e. d.) leidt tot verstoring van de logisch eenig mogelijke volgorde der te behandelen onderwerpen. Dit komt, doordat men het differentiaalquotient het eerst ontmoet bij de behandeling der snelheid van veranderlijke bewegingen; men kan dit begrip op de gebruikelijke wijze met behulp van de gemiddelde snelheid definiëren en dan, indien men dit wenschelijk acht; de redeneering herhalen voor eene natuurkundig niet omschreven functie eener dito onafhankelijk veranderlijke. Bepaald noodig is dit niet, maar m.i. wel aanbevelenswaardig. Op deze wijze leidt men de leerlingen zonder moeite in in de differentiaalrekening en men kan allerlei wiskundige finesses vermijden die zich bij eene abstracte behandeling op den voorgrond dringen (continuïteit en dergelijke begrippen). Hoe dit ook zij, in elk geval is er geen sprake van, dat telkens als men eene of andere functie differentieert, men de uitkomst opvat als de snelheid van een punt t.o.v. een coördinatenstelsel. Of men het woord „differentieëren” gebruikt of niet, men maakt de wiskundige bewerking los van het kinematische voorbeeld waaraan zij voor het eerst is verduidelijkt.

Geheel anders gaat men te werk bij de behandeling van vectoroptelling en vectoraftrekking, twee bewerkingen die in de mechanica herhaaldelijk gebruik worden, veel vaker dan het differentieëren. Men is gewoon, de vectoroptelling voor het eerst te behandelen bij de samenstelling van bewegingen, dat is de overgang op een ander coördinatenstelsel. Nu wordt echter hieruit niet de wiskundige bewerking geabstraheerd, maar men houdt de vectoroptelling verbonden aan de samenstelling van bewegingen, zoodat men telkens, wanneer men vectoroptelling noodig heeft, op de eene of andere manier het vraagstuk zoo moet draaien, dat er verschillende, onderling bewegende coördinatenstelsels bij te pas komen. Dikwijls leidt dit tot eene zeer onnatuurlijke voorstelling. Laat ons als eerste

voorbeeld beschouwen de definitie der versnelling bij de veranderlijke kromlijnjige beweging. Dit behoort aldus te geschieden: zij $v(t)$ de snelheid ten tijde t , opgevat als vector; dan beschouwt men het *vectorverschil* $v(t + \Delta t) - v(t)$, deelt dit door Δt en neemt hiervan de limiet voor $\Delta t = 0$. Bij de gebruikelijke behandeling is men echter genoodzaakt, de snelheidsverandering $v(t + \Delta t) - v(t)$ als de snelheid eener meevoeringsbeweging op te vatten, en dus een hypothetische omgeving te construeeren, die die snelheid tot translatiesnelheid heeft; dit is weer niet mogelijk, als men niet iets over translatie, dus over de kinematica der vaste lichamen behandeld heeft. Deze wijze van behandeling eischt dus eene onderbreking van de kinematica van het stoffelijk punt met een gedeelte van de kinematica der vaste lichamen. Ik zal wel niet verder behoeven te gaan, om den lezer te overtuigen, dat de gebruikelijke wijze van behandeling dwaas en verward is. Wat men inderdaad in de boeken leest, is echter nog veel erger dan het bovenstaande zou doen vermoeden. De samenstelling van bewegingen wordt namelijk zoodanig *verdoezeld*, dat niet meer blijkt, dat zij in verband staat met verschillende t. o. v. elkander bewegende omgevingen. Men zegt dit eerst wel, zij het in soms zeer onbeholpen bewoordingen, maar tracht het den leerling zoo spoedig mogelijk weer te doen vergeten. Voorwaar een fraai voorbeeld van de eerlijkheid¹⁾, waarmede het onderwijs in de exacte vakken moet doortrokken zijn om zodoende een weldadigen invloed op de geestesrichting der leerlingen uit te oefenen.

Hier volgen eenige staaltjes van behandeling van deze quaestie:

„Wij stellen nu het volgende axioma voorop: Een snelheid kan nooit uit zichzelf veranderen, doch kan zich alleen daardoor wijzigen, dat met die snelheid een andere snelheid wordt samengesteld”²⁾.

„We nemen aan, dat we van een snelheid alleen tot een andere snelheid kunnen komen door toevoeging van een derde snelheid, welke samengesteld met de eerste de andere zal opleveren” (cursiveering van mij).³⁾

1) Dijksterhuis, l. c. p. 951 en dit Bijvoegsel, jaargang I blz. 11.

2) V. d. S. Bakhuyzen—Molenbroek, Gronden der Werktuigkunde, 9e druk (1919) bladz. 13.

3) C. van Drooge, Leerboek der Mechanica, bldz. 11.

Een onlangs verschenen leerboek der Mechanica zegt: „Men neemt nu aan, dat een snelheid v slechts daardoor in een snelheid v' veranderen kan, dat er zich bij de snelheid v een nieuwe snelheid v_1 gevoegd heeft, die tezamen met v de snelheid v' tot resultante heeft.” (cursiveering van mij).¹⁾ ²⁾

De grappig-kinderlijke zinsnede, dat eene snelheid nooit uit zichzelf veranderen kan, maakt waarschijnlijk hoe men ertoe gekomen is, dit als een axioma te beschouwen: doordat men erbij denkt aan de dynamische hypothese der traagheid. Men heeft hier dus te doen met eene verwarring tusschen de kinematische definitie der versnelling en eene dynamische hypothese omtrent de omstandigheden waaronder versnellingen al of niet voorkomen.

Opmerkelijk is, dat Dr. J. H. Meerburg in zijne „Beginselen der Mechanica” de definitie van de versnelling eener kromlijnige beweging dan ook naar de dynamica overbrengt,³⁾ natuurlijk ten onrechte.

Zooeven heb ik gezegd, dat men alvorens de samenstelling van bewegingen te kunnen behandelen, iets moet mededeelen over de kinematica der vaste lichamen⁴⁾. Het is wel de moeite waard eens na te gaan hoe de samenstelling van bewegingen, die in de meeste boeken — zeer ten onrechte — het fundament is van de geheele kinematica, gewoonlijk behandeld wordt. Vooraf ga de opmerking, dat de zoo buitengewoon belangrijke begrippen translatie en rotatie voor zoover mij bekend is, in geen enkel boek behoorlijk worden besproken. Eene stelling als deze: „alle punten van een lichaam dat t.o.v. zekere omgeving eene translatie heeft, hebben op een

1) Dr. N. R. Pekelharing Azn. en Dr. K. W. Rutgers, Leerb. der Werktuigkunde II, bldz. 25 (1925).

2) Ongeveer dezelfde woorden vindt men in:

W. G. v. d. Meer, w. i., Leerboek der elementaire mechanica, bldz. 12.

Dr. J. Geest en J. P. Valkema Blouw, w. i., Leerboek der mechanica, deel B, bldz. 22.

Eene juiste behandeling vindt men in:

Dr. G. Bakker, Leerboek der Werktuigkunde, bldz. 12.

Dr. B. Gonggrijp, Overzicht der Mechanica, bldz. 11.

B. de Greve en Dr. J. G. Rutgers, Leerboek der Mechanica, bldz. 13 (met hodograaf).

3) Dr. J. H. Meerburg, Beginselen der Mechanica, bldz. 93.

4) In het te weinig gewaardeerde Leerboek der Mechanica van Ir. W. J. Wisselink is hiermede rekening gehouden.

bepaald oogenblik t.o.v. die omgeving gelijke snelheden en gelijke versnellingen" waarop de begrippen snelheid en versnelling *van een lichaam* (waarvan ik in geen enkel boek eene definitie heb aangetroffen, terwijl men de woorden overal gebruikt vindt) berusten, behoort uitvoerig en streng bewezen te worden. Evenzoo de eigenschappen waardoor het mogelijk wordt, te spreken van eene rechtlijnige en van een cirkelvormige translatie; ook de eenvoudigste eigenschappen der rotatie.

De gewone gang van zaken is deze: men behandelt achtereenvolgens parallelogram van wegen, parallelogram van snelheden en parallelogram van versnellingen. Noodig is deze volgorde niet, en de stellingen gelden onder verschillende voorwaarden omtrent de meevoeringsbeweging.

Onderstel dat zeker punt P zich op het tijdstip t_1 bevindt in een punt A eener eerste omgeving, op het tijdstip t_2 in een punt B dier eerste omgeving, dat de punten A en B der eerste omgeving op het tijdstip t_1 samenvallen met de punten A_1 en B_1 eener tweede omgeving en op het tijdstip t_2 met de punten A_2 en B_2 dier tweede omgeving. Dan bevindt zich het punt P op het tijdstip t_2 in het punt B_2 der tweede omgeving. Dit spreekt vanzelf. Wanneer is $A_1A_2B_2B_1$ een parallelogram? Dan en slechts dan, als A_1A_2 en B_1B_2 gelijke en evenwijdige lijnstukken zijn. Opdat dit geldt voor alle punten A en B der eerste omgeving is noodig en voldoende, dat de beweging van de tweede omgeving t.o.v. de eerste eene translatie is. Dit alles is uiterst eenvoudig; het kan bewezen worden met behulp van zeer eenvoudige meetkundige stellingen en van de eigenschappen der translatie, er is geen axiomatisch element in. Opdat de leerlingen dit goed begrijpen moet men, dunkt mij, veel nadruk leggen op het verschil tusschen de punten die in het bovenstaande door P en A zijn aangeduid. En dit geschiedt juist niet, wanneer men spreekt van *een* punt, dat „deelneemt aan twee bewegingen”.

De gebruikelijke behandeling is ongeveer als volgt: „Wanneer een stoffelijk punt tegelijkertijd deelneemt aan twee rechtlijnige bewegingen, dan bevindt zich dat punt na zekeren tijd in het vierde hoekpunt van het parallelogram beschreven op de wegen, die het ten gevolge van ieder der samenstellende bewegingen afzonderlijk in den zelfden tijd zou hebben afgelegd”.¹⁾

¹⁾ Van Drooge, l. c. p. 8.

Men kan hierbij opmerken, dat de rechtlijnigheid der bewegingen (rechtlijnigheid van de beweging t.o.v. de 1e omgeving en rechtlijnigheid der meevoeringstranslatie) niet ter zake doen, ten minste als men „wegen” als „verplaatsingen” opvat.

In verschillende andere boeken leest men iets dergelijks ¹⁾, alleen wordt het soms zeer nadrukkelijk een axioma genoemd. ²⁾

Alvorens van het „parallelogram van wegen” afscheid te nemen, moet ik nog een enkel woord zeggen over een paar bijzonder ongelukkige termen, die in dit verband veel gebruikt worden:

„Beweegt zich een persoon op het dek van een schip van A naar B, terwijl het schip in den zelfden tijd van stand I in stand II komt, dan zal de persoon *in werkelijkheid* komen in B'. Men zegt nu, dat de persoon aan twee bewegingen tegelijkertijd deelneemt: 1e zijn eigen beweging op het schip, 2de de beweging van het schip. *Geheel* juist is dit niet, daar de persoon *natuurlijk maar één beweging heeft*, en wel van A naar B'.

De *werkelijke* beweging noemt men de resulterende beweging of „resultante”. ³⁾

De cursiveeringen zijn van mij. In verschillende andere boeken leest men iets hiermede gelijkwaardigs. ⁴⁾

Nu heb ik vooreerst groot bezwaar tegen de uitdrukkingen „in werkelijkheid” en „werkelijke” beweging. De persoon (als punt beschouwt) is t.o.v. de aarde gekomen van A in B', t.o.v. het schip van A in B, en beide bewegingen zijn even werkelijk, de eene is niet fictiever dan de andere. ⁵⁾ Ten tweede is de bewering, dat de persoon „natuurlijk maar één beweging heeft” natuurlijk onjuist,

¹⁾ Van der Meer, p. 9; Pekelharing en Rutgers, I, p. 29; Wisselink p. 20; Meerburg, p. 11.

²⁾ V. d. S. Bakhuyzen—Molenbroek, p. 8.

³⁾ Van Drooge, bldz. 7.

⁴⁾ V. d. S. Bakhuyzen—Molenbroek, p. 7 en 8; Pekelharing en Rutgers, I, p. 28.

⁵⁾ Verg. de bij de bespreking van siderische en synodische omloopstijd van planeten in de cosmographieboeken vaak voorkomende bewering, dat de siderische de werkelijke is. Natuurlijk is het verschil gelegen in het coördinatenstelsel t. o. waarvan men de beweging beschouwt.

want zij heeft zooveel bewegingen als men t.o.v. elkaar bewegende coördinatenstelsels wenscht te beschouwen.

Beschouwen wij nu het z.g. parallelogram van snelheden. Hieronder worden twee stellingen verstaan, die dientengevolge herhaaldelijk verward worden, n.l. deze:

I. Bevindt een punt P zich op zeker oogenblik in een punt A eener eerste omgeving, dan is de snelheid van P t.o.v. eene tweede omgeving op dat oogenblik gelijk aan de vectorsom van de snelheid op dat oogenblik van P t.o.z. de eerste omgeving en de snelheid op dat oogenblik van A t.o.v. de tweede omgeving; en

II. Heeft een punt P eene eenparige rechtlijnige beweging t.o.v. eene eerste omgeving, en deze eene eenparige rechtlijnige translatie t.o.v. eene tweede omgeving, dan heeft het punt P t.o.v. de tweede omgeving eene eenparige rechtlijnige beweging, waarvan de snelheid de vectorsom is van de snelheid van P t.o.v. de eerste omgeving en de translatiesnelheid van de eerste omgeving t.o.v. de tweede.

De eerste van deze twee stellingen heeft niets te maken met het parallelogram van wegen, zij geldt voor alle meevoeringsbewegingen, de tweede, die blijkbaar geldt als de meevoeringsbeweging eene translatie is, wordt uit het parallelogram van wegen afgeleid. De gewone handelwijze, handig, maar niet zeer eerlijk, is nu, dat men stelling II bewijst, en haar zoo formuleert, dat men haar zoo noodig voor stelling I kan laten doorgaan, dus II bewijst en I toepast. Zulk eene toepassing vindt men b.v. bij de vrijwel algemeene gebruikelijke berekening van de snelheid in de kogelbaan, die wordt „samengesteld” uit de snelheid eener eenparige horizontale beweging en die eener *eenparig veranderlijke* verticale beweging. Soms worden pogingen gedaan, om stelling I uit stelling II af te leiden door een caricatuur-limitovergang. In de „Gronden der Werktuigkunde” van Van de Sande Bakhuizen en Molenbroek vindt men dit als volgt behandeld: „Dezelfde constructie en berekening voor de resulterende snelheid geldt klaarblijkelijk ook bij de samenstelling van twee willekeurige bewegingen. Men kan n.l. een willekeurige beweging gedurende zóó korten tijd beschouwen, dat daarin geen merkbare verandering van de snelheid plaats heeft. *Gedurende dien tijd* is dus de beweging als een eenparige te beschouwen, en zal alles geldig zijn, wat voor een eenparige beweging waar is.

Moet men nu twee willekeurige bewegingen samenstellen ge-

gedurende een langeren tijd, dat verdeele men dezen tijdsduur in een zoo groot aantal kleine tijdsdeelen, dat elk der gegeven bewegingen gedurende elk klein tijdsdeel als eenparig beschouwd kan worden. Bepaalt men vervolgens de snelheid van elk der samenstellende bewegingen gedurende een bepaald tijdsdeel, dan zal de snelheid der resulterende beweging *gedurende dat kleine tijdsdeel* worden aangegeven door de diagonaal van het parallelogram op de twee samenstellende, oogenblikkelijk bestaande snelheden beschreven.¹⁾

De behandeling der parabolische beweging steunt ten onrechte op het samenstellen van bewegingen. Het is toch een zeer weinig natuurlijke voorstelling, om bij de beweging van een stoffelijk punt t.o.v. de aarde twee onderling bewegendende coördinatenstelsel te pas te brengen. De afleiding der formules kan dan ook beter geschieden met behulp van de stellingen over snelheid en versnelling der projectiebeweging, welke stellingen in sommige boeken voorkomen, maar meestal met het oog op andere toepassingen²⁾. Deze wijze van behandeling, die men in de standaardwerken steeds aantreft, biedt volstrekt geen bijzondere moeilijkheden voor de school, maar wordt, naar ik meen, weinig gebruikt.³⁾ Opmerkelijk is, dat soms getracht wordt, de begrippen projecteeren en ontbinden te vereenzelvigen.⁴⁾

Voor het parallelogram van versnellingen gelden soortgelijke opmerkingen, als over dat der snelheden gemaakt zijn. Alleen wordt hier het gevaar voor foutieve uitkomsten grooter⁵⁾ dan bij

¹⁾ Van de Sande Bakhuyzen—Molenbroek, p. 12.

²⁾ Ibid., p. 39 en 40; Wisselink, p. 47 sqq.; Gonggrijp, p. 21.

³⁾ Men vindt haar bij Bakker, p. 20, en bij De Greve en Rutgers.

⁴⁾ Van de Sande Bakhuyzen—Molenbroek, p. 12; Dr. Joh. A. Vreeswijk, Werktuigkunde, p. 9, sqq. Hier worden samenstelling en ontbinding geheel behandeld als betrekking eener beweging tot hare projecties; de opzet is ongetwijfeld veel beter dan in de meeste andere boeken, maar de toepassing op de kogelbaan is niet zuiver, door het ontbreken der zooeven bedoelde stellingen. De „samenstelling” in den gebruikelijken zin (verschillende omgevingen) wordt niet behandeld.

⁵⁾ Gonggrijp, p. 14. Het parallelogram en de veelhoek der versnellingen gelden ook voor willekeurig veranderlijke, kromlijnjige bewegingen.

de samenstelling van snelheden doordat het theorema van Coriolis de samenstelling van versnellingen volgens de parallelogramconstructie practisch beperkt tot het geval, dat de meeevoeringsbeweging eene translatie is. Ik zou hierover verder kunnen zwijgen, ware het niet, dat van de ontbinding van versnellingen soms toepassingen gemaakt worden, die een schril licht werpen op de zonderlinge redeneeringen, welke den leerlingen worden voorgezet. Een daarvan is de beweging langs een hellend vlak. Wij vinden hieromtrent ¹⁾: „Als het stoffelijk punt vrij kon vallen zou het een vertikale versnelling g krijgen. Ontbindt men nu de beweging langs het hellend vlak en loodrecht op het hellend vlak dan verkrijgt men eenparig versnelde bewegingen met versnellingen $g \sin \alpha$ en $g \cos \alpha$. De beweging loodrecht op het hellend vlak wordt door het hellend vlak belet, zoodat alleen een eenparig versnelde beweging langs het hellend vlak ontstaat met een versnelling $g \sin \alpha$.” Dat dit alles volstrekt niet vanzelf spreekt, en bovendien niets te maken heeft met samenstelling van bewegingen, gevoelt de schrijver blijkbaar in 't geheel niet. Dr. J. H. Meerburch ²⁾ behandelt de zaak op dezelfde wijze doch uitvoeriger, en tracht door het invoeren van een hypothetische omgeving het karakter der samenstelling beter te doen uitkomen. Dat hij aan het slot der redeneering zegt: „Dit werd ook door proeven geleerd”, en dus blijkbaar eene experimenteele bevestiging noodig acht, bewijst echter dat hij hare ontoereikendheid wel heeft gevoeld. Van de Sande Bakhuyzen behandelt op deze wijze zelfs de slingerbeweging ³⁾. Hier worden typische dynamische vraagstukken waarbij al of niet constante drukkingen en de zwaartekracht een rol spelen ten onrechte als kinematische problemen behandeld ⁴⁾.

Totnogtoe heb ik bijna uitsluitend gesproken over kinematische onderwerpen. De uiteenzetting van de beginselen der dynamica is

¹⁾ Van Drooge, p. 28. Precies zoo bij Pekelharing en Rutgers, I, bldz. 51.

²⁾ p. 18.

³⁾ p. 42.

⁴⁾ Strict genomen zijn natuurlijk ook val en kogelbaan dynamische onderwerpen, maar het ontbreken van drukkingen maakt, dat men ze zonder veel bezwaar bij de kinematica kan behandelen, mits men maar zwijgt over de oorzaak der versnelling.

bijzonder moeilijk, sommige schrijvers loopen er zoo vluchtig mogelijk overheen ¹⁾; andere maken er meer werk van, maar hunne uiteenzettingen lijken zooveel op elkaar ²⁾, dat men wel moet aannemen, dat zij uit een gemeenschappelijke bron geput hebben; ik zal het wel niet ver mis hebben, als ik de Gronden der Werktuigkunde van V a n d e S a n d e B a k h u y z e n als zoodanig beschouw.

De methode kan het best zoo worden gekenschetst: er wordt gebruik gemaakt van definities en van „grondbeginselen” of axioma's die zinledig zijn, doordat er allerlei niet gedefinieerde begrippen in optreden. Dit schijnt paradoxaal, daar zulke dingen nergens voor gebruikt kunnen worden, maar met een beetje handigheid is er toch wel iets mee te bereiken. Zooals de prestidigitateur uit leegedooosjes achtereenvolgens de verschillendste voorwerpen te voorschijn goochelt, suggereert de explicateur van de principes der mechanica in zijne axioma's den leerling telkens wat hij in zijne redeneering gebruiken kan.

Eenige voorbeelden mogen dit verduidelijken. Eene bekende formuleering der traagheidswet luidt: „Wordt een lichaam of een stoffelijk punt aan zichzelf overgelaten, dan zal er niets aan den toestand van rust of beweging veranderen” ³⁾. Wat „aan zich zelf overlaten” en wat „toestand van beweging” beteekent, blijft onbepaald. Deze begrippen te praeciseeren zoodat de formuleering juist wordt, is alleen mogelijk als men de woorden „een lichaam of” schrapt.

Een andere formuleering is: „dat de stof zelf niets aan zijn beweging kan veranderen” ⁴⁾.

Nog een andere: „Reeds vroeger is vermeld, dat de snelheid van een punt nooit uit zichzelf veranderen kan, doch dat het noodig is, dat daartoe een versnelling bestaat. Is geen versnelling aanwezig, dan kan dus noch de grootte noch de richting der snelheid zich wijzigen. *De beweging van het punt moet dan eenparig en rechtlijnig zijn, of het punt moet in rust verkeeren.* De eigenschap van de stof, die hierin wordt uitgedrukt, noemt men de *traagheid* of

¹⁾ Gonggrijp, bldz. 24; Wisselink, bldz. 54; Vreeswijk, p. 29.

²⁾ V. d. S. Bakhuyzen, p. 63; Van Drooge, p. 42; Pekelharing en Rutgers, I, p. 71; Van der Meer, p. 42.

³⁾ Van Drooge, p. 42.

⁴⁾ Pekelharing en Rutgers, I, p. 71.

inertie. Zij kan niet bewezen worden en is dus een grondbeginsel of axioma ¹⁾).

Hier staat ongeveer, dat twee grootheden niet kunnen verschillen zonder dat („daartoe”) een verschil bestaat, en dat dit niet bewezen kan worden en dus een axioma is.

Daarop volgt dan het onafhankelijkheidsbeginsel of superpositiebeginsel, eveneens van vervaarlijke vaagheid; het wordt aldus geformuleerd. De uitwerking van een kracht is onafhankelijk van den bewegingstoestand waarin het lichaam (of het stoffelijke punt) zich bevindt, en van de overige krachten, die op dit lichaam (of dit stoffelijke punt) werken ²⁾).

Hierin is onbepaald gelaten wat onder de uitwerking van een kracht wordt verstaan, verder komt de onbepaalde uitdrukking „bewegingstoestand” nog eens voor.

„Uit deze tweede hoofdeigenschap ³⁾ volgt, dat de werkelijke beweging, die het lichaam (stoffelijke punt) verkrijgt, de resulterende beweging is van de beweging, welke het reeds bezat, en alle bewegingen, die het ten gevolge van elk der krachten afzonderlijk zou krijgen.

Heeft een stoffelijk punt onder de werking van één enkele standvastige kracht een rechte beweging, dan zegt men dat de richting der kracht met de richting der beweging samenvalt. De snelheid zal in dit geval niet van richting, alleen van grootte veranderen. De uitwerking der kracht is dus een versnelling in de richting van de kracht.

Volgens de tweede hoofdeigenschap ³⁾ zal de uitwerking van de standvastige kracht in gelijke tijdsdeeltjes steeds dezelfde zijn, m.a.w. de beweging is eenparig veranderlijk.” ⁴⁾

De eerste alinea van het geciteerde stuk bevat een *verklaring* van

¹⁾ Van de Sande Bakhuyzen—Molenbroek, p. 53.

²⁾ Van Drooge, p. 42; ongeveer gelijkloidend bij Rutgers en Pekelharing, I, p. 71; Van de Sande Bakhuyzen—Molenbroek, p. 54; en Van der Meer, p. 43. De laatste twee spreken terecht niet van een lichaam. De tweeden betitelen het fen. onrechte als 2e wet van Newton; het komt in Newton's principia niet voor.

³⁾ dat is het superpositiebeginsel.

⁴⁾ Van Drooge, p. 42 en 43.

het beginsel ¹⁾, niet eene *gevolgtrekking* eruit ²⁾; de „uitwerking der kracht” is hier blijkbaar eene beweging. De tweede alinea is (mij althans) volkomen onbegrijpelijk; de „uitwerking der kracht” blijkt eene versnelling te zijn.

In de derde alinea, met het verbluffende „m.a.w.”, blijkt de „uitwerking der kracht”, nu gepraeciseerd met de in het beginsel niet voorkomende woorden „in gelijke tijdsdeeltjes”, eene snelheidsverandering te zijn. Vulde men, in plaats van met „in gelijke tijdsdeeltjes” aan met „over gelijke baanvakken”, dan kwam men verkeerd uit; men doet dit dus niet.

Om de evenredigheid van kracht en versnelling aan te toonen en zodoende het begrip massa te definieeren, gebruikt men een geheele reeks bepalingen, betrekking hebbende op gelijkheid en ongelijkheid van krachten ³⁾.

„Bepaling 1. *Men noemt twee krachten gelijk, als zij achtereenvolgens aan het zelfde stoffelijke punt gelijke versnellingen mededeelen.*

Als twee *gelijke* krachten op verschillende stoffelijke punten werken, zullen die punten in het algemeen *niet* gelijke versnellingen ontvangen”. Enz. ⁴⁾.

Terwijl in de bepaling zeer uitdrukkelijk het begrip gelijkheid wordt beperkt tot krachten die op eenzelfde stoffelijke punt werken, wordt onmiddellijk daarna gesproken van gelijke krachten werkende op verschillende stoffelijke punten. Hoe verder met dit niet gedefinieerde begrip gewerkt wordt, kan ons onverschillig zijn.

Er is nog een punt, dat, misschien opzettelijk, niet behoorlijk besproken wordt, en dat van bijzonder belang is, omdat het nauw samenhangt met een kenmerkende eigenschap der mechanica van Newton, die juist in de laatste jaren onder den invloed der relativiteitstheorie nogal de aandacht getrokken heeft. Ik bedoel de afhankelijkheid van beweging en rust, snelheid, versnelling, enz. van het coördinatenstelsel. Men kan in alle boeken de opmerking vinden, dat de uitdrukkingen beweging en rust slechts beteekenis hebben

¹⁾ Zoo vatten ook Van de Sande Bakhuyzen en Molenbroek het op.

²⁾ Zoo vatten, behalve Van Drooge, Pekelharing en Rutgers het op.

³⁾ Van Drooge, p. 43; Van de Sande Bakhuyzen—Molenbroek, p. 55.

⁴⁾ Van de Sande Bakhuyzen—Molenbroek, p. 55.

ten opzichte van bepaalde omgevingen. Verder wordt hierop meestal niet ingegaan. Er volgt natuurlijk uit, dat men snelheden en versnelingen ook slechts kan opgeven t.o.v. bepaalde omgevingen, en dat de uitdrukking „de snelheid van een punt” strict genomen steeds zinledig is, maar zij geeft geen aanleiding tot misverstand wanneer sprake is van bewegingen t.o.v. een vast met de aarde verbonden coördinatenstelsel. Van meer belang is echter dat in de axioma's der klassieke mechanica en de onmiddellijk eruit gemaakte gevolgtrekkingen herhaaldelijk sprake is van rust, beweging, snelheid, versnelling, zoodat deze dingen, geheel afgezien nog van alle zoeven besproken fouten, geheel zinledig zijn, zoolang niet is aangegeven, ten opzichte van welk stelsel deze rust, beweging, enz. bedoeld wordt. Het blijkt nu, dat men hier zekere assenstelsels moet beschouwen, die, in theorie, op eene eenparige rechthoekige translatie na bepaald zijn. De z.g. Galilei-transformatie ¹⁾ ter overgang van een zoodanig stelsel op een ander, laat de bewegingsvergelijkingen der klassieke mechanica invariant (relativiteit der klassieke mechanica). Alleen ten opzichte van zulk een stelsel („vast assenstelsel”) geldt de bekende grondformule

$$k = m \cdot a$$

verder is de kracht niet afhankelijk van een coördinatenstelsel, maar in tegenstelling met versnelling, enz., een absoluut begrip. Dit zijn alle bijzonder belangrijke en voor een goed begrip der mechanica onontbeerlijke onderwerpen, die in geen enkel mij bekend schoolboek ook maar even worden aangeduid, laat staan behoorlijk behandeld. De mechanica zooals die op de H.B.S. behandeld wordt, moet natuurlijk niet eene inleiding tot de relativiteitstheorie zijn, maar het begrip van de ontdekkingen van Lorentz en Einstein wordt noodeloos bemoeilijkt, als men de verwante quaesties in de klassieke mechanica opzettelijk verwaarloost.

Het parallelogram van krachten heeft, wanneer ten minste een der krachten eene drukking of trekking is, bij aanraking op een stoffelijk punt uitgeoefend, een zuiver axiomatisch karakter, — axioma hier te verstaan in den zin van natuurkundige hypothese, waarvan de gevolgtrekkingen achteraf moeten blijken in overeenstemming te zijn met waargenomen verschijnselen. Wanneer geen

¹⁾ Analogon van de Lorentz-transformatie der bijzondere relativiteitstheorie.

der krachten door aanraking wordt uitgeoefend, maar beide een gevolg van werking op afstand zijn, wordt met het parallelogram van krachten het volgende bedoeld: wanneer een stoffelijk punt P met massa m bij aanwezigheid van een groep stoffelijke punten A eene versnelling a , bij aanwezigheid eener groep B eene versnelling b t.o.v. een vast assenstelsel zou krijgen, dan krijgt het bij aanwezigheid van A en B eene versnelling c , die de vectorsom is van a en b :

$$c = a + b \quad (\text{vectoroptelling}).$$

Ook dit is een axioma. Hieruit volgt door eenvoudige vermenigvuldiging

$$mc = ma + mb \quad (\text{vectoroptelling})$$

en in zooverre kan men dus wel zeggen,¹⁾ dat het parallelogram van krachten uit een parallelogram van versnellingen wordt afgeleid, maar dit laatste is dan heel wat anders dan wat onder dien naam bekend staat in de leer van het samenstellen van bewegingen. Dit wordt telkens weer uit het oog verloren.

De gebruikelijke behandeling²⁾ gaat uit van het bovengenoemde onafhankelijkheidsbeginsel dat voor dit doel als volgt wordt geïnterpreteerd: de beweging, die het lichaam verkrijgt onder de werking van eenige krachten is de resulterende beweging van de beweging welke het reeds bezat en alle bewegingen, die het tengevolge van de werking van elk der krachten afzonderlijk zou krijgen."

Wat hiermede eigenlijk bedoeld wordt is niet duidelijk, want de krachten afzonderlijk geven bewegingen aan het beschouwde stoffelijke punt; terwijl voor de samenstelling noodig is de beweging van het stoffelijk punt t.o.v. eene omgeving en de beweging van die omgeving t.o.v. eene tweede. Door eene korte redeneering, waarin handig gebruik gemaakt wordt van het om dit bezwaar te ontgaan verdoezelde begrip „samenstelling van versnellingen" wordt dan het parallelogram van krachten afgeleid.³⁾

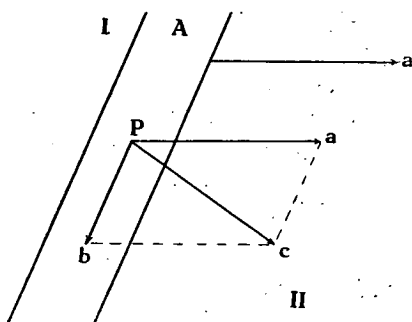
¹⁾ Men kan natuurlijk ook in dit geval het parallelogram van *krachten* als axioma beschouwen.

²⁾ In ongeveer alle leerboeken. Bakker behandelt deze zaak uitvoeriger, en veel beter. p. 47—54. Ook de behandeling door Vreeswijk, p. 33, is beter dan de gebruikelijke.

³⁾ Van de Sande Bakhuyzen—Molenbroek, p. 66; Van Drooge, p. 50; Wisselink, p. 66; Pekelharing en Rutgers, I, p. 80; De Greve

Men kan het Dr. J. H. Meerburch als een verdienste aanrekenen, dat hij de samenstelling van bewegingen nimmer verdoezelt, maar steeds, waar hij haar noodig heeft, uitvoerig mededeelt welke bewegingen hij samenstelt. Tot besluit geef ik het bewijs van het parallelogram van krachten, zooals hij dat in zijne „Beginnelsen der Mechanica” heeft opgenomen.¹⁾

„Stel de punten eener omgeving I (de koker A, zie de figuur)



hebben alle zekere versnelling a ten opzichte eener omgeving II (vlak van teekening). Wil dan een punt P ten opzichte der omgeving I in rust zijn, dan moet het ook de versnelling a bezitten, maar daartoe moet er volgens (16)²⁾ een kracht $K_1 = ma$ op werken. Wil men nu aan P ten opzichte der om-

geving I een versnelling b geven, dan moet er bovendien de kracht $K_2 = mb$ in de richting der versnelling b op werken. Dan werken dus tegelijk de krachten K_1 en K_2 op het punt. Volgens § 17³⁾ heeft het dan ten opzichte der omg. II de versnelling c , in grootte en richting voorgesteld door de diagonaal van het parallelogram op de lijnen die de versnellingen a en b voorstellen, als zijden beschreven.

Maar deze versnelling c had het punt ook kunnen verkrijgen door een kracht $R = mc$, werkende in de richting der versnelling c . Die kracht heeft dus dezelfde uitwerking als de krachten K_1 en K_2 te zamen.”..... [hier volgt eene eenvoudige meetkundige redeneering]..... „De kracht R wordt dus in grootte en richting voorgesteld door de diagonaal van het parallelogram, waarvan de zijden de gegeven krachten voorstellen.”

Tegen deze schijnbaar strenge redeneering kan het volgende worden opgemerkt. De omgevingen I en II hebben ten opzichte van elkander eene versnelling. Ten hoogste ééne ervan kan dus vast zijn.

en Rutgers, p. 43; Van der Meer, p. 48; Gonggrijp, p. 28; Geest en Valkema Blouw, B, p. 43.

¹⁾ p. 23.

²⁾ (16) is de formule $K = m \cdot a$.

³⁾ § 17 behandelt de samenstelling van versnellingen.

Van de beide betrekkingen

$$K_1 = ma \quad K_2 = mb$$

is er dus ten hoogste ééne juist. Laat ons aannemen dat de omgeving II vast is, dus I niet, dan is

$$K_2 \neq m \cdot b.$$

Stel $m \cdot b = K_2'$; men zou dan verwachten (op grond van het onafhankelijkheidsbeginsel) dat de resulterende kracht is de vector-som van K_1 en K_2' ; dat zij desniettemin die van K_1 en K_2 is, volgt op geen enkele wijze uit de aangehaalde redeneering; en dit wijst duidelijk op het axiomatisch karakter van het resultaat.

De heer Meerburch gaat uit van de versnelling van het punt t.o.v. de bewegende omgeving I; meestal wordt dit niet gedaan, men onderstelt dan, dat de kracht K_2 de versnelling b geeft t.o.v. de *in rust verkeerende* omgeving I, dus als K_1 niet werkt. In dat geval is

$$K_2 = m \cdot b.$$

Maar dan is de resulterende versnelling van het punt niet de vectorsom van a en b , immers de resulterende versnelling wordt gevonden als vectorsom van a en de versnelling b' van het punt t.o.v. de *bewegende* omgeving I.

Bedenkt men nu bovendien nog, dat het parallelogram van krachten ook geldt voor krachten zooals drukkingen en spanningen in in rust verkeerende stelsels, zoodat bovenstaande redeneering daarop in 't geheel niet van toepassing is, dan zal men wel inzien, dat samenstellen van krachten en samenstellen van bewegingen dingen zijn, die niets met elkander te maken hebben¹⁾, en die alieen dit gemeen hebben, dat er vectoroptelling bij te pas komt.

Hiermede heb ik, naar ik meen, de voornaamste principieele fouten die den gebruikelijken gang van het mechanica-onderwijs aankleven, behandeld. Wie zich de moeite geeft, een der door mij herhaaldelijk aangehaalde boeken eens nauwgezet en kritisch door te lezen, zal vele tientallen andere kleine fouten, slordigheden en verwarringen opmerken, en zal vooral onaangenaam getroffen worden door het volkomen gebrek aan wiskundig gevoel dat uit die boeken spreekt, zich o.a. uitend in geknoei met oneindig kleine

¹⁾ Nieuw is deze opmerking niet; reeds Joh. Bernoulli schreef:

Peccant qui compositionem virium cum compositione motuum confundunt.

grootheden¹⁾), of in een zinnetje als dit (er is sprake van de niet-eenparige cirkelbeweging): „[De normale component der kracht] zal dan toch wel de grootte $K_1 = \frac{mv^2}{r}$ moeten bezitten, want gedurende een oneindig kleinen tijd kunnen wij de beweging toch als eenparig beschouwen.²⁾

Nog een enkel woord over de vraagstukken. Reeds eerder heb ik gezegd, dat onder de vraagstukken vele voorkomen, die niet van mechanischen aard zijn (zwaartepunten, samenstelling van krachten, koppels, enz.). Overigens kan ik tegen de gebruikelijke vraagstukken niet veel bezwaar hebben, maar in enkele gevallen zijn deze vraagstukken op een verkeerde plaats in den leergang ingelascht. Vraagstukken die combinaties zijn van opgaven over kogelbaan en opgaven over botsing, worden veelal bij de kinematica gezet³⁾; vraagstukken over drukkingen in stelsels die in rust of in beweging zijn, en dus in de statica of in de dynamica thuisbehooren (zooals vraagstukken over werklieden die een metalen plaat of een balk dragen) worden geplaatst bij de vector-theorie der herleiding van krachtenstelsels.⁴⁾

Ook komen soms vraagstukken voor, zooals over drijfriemen en kettingen en over het rollen van wielen over den grond, waarvan de oplossing niet voldoende in de theorie is voorbereid.⁵⁾

Ik meen in het voorgaande een, voor zoover de aard van het onderwerp dit toelaat, duidelijk beeld te hebben opgehangen van de geweldige verwarring, die in het mechanica-onderwijs heerscht. De boeken waaruit ik voortdurend de meeste fouten geciteerd heb, worden zeer veel gebruikt. Hoe mag het komen, dat er zulk een duidelijk merkbare voorkeur bestaat voor boeken, welke op bijna iedere bladzijde dingen bevatten, die een docent met eenig gevoel voor wiskunde (zij het nog zoo gering) zijnen leerlingen niet voor-

1) Zie hierover Dr. W. Lietzmann, in dit Bijvoegsel, I, p. 206 en 207.

2) Meerburg, p. 113.

3) Sommige auteurs nemen zelfs ter wille van deze vraagstukken in de kinematica beschouwingen over botsing op. Van Drooge, p. 38; Pekelharing en Rutgers, I, p. 68.

4) Vreeswijk, p. 44; Van Drooge, p. 62 en 63.

5) Van Drooge, p. 17.

zetten *kan*? Ik vermoed, dat het antwoord moet luiden: omdat men hoopt met deze boeken, de leerlingen de mechanica gemakkelijker te doen begrijpen. De schrijvers dezer werken verstaan de kunst, de zaken veel eenvoudiger voor te stellen dan zij zijn, hoofdzakelijk door stellingen slechts voor enkele bijzonder eenvoudige gevallen te bewijzen en daarna algemeen toe te passen. Dat de leerlingen hierdoor de mechanica gemakkelijker zouden begrijpen kan ik niet inzien, het is zelfs de vraag, wat men eronder moet verstaan, dat iemand een foutieve redeneering begrijpt zonder dat hij de fout ervan inziet. Wanneer een leerling zegt, een foutieve redeneering begrepen te hebben, kan de docent er zich ten hoogste op beroemen, succes te hebben gehad met een poging om hem te bedotten.

Men zal zich afvragen, of er dan nimmer een leerboek verschenen is, waarin een ernstige poging is gedaan om de in dit opstel behandelde fouten te vermijden. Hierop kan ik antwoorden, dat er mij twee bekend zijn: in de eerste plaats het in 1912 verschenen *Leerboek der Mechanica* van B. de Greve en Dr. J. G. Rutgers. Hierin wordt de mechanica uiteengezet op eene wijze, die uit wetenschappelijk oogpunt vrijwel onberispelijk mag heeten (slechts de bewijzen met limietovergangen laten iets aan scherpte te wenschen over). Het boek wordt, voorzover ik weet, aan slechts één school gebruikt en dit laat zich ook wel verklaren, want het is in zoo gedrongen stijl gesteld en er wordt zooveel aan den lezer overgelaten, dat het ongeschikt is voor beginners. Ook op andere wijzen heeft het geen merkbaaren invloed op het onderwijs gehad, want de schrijvers van later verschenen leerboeken (Van Drooge, Rutgers en Pekelharing) hebben meer aan het oude, van fouten krioelende boek van Van de Sande-Bakhuyzen en Molenbroek, dan aan dat van De Greve en Rutgers ontleend. Dit is zeer te betreuren, want een werk met zoo voortreffelijke eigenschappen verdiende niet te worden genegeerd.

Geheel anders van opvatting, maar evenzeer hoog uitstekend boven de rest, is het *Leerboek der Werktuigkunde* van Dr. G. Bakker. Uit wiskundig oogpunt is er meer op aan te merken dan op dat van De Greve en Rutgers, maar daartegenover staat, dat het in gemakkelijk leesbaren stijl geschreven is, zoodat het m.i. zelfs uitstekende diensten zou kunnen bewijzen bij zelf-onderricht. Wat aan de verspreiding van dit boek heeft in den

weg gestaan, kan ik niet begrijpen, maar het is een feit, dat het zeer weinig gebruikt wordt.

Ten slotte mag ik het „Leerboek der Mechanica” van Ir. W. J. Wisselink (verschenen in 1908) niet verzwijgen, dat weliswaar in hoofdzaken ouderwetsch is, maar op vele ondergeschikte punten aanmerkelijk scherper redeneeringen geeft dan tot dien tijd gebruikelijk waren. Het heeft een tweeden druk beleefd, maar is thans uitverkocht en wordt niet herdrukt. De belangstelling ervoor is dus blijkbaar ook al niet groot geweest, en van eenigen invloed op de later verschenen werken bemerkt men niets, tenzij misschien waar het betreft een juist gebruik van eenheden. Ir. Wisselink is naar ik meen degene geweest, die de dimensieformules bij het M.O. heeft geïntroduceerd.

Wie eene goede behandeling der mechanica zoekt, kan die trouwens vinden in de bekende standaardwerken b.v. in het *Traité de Mécanique rationelle* van Appell, de „*Rigid Dynamics*” van Routh of de eerste hoofdstukken der „*Analytical Dynamics*” van Whittaker. Eene geheel bevredigende behandeling van de begrippen kracht, massa en versnelling heb ik alleen aangetroffen in de „*Elementare Mechanik*” van Hamel.

SAMENVATTING.

1. De theoretische mechanica is een belangrijke factor in de natuurwetenschappelijke propaedeuse, en kan niet als afzonderlijk leervak gemist worden, zonder dat deze propaedeuse aanmerkelijke schade lijdt.

2. Opdat de mechanica haar rol in de natuurwetenschappelijke propaedeuse zoo goed mogelijk zal vervullen, is noodig, dat hare ontwikkeling in de richting van kennis der werktuigen naar bewegingsleer, die reeds gedurende geruimen tijd merkbaar is¹⁾, verder ga.

3. Daartoe is voorts noodzakelijk, dat de wijze van behandeling radicaal worde herzien, en dat de zeer grove fouten, die haar blijkens de meest gebruikte leerboeken aankleven, voortaan worden vermeden.

¹⁾ Onder de onderwerpen, behandeld in den vierden druk der *Gronden der Werktuigkunde* van Van de Sande Bakhuyzen (1891) treft men aan: rad met heugel, verbindingsstangen, hefboom, kruk, getande raderen met afwisselende beweging, excentrieken, cilinders met duimen, krabbelraderen, pal en palrad, échappementen, koppeling met getande schijven, koppeling met klauw, enz.

BOEKBESPREKING.

Gustave Verriest, Cours de mathématiques générales à l'usage des étudiants en sciences naturelles.

Leuven, Éditions Universitas, Groningen, P. Noordhoff, 1923—1925.

Dit werk is blijkens het voorbericht bestemd voor studenten in de natuurkundige wetenschappen, voornamelijk voor kandidaten in de scheikunde. Het tracht op eenvoudige en bevattelijke wijze eene inleiding in de voor deze categorie van studenten benoodigde wiskunde te geven. In het eerste deel worden behandeld reken- en meetkundige reeksen, logarithmen, de beginselen der differentiaalrekening (met reeksontwikkelingen, onbepaalde vormen, extremen) en die der analytische meetkunde van het platte vlak (hoofdzakelijk kegelsneden en poolcoördinaten) in het tweede deel komen ter sprake: iets over vectoren, beginselen van de analytische meetkunde van de ruimte, de elementaire integraalrekening en iets (zeer weinig) over differentiaalvergelijkingen, terwijl twee hoofdstukken aan natuurkundige toepassingen zijn gewijd, n.l. aan energie en entropie en aan potentiaal (en thermodynamische potentiaal).

De behandeling is *zeer duidelijk en correct*, en de schrijver geeft uitvoerige toelichtingen, zonder tot breedsprakigheid te vervallen. Aardig gekozen voorbeelden dragen veel tot verduidelijking bij.

Het aantal werken van dit type is niet groot; ik meen dan ook, dat het ook aan de Nederlandsche studenten in de scheikunde, biologie en medicijnen van groot nut kan wezen, terwijl het mij ook geschikt voorkomt voor personen die kennis wenschen te nemen van de wiskundige behandelingswijze der economie. Mij dunkt, dat het werk aan bruikbaarheid gewonnen zou hebben als er iets meer over waarschijnlijkheidsrekening in stond (frequentiekrommen e. d.; het bevat alleen een appendix over de methode der kleinste kwadraten), het feit, dat het eigenlijk in de eerste plaats voor chemici bestemd is, verklaart, dat dit niet het geval is. Het heeft mij echter ten zeerste verbaasd, dat de oppervlakken zoo vluchtig behandeld zijn: onderwerpen als binodale en spinodale lijn, plooi punten, e. d. die van zoo bijzonder groot belang voor den chemicus zijn, ontbreken geheel.

Misschien komt dit, doordat deze onderwerpen in België (de schrijver is hoogleeraar te Leuven) niet zoo in het brandpunt der belangstelling staan als te onzent.

De beide deelen zijn typografisch keurig verzorgd, en een register verhoogt hun bruikbaarheid zeer. J. H. S.

Lagere Algebra door *P. Wijdenes*. Deel I. De algebraïsche grootheden en hare bewerkingen. Tweede druk. Groningen, P. Noordhoff, 1925.

De leerboeken van den heer Wijdenes kenmerken zich door een vlótte, heldere schrijfwijze, door een origineelen, menigmaal met taaie traditie brekenden opzet en door een onvermoeid streven, het onderwijs in de elementaire wiskunde in ons land te vrijwaren voor de versteening, die het nog steeds in niet onbedenkelijke mate bedreigt. Door deze eigenschappen oefenen ze een onmiskenbaren en, naar mijne meening, heilzamen invloed uit op het middelbaar en gymasiaal onderwijs en op de wiskundige ontwikkeling van allen, die voor de acte L. O. studeeren of zich op de studie voor de acte KI voorbereiden. Zij zijn bovendien van groote waarde voor den beginnenden leeraar in wiskundige vakken, die vaak vreemd staat tegenover die deelen van zijn vak, die hij te onderwijzen zal hebben.

Met genoegen voldoe ik daarom aan het verzoek der redactie, om het verschijnen van een herdruk aan te kondigen van het eerste deel van het nu reeds algemeen bekende werk *Lagere Algebra*. Het aantrekkelijke boek is in hoofdzaak onveranderd gebleven; slechts zijn verschillende onnauwkeurigheden en minder juiste uitdrukkingen, die den eersten druk eenigermate ontsierden, thans verbeterd, waardoor de waarde van het werk nog is verhoogd.

De nieuwe uitgave, die binnenkort door een herdruk van het tweede deel zal worden gevolgd, zal ongetwijfeld weer voor velen een betrouwbare gids zijn bij de studie der lagere algebra.

E. J. Dijksterhuis.

DE LOODRECHTE STAND VAN LIJN EN VLAKE

DOOR

B. COSTER,

In jaargang I van dit Bijvoegsel wordt op blz. 101 e. v. het probleem van den „Loodrechten Stand” uitvoerig behandeld door den heer Ir. D. J. KRUYTBOSCH. Daar dit probleem ook mij meermalen heeft beziggehouden en ik hierbij tot vrijwel dezelfde uitkomsten was gekomen als de heer KRUYTBOSCH, kan ik me bepalen tot een kleine toevoeging aan zijn betoog. Want hoe goed zijn artikel ook is, ik heb bij de gegeven bewijzen het systeem gemist, dat daarbij toch zoo uitstekend te volgen is.

Demonstreeren we dit aan nevenstaande figuur (N^o. 3 uit het artikel van den heer KRUYTBOSCH).

Er moet bewezen worden dat de lijnen AB en BE loodrecht op elkaar staan. Gaan we nu eerst de middelen na, waarover we in de planimetrie beschikken om aan te toonen.

dat twee gegeven lijnen loodrecht op elkaar staan. Die middelen zijn achtereenvolgens:

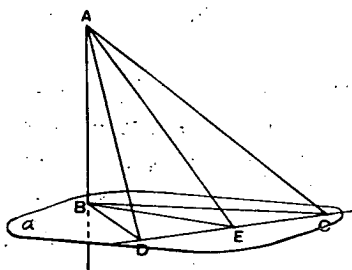
10. Tracht te bewijzen, dat de hoek gevormd door die lijnen, gelijk is aan zijn supplement.

20. Neem een punt op het eene been van den hoek en tracht aan te toonen, dat de kortste verbindingslijn van dit punt en het andere been samenvalt met het eerste been.

3^o. Neem op elk der beide beenen een punt, verbind die twee punten en tracht aan te toonen, met de bekende zwaartelijnsstelling, dat de gevonden driehoek rechthoekig is.

4^o. Tracht hetzelfde bewijs te geven met het omgekeerde van de stelling van PYTHAGORAS.

Gaan we nu de diverse bewijzen na in het licht dezer verschillende bewijsmethoden.



De eerste methode komt neer op het bewijs van de gelijkheid van twee hoeken. Daartoe kunnen we in het algemeen diverse wegen volgen, waarvan er echter hier, wijl de beide hoeken één been gemeen hebben, practisch maar één in aanmerking komt, nl. de methode der congruentie. Zoowel het bewijs van EUCLIDES als dat van CAUCHY is op deze methode gebaseerd.

De tweede methode berust op het zeer belangrijke stel stellingen, dat handelt over de verbindingslijnen van een punt en een rechte. Bedoelde stellingen luiden:

Voor de figuur gevormd door een rechte en een punt buiten die rechte van waaruit men een loodlijn en verschillende schuine lijnen naar die rechte trekt, gelden de volgende eigenschappen:

- a. de loodlijn is korter dan elke schuine lijn.
- b. twee schuine lijnen, die hun voetpunt even ver van het voetpunt van de loodlijn hebben, zijn gelijk.
- c. een schuine lijn is grooter, naarmate het voetpunt verder van het voetpunt van de loodlijn is verwijderd.

(Zie o.a. Wijdenes en De Lange „Vlakke Meetkunde” 1^e deel, 7^e druk, blz. 38).

Uit deze stellingen volgt onmiddellijk, dat de loodlijn onder alle verbindingslijnen is „eenig in z'n soort”. Alle andere verbindingslijnen zijn voor wat betreft hun lengte „gepaard.” Het omgekeerde geldt natuurlijk ook. Welnu, op die omgekeerden berust het indirecte bewijs, dat de heer KRUYTBOSCH overnam van den heer WIJDENES (zie blz. 108 van het artikel).

Op de derde methode, die van de zwaartelijnstelling in den rechthoekigen driehoek, berust het bewijs van den heer VISSCHERS (blz. 102).

De vierde methode, die van het omgekeerde van de stelling van PYTHAGORAS, past, zooals de heer KRUYTBOSCH zeer juist opmerkt in haar meest algemeene gedaante tweemaal het theorema van STEWART toe, nl. op de $\triangle ADC$ en BDC .

Nu is echter, door de lijn CD op een bijzondere wijze te trekken, bedoeld bewijs te vereenvoudigen. En dit wel langs twee verschillende wegen:

1^o. Kan men er voor zorgen, dat de beide genoemde driehoeken een bijzondere gedaante verkrijgen en wel of een *recht-hoekige* of een *gelijkbeenige*. De stelling van STEWART vereenvoudigt zich dan van den bekenden vorm $qa^2 + pb^2 = c(x^2 + pq)$

tot de veel eenvoudiger vormen van het theorema van PYTHAGORAS in den rechthoekigen of van de betrekking $x^2 = a^2 - pq$ in den gelijkbeenigen driehoek. Beide vereenvoudigingen geeft de heer KRUYTBOSCH op blz. 104 van zijn artikel.

2^o. Kan men trachten driehoeken te doen ontstaan waarin de lijnen AE en BE bekende merkwaardige lijnen zijn, waardoor niet de formule van STEWART, doch een eenvoudiger formule gebruikt kan worden. Voor de hand ligt, er *medianen* of *hoogtelijnen* van te maken. LEGENDRE maakt er medianen van en vervangt zoo de betrekking van STEWART door de eenvoudige mediaanbetrekking $a^2 + b^2 = 2\{m_c^2 + (\frac{1}{2}c)^2\}$. Welnu, een nog eenvoudiger bewijs, dat den heer KRUYTBOSCH ontgaan is, krijgt men door er hoogtelijnen van te maken. Voor het bewijs is dan voldoende niet anders dan de stelling van PYTHAGORAS.

Ten eerste bewijzen we, dat als we in vlak α de lijn CD loodrecht op AE trekken, CD ook loodrecht op BE zal staan.

Immers we krijgen:

$$\begin{aligned} EC^2 - ED^2 &= AC^2 - AD^2 \\ &= (AB^2 + BC^2) - (AB^2 + BD^2) \\ &= BC^2 - BD^2. \end{aligned}$$

Dus $CD \perp BE$.

In $\triangle ADC$ is dus AE hoogtelijn en in $\triangle BDC$ is BE hoogtelijn. Dat nu $AE^2 = AB^2 + BE^2$, dus dat $AB \perp BE$ is, blijkt als volgt:

$$\begin{aligned} AE^2 &= AC^2 - EC^2 \\ &= AB^2 + BC^2 - EC^2 \\ &= AB^2 + BE^2 + EC^2 - EC^2 \\ &= AB^2 + BE^2. \end{aligned} \quad \text{Q. E. D.}$$

Of nog andere vereenvoudigingen van het bewijs met de stelling van STEWART mogelijk zijn, betwijfel ik. In elk geval lijkt het mij wel de moeite waard er nog eens naar te zoeken, evenals naar eventueel andere bewijsmethoden voor de stelling in quaestie.

Verschenen:

BEKNOPTTE STEREOMETRIE

DOOR

P. WIJDENES.

Groot 90 bladz. met 91 fraaie figuren.

Prijs geb. f 1.50.

Allen, die belang stellen in deze mooie uitgave, wordt verzocht, een pres.-ex. aan te vragen aan den uitgever of aan den schrijver.

Zoo juist verscheen:

BEKNOPTTE ANALYTISCHE MEETKUNDE

DOOR

Prof. Dr. J. G. RUTGERS.

A. HET PLATTE VLAK

98 figuren en 225 vraagst. m. antw.

B. DE RUIMTE

40 figuren en 130 vraagst. m. antw.

Prijs geb. f 9.00.

Voor int. N. T. v. W. en Chr. Huygens tot 1 Jan. 1926 f 8.00.

Verschenen:

VRAAGSTUKKEN OVER DIFFERENTIAAL- EN INTEGRAALREKENING EN OVER ANALYTISCHE- EN BESCHRIJVENDE MEETKUNDE, IN HET BIJZONDER MET HET OOG OP HET EXAMEN WISKUNDE KV

DOOR

Prof. Dr. F. SCHUH.

EERSTE DEEL A:

Vraagstukken over Differentiaalrekening met volledige aanwijzingen
ter oplossing.

Prijs gec. f 8.00.

UITGAVEN VAN P. NOORDHOFF TE GRONINGEN.

Zoo juist verscheen:

Logarithmen-, Rente- en Discontotafels.

UITGAVE E

van NOORDHOFF's LOG. EN RENTETAFELS

door

P. WIJDENES en Dr. P. G. v/d. VLIET.

Prijs gec. met Hulpboekje f 3.25. Hulpboekje afzonderlijk f 0.50.

Dezer dagen verschijnt:

Vraagstukken over Theoretische Mechanica,

IN HET BIJZONDER MET HET OOG OP
HET CANDIDAATSEXAMEN TE DELFT

DOOR

Prof. Dr. F. SCHUH en Ir. J. C. N. GRAAFLAND E. I.

EERSTE DEEL:

Vraagstukken over de Dynamica van het Materieele Punt en van twee
of meer Materieele Punten, met volledige aanwijzingen ter oplossing.

MET 10 FIGUREN.

Prijs f 8.50, geb. f 9.50.

Verschenen:

Noordhoff's ¹ Verzameling van Wiskundige Werken:

No. 11

Leerboek der Beschrijvende Meetkunde

door

Prof. H. J. v. VEEN,

DEEL I

PROJECTIEMETHODEN, AANHANGSEL (KEGELSNEDEN)

223 blz. en een atlas met 273 fig.

Prijs geb. met atlas f 6.90.

UITGAVEN VAN P. NOORDHOFF TE GRONINGEN.