

BIJVOEGSEL

VAN HET NIEUW TIJDSCHRIFT

□ □ VOOR WISKUNDE □ □

GEWIJD AAN ONDERWIJSBELANGEN

ONDER LEIDING VAN

J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

MET MEDEWERKING VAN

Dr. H. J. E. BETH
DEVENTER

Dr. E. J. DIJKSTERHUIS
OISTERWIJK

Dr. B. P. HAALMEIJER
AMSTERDAM

Dr. D. J. E. SCHREK
UTRECHT

Dr. P. DE VAERE
BRUSSEL

Dr. D. P. A. VERRIJP
ARNHEM

2e JAARGANG 1925/26, Nr. 1



P. NOORDHOFF — GRONINGEN

Het Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde verschijnt in zes tweemaandelijksche afleveringen, samen 10 à 12 vel druks. Prijs *f* 3.— per jaargang. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6.—) of op „Christiaan Huygens” (*f* 8.—) zijn ingeteekend, betalen *f* 2.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam, Saxen-Weimarlaan 46; Tel. 28341. Aangeteekende zendingen met bijvoeging: „Bijkantoor Saxen-Weimarlaan 48”.

Het honorarium voor geplaatste artikelen bedraagt *f* 20.— per vel.

De prijs per 25 overdrukken of gedeelten van 25 overdrukken bedraagt *f* 3,50 per vel druks *in het vel gedrukt*. Gedeelten van een vel worden als een geheel vel berekend. Worden de overdrukken buiten het vel verlangd, dan wordt voor het afzonderlijk drukken bovendien *f* 6.— per vel druks in rekening gebracht.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

INHOUD.

Dr. D. P. A. VERRIJP, De beteekenis van het onderwijs in de wiskunde voor de B-leerlingen van het Gymnasium	1—35
Boekbespreking	36—48
J. H. S., [Oude Rekenboeken]	48

 Verschenen de 17^{de} druk van Wijdenes Algebra voor M. U. L. O. I.

 Ter perse de 5^{de} druk van Wijdenes Algebraïsche Vraagstukken II.

DE BETEKENIS VAN HET ONDERWIJS IN DE WISKUNDE VOOR DE B-LEERLINGEN VAN HET GYMNASIUM

DOOR

Dr. D. P. A. VERRIJP.

(Voordracht gehouden op de Vergadering van L. i. W. e. N. a. G. e. L.
op 28 Augustus 1925 te Amsterdam).

In het jaar 1921 heb ik op de algemeene vergadering van het Genootschap een voordracht gehouden over de beteekenis van het onderwijs in de wiskunde voor de A-leerlingen. Daar ik in de sedert verloopen vier jaar ten opzichte van deze materie zeker niet van meening veranderd ben, integendeel, vooral in verband met het sociaal, economisch en financieel aspect, dat ons land tegenwoordig te zien geeft, zoo versterkt ben in die meening, dat ik besloten ben binnen kort die voordracht nog eens — op nieuw bewerkt — te laten verschijnen, spreekt het wel van zelf, dat ik het onderwijs in de wiskunde óók — ik moest eigenlijk zeggen in 't bijzonder — voor de B-leerlingen en als intelligentie-criterium en als paedagogisch en methodisch apparaat onmisbaar vind.

Maar de beteekenis van dit onderwijs voor deze leerlingen is hiermede niet uit. Ze heeft ook — ik laat op 't oogenblik daar, of men die beteekenis hooger of minder hoog wil aanslaan dan de zooeven genoemde — een practischen kant. Als ik in de vierde klasse mij eens in een paar lessen over de philosophie van mijn vak laat gaan, dan kan ik niet nalaten den zin uit te spreken: Een wetenschap staat — qua wetenschap — des te hooger, naarmate ze meer voor wiskundige behandeling vatbaar is. Welnu, een B-leerling — hij moge mathematicus, physicus, chemicus, bioloog, medicus, physioloog (dus medicus-bioloog) psycholoog of econoom (men zou dezen den wetenschappelijken jurist kunnen noemen) willen worden — zal een wiskundige

voorbereiding moeten genieten, die hem in staat stelt niet alleen terstond de universitaire lessen in zijn vak te begrijpen, maar ook werken te lezen of eigen onderzoekingen te doen, waarbij de wetenschap van maat en getal onontbeerlijk is.

De oud-B-gymnasiast heeft hier zooveel voor boven den oud-H.B.-scholier. De gymnasiast krijgt een kant van de wiskunde te zien, die den H.B.-scholier onthouden wordt. En nu kan men zeggen, dat, als de laatste meer wiskunde noodig heeft dan hij geleerd heeft en voldoende intelligentie bezit, hij zich het ontbrekende wel zal kunnen eigen maken. Ik geloof, dat men zich hierin niet te veel illusies moet maken; men komt later, door welke oorzaak of welke reden dan ook, er zelden toe om schoolsche zaken te leeren. Dat heeft ieder voor zich in zijn eigen leven wel ondervonden.

Het is daarom, dat ik — en passant — nog eens even op de anomalie wil wijzen, die een vijfjarige H. B. S. met een zesjarig gymnasium voor de wet gelijkstelt. Te ontwikkelen, hoe hierin meer eenheid te brengen ware of te wijzen op nog meer gevaren, die het Gymnasium maar steeds dreigen, ligt op het oogenblik niet op het terrein mijner voordracht, doch ik kan niet nalaten den wensch uit te spreken, dat er nog eens iemand zal komen, die, met de noodige macht bekleed en in 't bezit van diep maatschappelijk inzicht, ons geheele onderwijs in al zijn geledingen passend maakt voor het werkelijke heil van het Nederlandsche volk.

De eerste vraag, die zich thans voordoet, is, of er wettelijke bepalingen of in ander opzicht aanwijzingen bestaan, die zeggen, hoe het door mij hier bedoelde onderwijs valt in te richten of wel, hoe men zich dat onderwijs wensch.

Als wettelijke bepalingen bezitten we het Leerplan (het K. B. van 7 Juni 1919) benevens het Eindexamen-programma (het K. B. van 26 Mei 1922). Beide sommen eenvoudig de ons allen bekende onderwerpen op, waarbij er ons aan herinnerd wordt, dat de analytische meetkunde wel, maar de infinitesimaalrekening niet tot het laatste programma behoort.

Semi-wettelijk is de toelichting van den Inspecteur der gymnasia, voorkomende in het Weekblad van 8 October 1919. Het komt mij voor, dat het wenschelijk is deze toelichting — voor

zoover ze hier van belang is — met het oog op hetgeen ik er wel en hetgeen ik er niet mee eens ben, nog eens te laten hooren:

Het programma, uitsluitend voor de B-leerlingen bestemd, heeft eenige wijziging ondergaan. Niet bij name genoemd zijn de onbepaalde vergelijkingen van den eersten graad, waarmede tot dusver de B's ongeveer twee maanden bezig gehouden; de daarin onmisbare kennis kan bij de analytische meetkunde aangebracht worden, wat weinig tijd behoeft te kosten. Vervallen is de bolvormige trigonometrie, die uit een practisch oogpunt alleen voor de a.s. sterrekundigen van belang is. De daarin uit een theoretisch oogpunt wenschelijke kennis kan bij het onderwijs in de stereometrie, voor zoover het in kl. VI aan de B's afzonderlijk gegeven wordt, behandeld worden. De redactie „beginselen der vlakke coördinatenleer” is gewijzigd in „analytische meetkunde in het platte vlak tot en met de kegelsneden” een meer nauwkeurige omschrijving, die noodzakelijk is geworden, omdat het in de bedoeling ligt dit onderdeel in het eindexamen-programma de plaats te doen innemen van de bolvormige trigonometrie, die als vak uit het leer- en eindexamen-programma verdwijnt. Toegevoegd worden „de beginselen der infinitesimaalrekening” een toevoeging, die gewenscht is geworden met het oog op de uitbreiding, die het onderwijs in de Natuurkunde behoort te ondergaan en gelet op de behoeften der a.s. chemici en biologen en van een groot aantal medici, die een speciale studierichting kiezen. De infinitesimaalrekening komt hun veel te pas, maar juist de grondbeginselen geven hun vaak groote moeilijkheden, die beter onder leiding van den gymnasialen docent worden overwonnen dan later bij zelfstandige studie. In dit onderdeel is de behandeling van een uiterst beperkt programma gewenscht. Daarom behooren de beginselen der infinitesimaalrekening niet in het eindexamenprogramma te worden opgenomen.

Wat verdere aanwijzingen betreft, hoe men zich dat onderwijs wenscht, komt in volgorde van 't verschijnen in aanmerking: ten eerste het plan, dat door dr. Hooykaas, dr. Blaauw en mij op de Rectorenvergadering van 3 November 1917 is verdedigd en dat o.a. als onderwerpen van behandeling noemt: de onbepaalde vergelijkingen, de bolvormige trigonometrie, de beginselen der vlakke coördinatenleer, de permutaties en combinaties en de binomiaalformule, terwijl voor de B's ook de mogelijkheid werd

genoemd om behalve onderwijs in beschrijvende meetkunde nog dat in een ander onderdeel der wiskunde (bedoeld was natuurlijk in hoofdzaak de infinitesimaalrekening) te ontvangen.

Vervolgens verscheen in 1918 een 134 bladzijden groot rapport in opdracht van het Genootschap van Leeraren aan Nederlandsche Gymnasiën over Leerplan en Eindexamen van het Gymnasium, waarin dr. W. Bouwman zeer uitvoerig (12 blz.) is omtrent zijn wenschen ten opzichte van de wiskunde. Het spreekt wel van-zelf, dat ik die volle 12 bladzijden hier niet kan overnemen. Dit is echter met 't oog op het onderwerp mijner voordracht ook niet noodig. In de eerste plaats vermeld ik een zin, dien ik van veel belang acht: „Onvermijdelijk zal in het ontworpen programma tamelijk veel voorkomen, wat anderen anders zullen wenschen. Daarom moeten alleen de hoofdlijnen worden aangegeven. Dan kan het groote voordeel van het gymasiaal onderwijs behouden blijven, dat iedere leeraar op die zaken den nadruk kan leggen, die hij de voornaamste vindt en waardoor hij het wiskundig inzicht van zijn leerlingen het best meent te kunnen ontwikkelen.” Verder komt in zijn rapport een verdediging voor van de boldriehoeksmeting: hij noemt de toepassing in de cosmografie, het nut bij verdere wiskundige studie, het betere overzicht over de vlakke trigonometrie, wanneer voortdurend op overeenkomst en verschil tusschen beide deelen gewezen wordt. Door de formules nauwkeurig te analyseeren kan men den leerling de gewoonte bijbrengen alles uit de formules te halen, wat er in zit. En hoewel hij zich wat anders uitdrukt, zou ik zeggen, dat te noemen is de grootere algemeenheid van de boldriehoeksmeting. Verdedigd wordt de analytische meetkunde, tot op zekere hoogte de onbepaalde vergelijkingen, facultatief permutaties, combinaties rekenkundige reeksen van hoogere orde, binomium, kansrekening, beschrijvende meetkunde. En wat nu de infinitesimaalrekening betreft, komt daarin een beschouwing voor, die, op de strofe omtrent het eindexamen na, conform is met die, welke in de toelichting van den Inspecteur voorkomt. Hij sluit die beschouwing echter met een zin, dien ik niet wil nalaten te vermelden: „De hoofdzaak is echter, dat men meer verband kan leggen tusschen verschillende gedeelten van de wiskunde en dat de wiskundige ontwikkeling daardoor beter kan worden.” Met een enkel woord roert hij nog aan de behandeling van determinanten,

waarvoor in den regel bezwaarlijk tijd zal kunnen gevonden worden en een meetkundige behandeling van de kegelsneden, waarin hij eenig heil ziet voor de vlakke meetkunde.

Daarna is, na de invoering van het Nieuwe Leerplan, in het Weekblad van 3 Maart 1920 verschenen een stukje van dr. J. Droste, getiteld: „De omvang der leerstof bij het onderwijs in de differentiaal- en integraalrekening”, als resultaat van een bespreking door eenige leeraren te Leiden gehouden. De heer Droste verdeelt de stof in 4 deelen A, B, C en D:

A. Afgeleide functie (snelheid, raaklijn). Maxima en minima. De notatie $\frac{dy}{dx}$. Bepaalde en onbepaalde integraal. Veeltermen. x^{-n} .

B. Tweede (en hoogere) afgeleide (versnelling, het hol en bol zijn van kromme lijnen, maximum of minimum). Breuken. $\sin x$ en $\cos x$. Functies van $ax + b$, vooral $\sin(ax + b)$ (trillingen).

C. Vierkantswortel uit een veelterm. $x^{\frac{p}{q}}$. Logarithmen. e^x . Cyclo-metrische functies. Partieele integratie. Substitutie van $ax + b$ als nieuwe veranderlijke in een integraal. D. Invoering van nieuwe veranderlijken in een integraal. Differentieeren van functies van functies. Implicite functies. Functies van meer veranderlijken. Oneindige reeksen. A acht hij onmisbaar, B en C komen voor behandeling op school in aanmerking, D acht hij voor de school minder geschikt.

In het rapport van de Wiskunde-commissie van L. i. W. e. N. a. G. e. L. van Juli 1921, dat door wijlen dr. J. H. van der Harst (die destijds als secretaris fungeerde) zoo voortreffelijk in elkaar gezet was, komt de volgende zin voor: Voor de vakken analytische meetkunde en infinitesimaalrekening stelt zij (de Commissie) voor: een mondeling examen van 30 minuten, waarbij het den leeraar vrij moet staan, in welke verhouding hij dezen tijd over de genoemde vakken verdeelt; dit is gewenscht om een zoo nauw mogelijke aansluiting van het examen bij het onderwijs te verkrijgen, daar dit aanvankelijk, waar nog weinig ervaring bestaat, en wellicht ook op den duur, bij verschillend samengestelde B-afdeelingen wel van jaar tot jaar eenige verschillen zal vertoonen.

In het Weekblad van 26 Maart 1924 komt het verslag voor van de voordracht op de algemeene vergadering van L. i. W. e. N. a. G. e. L. te Apeldoorn gehouden door dr. J. H. M. Falkenhagen;

getiteld: Analytische Meetkunde en Differentiaalrekening als leervak op het Gymnasium. Uit dit verslag neem ik een paar zinnen over: „Spreker begint met op te merken, dat naar zijn meening het onderwijs in de analytische meetkunde uit een paedagogisch (bedoelt hij misschien ook practisch?) oogpunt bezien niet zooveel nut heeft.” „Dat het voor den beginner zoo moeilijke inleven in de methode der analytische meetkunde reeds op het gymnasium geschieden kan, waar meer gelegenheid is tot persoonlijk contact tusschen docent en leerling dan op de Universiteit, acht Spreker echter een zoo groot voordeel, dat hij met het oog daarop voor het behoud is van de analytische meetkunde als leervak.” „Overgaande tot de infinitesimaalrekening deelt Spreker in de eerste plaats als zijn ervaring mede, dat de leerlingen daarmede minder moeite hebben dan met de analytische meetkunde. De leerlingen krijgen met de infinitesimaalrekening middelen in de hand, die zij op velerlei terrein kunnen toepassen en waarmede zij resultaten kunnen bereiken, die zij door redeneeringen ad hoc onmogelijk zouden kunnen verkrijgen.”

Ik zou nog kunnen vermelden, dat op een vergadering van wiskunde-leeraren, die annex aan het Nederlandsch Natuur- en Geneeskundig Congres in de Paaschvacantie van 1921 te Utrecht gehouden werd, dr. D. Coelingh de invoering van de beginselen der differentiaal- en integraalrekening op de *middelbare* scholen verdedigde, maar dat de velen, die aan het debat deelnamen, hierin niet eensgezind bleken, zoodat de vergadering weinig resultaat bereikte.

En mij beperkende tot hetgeen in Nederland is tot stand gebracht, zou ik kunnen wijzen op een aantal leerboeken, waarvan er eenige goed, andere minder goed zijn. De namen wil ik niet noemen, omdat ik het debat van straks liever niet op zijwegen zou willen laten uitloopen.

Mag ik mij echter wel beperken tot hetgeen Nederland in deze dingen te zien geeft? Zie, wanneer ik het Buitenland er in wilde betrekken, dan zou ik met deze inleiding van mijn voordracht misschien in geen uren klaar zijn. Maar ik wil toch één uitzondering maken voor een stuk, dat ik voor vier weken in het Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde, gewijd aan onderwijsbelangen, las. Het is getiteld: Der Functionsbegriff in den höheren Schulen Deutschlands von W. Lietzmann in Göttingen¹⁾, en schijnt (wat mij niet bekend was) te Amsterdam

als voordracht te zijn gehouden. Daarin komt zooveel voor, dat en met mijn eigen ideeën strookt en door mij ook reeds, zoolang het nieuwe leerplan bestaat, voor een zeer groot deel wordt toegepast, dat ik een oogenblik twijfelde, of ik door de volgende beschouwingen te houden, U wel wat nieuws zou meedeelen. Evenwel, ik heb gemeend, dat 't om verschillende redenen niet kwaad is om, wat men meent goed te zijn, in meer dan één „Tonart” te zeggen.

Een veel, hoewel niet alles, beheerschende vraag in de wiskunde, zoowel voor de A- als voor de B-leerlingen, is: Welke strengheid moet bij de beschouwingen in acht worden genomen? Het is een vraag, waarover wij, wiskunde-docenten, het helaas niet eens zijn. Het is een vraag, die in L. i. W. e. N. a. G. e. L., dank zij den prettigen geest, die ons beheerscht, altijd op vreedzame wijze onder de oogen is gezien, maar die ik, omdat ze bij alle paedagogisch-wiskundige kwesties om den hoek komt gluren, ook wel eens op een de geesten irriterende wijze heb zien werken.

Het standpunt, dat ik inneem — de tegenstanders noemen het misschien wel eens, maar dan ten onrechte, het conservatieve, ouderwetsche of hoe ook — is dit, dat men, zoover als mogelijk is, in verband met de bevattelijkheid der op onze scholen thuis-behoorende leerlingen, moet gaan om hen de wiskunde te doen beschouwen als een model-wetenschap, wat strengheid betreft. Dat wij de uiterste strengheid dan toch bij lange na niet bereiken, vind ik geen bezwaar. Als wij de leerlingen er niet opmerkzaam op maken, bemerkt niemand het. Natuurlijk niet. Het zijn de groote mathematische geesten van den lateren tijd, die de onvolkomenheden hebben aangevuld en verbeterd. Moeten wij dan daarom, omdat wij *van hen* dit alles weten, nu maar zeggen: kijk, de volmaakte strengheid bereiken wij toch niet, omdat die op onze scholen niet thuis behoort en dus zullen we eensdeels ons behelpen met een soort „Anschauung”, anderdeels vertel ik jelui niet, wat ik je met minder strengheid wel zou kunnen vertellen en dus moet je je maar met weinig behelpen!? Ik geloof

¹⁾ Dr. Schrek wijst op het aardige, ook voor leeraren aan te bevelen boekje: W. Lietzmann, Funktion und Grafische Darstellung, 190 blz. Breslau, Hirt, 1925.

niet, dat wij daaraan goed doen. Wil ons wiskunde-onderwijs niet op zichzelf staan, wil het èn paedagogische èn methodische èn practische beteekenis hebben, dan geloof ik met mijn standpunt — en ik bemerk zoo nu en dan, dat ik toch nog vaak in goed gezelschap ben — het meeste heil te kunnen stichten.

Laat ik een belangrijk voorbeeld noemen: de getallenleer. In de eerste klasse (sommigen kijken misschien raar op en denken, hoe durf je!) maak ik den leerlingen al dadelijk duidelijk 't onderscheid tusschen ordinaal en cardinaal getal; dit blijkt hun bij het bewijs (de leerlingen vóór me zijn mijn eerste soort van „dingen”, waaraan ik de tweede soort van „dingen” met een bepaalde volgorde, nl. de woorden één, twee, drie enz. toeken), dat een getal onafhankelijk is van de volgorde, waarin de eenheden (of die eerste soort van dingen) worden geteld. Voeg ik dan daarbij de definities der rekenkundige bewerkingen en verder de bewijzen van eenige eigenschappen, dan maak ik hun alras duidelijk, dat de rekenkunde der natuurlijke getallen berust op het getalbegrip en op eenige andere bepalingen. Vraag ik de zaak een volgenden keer na, dan kan ik U verzekeren, dat een niet al te domme leerling ze mij behoorlijk kan weergeven. Een mathematicus „pur sang” zegt nu misschien wel: je hebt onder je redeneering zooveel binnengesmokkeld, dat je niet bewezen hebt, dat mij je redeneering niet veel waard is. Ja, voor hem dan met zijn vele kennis (en hij denkt daarbij wellicht aan Dedekind's Was sind und was sollen die Zahlen), maar voor de leerlingen is 't een „openbaring” geweest. Natuurlijk ga ik dan over tot het gebroken getal, dat ze op de lagere school al hebben zien invoeren, omdat ze bij de deeling daartoe kwamen. En zoo komt dan consequent doorpratende — ik bedoel aannemelijk makende — door aftrekking ook de definitie van het negatieve getal voor den dag. [Alleen zal men, om niet vervelend te worden, over een en ander wel eens vlug moeten heenloopen, maar ik schaam mij niet om hun dat ronduit te zeggen, evenals ik hun later (in de vierde klasse) ronduit zeg, dat het systeem van Hilbert meer dan twintig axioma's telt, terwijl wij er maar vijf, naar ons idee de meest aperte, genoemd hebben.] En zoo is 't, als men verderop te doen krijgt met het onmeetbaar getal. Gaat men uit van de opklimmende (a) reeks

0,3	0,33	0,333	...
0,4	0,34	0,334	...

en de afdalende (b)

waarvan het (pos.) verschil der overeenkomstige termen kleiner kan genomen worden dan welk positief getal ook (*c*), terwijl het meetbare getal $\frac{1}{2}$ steeds tusschen twee overeenkomstige termen in gelegen is (*d*), dan blijkt, dat ze $\frac{1}{2}$ tot limiet hebben (limiet voor leerlingen behoorlijk gedefinieerd). Nu definieer ik, nadat ik bemerk, dat t. o. van reeksen, die bij de vierkantsworteltrekking uit 2 ontstaan, zooals

1,4	1,41	1,414	
1,5	1,42	1,415	

a, *b* en *c* wel gezegd kunnen worden, maar *d* niet, d. w. z. dat tusschen twee overeenkomstige termen niet steeds een zelfde meetbaar getal ligt, een onmeetbaar getal als een *nieuw* getal, dat er wel steeds tusschen ligt, terwijl ik nu ook dit getal de limiet van elk dezer reeksen noem. Verder moet dan vermeld worden, dat, wil men de eigenschappen van onmeetbare getallen bewijzen, men ook eerst hunne bewerkingen moet gedefinieerd hebben. Nu zegt Schuh in zijn inaugureele rede van 1909, dat iemand, die een werkelijk juist inzicht in het wezen der irrationale getallen heeft, reeds een zeer belangrijken stap op het wiskundige terrein gedaan heeft en met de hoogere deelen der wiskunde niet veel moeite zal hebben en wanneer dan Schuh verder de verschillende definities van het onmeetbare getal de revue laat passeeren, dan weet ik, dat verschillende mijner collega's hieruit de conclusie trekken, dat het maar beter is van een schoolbehandeling van deze zaak totaal af te zien. Ik ben het hiermede niet eens. Ik trek uit de woorden van Schuh liever de conclusie, dat men het best doet voor onze leerlingen het bekende woord van Dedekind „Was beweisbar is, soll in der Wissenschaft nicht ohne Beweis geglaubt werden” te *populariseeren*, als ik 't zoo eens noemen mag ¹⁾.

¹⁾ Hoe men de leerlingen kan afschepen met de negatieve definitie, dat een irrationaal getal geen rationaal getal is, is mij onbegrijpelijk. Vooreerst involveert het begrip getal, vóórdat men de irrationalen behandelt, niet anders dan het rationaal getal: daarom heeft die definitie al geen zin; bovendien wat beteekent zoo'n definitie, als men zegt, wat het *niet* is: de leerlingen zouden de irrationalen misschien wel met imaginaireren kunnen verwarren. En dan ten slotte: hoe wil men bij een dergelijke zinloze definitie *aansluitende* bepalingen geven voor de bewerkingen met onmeetbare getallen?

Ik herhaal het omtrent de getallenleer gezegde nog eens in de hoogste klasse, als ik het gebouw sluit met de complexen. De leerlingen hebben dan leeren inzien, dat men telkens, als de zaak hokt, de klove overbruggt door een nieuwe aansluitende definitie.

A propos van de complexen. Er zijn leeraren, die deze op middelbare en gymnasiale scholen totaal zouden willen uitsluiten. Maar telkens zie ik de verrassing op de gezichten, wanneer ik, na het theorema van de Moivre behandeld te hebben, laat zien, dat de 5 vijfde wortels uit 't getal 1 *ineens* de formules voor de zijden en diagonalen van den ingeschreven regelmatigen 5- en 10-hoek leveren. En dan voelen ze het ook zoo aan, dat die complexe getallen heelemaal in het wiskundig gebouw thuis behooren.

Ik wil thans eenige oogenblikken een onderwerp aanroeren, waarvan het nut der behandeling op onze scholen wel eens betwijfeld is: het betreft de samengestelde-interestrekening. Ik behandel dit onderwerp al misschien van den aanvang van mijn leeraarsambt af met eenige voorliefde. Het is een practisch onderwerp, waarbij de leerlingen behoorlijk moeten nadenken en waarbij grafische voorstellingen niet weinig tot verheldering bijdragen¹⁾. Laat ik vooreerst eens een vraagstuk kiezen, dat

Een soort „benaderings”definitie te geven heeft ook geen zin. Men zegt dan evenmin wat 't irrationaal getal precies is.

Het onmeetbaar getal meetkundig te definiëren heeft een groot bezwaar. Men kan nl. meetkundig wel aantoonen, dat de „verhouding” van twee onderling onmeetbare lijnen zich in een oneindig voortlopende decimaalbreuk laat ontwikkelen; dat echter iedere oneindig voortlopende decimaalbreuk als de verhouding van twee lijnen is op te vatten laat zich niet bewijzen, maar kan slechts als axioma vastgesteld worden. Zonder dat, levert de meetkundige definitie niet alle irrationale getallen, maar slechts de verhoudingen van twee lijnen, waarvan de een uit de ander geconstrueerd kan worden. Ik zou hieraan nog verschillende opmerkingen kunnen toevoegen, wat ik echter niet zal doen. In elk geval blijkt, dat de meetkundige invoering der irrationale getallen is af te keuren. Het begrip is nu eenmaal niet van meetkundigen, maar van rekenkundigen aard en dient zonder toevoeging van een enkel axioma gedefinieerd te worden, al mag dan historisch misschien (stelling van Pythagoras) de meetkunde tot de invoering der irrationale getallen geleid hebben.

¹⁾ Ook Lietzmann noemt goede voorbeelden, waarbij grafische voorstellingen verhelderend werken. Het eenige *volledige* Nederlandsche algebra-leerboek, waarin grafieken als die van blz. 11 en 12 voorkomen is Wijdenes' Nieuwe Schoolalgebra (deel III).

opgegeven is op 't Eindex. H.B.S. in 1882: iemand bezit $f50.000$. Na twee jaren erft hij nog $f20.000$. Na hoeveel jaar kan hij $f90.000$ rijk zijn, als hij jaarlijks $f2500$ gebruikt voor zijn onderhoud. Rente 4% . Als antwoord staat in het eindexamen-opgavenboek van 1915, voor 't geval, dat de $f2500$ aan het einde van ieder jaar worden opgenomen, $38,85$ jaar. Hoe wordt in mijn les zoo'n vraagstuk opgelost? Stel, dat het gevraagde plaats heeft na x (geheel) $+ y (< 1)$ jaar, dan krijgt men na eenige herleiding op te lossen de vergelijking

$$(324 \times 1,04^{x-2} + 3125)(1 + 0,04 \times y) = 4500.$$

Lost men nu z op uit

$$324 \times 1,04^{z-2} + 3125 = 4500,$$

dan vindt men

$$z = 38, \dots,$$

waaruit men de conclusie afleidt, dat x hoogstens 38 kan zijn. $y = 0,254$ wordt dan gemakkelijk gevonden. Maar het blijkt bij substitutie, dat evengoed $x = 37$ en $x = 36$ kan zijn. Men vindt dan natuurlijk voor y steeds grooter wordende waarden. Licht men deze oplossing op het Tijd-Kapitaalstelsel grafisch toe, dan krijgt men fig. 1.

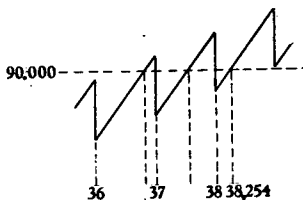


Fig. 1.

Het domme antwoord van het eindexamen-boek is de waarde van z , d.i. het snijpunt van de kromme, die door de onderste punten gaat met de lijn 90.000.

Neemt men nu eens het volgende vraagstuk, dat in een onzer leerboeken voorkomt: iemand bezit $f40.000$. Voor zijn onderhoud neemt hij aan het begin van ieder jaar, dadelijk te beginnen, $f2500$ van zijn kapitaal af. Het overschot zet hij elk jaar tegen $4\frac{1}{2}\%$ op interest. Na hoeveel jaar bezit hij slechts $f20.000$? Dit vraagstuk leidt tot de vergelijking

$$(200 - 65 \times 1,045^x)(1 + y \times 0,045) = 72.$$

Uit

$$200 - 65 \times 1,045^z = 72$$

volgt

$$z = 15, \dots$$

Nu kan men niet minder nemen dan $x = 16$. Alsdan vindt men (wat met de beteekenis van y in strijd is) $y = 1, \dots$. Conclusie: de f 20.000 valt in zoo'n sprong van f 2500 naar beneden, na 16 jaar. Grafisch heeft men hier:

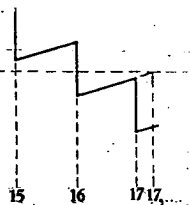


Fig. 2.

De schrijver van het leerboek geeft zelf als antwoord: na 17 jaar¹⁾. Een vraagstuk van samengestelde interestrekening, waarvan mij de oplossing in den loop der jaren in uiterlijk verschillende vorm wel drie keer door bankinstellingen is gevraagd, is het volgende: Welke rente wordt gemaakt van een obligatie uitgegeven à k %, rentende p %, terwijl per jaar $\frac{1}{n}$ wordt uitgeloot?

Oplossing. Stel, dat men x % rente maakt, dat n obligaties elk groot f 100 zijn uitgegeven, dat men die ook aanvankelijk *alle* heeft gekocht, dan ziet men jaarlijks één zijner obligaties uitloten. Neemt men, om 't vraagstuk een zoo eenvoudig mogelijke gedaante te geven, aan, dat de rente om 't jaar betaald wordt, dan geeft de som der contante waarden van de bedragen, die men jaarlijks ontvangt, de volgende vergelijking:

$$\frac{100 + np}{1,0x} + \frac{100 + (n-1)p}{1,0x^2} + \dots + \frac{100 + 2p}{1,0x^{n-1}} + \frac{100 + p}{1,0x^n} = n \times k.$$

Men heeft hier nu in het eerste lid een reeks, die als combinatie van een rekenkundige en een meetkundige reeks kan beschouwd worden. De vergelijking wordt op de ons allen bekende wijze herleid en levert b.v. voor $k = 97$, $p = 5$ en $n = 25$:

$$(900x - 97x^2 - 2000) \times 1,0x^{25} = 400(x - 5)$$

een vergelijking, die door benadering is op te lossen en dan voor x in 2 decimalen oplevert de waarde 5,35. Men merkt hier gemakkelijk op, dat bij de oplossing het gebied der waarschijnlijkheid betreden is, waarop ik straks nog terug kom. Men kan natuurlijk alleen dan op het gevonden percentage rekenen, zoo men bij veel (eigenlijk bij een ∞ aantal) dergelijke operaties

¹⁾ Een voorbeeld van een slechte methode van oplossen van een vraagstuk van sam. int. rek. vond ik ook een dezer dagen in een bekend advertentieblad. Het betrof het 3^e vrgst. Stelk. L. O. 1925. Daar werd een aantal termen $= x$ gesteld, verder van een aantal termen $= \frac{1}{3}x$ gesproken, terwijl men dan vindt $x = 17, \dots!$ enz.!

betrokken is. We hebben hier nu te doen gehad met een practisch voorbeeld van een vraagstuk, waar de oplossing door benadering geschiedt en aldus voor de leerlingen hoogst nuttig is.

Dit brengt mij vanzelf op het gebied „cijferen”. Men kan daarbij de leerlingen er niet genoeg opmerkzaam op maken, dat zij rekening hebben te houden met de nauwkeurigheid der getallen, die men heeft en die men verkrijgt. Zoo bemerkte ik eens van een jong medisch student, die de H. B. S. had doorlopen, dat hij met een serie gegevens, die *hoogstens* in 3 cijfers nauwkeurig waren, een logarithmische berekening uitvoerde met behulp van een vijfdecimalige tafel. En toen ik hem duidelijk maakte, hoe dwaas dit was, liet hij niet na mij mee te deelen, dat hem op school nimmer op zulke zaken gewezen was en ook, dat al zijn medestudenten evenzoo deden!

Ik mag niet nalaten hier te vermelden, dat in den laatsten tijd hoe langer hoe meer in zwang komt het gebruik van een rekenliniaal, in 't bijzonder voor vermenigvuldiging en deeling, maar ook voor andere bewerkingen. De vermenigvuldiging en deeling berust op

$$\log ab = \log a + \log b.$$

Een bewegelijke lat wordt langs een onbewegelijke verschoven. Beide zijn symmetrisch logarithmisch verdeeld. Echter staan bij de deelstrepen niet de logarithmen, maar de daarbij behorende getallen aangeteekend. De hier aangegeven stand van fig. 3 laat b.v. zien:

$$2 \times 4 = 8 \quad \text{of} \quad 8 : 4 = 2.$$

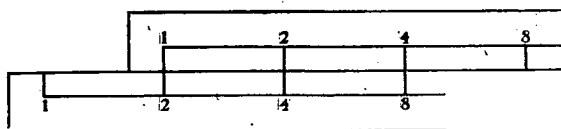


Fig. 3.

De rekenliniaal is verder ook dienstig voor kwadrateren en vierkantworteltrekken. Ze bevat verder sinus-, tangens- en logarithmenscalen. Ook andere machtsverheffingen, worteltrekkingen, berekeningen op electrisch gebied kunnen er mee worden uitgevoerd. [Als handleiding voor het gebruik bestaat „De rekenliniaal door W. J. Heijdeman”]. Het komt mij voor, dat men er alleen dan vlug en goed mee werkt, indien men zulke goede

oogen bezit, dat het gebruik van een loupe kan vermeden worden ¹⁾.

Lietzmann wijst bij 't noemen van de rekenliniaal nog op 't bestaan van twee boekjes van P. Luckey. Einführung in die Nomographie, n^o. 28 en n^o. 37 van de Mathematisch Physikalische Bibliothek (Teubner). Het bleek mij, dat n^o. 28 uitverkocht is ²⁾.

Ik kom nog even op de samengestelde interestrekening terug. Men kan met behulp van een sterftetafel den leerlingen nu ook het principe der levensverzekering duidelijk maken n.l.: uit de sterftetafel (of eigenlijk de tafel der levenden) afgeleid een tafel der op 0 jaar gereduceerde levens en daarmee de verplichtingen der levenden en der maatschappij equivalent gesteld. Ook hier komt weer de waarschijnlijkheid voor den dag.

¹⁾ Bij de discussies is door de H.H. dr. W. Middelberg, dr. D. J. E. Schrek en ir. W. H. Veldhuis het groote praktische nut van de rekenliniaal nader in 't licht gesteld. Dr. Middelberg beveelt de liniaal aan voor schoolgebruik bij scheikundige berekeningen. De nauwkeurigheid der gegevens is daar juist van de orde, als met de reken„lat” bereikt wordt (circa 1 : 1000). Behalve vlugheid en zekerheid, die ermede bereikt worden, is het een voordeel, dat men niet meer cijfers *kan* verkrijgen dan 3 à 4, evenveel als bij de gegevens. Nog een voordeel is het schatten (als regel) van de komma. Men is zoodoende gedwongen zich daarvan rekenschap te geven. De firma Gebr. Wichmann Berlin NW. 6, Karlstrasse 13, levert geschikte linialen van afwaschbaar carton voor R. M. 1,35 p. st.

Dr. Schrek beveelt aan het demonstratiemodel van 125 cm. lang (groot genoeg voor een klasse van ± 20 leerlingen). De prijs is R. M. 43. Een grooter model van 250 cm. is geschikt voor collegezalen. Deze modellen zijn bij genoemde firma eveneens verkrijgbaar. Aangeraden wordt een prospectus aan te vragen.

²⁾ Dr. Schrek wijst op het volgende soort nomographie voor de oplossing van vierkants- en kubische vergelijkingen:

De verg. $x^2 + px + q = 0$ worde vervangen door $y = x^2$ en $y + px + q = 0$. De abscissen van de snijpunten van deze beide lijnen geven de gevraagde wortels. Nu is $y = x^2$ een *vaste* parabool, geldig voor *alle* vierkantsvergelijkingen; $y + px + q = 0$ is een rechte, die telkens weer anders is. Teeken dus $y = x^2$ eens en vooral nauwkeurig; $y + px + q = 0$ geve men aan door een dunne potloodlijn (gemakkelijk te verwijderen), een kras op een celluloid-liniaal of door een draad. Evenzoo behandelt men $x^3 + px + q = 0$, zelfs $x^n + px + q = 0$. Zie Klein, Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus, I, 3^e Aufl. Berlin, Springer, 1924, blz. 96 vlgg. Ook Tannery, Notions de Mathématiques, blz. 217—219. Het wordt door deze geleerden uitdrukkelijk bedoeld voor de school.

„De analytische meetkunde tot en met de kegelsneden” — in dezen vorm ook eindexamen-vak. Ik had liever de uitdrukking „Beginselen der (vlakke) coördinatenleer” behouden gezien. Niet dat de analytische meetkunde voor den mathematicus en ook voor den mathematisch-physicus niet van het hoogste belang is. Een *systematische* behandeling van dit vak echter is voor den B-leerling van het gymnasium in 't algemeen onnoodig. Vooreerst kan men meestal wel met rechthoekige coördinaten volstaan. De vergelijking van een rechte lijn en van een cirkel worden spoedig genoeg gekend of zijn al bekend uit de behandeling van grafische voorstellingen op andere lessen. Normaalvorm van Hesse en alle daarmee in verband staande kwesties kunnen weggelaten worden. En wat de overige figuren betreft, gaat men van de methode van Dandelin uit, die ellips, parabool en hyperbool leert onderscheiden, dan leidt men daarna gemakkelijk de vergelijkingen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $y^2 = 2px$ en $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$ af. De stand van de normaal ten opzichte van de voerstralen is verder van belang. Men wijze op 't verband tusschen cirkel en ellips.

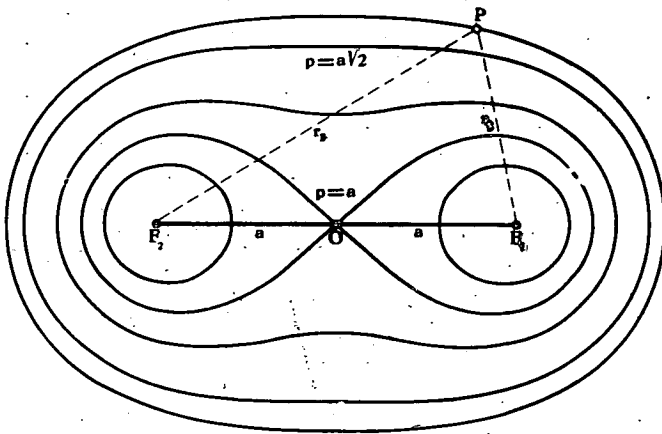


Fig. 4.

Lemniscaten (cassinoïden, vierde graad, Descartes;
 $p = a$ Bernoulli): $r_1 r_2 = p^2$.

En aangezien de kegelsneden ook in andere vergelijkingen dan de genoemde kunnen optreden, bespreke men de transformatie van coördinaten, terwijl men bovendien kan leeren, hoe men aan een vergelijking van den tweeden graad spoedig genoeg kan

een willekeurig punt van die ladder in 't algemeen een deel van een ellips. Maar beschouwt men nu eens de kromme der beweging van een willekeurig punt van de drijfstang van een stoom-machine (een der uiteinden van de drijfstang beschrijft hier een rechte en het andere een cirkel), dan blijkt ze een kromme van den vierden graad te zijn. En laat men nu eens een begrensde lijn langs twee cirkels glijden, dan is de er uiterlijk eenvoudig uitziende kromme beschreven door een willekeurig punt van die lijn of van haar verlengde zelfs een van den zesden graad. De kwestie kwam mij onder de oogen, toen een rijwielhandelaar eens op 't idee kwam het uiteinde van een kruk, die verbonden is aan de trapas van een rijwiel, draaibaar te verbinden aan een punt van een stang, die met één uiteinde een cirkelboog beschreef, terwijl het andere uiteinde den trapper bevatte. Dat men problemen behandelt, waarbij snijlijnen en raaklijnen optreden (men zal hier allicht van de zoo straks te bespreken differentiaalrekening gebruik maken) is natuurlijk nuttig, maar men late hier vooreerst niets memoriseeren en bovendien hoede men zich voor onwillekeurig te ver te gaan¹⁾. Wat ik van de analytische meetkunde ook wel nuttig vind, is, dat er nog al eens wat technisch werk bij te pas komt. Lost men b.v. zuiver analytisch op 't vraagstuk: de meetkundige plaats te bepalen van de voetpunten der loodlijnen uit een der brandpunten van de hyperbool op de raaklijnen neergelaten, dan komt men ten slotte te staan voor de vergelijking.

$$c^2 y^2 + \{x(c-x) - y^2\}^2 = a^2 \{(c-x)^2 + y^2\}.$$

De leerling zou er dan al licht toe kunnen komen om te beweren, dat de gevraagde meetkundige plaats een kromme van den vierden graad is. En als men nu gezegd heeft, dat dit fout is, of langs meetkundigen weg de meetkundige plaats heeft afgeleid, dan is 't voor hem toch nog niet zoo eenvoudig om het eerste lid der verkregen vergelijking te ontbinden in

$$x^2 + y^2 \quad \text{en} \quad (c-x)^2 + y^2.$$

En zoo doet zich dan verder de vraag voor, of die laatste factor ook 0 kan zijn. Ieder van ons zal moeilijkheden van het

¹⁾ Want van raaklijn komt men op normaal, maar van deze op 't snijpunt van twee normalen, dan op kromtemiddelpunt, vervolgens. ontwondene en zoo kan men doorgaan!

soort, dat ik hier noem, wel eens zijn tegengekomen en zooals ik zooeven zei, ik vind de bespreking daarvan hoogst nuttig.

Toch komt het mij voor, dat de behandeling van de beginselen der infinitesimaalrekening en zelfs meer dan die beginselen voor onze B-leerlingen heel wat meer practisch nut afwerpt, dan een systematische behandeling der analytische meetkunde.

De grondbegrippen afgeleide en differentiaalquotient. Wenschelijk is het natuurlijk deze begrippen goed te definieeren. Maar hierbij al te lang stil te staan, lijkt mij onnoodig; ik zou zeggen: de leerlingen voelen het spoedig genoeg aan, wat ook het geval is met oneindig klein, van 1^e, 2^e orde, waarvan trouwens door schrijvers van leerboeken de definitie wel ontloopen wordt. Daarom kan men hen gerust eenige regels voor het differentieeren van buiten laten leeren: het principe van de economie van het denken. Wat nu het integreeren betreft, of men met de onbepaalde of met de bepaalde integraal beginnen wil, lijkt mij vrij indifferent. Maar wat bij het integreeren het van buiten leeren betreft, zou ik zeggen: doe daar niet aan. Want bij de eenvoudige oppervlakte- en inhoudsberekeningen redden de leerlingen zich wel, als ze kunnen differentieeren en verder, is 't al eens in een wat moeilijker geval strikt noodig een integraal te bepalen, nu ja, ik denk, dat 't ons ook wel eens overkomt, dat we de methode vergeten zijn en een boek opslaan. Aan de integraalrekening veel te doen, lijkt mij onnoodig.

Toch liggen op het gebied der infinitesimaalrekening kwesties, die — ik zou zeggen — de werker op elk wetenschappelijk gebied geregeld tegenkomt. Ik wil U thans een en ander meedeelen van hetgeen ik voor mijn leerlingen nuttig vind om te behandelen.

Al betrekkelijk spoedig komen we in de vijfde klasse tegen de formule

$$\cos 3\varphi = 4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi$$

en dan schrijf ik eens op de vergelijking

$$x^3 - 9x^2 + 24x - 19 = 0,$$

waarbij dan de mededeeling komt, dat de oplossing van verschillende planimetrie-opgaven tot derde- en vierdemachtsvergelijkingen leidt en dat, wanneer het om een constructie met passer en liniaal te doen is, die oplossing in 't algemeen bij dergelijke

opgaven op eindige wijze onmogelijk is. Zijn b.v. van een rechthoekigen driehoek de beide s. h. bisectrices gegeven, dan komt men tot een 3^e- en zijn van een gelijkbeenigen driehoek de omtrek en de straal des omgeschreven cirkels gegeven, dan verkrijgt men een 4^e-machtsvergelijking. Op blz. 167 van deel I van Killing en Hovestadt, Handbuch des Math. Unterrichts vindt men tal van die opgaven. Om nu den tweeden term van de gegeven vergelijking te laten verdwijnen, stellen we $x = \xi + a$, waarbij we opmerken, dat deze methode eigenlijk ook bij de oplossing van een vierkantsvergelijking gebezigd wordt, dus dat we die methode dáár geleerd hebben. Stellen we nu na substitutie $3a - 9 = 0$, dus $a = 3$, dan krijgen we

$$\xi^3 - 3\xi = 1.$$

Door nu het oog te richten op onze goniometrische formule substitueeren we

$$\xi = p \cos \varphi$$

en verkrijgen

$$p^3 \cos^3 \varphi - 3p \cos \varphi = 1,$$

waarbij we dan natuurlijk verder wenschen, dat

$$\frac{p^3}{3p} \text{ of } \frac{p^2}{3} = \frac{4}{3}.$$

We kunnen dus nemen

$$p = 2.$$

Er volgt dan verder

$$2 \frac{8 \cos^3 \varphi - 6 \cos \varphi}{\cos 3\varphi} = 1$$

$$3\varphi = 2k \times 180^\circ \pm 60^\circ$$

$$\varphi = k \times 120^\circ \pm 20^\circ.$$

$$\varphi = 20^\circ, 100^\circ, 140^\circ \text{ enz.}$$

$$x_1 = 2 \cos 140^\circ + 3 = \text{enz.}, x_2 = 2 \cos 100^\circ + 3 = \text{enz.},$$

$$x_3 = 2 \cos 20^\circ + 3 = \text{enz.}^1)$$

Ik laat daarna de grafische voorstelling van

$$y = x^3 - 9x^2 + 24x - 19 \text{ (zie fig. 8, blz. 26)}$$

of liever van

$$y = \xi^3 - 3\xi - 1$$

¹⁾ Maakt men de opmerking, dat een derdemachtsvergelijking toch ook door benadering is op te lossen, dan antwoord ik, dat men die methode liever niet toepasse, als een rechtstreeksche weg mogelijk is.

eens maken, terwijl we dan de snijpunten met $y = 0$ door berekening en teekening verkregen eens vergelijken. Stellen we nu nog $y = \eta - 1$, waardoor we krijgen

$$\eta = \xi^3 - 3\xi,$$

dan zien we duidelijk, dat deze en zoo ook elke kromme van de gedaante

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

een middelpunt heeft (hier nl. $x = 3$, $y = -1$).

Begint men nu met de leerlingen al eens wat van de differentiaal-rekening te leeren, dan kunnen ze met behulp daarvan maximum, minimum, buigpunt enz. bepalen en met de teekening vergelijken. Leerzaam is ook in dit verband in één teekening te vereenigen: $y = f(x)$, $y = f'(x)$, $y = f''(x)$ en later de integraalfunctie. Men heeft er natuurlijk meer aan met deze functie te werken dan met $y = ax^2 + bx + c$. Ten eerste demonstreert de eerste meer en ten tweede laten zich berekeningen omtrent de laatste functie ook op elementaire wijze uitvoeren, wat met de eerste niet 't geval is en waardoor het nieuwe den leerlingen meer frappeert.

Doch dit gaat alles prachtig, zoolang de waarde van $\cos 3\varphi$ niet imaginair en (volstrekt) ook niet grooter is dan 1. De oplossing van die moeilijkheid, waarop ik hen wijs, zeg ik dan voor later te bewaren. Toch wijs ik er hen nog even op, dat de vierdemachts-vergelijking

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

ook kan worden opgelost, zoo men een derdemachtsvergelijking kan oplossen. Men herleidt de vergelijking tot een van de gedaante

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0,$$

schrijft voor het eerste lid $(x^2 + ax + \beta)(x^2 - ax + \gamma)$ enz., opleverende een derdemachtsvergelijking in a^2 .

Het is natuurlijk niet alleen de zucht om de zooeven genoemde moeilijkheid omtrent $\cos 3\varphi$ te boven te komen, maar de belangrijkheid in tal van problemen, zelfs in de meest voor de hand liggende, welke mij doet besluiten voor mijn leerlingen ter dege de beteekenis van het getal e in het licht te stellen. Ik zet dit in door aan te sluiten bij de gewone logarithmen: De logarithmen in 't algemeen hebben hun ontstaan te danken aan de behoefte, die er bestond om een meetkundige en een rekenkundige reeks te laten correspondeeren, al dadelijk b.v.

0,001, .. 0,01, .. 0,1, .. 1, .. 10, .. 100 enz.
 met — 3, .. — 2, .. — 1, .. 0, .. 1, .. 2 enz.

Schrijft men nu in aansluiting hiermede op als meetkundige reeks

$$1, (1 + \delta), (1 + \delta)^2, \dots, (1 + \delta)^n = 10,$$

en als rekenkundige

$$0, m\delta, 2m\delta, \dots, nm\delta = 1,$$

dan heeft men $(1 + \delta)^{\frac{1}{m\delta}} = 10$

$$(1 + \delta)^{\frac{1}{\delta}} = 10^m.$$

Wenscht men nu hier niet met *intermitteerende* reeksen zooals bij $\delta = 0,0001$ (Byrg) en $\delta = 0,0000001$ (Napier) maar met *continue* te doen te hebben, waarbij *elk* getal (voor zoover dit in verband met de grenzen van 't gebied, dat men bestrijkt, mogelijk is) een plaats in die reeksen heeft, dan moet men wel δ oneindig klein nemen. Door $(1 + \delta)^{\frac{1}{\delta}}$ met de binomiaalformule te ontwikkelen, kan men, als men niet al te scrupuleus is, gemakkelijk laten zien, dat, zoo δ tot nul nadert, $(1 + \delta)^{\frac{1}{\delta}}$ een bepaalde eindige limiet heeft, die men *e* noemt en die men in een aantal decimalen berekenen kan. De modulus *m* van het Briggsche stelsel is nu ook bepaald. Zoo blijkt, dat men bij een grondigen opzet van de logarithmen, dus zelfs van de Briggsche, tot het getal *e* komt. En zoo komt men bij elk wetenschappelijk probleem tot het getal *e* of tot logarithmen, die *e* tot grondtal hebben, indien, bij een oneindig kleine verandering der onafhankelijk veranderlijke, de verhouding van de betrekkelijke verandering der afhankelijk veranderlijke tot die afhankelijk veranderlijke zelf of constant is of weer een functie is van de onafhankelijk veranderlijke. En ook is dat nog wel het geval bij het optreden van sommen of verschillen van verhoudingen van dien aard. Het spreekt nu wel van zelf, dat het differentieeren van $\ln. x$ en van e^x en bijbehorende integraties onder de oogen gezien moeten worden. Doch, zooals ik reeds zeide, men mag op dit terrein niet te scrupuleus zijn. Voorbeelden van toepassingen zijn legio te noemen: Afname van lichtintensiteit bij het vallen van licht door een glazen plaat, afkoeling, luchtdruk op verschillende hoogten (hypsometrische formule), wrijving bij een touw over een cylinder

geslagen, toename der bevolking, arbeid van een gas bij samen-
drukking, inductiestroom, reacties in de scheikunde. Bij deze
laatste toepassingen wil ik even verwijzen naar het voor biologen
zoo belangrijke boek van Rudolf Höber, *Physikalische Chemie
der Zelle und der Gewebe*, 5^e Auflage 1924. Ik ontleen daaraan
b.v. de inversie van rietsuiker: $-\frac{dx}{dt} = k(C - x)$, de wet van
Guldberg en Waage (de reactiesnelheid evenredig met de
actieve hoeveelheden van de op elkaar reageerende stoffen):
 $-\frac{dx}{dt} = k(C_1 - x)(C_2 - x)$, welke beide vergelijkingen gemak-
kelijk te integreeren zijn, het principe van het bewegelijk evenwicht
van Van 't Hoff (steigende Temperatur begünstigt das unter
Wärmeabsorption gebildete System): $\frac{d \ln. k}{dT} = -\frac{U}{RT^2}$ (k = Gleich-
gewichtskonstante, T = Absolute Temperatur, U = die Wärme,
die beim Ablauf der Reaction im Sinn der Reaktionsgleichung
entwickelt wird, R = die Gasconstante). Men zou kunnen zeggen,
dat ik al aardig in de differentiaalvergelijkingen verzeild ben,
maar is dit nu zoo erg, daar toch het geheele materiaal hier
gelijksoortig is? Want bevat al niet de identiteit

$$\frac{(1 + \delta)^{p+1} - (1 + \delta)^p}{m\delta} = \frac{1}{m}$$

of

$$\frac{(1 + \delta)^{\frac{x+m\delta}{m\delta}} - (1 + \delta)^{\frac{x}{m\delta}}}{m\delta} = \frac{1}{m},$$

$$(1 + \delta)^{\frac{x}{m\delta}}$$

die niets anders dan den zoo straks behandelenden opzet der loga-
rithmen behelst, de oplossing der differentiaalvergelijking

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{m} ?!$$

De Reeks van Mac Laurin. Ik schrijf op

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots,$$

differentieer éénmaal, tweemaal, driemaal enz., stel daarna in de
gegeven en in de verkregen vergelijkingen $x=0$ en verkrijg op
die wijze

$$a_0 = f(0), \quad a_1 = f'(0), \quad a_2 = \frac{f''(0)}{1.2}, \quad a_3 = \frac{f'''(0)}{1.2.3} \text{ enz.,}$$

waardoor de reeks van Mac Laurin

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{1.2} f''(0) + \frac{x^3}{1.2.3} f'''(0) + \frac{x^4}{1.2.3.4} f^{IV}(0) + \dots$$

ontstaat, die, wil ze $f(x)$ voorstellen, vooreerst convergent moet zijn. Verdere finesses laten we achterwege. Ik verzwijg natuurlijk niet, dat op deze afleiding nog al wat aan te merken is. Met behulp van Mac Laurin leid ik nu af

$$(1+x)^n = 1 + x \cdot n + \frac{x^2}{1.2} \cdot n(n-1) + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \dots^1)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \dots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots$$

Ik laat dan ook b.v. eens een enkele natuurlijke logaritmie (waaruit dan gemakkelijk de Briggsche volgt) berekenen. Verder zoek ik ook de reeks voor $y = \text{bg tg } x$. Uit

1) Bij de discussies werd door dr. Schrek het volgende meegedeeld:

Klein stelt zich ten doel een willekeurige kromme een eindweegs zoo goed mogelijk voor te stellen door eenvoudige krommen („Schmiegungsparabeln”): $y = A + Bx$, $y = A + Bx + Cx^2$, $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$, enz. Bij de sinusreeks b.v. krijgt men aldus: $y = x$, $y = x - \frac{x^3}{3!}$, $y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$; opmerkelijk is, hoe in de figuur deze krommen zich tegen de werkelijke krommen aansluiten (althans in het convergentie-interval). Zie F. Klein, Elementarmathematik I [als deel XIV van de Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen]. Deze nieuwe uitgave wordt verzorgd door Fr. Seyfarth. Zie blz. 241 vlgg. Zie vooral ook Rud. Schimmack, Ueber die Gestaltung des mathematischen Unterrichts im Sinne der neueren Reformideen. Dit artikel (in: Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterr. 39 (1908), S. 513—527; ook als afzonderlijke brochure bij Teubner verschenen) geeft een viertal fraaie platen er van. Lietzmann stelt in zijn lessen formeel ook

$$\sin x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

en handelt dan desgelijks als boven bij de afleiding van de reeks van MacLaurin. Wandplaten hierop betrekking hebbende, ontworpen door dr. E. Götting, levert de firma H. Lange te Göttingen, Weenderstrasse 34.

$$\frac{dy}{dx} = \cos^2 y = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

volgen dan gemakkelijk de hogere differentiaalquotienten. Men vindt dan ten slotte

$$\text{bg tg } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

$$\frac{1}{4}\pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots,$$

waardoor de leerlingen zien, hoe door deze reeks (die echter niet snel convergeert) π te berekenen is. Een sneller convergerende reeks verkrijgt men aldus:

$$\text{tg } a = \frac{1}{5}, \quad \text{tg } 2a = \frac{5}{12}, \quad \text{tg } 4a = \frac{120}{119}, \quad \text{tg} \left(4a - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{239}$$

$$\frac{\pi}{4} = 4 \text{ bg tg } \frac{1}{5} - \text{bg tg } \frac{1}{239} = \text{enz.}$$

Verder leid ik af

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \dots$$

$$e^{yi} = 1 + \frac{yi}{1} - \frac{y^2}{1.2} - \frac{y^3 i}{1.2.3} + \frac{y^4}{1.2.3.4} + \frac{y^5 i}{1.2.3.4.5} - \dots$$

$$= 1 - \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^4}{1.2.3.4} - \dots + i \left(y - \frac{y^3}{1.2.3} + \dots \right)$$

$$e^{yi} = \cos y + i \sin y$$

$$e^{-yi} = \cos y - i \sin y$$

$$\cos y = \frac{e^{yi} + e^{-yi}}{2}.$$

Thans keer ik weer terug tot mijn derdemachtsvergelijkingen. Ik neem nu de vergelijking

$$x^3 - 9x^2 + 24x - 20,5 = 0.$$

De grafische voorstelling van $y = \dots$ is dezelfde als in 't eerste geval. Alleen ligt de kromme 1,5 lager.

$x = \xi + 3$ stellende verkrijgt men

$$\xi^3 - 3\xi - 2,5 = 0.$$

$\xi = 2 \cos \varphi$ geeft nu

$$2 \cos 3\varphi = 2,5$$

$$e^{3\varphi i} + e^{-3\varphi i} = 2,5$$

een vierkantsvergelijking t. o. van $e^{3\varphi i}$. Men vindt

$$e^{3\varphi i} = 2 \text{ (en } \frac{1}{2}\text{)}$$

$$e^{\varphi i} = \sqrt[3]{2} \text{ en 2 complexen,}$$

$$\text{dus } x_3 = 2 \cos \varphi + 3 = e^{\varphi i} + e^{-\varphi i} + 3 = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}} + 3 (= 5,05).$$

Lossen we nu echter eens op de vergelijking

$$x^3 - 9x^2 + 30x - 37 = 0,$$

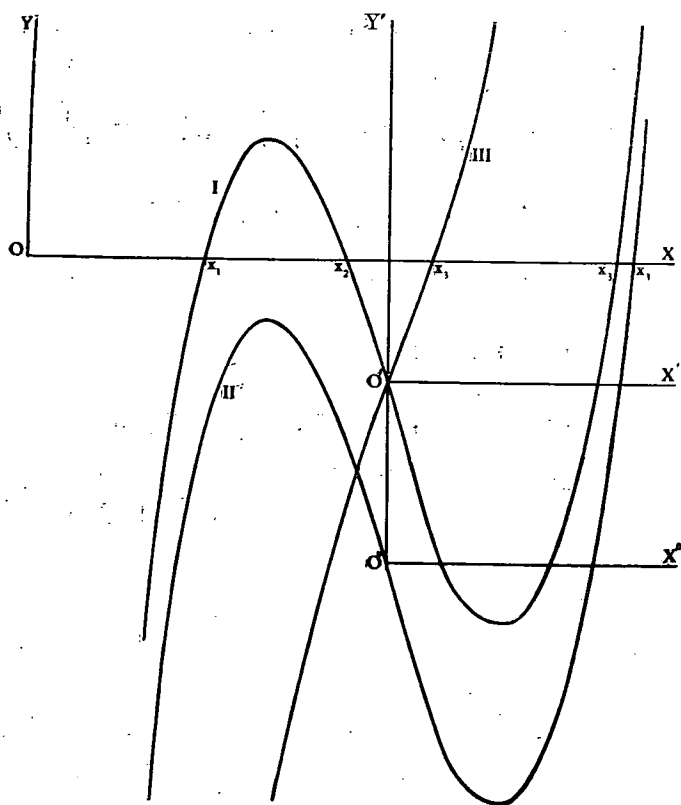


Fig. 8.

$$\text{I. } y = x^3 - 9x^2 + 24x - 19.$$

$$\text{II. } y = x^3 - 9x^2 + 24x - 20,5.$$

$$\text{III. } y = x^3 - 9x^2 + 30x - 37.$$

die ($x = \xi + 3$ stellende) tot

$$\xi^3 + 3\xi - 1 = 0$$

leidt, dan stellen we weder $\xi = p \cos \varphi$.

$$\frac{p^3}{3p} = \frac{4}{-3}$$

geeft dan $p^2 = -4$, $p = 2i$ en $\xi = 2i \cos \varphi$
 en verder bij substitutie

$$2 \cos 3\varphi = \frac{1}{-i} \text{ of } i$$

$$e^{3\varphi i} + e^{-3\varphi i} = i.$$

Hieruit volgt

$$e^{3\varphi i} = \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}i\sqrt{5} \text{ en } e^{-3\varphi i} = \frac{1}{2}i - \frac{1}{2}i\sqrt{5} \text{ (of verwisseld).}$$

Verder is

$$x = 2i \cos \varphi + 3 = i(e^{\varphi i} + e^{-\varphi i}) + 3 =$$

$$= i(\sqrt[3]{\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}i\sqrt{5}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}i\sqrt{5}}) + 3,$$

waarvan de reële

$$x_3 = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}} + 3$$

is.

Van veel belang acht ik een behandeling van de combinatieleer, vooreerst in verband met de binomiaalformule — hoewel, als 't alleen om het bewijs van die formule te doen was, men ook wel een bewijs door volledige inductie zou kunnen bezigen — maar ook in verband met de waarschijnlijkheidsrekening. En ik geloof wel te mogen zeggen, dat het belang van eenige kennis van dezen tak der wiskunde hoe langer hoe meer wordt ingezien.¹⁾ Ik heb trouwens nooit verzuimd, zelfs toen ik dertig jaar geleden leeraar aan een H. B. S. was, waar men gaandeweg de combinatieleer uit leer- en eindexamenprogramma heeft laten verdwijnen, mijn leerlingen met een en ander bekend te maken. Zoolang nu het nieuwe programma op het Gymnasium bestaat kan ik ook behoorlijk afleiden de *frequentiekromme*, die voor bioloog en psycholoog van zooveel belang is. Ik leid deze aldus af: Onderstel, dat er $2n$ gelijkwaardige oorzaken zijn, die een zekere eigenschap tot stand brengen, dan is het aantal gevallen, dat $n+p$ dier oorzaken kunnen samenwerken C_{2n}^{n+p} ($-n \equiv p \equiv n$), een der binomiaalcoëfficiënten van $(a+b)^{2n}$. Noemen wij den middelsten of grootsten coëfficiënt t_0 , dan is deze t_p , dus heeft men

$$\frac{t_{p+1} - t_p}{t_p} = \frac{1}{\delta} \left(\frac{t_{p+1}}{t_p} - 1 \right) = \frac{1}{\delta} \left(\frac{n-p}{n+p+1} - 1 \right) \text{ of } -\frac{2p+1}{n\delta + p\delta + \delta}.$$

¹⁾ Men zie: P. Choissard, Les probabilités en science d'observation, 1923.

Nu moet, willen we van $t_p = f(x)$ een grafische voorstelling maken met intervallen $= \delta$, deze breuk in 't algemeen een eindige grootheid zijn. Laten we $2n$ steeds toenemen, dan kunnen we p van de orde ∞ en n van de orde ∞^2 beschouwen. Daarom herleiden we aldus:

$$\frac{2p+1}{n\delta+p\delta+\delta} = \frac{2p\delta+\delta}{n\delta^2+p\delta^2+\delta^2}$$

Stellen we nu $p\delta = x$ en $n\delta^2 = \frac{1}{h^2}$, dan verkrijgen voor die breuk

$$\frac{2x+\delta}{\frac{1}{h^2} + (x+\delta)\delta},$$

waarvan de limiet, voor $\lim \delta = 0$, gelijk is aan $2h^2x$.

$t_p = \frac{t_x}{\delta} = f(x)$ en $t_{p+1} = \frac{t_{x+\delta}}{\delta} = f(x+dx)$ stellende, komt er

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -2h^2x.$$

Integreerende:

$$\ln. f(x) = -h^2x^2 + C$$

$$f(x) = y_0 \cdot e^{-h^2x^2}.$$

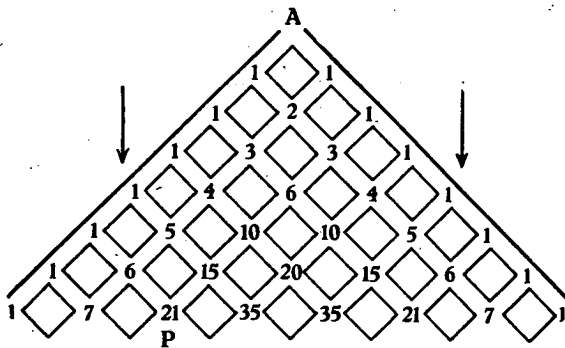


Fig. 9.

Van A af door de straten tusschen de huizenblokken in de richting van de pijlen trachtende te gaan, komt men in P op 21 ($= C_7^2 = C_7^5$) manieren. Kans om P te bereiken

$$\text{is dus} = \frac{21}{C_7^0 + C_7^1 + C_7^2 + \dots + C_7^7} = \frac{21}{2^7}.$$

Dat deze kromme dezelfde moet zijn als de foutenkromme van Gauss, ziet men terstond in, als men bedenkt, dat elke fout het

resultaat moet zijn van allerlei positieve en negatieve elementair-fouten, waarop dan weer de combinatieleer kan worden toegepast. Met behulp van het z.g. Russisch biljart (naar Galton, Natural Inheritance) wordt de frequentiekromme voor de leerlingen geïllustreerd. De figuur op blz. 201 van den eersten jaargang van het Bijvoegsel, die ik hier (fig. 9) nog eens doe afdrukken, geeft een globale verklaring van het verschijnsel.

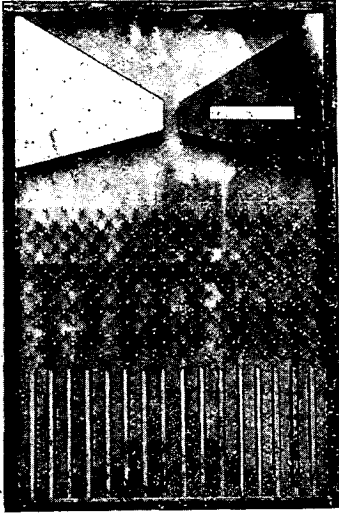


Fig. 10 op $\frac{1}{8}$ der ware grootte.
Russisch biljart.¹⁾

Dieper in deze materie door te dringen, lijkt mij niet noodig. Er zal ook bezwaarlijk tijd voor kunnen gevonden worden. Noch de voor den experimentator van belang zijnde methode der kleinste kwadraten, noch de correlatierekening²⁾, die voor den psycholoog van belang is, kunnen natuurlijk verder op school behandeld worden. Het boekje, dat Lietzmann noemt, nl. P. Riebesell, Die mathematischen Grundlagen der Variations- und Vererbungslehre (Math. Bibliothek, Bd. 24) kan men den leerlingen wel aanbevelen³⁾.

Een enkel woord nog over de beteekenis van de wiskunde voor

¹⁾ De vlekken zijn te wijten aan de spiegelingen (zelfs van een geheel hekwerk) in het glas aan de voorzijde. C. Heijna, amanuensis der H. B. S. 3 te Arnhem, levert dit toestel voor f 18.

²⁾ In zijn dissertatie „De psychotechniek der Beroepskeuze”, 1925 noemt J. L. Prak:

Spaerman, The proof and measurement of association between two things, Amer. Journal of Psychology, 1904.

W. Brown & G. H. Thomson, The essentials of mental measurement, Cambridge University press, 1921.

O. Lipmann, Abzählende Methoden und ihre Verwendung in der Psychologischen Statistik, Barth, Leipzig, 1921.

³⁾ Prof. Stomps noemde mij als aanbevelenswaardige werken: W. Johannsen, Elemente der exacten Erblchkeitslehre, Jena 1909, 2^e Aufl. 1913 en E. Baur, Einführung in die experimentelle Vererbungslehre, Berlin, 1911.

hem, die economie studeert. H. Cunynghame zegt in zijn bekend boekje „A Geometrical-Political Economy”: „The chief function of Mathematics as applied to Economics is, not to solve problems, but to help us to comprehend truths”, en hij voegt er aan toe: „which when we have comprehended we may discard the Mathematics, as we take down a scaffolding, when the building is finished.” Nu, in het eerste kan wel veel waars zitten, maar, wat hij ten slotte zegt, is zeker niet waar. Want als wij door middel van wiskunde iets begrepen hebben en we danken de wiskunde af, dan begrijpen we de verkregen waarheid niet meer. Willen we de waarheid werkelijk blijven begrijpen, dan moet voor ons geestesoog het geheele wiskundig proces in versneld tempo kunnen passeeren. Nu komt in het boekje van Cuninghame nog zooveel wiskunde niet voor. Een behoorlijke oud A-leerling zal bij de bespreking der vraag-kromme, waarin y de marktprijs en x de markthoeveelheid van een artikel is, uitdrukkingen als „ $y=f(x)$, $\frac{dy}{dx}$ is negatief, de vraagkromme loopt niet zoo steil als een rechthoekige hyperbool”, misschien wel kunnen begrijpen, al is 't natuurlijk zeker, dat een gewezen B-leerling zich in deze materie veel gemakkelijker beweegt. Maar ziet men nu eens boeken in als V. Pareto, Manuel d'Économie politique en A. Marshall, Principles of Economics, dan zal, zeker wat de appendices betreft, alleen een goed onderlegde oud B-leerling die kunnen bestudeeren. Implicite functies, functies van meer veranderlijken, zal hij moeten differentieeren; een bepaalde integraal, een determinant moeten bekenden voor hem zijn. Commentaar overbodig ten opzichte van de rechten van den abiturient der lit. ec. afd. eener H. B. S. voor wetenschappelijke studie!

Men zou mij kunnen vragen, wat ik denk van het programma van dr. Droste. En dan zou ik moeten antwoorden, dat ik daarop liever geen gedetailleerd antwoord zou willen geven. Vooreerst komt de samenstelling van een minimum-programma of een wenschelijk programma, ook in deze materie, beter toe aan de wiskunde-commissie van L. i. W. e. N. a. G. e. L. als geheel. Verder hebt U uit mijn betoog wel kunnen afleiden, dat ik meer voel voor een algemeen-wiskundige kennis, dan wel voor een voorschrijven van dit of dat onderwerp. Misschien zou ik het 't best vinden, dat elk van de door hem genoemde onderwerpen bij

gelegenheid behandeld werd, waarmee dan gerust een beperking der analytische meetkunde kon gepaard gaan. En men meene volstrekt niet, dat de behandeling van alles, wat ik genoemd heb, zooveel tijd in beslag neemt. Men komt er werkelijk veel vlugger doorheen dan door de analytische meetkunde. Het is bovendien ook niet noodig, dat stereometrische oppervlakte- en inhoudsberekeningen, behalve door integratie, óók nog eens elementair worden verricht. En het zal nu wel geen verwondering wekken, dat ik het betreur, dat indertijd niet de redactie van wijlen ons medelid Van der Harst is gevolgd.

Wat zal ik nu nog zeggen van de onderwerpen, die hier en daar in mijn voordracht zijn genoemd: onbepaalde vergelijkingen, rekenkundige reeksen van hoogere orde, boldriehoeksmeting, beschrijvende meetkunde en een meetkundige behandeling der kegelsneden? De oplossing der onbepaalde vergelijkingen kan men in een paar lessen behandelen. De rekenkundige reeksen van hoogere orde komen te pas bij interpolatie. Zoo laat ik log. 1,02125 in 7 decimalen berekenen uit een tafel van logarithmen van rentefactoren, die deze logarithme niet, maar de logarithmen van omringende rentefactoren wel bevat ¹⁾. Van de boldriehoeksmeting behandelde men zeker den cosinusregel. Vooreerst kan deze wel als het fundament van dit onderdeel der wiskunde beschouwd worden. Verder komt hij hier en daar nog wel eens te pas. Ten slotte ziet men door de afleiding van den cosinusregel der vlakke trigonometrie uit die der spherische de grootere algemeenheid van de spherische boven de vlakke. En wat nu de determinanten betreft: ik moet zeggen, dat ik er, door gebrek aan tijd, nog niet toe gekomen ben, zelfs een kleine theorie der determinanten te behandelen. Wel schrijf ik, ook zelfs voor A-leerlingen, in de zesde klasse de oplossing van twee vergelijkingen van den eersten graad met twee onbekenden op in determinantenvorm, terwijl ik me ook wel eens verstout heb de Δ_3 van de algemeene vergelijking van den tweeden graad (in de analytische meetkunde) in determinantvorm op te schrijven. Ik zou zeggen, dat — zoo men iets meer tijd kon vinden — misschien een zeer korte behandeling der determinanten aanbeveling zou verdienen.

1) Vergelijk hiermede regel 5 v. o. op blz. 23.

Beschrijvende meetkunde en een meetkundige behandeling der kegelsneden. Ja, men kan van de behandeling van elken tak der wiskunde wel het nut in een of anderen zin demonstreeren. Maar men moet ten slotte zijn keuze doen en dan zal men wel in den regel de zooeven genoemde onderdeelen, als te veel van specialen aard, laten vallen.

Ik eindig nu met de hoop uit te spreken, dat ik er vrijwel in geslaagd ben, U te hebben aangetoond dat een eenigszins algemeene kennis der analyse voor den B-leerling van zeer veel belang is en zeker van meer belang dan een systematische behandeling der analytische meetkunde. En ik mag ten slotte van deze plaats nog wel eens laten hooren, dat het functioneele denken en de wiskunde zóó in allerlei werkelijke wetenschappen tot een eenheid geworden zijn, dat men wel geestelijk blind of van alle intelligentie verstoken moet zijn om te meenen, dat het onderwijs in de wiskunde niet de eerste plaats in het voorbereidend wetenschappelijk onderwijs zou moeten innemen!

N A S C H R I F T.

Uit de na bovenstaande voordracht gehouden debatten is m.i. gebleken, dat tot sommige docenten nog niet is doorgedrongen het besef, dat het gymnasiaal onderwijs inderdaad een voorbereiding moet zijn voor het wetenschappelijk werk, dat den leerling later aan de Universiteit wacht. Men heeft daarbij toch vooral in 't oog te houden, dat minder gelet moet worden op de belangen van den toekomstigen mathematicus of physicus dan wel op de vele anderen, die ik in mijn voordracht heb genoemd. Immers de eersten krijgen hun deel van de wiskunde aan de Academie toch wel. Maar voor de anderen moet het nooit zóó zijn, dat de oplossing van problemen, die hun later tegemoet treden, schipbreuk leidt op een wiskundig tekort, waarin het Gymnasium had kunnen voorzien. Welke richting nu het onderwijs moet inslaan is uit mijn betoog wel gebleken. *Natuurlijk* zal men *thans nog* in de eerste plaats moeten voldoen aan het Kon. Besluit, dat van de eenigszins verder gaande onderdeelen der wiskunde *alleen* de analytische meetkunde noemt als eindexamen-

vak. Hieruit volgt, dat men slechts zooveel aan de overige analyse kan doen als de tijd — in verband met het gehalte van de klasse — toelaat. Dat hiervoor belangstelling bij de leerlingen bestaat en 't inzicht verruimd wordt, kan ik beslist verzekeren, terwijl het bedoelde soort van onderwijs hun ook niet meer moeite kost dan de oplossing van vraagstukken uit de analytische meetkunde. Er is natuurlijk één ding, waarvoor thans nog te weinig tijd beschikbaar is en dat is voor het behandelen van het gewenscht aantal toepassingen. Ik heb eenige toepassingen in verschillende wetenschappen genoemd; ik ontleen die liefst nu nog in de eerste plaats aan de wiskunde zelf; zoo schiet mij thans b.v. te binnen, dat men de bekende formules van Maskeleyne die voor $\log \sin \alpha$ en $\log \operatorname{tg} \alpha$ gebruikt worden, als $\alpha < 2^\circ$, met 't behandelde terstond inziet. Bij meer tijd zou vooral contact gezocht kunnen worden tusschen den leeraar in de natuurkunde en den mathematicus. Ook meer problemen uit de mechanica zouden kunnen worden behandeld. Toch moet men bij dit alles nooit het doel uit 't oog verliezen en dat is: zulke problemen behandelen, waaraan men, *wat de wiskundige behandeling betreft*, wat heeft met het oog op de toepassing in *verschillende* wetenschappen.

Het onderwijs in te richten zooals ik dat wensch, zou zelfs nu voor *alle* leerlingen in verband met 't beschikbaar aantal uren mogelijk zijn, als de analytische meetkunde niet meer — zooals thans 't geval is — systematisch behandeld moest worden. Doch, zooals ik boven zei, men heeft met 't Kon. Besluit rekening te houden, waaraan zich al eenigszins een usance heeft vastgeknoopt. Gelukkig werd echter door den Inspecteur op de vergaring een uitspraak gegeven, die ik niet wil nalaten te vermelden: met toestemming van den gecommitteerde kan de leeraar vragen doen over infinitesimaalrekening. Dit is een stap in de goede richting en verder gelde dan: „Les idées marchent”. Duitschland en Oostenrijk zijn ons trouwens reeds lang vóór op dit gebied!

De vraag is uitgesproken, of het te kort aan strengheid in de hoogere deelen niet in tegenspraak staat met het vasthouden aan strengheid in de elementaire. Hierop kan dit geantwoord worden: Wanneer men — wat die strengheid betreft — doet, wat ik doe bij het elementair onderwijs, dan heeft men de absolute strengheid nog lang niet bereikt. En wanneer men de strengheid in

acht neemt, welke door mij in de infinitesimaalrekening bedoeld is, dan heeft men die absolute strengheid evenmin bereikt, doch ik beweer, dat men *in beide gevallen* zoover gaat, als t. o. van 't doel, dat men beoogt, noodig is. Die oppervlakkig kijkt, ziet hier een conflict. Het staat werkelijk van een *streng* wetenschappelijk oogpunt uit nog te bezien, waar de meeste afwijking van de ware strengheid bestaat. Er is bovendien nog iets. Als men b.v. aanmerking maakt op de behandelde afleiding van de reeks van Mac Laurin, dan kan daarop dit geantwoord worden: Bedenk vooreerst, dat die afleiding niet geschiedt voor den mathematicus „pur sang” en wacht verder eens af, zoolang, tot er conflicten komen!

Dat men nu uit vrees voor dit te kort aan strengheid naar allerlei toepassingen moet zoeken van niets anders dan het differentiaalquotient — toepassingen, die vaak in een kringetje ronddraaien — vind ik een standpunt, dat te eng is. Men heeft toch werkelijk te bedenken, dat de leerlingen der hoogste klasse van een gymnasium geen kinderen meer zijn. Op hun leeftijd krijgen sommige abiturienten der H. B. S. aan de Universiteit heel wat meer te slikken! En zoo is 't ook misplaatst bij het zien van e^y de vraag te stellen: Wat *denkt* ge hierbij? Daarbij bedoelende, dat men er toch niet hetzelfde bij kan denken als b.v. bij 2^3 . Maar kan men niet evengoed zoo'n misplaatste vraag doen bij $a + bi$? Als de leerlingen eenmaal op zekeren leeftijd gekomen zijn, hebben ze zich te wennen aan het zien van symbolen en formules, waarop zekere operaties kunnen worden toegepast, maar waarbij aan de bedoeling van de oorspronkelijke schrijfwijze niet meer wordt gedacht. En in 't (in 't algemeen conflictloos) mogen doen van die operaties ligt hun *beteekenis*. Bij dit alles is weer 't leidende principe, dat ten slotte op een noodzakelijkheid uitloopt: de economie van het denken¹⁾. En nu komt dit alles niet plotseling, feitelijk zijn de leerlingen in de lagere klassen met minder ver gaande middelen er al op voorbereid: bij 2^{34} denken ze ook niet meer 't zelfde als bij 2^3 enz.

¹⁾ Men zou kunnen opmerken, dat men hier toch meer direct te doen heeft met het door HANKEL uitgesproken beginsel van het behoud der formeele wetten. Inderdaad is dit ook 't geval. Maar ik beschouw dit beginsel als ondergeschikt aan dat van MACH.

Tot slot wil ik nog wijzen op een merkwaardig verband, dat ik in den loop van de vergadering zag tusschen de hier gehouden voordracht en uitingen van anderen bij geheel andere gelegenheden. Vooreerst besprak dr. Nathans bij de rondvraag de wenschelijkheid van meerdere aansluiting van het onderwijs aan 't Gymnasium bij dat aan de Universiteit en bij weer een ander punt van de agenda werd door mij een schrijven voorgelezen van een bekend hoogleeraar in de faculteit der geneeskunde, waarin deze geleerde — schrijvende over 't bestaansrecht van het Gymnasium — behalve het uittrekken van een behoorlijk aantal uren wiskunde, ook aanraadde dit onderwijs zóó te doen geven, als de leeraar het wenschelijk acht.

BOEKBESPREKING.

P. Wijdenes, *Beknpte Stereometrie*, geb. f 1,50. Groningen, P. Noordhoff.

Sinds bij het eindexamen der kweekscholen, dat voor die inrichtingen in de plaats gekomen is van het oude onderwijzersexamen, onder anderen ook Wiskunde gevraagd wordt, en ook bij het examen voor hoofdonderwijzer Wiskunde onder de examenvakken is opgenomen, beginnen er aan alle kanten leerboeken, -boekjes te verschijnen, die zich bij de nieuwe opleiding en exameneischen trachten aan te sluiten. Het spreekt van zelf, dat men, gezien de veelheid der vakken aan een kweekschool, bij deze eindexamens niet de eischen mag stellen, die gelden voor inrichtingen, waar Wiskunde een hoofdvak is. De examenopgaven voor Wiskunde op de hoofdacteëxamens wijzen ook in die richting. Ik vind dat goed gezien; daardoor immers wordt er nog eens goed de nadruk op gelegd, dat het „geëxamineerd” zijn in Wiskunde op die examens absoluut geen bevoegdheid mag meebrengen om onderwijs te geven in dat vak; hetzelfde geldt trouwens voor Fransch, Duitsch en Engelsch. Het geëxamineerd zijn daarin mag alleen gelden als algemeene ontwikkeling.

De nieuw verschenen of te verschijnen leerboeken voor Wiskunde (Rekenkunde inbegrepen) moeten m. i. aan eigenaardige eischen voldoen. Ze moeten, dat is duidelijk, *beknopt* zijn. Nu wordt die beknoptheid gewoonlijk op tweeërlei wijze verkregen; of men neemt een flink leerboek en maakt daar een soort excerpt van, zooals in oude tijden vele schoolboekjes een uittreksel waren uit grotere werken; of men laat ongeveer alle eischen van wetenschappelijkheid varen en maakt er maar wat van. Vooral de Stereometrie geeft veel aanleiding tot de laatstgenoemde methode; het wordt dan een soort van vak, dat men vroeger Vormleer, ook wel Aanschouwelijke Meetkunde noemde.

Toch is er nog een derde en betere methode, die mij voor bovengenoemde inrichtingen aanbevelenswaardig lijkt, omdat men daar

te doen heeft met oudere leerlingen, gemiddeld van 15—19 jaar. Men kan de beknoptheid ook verkrijgen door vele overbodige dingen (die in alle wiskundeboeken nog genoeg voorkomen) weg te laten. Men heeft dan zelfs zeker nog gelegenheid meer moderne dingen in te lasschen.

Het werkje, hierboven vermeld, is volgens deze derde methode samengesteld. Het is geheel nieuw en onafhankelijk van andere of grootere leerboeken in elkaar gezet. Daardoor maakt het een frischen indruk. Bij het doorbladeren treffen ons de mooie, duidelijke figuren. Wat den inhoud aangaat, er staat m.i. juist het noodige in, niet meer en niet minder dan men aan inrichtingen ter opleiding van onderwijzers en onderwijzeressen mag en kan geven. Voor de inrichtingen, en dat zijn er tegenwoordig niet weinige, waar handenarbeid in 't leerplan is opgenomen, zal het prettig zijn vele vraagstukken te vinden, die op ongedwongen wijze samenwerking brengen tusschen Meetkunde en Handenarbeid, welke samenwerking beide vakken ten goede kan komen.

Ook andere inrichtingen met beperkt wiskunde-programma zullen met vrucht dit boekje kunnen gebruiken.

H. G. A. Verkaart.

Prof. Dr. C. H. van Os. Moderne Integraalrekening. [Inleiding tot de leer der puntverzamelingen en der integralen van Lebesgue.] P. Noordhoff, Groningen, 1925; 204 blz.

Het boek begint met een inleiding over verzamelingsleer, zooals dit behoort in een modern werk over analyse. Deze inleiding vult de eerste twee hoofdstukken en houdt zich in hoofdzaak met puntverzamelingen bezig. De schrijver heeft blijkbaar geen positief standpunt t.o.v. intuïtionisme en formalisme, wat wel niet velen hem euvel zullen duiden. Aan den anderen kant is het jammer dat de geschilpunten zoo zelden belicht worden. Dat er meeningsverschil bestaat wordt feitelijk alleen aangestipt op blz. 80 (hoofdstuk III) in verband met de ontwikkelingen van ZERMELO. De toelichting is daar echter wel erg negatief. Het lijkt niet waarschijnlijk dat voor een aftelbaar aantal verzamelingen het Auswahlpostulat ooit ernstige moeilijkheden zal geven en het bewijs van § 68 is vermoedelijk voor elk concreet geval constructief te maken.

Den schrijver zij in overweging gegeven § 11 in een volgenden

druk wat uitvoeriger te redigeeren. Mogelijk zal de beknoptheid van thans voor sommige lezers tot onduidelijkheid worden.

Vermeld dient, dat de eerste twee hoofdstukken vele vraagstukken bevatten, een toevoeging die voor de betreffende onderwerpen nog weinig is beproefd en bijzonder te waardeeren.

Hoofdstuk III is gewijd aan een uitvoerige bespreking van het maatbegrip. In hoofdzaak wordt hier het begrip beschouwd dat, in kern afkomstig van BOREL, mede door LEBESGUE verder is ontwikkeld, maar ook de vroegere inhoudsdefinitie van JORDAN komt ter sprake en de verschillende begrippen worden vergeleken. Enkele onderdeelen van dit hoofdstuk dragen betrekkelijk weinig bij tot een scherp inzicht in het maatbegrip en zouden misschien (eenigszins gewijzigd) beter op hun plaats zijn in een leerboek der analytische meetkunde. In dit verband zij genoemd § 67.

Hoofdstuk IV handelt over eenige belangrijke punten der theorie van functies van reële veranderlijken. De meetbaarheid wordt uitvoerig besproken, verder de karakteristieke functies, fundamentealreeksen van functies met hun limieten en de ordinaatverzamelingen, waarmee we naderen tot de moderne integraaldefinities.

In de beide laatste hoofdstukken worden de bepaalde en onbepaalde integralen besproken. De bepaalde integraal wordt eerst gegeven als verschil van de maten van twee ordinaatverzamelingen en later komen de meer bekende definities als limiet van een som n.l. de integraal van LEBESGUE, de boven- en benedenintegraal van DARBOUX en de integraal van RIEMANN. Mogelijk kan de schrijver bij een volgenden druk nog iets duidelijker naar voren brengen waarom men, in het bezit van de door RIEMANN gegeven definitie, nog naar andere heeft gezocht. Ook kan misschien nadruk worden gelegd op het feit, dat de integraal van RIEMANN als bijzonder geval in die van LEBESGUE is vervat.

De onbepaalde integraal wordt ingevoerd als verzamelingsfunctie, echter ook gebruikt in de engere beteekenis van puntfunctie. Ook hier worden belangrijke resultaten afgeleid.

Vermeld zij, dat bijna overal gewerkt wordt in n afmetingen, wat echter nergens bezwaarlijk is.

Nog een enkele opmerking: In de voorrede legt de schrijver nadruk op het feit, dat in den loop der tijden de begrippen „inhoud” en „integraal” om beurten als primair zijn beschouwd. Zou dit niet minder een verschil in wezen dan wel in benaming zijn geweest?

Het boek is ongetwijfeld een groote aanwinst voor de Nederlandsche mathematische litteratuur. Het is op zeer degelijke wijze geschreven door iemand die ons blijkbaar van zijn overvloed geeft. Waarschijnlijk zal het ook velen, die meenen iets van de behandelde onderwerpen af te weten, veel nieuws brengen (hier spreekt de ondervinding), maar voor eerste kennismaking is het eveneens geschikt. Zeer zeker wil het niet slechts gelezen, maar ook bestudeerd worden, en het woord „inleiding” in den subtitel is, althans wat het laatste deel betreft, wel wat bescheiden. Toch kan het aan ieder, die iets voor moderne mathesis voelt, sterk worden aanbevolen. De vereischte arbeid zal goed besteed zijn.

B. P. H.

Prof. Dr. Hk. de Vries. De vierde dimensie. Een inleiding tot de vergelijkende studie der verschillende meetkunden. Tweede druk. P. Noordhoff, Groningen, 1925; 151 blz.

De tweede druk van dit bekende werkje is in hoofdzaak gelijk aan den eersten, echter hier en daar niet onbelangrijk uitgebreid. Het kan weinig nut hebben op deze plaats een in bijzonderheden gaande opsomming te geven van de behandelde stof. Slechts de hoofdgedachte zij aangeduid. De schrijver laat zien, dat de gewone planimetrie en stereometrie slechts een klein gedeelte van de meetkunde vormen. In hoofdstuk I gebeurt dit door met het aantal afmetingen boven 3 te gaan en in de eerste plaats dus te spreken over de meetkunde in een (lineaire) vierdimensionale ruimte. Hieraan ontleent het boek zijn titel. In hoofdstuk II wordt nagegaan welke vormen de meetkunde aanneemt als men het bekende axioma, dat door een punt buiten een rechte één en niet meer dan één daaraan evenwijdige rechte gaat, vervangt door de aannamè, dat er geen dergelijke rechte bestaat, of wel dat er meer dan één zijn. Dit leidt tot de z.g. niet-Euclidische meetkenden.

Het is den schrijver met zijn buitengewone didaktische gaven gelukt een en ander zeer helder uiteen te zetten, daarbij slechts elementaire mathematische kennis bij zijn lezers onderstellende.

Een enkele maal laat de strengheid van formuleering te wenschen, b.v. op pag. 2 waar een punt bepaald wordt als een groep van getallen, i.p.v. een geordende groep van getallen. Over andere details zullen de meeningen allicht uiteenloopen, b.v. in hoeverre

de definitie op pag. 35: „*een richting is niets anders dan een oneindig ver punt*” gewenscht is.

Het boek bevat een groot aantal hoogst interessante historische bijzonderheden, welke op gezellige wijze verteld, ongetwijfeld door alle lezers worden gesavoureed. Mogelijk echter schuilt hier een gevaar. De charmante verhaaltjes nemen de volle aandacht en de mathematische gedachtengang wordt onderbroken. Dit bezwaar klemmt te meer waar de lezing voor velen de eerste kennismaking met een nieuw onderwerp is en de inhoud van het boek noodzakelijkerwijze eenigszins fragmentarisch.

Deze laatste opmerking werd met tegenzin neergeschreven en om op eenig punt van kritiek nadruk te leggen zou zeker ondankbaar zijn. Professor de Vries heeft de mathematische wereld in Nederland zeer aan zich verplicht door op eenvoudige wijze, zonder droge axiomatic of ingewikkelde analyse eenige hoogst belangrijke onderwerpen in te leiden. Aan ieder die meetkunde-onderwijs heeft te geven, kan lezing en zoo noodig bestudeering van dit boek ten sterkste worden aanbevolen.

B. P. H.

Dr. Hk. de Vries en P. Wijdenes. Leerboek der Beschrijvende Meetkunde. Deel II. Groningen, P. Noordhoff, 1925.

Wanneer te zijner tijd een herdruk zal verschijnen van het Leerboek der Beschrijvende Meetkunde van van Pesch — Wijdenes, zal dit, eveneens bewerkt door de heeren de Vries en Wijdenes, het eerste deel van het werk vormen, waarvan het tweede thans het licht heeft gezien. Het is een goede gedachte geweest, dit tweede deel reeds nu te publiceeren: het voorziet inderdaad, zooals het voorbericht verklaart, in een leemte, die in de overigens langzamerhand vrij volledige leerboeklitteratuur voor het examen KI nog bestond. Met het oog op dat examen is het boek voornamelijk bewerkt; het is echter tevens bedoeld als handleiding voor de N acten en het bevat daardoor enkele onderwerpen, die buiten de stof voor KI vallen.

Gedacht als vervolg op het leerboek van van Pesch — Wijdenes¹⁾ brengt het werk eerst een hoofdstuk, waarin de daar

¹⁾ Leerboek der Beschrijvende Meetkunde door Prof. Dr. A. J. van Pesch. 4^e druk, bewerkt door P. Wijdenes. P. Noordhoff, 1916, Groningen.

behandelde leerstof een noodzakelijke aanvulling ondergaat door de behandeling van de verwantschap der Affiniteit in de Beschrijvende Meetkunde. Als praktische toepassing daarvan wordt de bespreking gegeven van een aantal schaduwconstructies aan de hand van fraaie figuren, die aan een artikel van den heer H. Turkstra in het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde ontleend zijn ¹⁾). Het tweede hoofdstuk, voortbouwende op de fundamenteele vraagstukken over den bol, die reeds in het eerste deel behandeld zijn, bevat verschillende constructies, waarbij bollen, kegels en cylinders een rol spelen; het derde bespreekt de doorsnijding met een plat vlak van lichamen, die door platte vlakken begrensd worden en van omwentelingscylinders en -kegels, waarbij de stelling van Dandelin ter sprake komt; in het vierde wordt de onderlinge doorsnijding van bollen, kegels en cylinders uiteengezet, waarvan, na een korte behandeling van de doorsnede van twee tweedegraadsoppervlakken in het algemeen, als toepassing verschillende vraagstukken betreffende de slagschaduw van een oppervlak op zich zelf worden opgelost. Hoofdstuk V bevat een, meer in het bijzonder met het oog op de studie voor de N-acten opgenomen en daardoor zeer elementair gehouden bespreking van omwentelingsoppervlakken (torus en eenbladige omwentelingshyperboloïde), regelvlakken (eenbladige hyperboloïde en hyperbolische paraboloïde, normalenoppervlak en conoiden) en schroefoppervlakken. Een uitvoerig zesde hoofdstuk brengt den lezer ten slotte in kennis met de beginselen van de scheeve parallelprojectie, van de axonometrie en van de centrale projectie, om met enkele bladzijden over perspectief te eindigen.

Een groot aantal vraagstukken geeft ruimschoots gelegenheid tot de, in de Beschrijvende Meetkunde meer nog dan ergens anders, onontbeerlijke oefening in het praktische toepassen van het juist bestudeerde onderwerp. Het boek is over het algemeen zeer helder en bevattelijk geschreven en het bezit de, voor een leerboek der Beschrijvende Meetkunde niet hoog genoeg te roemen eigenschap, dat het met voortreffelijke teekeningen verlucht is. Ik twijfel dan ook niet, of het zal velen de studie voor de acte KI vergemakkelijken en veraangename.

¹⁾ H. Turkstra, Schaduwconstructies. N. T. v. W. XI, 5; 365—390.

Gehoor gevende aan het door de schrijvers in het Voorbericht uitgesproken verzoek, om eventueele op- en aanmerkingen hun niet te onthouden, zou ik nog de volgende algemeene beschouwingen over den opzet van het werk in hunne aandacht willen aanbevelen.

Het schrijven van een leerboek der Beschrijvende Meetkunde voor lezers, bij welke men niet de kennis van de analytische en synthetische meetkunde eener ruimte van drie afmetingen en van de differentiaalmeetkunde aanwezig mag onderstellen, zal steeds de moeilijkheid doen rijzen, dat men telkens weer onderwerpen moet behandelen, die voor volledig begrip die kennis vereischen. Volkomen oplosbaar is die moeilijkheid uit den aard der zaak niet: het is onvermijdelijk, dat menigmaal het streng wiskundige betoog zal moeten worden vervangen door een redeneering, die het resultaat slechts min of meer aannemelijk maakt en die daartoe beurtelings op het voorstellingsvermogen van den lezer, op zijn goedgeloovigheid en op zijn gemis aan kritiek een beroep doet.

De vraag kan nu echter worden gesteld, of de schrijvers van het leerboek, dat ons thans bezig houdt, niet menigmaal met het doen van dat beroep wat al te ver zijn gegaan en of zij wel, telkens als zij het smalle, maar veilige pad der strenge mathesis verlieten, als richtsnoer op hun gevaarlijken weg den gulden regel in acht hebben genomen; dat wiskundige exactheid niet zoozeer daarin bestaat, dat men alles bewijst, maar wel daarin, dat men steeds duidelijk uitspreekt, wat wel en wat niet bewezen is.

Men is geneigd, hieraan te twijfelen, als men b.v. de behandeling nagaat van het begrip raakvlak aan een oppervlak en van de daarmee samenhangende onderwerpen. De lezer, die in de elementaire Stereometrie vertrouwd is geworden met het bestaan van raakvlakken aan bollen, kegels en cylinders, zal zich wellicht door de redeneering, waardoor op blz. 101 wordt afgeleid, dat de doorsnede van twee kegels met gemeenschappelijk raakvlak in het raakpunt een dubbelpunt heeft, wel laten overtuigen en hij zal misschien ook wel op blz. 102 het huiselijk verhaal van het cirkeltje en het ellipsje, welker middelpunten ongeveer samenvallen, willen aanvaarden, al zal hij zich misschien wel eens afvragen, of dit nu de onaantastbare strengheid der mathesis is, waarvan hij zooveel heeft gehoord. Maar wat zullen we van hem denken, als hij dan niet terugdeinst voor de onmiddellijk daarop volgende algemeene conclusie, dat voor ieder tweetal oppervlakken, die elkaar in een punt R aanraken en in de

onmiddellijke omgeving van R een doorsnijding hebben, de doorsnede in R een dubbelpunt heeft?

Niet eens alleen om het volmaakt ongemotiveerde van de gevolgtrekking, maar ook al om dat „elkaar raken” van algemeene oppervlakken. Kent hij dit begrip? Kan hij weten, dat de raaklijnen, in een punt van een oppervlak getrokken aan kromme lijnen op het oppervlak door dat punt, in het algemeen in een plat vlak liggen en is het goed, hem er toe te willen verleiden, dat hij dit vanzelfsprekend vindt?

Eerst op blz. 123 wordt de vraag gesteld, of dit inderdaad vanzelfsprekend is, maar ook dan mist men de scherpe formulering van de stelling, die het bestaan van zulk een raakvlak voor een gewoon punt van het oppervlak uitspreekt en de waarschuwing, dat het bewijs hiervan in het boek niet geleverd kan worden. Inplaats daarvan wordt er eigenlijk wat om de zaak heengepraat: er wordt op gewezen, dat er punten zijn, waarbij niet alle raaklijnen in een plat vlak liggen, waarbij als voorbeeld de kegelpunten worden aangehaald, die bij een torus kunnen optreden en dat een raakvlak wel tevens snijvlak zijn kan. Over die kegelpunten is even te voren meegedeeld, dat ze dubbelpunten voor het oppervlak zijn, maar kan de lezer weten, wat een dubbelpunt van een oppervlak is?

Dat de doorsnijding van een oppervlak met een raakvlak in het algemeen in het raakpunt een dubbelpunt heeft, wordt voor het geval van den torus door een beroep op de voorstelling aannemelijk gemaakt, waarna het resultaat met de gemoedelijke verzekering, dat het in het algemeen zoo gaat, wel wat lichtvaardig als in den regel geldig wordt verklaard. Ook hier ontbreekt de waarschuwing aan den lezer, dat het betoog, hoe overtuigend ook voorgedragen, er geen aanspraak op kan maken, een bewijs te zijn en wordt verzuimd, zijn aandacht te vestigen op het onontbeerlijke eener *analytische* behandeling van deze onderwerpen.

Soortgelijke opmerkingen als de bovenstaande kan men ook op andere plaatsen maken. Ik wil volstaan met te wijzen op de luchtigheid, waarmee op blz. 26 in enkele regels de ontwikkelbare oppervlakken worden ingevoerd (moet de lezer zich de ontwikkelbaarheid voorstellen of moet hij haar gelooven?) en op de, ook volgens de schrijvers, „zeer elementaire” behandeling van de hyperboloïde en de hyperbolische paraboloiden. Overal krijgt men den indruk, alsof de schrijvers er op uit zijn, de talrijke moeilijkheden, die zij zelve

in de onderwerpen, die zij behandelen, aanwezig weten, voor den lezer te verbloemen, wat hun, dank zij hun levendigen betoogtrant, naar ik vrees, maar al te goed zal gelukken.

Een deugd van het boek vind ik dit echter niet: de exactheid der mathesis eischt, dat men, indien men door omstandigheden gedwongen is, den lezer met een onvolkomen betoog genoeg te laten nemen, althans het besef dier onvolkomenheid in hem wekt.

Niet steeds trouwens lijkt die onvolkomenheid werkelijk onvermijdelijk; wanneer men rekening houdt met de wiskundige ontwikkeling, die bij den KI candidaat toch aanwezig mag worden ondersteld en als vaststaand aanneemt, dat het belang der waarschijnlijk vaak wiskundig gebrekkig onderlegde aspiranten tot een N acte toch zeker niet zwaar genoeg heeft mogen wegen, om er in dit boek de belangen der mathesis aan op te offeren, vraagt men zich van tijd tot tijd wel eens af, waarom de bewijsvoering niet wat exacter of vollediger kon worden gegeven en waarom de schrijvers niet wat dieper op de zaak ingaan, om daardoor het zoo gewenschte verband met andere gebieden der wiskunde, die de lezer tegelijkertijd bestudeert, te versterken.

Zoo is het niet duidelijk, waarom op pag. 71 niet uiteengezet kon worden, waarom de projecties van brandpunten en richtlijnen eener ellips niet opv. brandpunten en richtlijnen der projectie zijn, waarom op blz. 128 in zoo geheimzinnige termen over de isotrope punten van een plat vlak moest worden gesproken en waarom op blz. 154 het bewijs achterwege moest blijven, dat de verticale projectie van een schroeflijn op een omwentelingscylinder, die met zijn grondvlak op het horizontale projectievlak staat, een sinusoïde is. Zoo valt ook te betreuren, dat, waar van den gemiddelden lezer toch zeker wel eenige kennis van de beginselen der projectieve meetkunde mag worden verwacht, op deze kennis geen beroep wordt gedaan bij de behandeling van de centrale projectie van den cirkel, die nu wat erg beknopt gebleven is.

Niet onwaarschijnlijk echter moeten beperkingen als de laatstgenoemde eerder beschouwd worden als een gevolg van den wensch der schrijvers, om hun leerboek in ieder geval beknopt te houden, een wensch, die ook op tal van andere plaatsen tot uiting komt, maar die, naar mijn meening, de verdiensten van het werk menig-

maal verzwakt. Het meest valt dit in het oog, wanneer men het boek vergelijkt met het Leerboek der Beschrijvende Meetkunde van Dr. Hk. de Vries¹⁾), waarvan het tot op zekere hoogte toch een verkorte en vereenvoudigde uitgave vormt en wanneer men dan opmerkt, dat daar menigmaal uitvoerige en voor het juiste begrip onmisbare uiteenzettingen en toelichtingen worden gegeven, die in het thans verschenen werk ontbreken. Zoo wordt b.v. de spreekwijze der oneindig verre elementen, die in het grootere werk met zorg werd ingevoerd, hier van den aanvang af zonder motivering of rechtvaardiging gebruikt, terwijl het toch den schrijvers niet onbekend kan zijn, hoezeer de lichtzinnigheid, waarmee het onontwikkelde mathematische denken met het oneindige omgaat, het correctief der streng logische behandeling vereischt. Opvallend is het ook, dat de figuren, die in axonometrische projectie een lijn met hare projecties en een vlak met hare doorgangen afbeelden, in het uitgebreidere werk uitvoerig worden toegelicht, in het beknoptere echter zonder die toelichting worden gegeven (blz. 184 seq.).

Ik zou thans nog enkele onderwerpen willen noemen, welker behandeling ik in het werk tot mijn leedwezen heb gemist. Voor eerst zou het, dunkt mij, zoo wenschelijk geweest zijn, indien in een leerboek, dat toch in de eerste plaats voor a.s. wiskundeleeraren bestemd is, wat meer aandacht ware gewijd aan den samenhang van het z.g. stereometrische teekenen met de Beschrijvende Meetkunde. De schrijvers bespreken weliswaar in § 68 in het kort de afbeeldingsmethode, volgens welke „bijna zonder uitzondering” stereometrische figuren worden ontworpen (een bijzondere scheeve axonometrie, identiek met een scheeve parallelprojectie met bepaalden projectie-driehoek; komen trouwens hiernaast niet veel figuren in rechte axonometrie voor?), maar ik vrees, dat ze daarmee niet genoeg doen ter bestrijding van de vele wanbegrippen, die over stereometrisch teekenen plegen voor te komen. Te meer niet, omdat ze, natuurlijk geheel tegen hun bedoeling in, een dier wanbegrippen, bestaande in de tegenstelling, die men meent te mogen maken tusschen uit de vrije hand geteekende en daardoor veelal slordige stereometrische schetsen en de nette, met behulp van passer en

¹⁾ Leerboek der Beschrijvende Meetkunde door Dr. H. de Vries. Deel I. Tweede druk, 1919. Deel II. Tweede druk, 1922. P. Noordhoff, Groningen.

lineaal geconstrueerde B. M. teekeningen, zelf in de hand werken, door op blz. 184 te zeggen, dat de (axonometrische) projectiefiguur schijnbaar „slechts een stereometrische schets” is, maar in werkelijkheid een constructiefiguur, terwijl ze, mijns inziens, beter hadden gedaan, hier een opmerking te herhalen, die ze reeds bij de bespreking van de scheeve parallelprojectie hadden kunnen maken: dat namelijk de stereometrische figuren, van welker vervaardiging in het elementaire onderwijs nooit voldoende rekenschap kon worden gegeven, niets anders zijn dan projectiefiguren in scheeve parallelprojectie, scheeve of rechte axonometrie, dat in die figuren alle constructies, die affiene eigenschappen betreffen, exact uitvoerbaar zijn, dat metrische constructies weliswaar niet kunnen worden verricht zonder toevoeging of van een horizontale orthogonale parallelprojectie of van een tafreeldriehoek met assen, maar dat de stereometriedocent door veelvuldig construeeren zijner figuren volgens de methodes der B. M. zich toch de vaardigheid kan verwerven of de regels kan afleiden, die hem in staat stellen, de resultaten der exacte constructie althans te benaderen.

In het bijzonder ware, dunkt mij, een dergelijke beschouwingswijze op haar plaats geweest, waar het het stereometrische teekenen van omwentelingscylanders en -kegels en van bollen betreft, omdat men juist op dit gebied de zonderlingste voorbeelden van vermenig van verschillende projectie-methodes in één figuur aantreft. Om enkele voorbeelden te noemen: teekent men een omwentelingskegel zoo, dat men het grondvlak als ellips afbeeldt met horizontale as en den schijnbaren omtrek vormt door uit den op het verlengde van de kleine as afgebeelden top raaklijnen aan die ellips te trekken, dan kan de middellijn van het grondvlak, die loodrecht op het tafreel staat, niet onder 30° of 45° met de groote as geteekend worden; vraagt men iemand een bol te teekenen met horizontaal raakvlak, dan zal men vaak den bol in orthogonale, het raakvlak in scheeve parallelprojectie geteekend vinden; tenslotte de bekende hemelspheren uit de Kosmographie, waar de eerste verticaal zich niet als ellips kan voordoen, als men den meridiaan als cirkel en den horizon als ellips met horizontale groote as teekent.

Opgemerkt moge nog worden, dat wellicht een korte behandeling der stereographische projectie niet misplaatst zou zijn geweest.

Aangaande de historische behandeling van het onderwerp wekt blz. 3 verwachtingen op, die niet worden verwezenlijkt. Daar wordt

over Euler en Möbius bericht en wordt zelfs de, naar het mij voorkomt, voor ieder, die geen zeer diepe studie van de geschiedenis der wiskunde maakt, hoogst oninteressante mededeeling gedaan, dat Möbius den naam collineatie gekozen heeft op aanraden van zijn vriend en collega Prof. W e i s k e (van, wien ik moet bekennen, nog nooit te hebben gehoord). Verderop vernemen we echter nooit meer een woord over de historie.

Ten slotte mogen de schrijvers mij veroorloven, hunne aandacht te vestigen op enkele verspreide onnauwkeurigheden of onjuistheden (waarbij ik de, niet talrijke, drukfouten maar weglaat):

Op blz. 10 wordt van twee lijnen gezegd, dat ze antiparallel zijn. Dit beteekent niets.

Op blz. 66 wordt de lezer uitgenoodigd de ligging der brandpunten na te gaan; deze punten worden echter eerst op blz. 67 seq. ingevoerd.

De uitdrukkingen op blz. 65: *hierop* (sc. *op de horizontale projectie*) *het punt P_2 neer te laten*; en op blz. 69: *P en Q beschrijven horizontale vlakken*; lijken me niet gelukkig.

Op blz. 73 staat, dat *ik val* in het Grieksch *ptoo* is; dit is onjuist; het is *πίπτω*.

Op blz. 140 en 141 staat de hinderlijke en blijkbaar onuitroeibare¹⁾ schrijffout *parallelōpipedum* voor *parallelepipedum*. (*παράλληλ-επί-πεδον*)²⁾.

Op blz. 151 leest men, dat de cirkel niet rectificeerbaar is, omdat π *onmeetbaar* is. Kan men ook de diagonaal van een vierkant niet construeeren, als de zijde gegeven is?

De zin op blz. 157: *Doorgaande op de opmerking..... snijdt het (oppervlak) ieder horizontaal vlak volgens twee evolventen van den cirkel.....* moge aan de aandacht van Charivarius ontsnappen.

De termen *schijnbare omtrek* en *evolvent* zijn niet gedefinieerd.

Op blz. 175 bevreedde mij de uitdrukking: *standhoeken van de drie assen met hare projecties op het tafreel*.

Op blz. 225 wordt wel vermeld, dat de verwantschap van een vlakke figuur in neergeslagen toestand met haar centrale projectie

1) Ze komt ook weer voor in de opgaven voor Stereometrie op het Schriftelijk Eindexamen der H. B.-Scholen in 1925.

2) 't Is toch werkelijk een drukfout; zie Bijvoegsel Jrg. I, blz. 80 en Molenbroek-Wijdenes, Stereometrie. W.

een centrale collineatie is, maar deze zelfde opmerking ontbreekt in de vroegere § 74, waar het verband van de centrale en de horizontale projecties besproken wordt.

Ik meen hiermee aan het verzoek der redactie, het werk te bespreken, te hebben voldaan. Uit den aard der zaak nemen bedenkingen, die men inbrengt, meer ruimte in, dan loftuitingen, die men uitspreekt. Ter voorkoming van misverstand moge daarom hier nog de opmerking worden gemaakt, dat in mijn waardeering de lof de bezwaren verre overheerscht en dat ik het boek een aanwinst van de Nederlandsche leerboeklitteratuur acht.

E. J. Dijksterhuis.

VERHOUDINGEN EN EVENREDIGHEDEN IN DE „ARITHMETICA” VAN VAN DER SCHUERE.

De lezer vindt hieronder afgedrukt, hoe in 1600 Iaques van der Schuere in zijn „Arithmetica oft Reken-const” de leer der verhoudingen en der evenredigheden behandelde.¹⁾ Zooals men ziet kenmerkt de methode zich door een gemakkelijke verscheidenheid van sesquipedalia verba. De toepassingen bepalen zich tot de berekening van gemiddelden en middenevenredigen. De toepassing van evenredigheden op de oplossing van ingekleede vraagstukken stond (en staat nog wel) als „Regel van drieën” bekend, en werd als een afzonderlijk hoofdstuk behandeld.

J. H. S.

PROPORTIO.

Hebt ghy Progressio gheleert, end'vvel verstaen,
Soo vvilt oock nu met lust Proportio aengaen,
End' siet vvat reden dat daer heeft het een ghetal;
Om t' ander zijn gelijk, t' vvelck u getoont zijn sal.

¹⁾ Zie het artikel van A. Hallema, in jaargang I van dit Bijvoegsel, bldz. 122 en 162.

Zoo juist verscheen :

Deel 10 van

Noordhoff's Verzameling van Wiskundige Werken :

MODERNE INTEGRAALREKENING.

(Inleiding tot de leer der Puntverzamelingen en der Integralen van Lebesgue)

door

Dr. C. H. VAN OS,

Hoogleraar a. d. Technische Hoogeschool te Delft.

Prijs gebonden f 5.50.

Voor abonné's Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde en
Christiaan Huygens tot 1 December a.s. . . f 4.50.

Zoo juist verscheen :

BEKNOPT HOOGERE ALGEBRA

door

Prof. Dr. F. SCHUH.

EERSTE STUK.

Het boek voor K I, Delft en de Hoogeschool.

Prijs ingenaaid f 8.—.

Voor int. op het N. T. v. W. en Christiaan Huygens f 7.—.

UITGAVEN VAN P. NOORDHOFF TE GRONINGEN

HET boek voor kweek- en normaal-
scholen, voor de hoofdkate en voor
nijverheidsacten.

Verschenen:

BEKNOPTTE STEREOMETRIE

DOOR

P. WIJDENES.

Groot 90 bladz. met 91 fraaie figuren.

Prijs geb. f 1.50.

Allen, die belang stellen in deze mooie uitgave, wordt verzocht, een pres.-ex. aan te vragen aan den uitgever of aan den schrijver.

Zoo juist verscheen:

BEKNOPTTE ANALYTISCHE MEETKUNDE

DOOR

Prof. Dr. J. G. RUTGERS.

A. HET PLATTE VLAK

98 figuren en 225 vraagst. m. antw.

B. DE RUIMTE

40 figuren en 130 vraagst. m. antw.

Prijs geb. f 9.00.

Voor int. N. T. v. W. en Chr. Huygens tot 1 Jan. 1926 f 8.00.

Zoo juist verscheen:

ALGEBRA VOOR DE HOOGERE HANDELSSCHOLEN EN VOOR DE AKTE K XII.

DOOR

P. WIJDENES en Dr. P. G. VAN DE VLIET.

Prijs geb. f 2.50.

UITGAVEN VAN P. NOORDHOFF TE GRONINGEN.