BIJVOEGSEL

VAN HET NIEUW TIJDSCHRIFT
□ □ VOOR WISKUNDE □ □
GEWIJD AAN ONDERWIJSBELANGEN

ONDER LEIDING VAN

J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

MET MEDEWERKING VAN

Dr. H. J. E. BETH
DEVENTER

Dr. E. J. DIJKSTERHUIS
OISTERWIJK

Dr. B. P. HAALMEIJER
AMSTERDAM

Dr. D. J. E. SCHREK
UTRECHT

Dr. P. DE VAERE
BRUSSEL

Dr. D. P. A. VERRIJP
ARNHEM

1e JAARGANG 1924/25, Nr. 4

P. NOORDHOFF — GRONINGEN

Het Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde verschijnt in zes tweemaandelijksche afleveringen, samen 10 à 12 vel druks. Prijs *f* 3.— per jaargang. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6.—) of op „Christiaan Huygens" (*f* 8.—) zijn ingeteekend, betalen *f* 2.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam, Saxen-Weimarlaan 46; Tel. 28341. Aangeteekende zendingen met bijvoeging: „Bijkantoor Saxen-Weimarlaan 48".

Het honorarium voor geplaatste artikelen bedraagt *f* 20.— per vel.

De prijs per 25 overdrukken of gedeelten van 25 overdrukken bedraagt *f* 3,50 per vel druks *in het vel gedrukt*. Gedeelten van een vel worden als een geheel vel berekend. Worden de overdrukken buiten het vel verlangd, dan wordt voor het afzonderlijk drukken bovendien *f* 6.— per vel druks in rekening gebracht.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

INHOUD.

TWEE (GONIO- EN) TRIGONOMETRIE-BOEKEN.

J. B. N. Ruben, Beknopt Leerboek der Vlakke Driehoeksmeting voor H. B. S. met 5-j. c., gymnasia en kweekscholen; tevens voorlooper van het Handboek; prijs, gecartonneerd *f* 2,50.

Dezelfde Schrijver, Handboek der Vlakke Driehoeksmeting voor hen, die voor een acte Wiskunde studeeren, 2e druk; prijs, gecartonneerd *f* 3,50. Beide uitgaven van H. J. Spruyt's Uitgeversmaatschappij, Amsterdam — 1925.

Toen de Redactie van het Bijvoegsel mij verzocht een beoordeeling te geven van deze beide werken, heb ik geen oogenblik geaarzeld om daaraan te voldoen. Ik had wel eens vernomen, dat de heer Ruben zoo ongeveer permanent examinator is voor de Lagere Acte Wiskunde; bovendien had ik ook eens vernomen (gelezen had ik ze niet), dat er van genoemden heer een minder gunstige beoordeeling verschenen was van boeken, die in mijn oogen nu niet precies een bijzonder sieraad zijn van den Nederlandschen paedagogisch-wiskundigen boekenschat. Dit alles plaatste voor mij den heer R. op een zoodanig niveau, dat ik meende mij wel met een beoordeeling zijner pennevruchten te kunnen inlaten. Deze uitdrukking klinkt misschien eenigszins aanmatigend; ik zou echter zeggen, dat wij leeraren wel zooveel aanmatiging mogen hebben, dat wij b.v. nu niet in een beoordeeling van een eventueel uitgegeven boek van een willekeurigen leerling eener H. B. S. zouden treden.

Een paar dagen, nadat ik mijn jawoord aan de Redactie gegeven had, ben ik eens aan het lezen gegaan, volgens voorschrift het eerst van het Beknopt Leerboek. Ik moet toen echter wel heele rare geluiden hebben uitgestooten, want er werd mij na een poosje gevraagd, wat er toch in mijn kamer aan de hand was. Ik heb toen geantwoord, dat mij, na een derde van een eeuw bij het onderwijs te hebben doorgebracht, gebleken was, dat ik mij zeker in de kenmerken van goed paedagogisch en methodisch wiskunde-onderwijs moest vergist hebben, want dat, wat ik pas gelezen had, mij aan mij zelf had doen twijfelen. Toen ik, ten einde raad, mijn wedervaren aan de Redactie schreef, kreeg ik ten antwoord, dat 't met mijn verwarring wel zóo'n vaart niet loopen zou. Als ik bij mijn beoordeeling àl te gekke dingen zou zeggen, zou men mij wel, door schrapping van een en ander, voor 't publiek en voor mijn familie sauveeren.

Na dit bemoedigend woord van de Redactie [1]) heb ik gemeend het best aan mijn opdracht te voldoen door van een aantal bladzijden maar eens precies alles te zeggen, wat ik er van vind. Opdat de lezer mijn oordeel kan volgen, zal 't m. i. noodig zijn, dat ik telkens geheele zinnen overschrijf. Ik begin te lezen:

„Bij enkele vraagstukken uit de meetkunde hebben we, wanneer „o.a. een hoek van een driehoek gegeven was, een betrekking „tusschen de zijden kunnen vinden. Wij hebben toen uit 2 zijden „en een hoek een derde zijde kunnen vinden.

Hier stoot ik al dadelijk op de woorden „o.a." Wat, hebben we dan wel eens een betrekking tusschen de *zijden* (zonder meer) van een driehoek „gevonden", zoo *geen hoek* gegeven was? [2]) Zoo'n hoek moet altijd òf impliciet of expliciet gegeven zijn. Dit „o.a." kan nu wel op „expliciet" slaan, maar dan moet 't toch duidelijk gezegd zijn. Dat „toen" is ook niet fraai. Als er *nu* „toen o.a." had gestaan, was 't juister geweest. (Denk b.v. aan een driehoek met één bekende zijde, een hoek van 30° en een hoek van 45°).

„Dit ging echter slechts, als de hoek 30°, 60°, 120°, 45°, 135° „was, òf bij een gelijkbeenigen driehoek met tophoek van 36°, òf „bij een rechthoekigen driehoek met een hoek van 30° of 45°.

Dit is nu wel heel slecht gezegd. Vooreerst wordt hier de zaak zoo gedecreteerd, alsof nu wel alle hoeken genoemd zijn, die voor deze berekening mogelijk zijn, wat absoluut onjuist is. (Denk eens aan tal van *andere* hoeken, die in eenig verband staan met regelmatige veelhoeken!) En vervolgens is 't heel mal *achteraan* een rechthoekigen driehoek met een hoek van 30° of 45° te noemen. Is

---

[1]) De lezer vergeve mij dit semi-ernstige begin van mijn recensie. Ik wist heusch mijn volmaakte ernst bij de lezing van deze boeken niet steeds te bewaren.

[2]) Niet waarschijnlijk is, dat de schrijver „één" bedoeld heeft, want het handboek vermeldt het zelfde woord „een" ook.

de grond voor de mogelijkheid der berekening bij die hoeken in 't eerstgenoemde geval anders dan in 't laatste?

Wanneer iemand iets „in 't algemeen" wil zeggen, moet hij de stof wel zeer goed beheerschen en dan nog geducht oppassen. De Schrijver had m.i. beter gedaan *zijn* inleiding met een voorbeeld te beginnen.

„De goniometrie of wel hoekmeetkunde leert ons formules, die „ons in staat stellen uit 3 elementen (onder welke dus altijd hoeken „mogen voorkomen) van een driehoek de andere elementen te vin- „den door berekening.

Vooreerst is, wat hier bedoeld wordt, toch niet de gangbare opvatting van de beteekenis van de „goniometrie" (hoekmeetkunde) maar van de „trigonometrie" (driehoeksmeting). Wat goniometrie is wordt feitelijk niet gezegd en wat trigonometrie betreft, zou wel *altijd* 't doel *berekening* van elementen zijn? Bovendien is er nog een bezwaar. De argelooze lezer mocht zich eens verbeelden, dat die formules *alleen* hem in 't beloofde land zouden brengen. Zonder hoogere wiskunde en *zonder tafels* zou hij in afzienbaren tijd niet ver komen!

„Projecteert men één been van een hoek (gemeten van het hoek- „punt tot een zeker punt) op het andere, dan ontstaat een recht- „hoekige driehoek. De hoek zal dan bepaald zijn, indien de ver- „houding tusschen 2 zijden van dien rechthoekigen driehoek bekend „is. Die verhoudingen heeft men de volgende namen gegeven: „sinus enz.

Dit is een slordige inzet. Wordt hier een willekeurige hoek bedoeld of een scherpe? Het lijkt wel, dat de Schr. een scherpen bedoelt (men moet dit wel opmaken uit den zin, waarin 't woord „bepaald" voorkomt), maar hij zegt 't niet. Verder hebben de namen „sinus enz." op zichzelf niets te beteekenen. Uitdrukkelijk moet er bij 't laatste woord verhoudingen worden vermeld „t/o van dien hoek".

De Schr. laat nu iets volgen aangaande de beteekenis der woorden sinus, cosinus en tangens, iets waaraan *op dit moment* niemand wat heeft. „Sinus", zegt hij, „is de latijnsche vertaling van een Arabisch woord, cosinus beteekent complements-sinus...... De naam tangens is 't eerst aangegeven door......"

Nadat ons op een volgende bladzijde verteld wordt, dat de notaties a, b, c, α, β, γ als elementen van een driehoek van EULER zijn (waar de man al niet beroemd door geworden is!!) en ons genoemd zijn (rechth. driehoek) sinus $\alpha = \frac{a}{c}$ enz.[1]), krijgen we *thans* als „opmerking: $\sin \alpha = \cos (90^\circ - \alpha)$ en $\operatorname{tg} \alpha = \cot (90^\circ - \alpha)$."

We mogen nu zeker wel aannemen dat de Schr. tot heden met α alleen een scherpen hoek bedoeld heeft.

§ 2. Aan het hoofd staat: „Enkele betrekkingen tusschen goniometrische verhoudingen (functies)". En in een noot: „functie = betrekking. Bij grafische voorstellingen wordt deze naam eerst recht duidelijk."

Hier moet ik toch even mijn oogen uitwrijven. Functie = betrekking?! Bij een dergelijk fundamenteel begrip als dat van „functie" met zoo'n averechtsch verkeerd woord als „betrekking" te komen aanzetten, is wel kras! Bovendien is de toevoeging hier wel een armzalige dooddoener.

In deze § worden nu voor een scherpen hoek α bewezen: 1⁰. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$; 2⁰. $\operatorname{tg} \alpha \times \cot \alpha = 1$; 3⁰. $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$; 4⁰. $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha$; 5⁰. $1 + \cot^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha$. Niet opzettelijk genoemd, maar wel gebruikt worden hierbij: $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$ en $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$. Wel, zal de heer R. zeggen, dit volgt toch direct uit mijn bepalingen van secans en cosecans (wat trouwens daar vermeld is). Toegegeven, maar waarom dan de 2ᵉ formule genoemd? Daarvan kan men toch hetzelfde zeggen! Ik krijg hier een ondeugend vermoeden: in een goed leerboek ziet de heer R. aanvankelijk *ook vijf* formules staan, maar *gedeeltelijk andere*. Ze worden daar *grondformules* genoemd. Maar er wordt dan slechts één formule gegeven met *kwadratische* termen. Zou de heer R. begrepen hebben waarom? In een goed boek staat het toch duidelijk genoeg? Welaan, de heer R. heeft gemeend ook *vijf* formules te moeten geven; hij heeft echter toevallig *drie* met kwadratische termen genomen. Laat hij nu eens aan een leerling geven $\sin \alpha = \frac{1}{2}$. Hoeveel *stel* waarden voor de overige gon. verhoudingen moet die leerling met zijn vijf formules dan vinden?!! Ho, ho, zal een lezer van mijn kritiek mij toewerpen, 't kan natuurlijk beter, maar zoo erg is 't met den Schr. niet

[1]) Nimmer zag ik staan *cotgs* (cotangens)!

gesteld: hij bedoelt toch immers *scherpe* hoeken! Goed, maar wat zie ik terstond na de genoemde formules staan (tusschen haakjes): „Later is na te gaan, of deze betrekkingen algemeen geldig zijn." Hoe is 't nu, wordt hier op twee gedachten gehinkt? Denkt de Schr. zich dus toch een voor nu en voor later gegeven algemeen geldig stel (grond?)-formules? Men zou 't wel zeggen, want hij komt later op die formules niet meer terug.

§ 3. „Over de gon. functies van hoeken tusschen 0° en 360°." De heer R. zal wel eens gehoord hebben, dat er zoo iets bestaat als „mathematische smaak." En ik heb mij wel eens laten verleiden tot de uitspraak, dat deze niet geheel vreemd is aan een *algemeen* gevoel voor smaak, sierlijkheid, elegance (zéker in algemeen wetenschappelijke zaken). Men houde 't mij ten goede, maar ik moet bekennen, dat *mijn* smaak bij de lezing van deze § geducht geweld wordt aangedaan. Ik lees vooreerst: „Van „$\angle$ POB noemen we OB het *vaste*, OP het *beweeglijke been*, dat „om O draait tegen den zin der beweging van de wijzers van „een uurwerk in.

Ik stoot mij hierbij al aan drie dingen: $\angle$ POB moet zijn $\angle$ BOP, het woord *beweeglijk* vindt ik hier een naar woord (je denkt zoo onwillekeurig aan een beweeglijken jongen) en vervolgens doet men bij de lezing van 't slot van den zin de vraag, of dit nu een wet van PERZEN en MEDEN is.

„Op het beweeglijke been neemt men een punt P en laat dit „een cirkel om O beschrijven. Den cirkel noemt men trigono„metrischen cirkel.

Hebben we hier met een uitvinding van den heer R. te doen?!

„1°. De sinus. De cirkel is door 2 middellijnen AB en CD „verdeeld in 4 quadranten. Correcter is „DC" in plaats van „CD". „BOC is het 1ᵉ quadrant.
„AOC „ „ 2ᵉ „ ." Beter: „COA."
„AOD „ „ 3ᵉ „ .
„BOD „ „ 4ᵉ „ ." Beter: „DOB."

„Nu is $\sin\alpha$ ($\alpha =$ een hoek van 't 1ᵉ qu.) $= \frac{PQ}{PO}$.

„Vraag: Waarom is $\frac{ST}{SO}$ de sinus van $\angle$ SOB (hoek van het 2ᵉ qu.)?

Heeft de Schr. tot heden slechts scherpe hoeken bedoeld, dan is die „vraag" misplaatst. Hij heeft dan zelf een „definitie" te geven, in plaats van een vraag te stellen.

„We zullen nu onderzoeken, hoe die sin. verandert, als het „beweeglijke been PO zich van BO naar links door de 4 qua„dranten beweegt, wanneer dus a achtereenvolgens een hoek in één der quadranten voorstelt.

Ik lees voor „PO" en „BO" liever „OP" en „OB". Afgezien daarvan vind ik die geheele manier van uitdrukken („naar links") slordig. Bovendien mag hier geen sprake zijn van „onderzoeken" maar van „vaststellen."

„Wij willen afspreken den sinus altijd te meten op een verticaal „en noemen den sin. positief naar boven en negatief naar beneden.

Afgezien daarvan, dat spreken van een „verticaal", van „boven" en „beneden" alleen zin heeft, wanneer eerst de aangenomen plaatsing der figuur vermeld is, is het, *zooals de Schr. de zaak behandelt*, onzin den sinus te willen meten op een „verticaal." In deze § heerscht bij hem een grove verwarring tusschen den sinus als *verhouding* en als *goniometrische lijn*. Laat de heer R. die zaak eens in een goed boek nalezen!

Zonder de volgende regels geheel over te schrijven, wil ik nog even vermelden:

„In het 3e qu. neemt de sin. weer toe van 0 tot 1 .... en is „dus negatief".

Het slot moet zeker het foutieve begin corrigeeren! Over den sinus in het 4e qu. treft men een soortgelijken zin aan.

De beschouwing over den sinus eindigt met:

„		0°	90°	180°	270°	360° enz.
„ sinus		0	1	0	1	0 (absolute waarden).

Waarom niet de werkelijke waarden opgegeven?

Er is tegen deze § nog een bezwaar aan te voeren: nergens ontmoet men de definitie van *een hoek in* (*van*) *een bepaald kwadrant*.

Laat ik verder de beschouwing van „2°. cosinus" met stilzwijgen voorbijgaan.

Bij „3°. tangens" ontmoet ik „$\operatorname{tg} \alpha = \frac{PQ}{QO} = \frac{EB}{OB}$", waarbij QO en OB niet correspondeeren, omdat ze tegengesteld gericht zijn. Dergelijke verwarringen komen meer voor; ik ga ze maar voorbij. De heer R. zegt misschien: dat doet er bij mij niet toe. Ik antwoord dan echter: 't Was te wenschen, dat 't er bij hem wel toe deed. Verder valt op te merken, dat de Schr. totaal zwijgt over den overgang van teeken, die bij het oneindig worden van tangens en cotangens plaats vindt. Een opmerking daarover (vooral, omdat die overgang bij beide juist andersom plaats heeft) is toch zeker wel op haar plaats.

Op blz. 13 worden de grafische voorstellingen gegeven van $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ en $y = \cot x$. Ik heb een principieel bezwaar tegen deze teekeningen, dat ik kan neerleggen in deze vraag: Welk verband bestaat er tusschen de eenheid in de richting der X-as en die in de richting der Y-as?! Hoe behoort 't?

„§ 4. Een hoek aftrekken van 180° noem ik een herleiding „van 't 1e in 't 2e kwadrant. Van een hoek 180° aftrekken of „bij een hoek 180° optellen: een herleiding van 't 1e in „'t 3e kw. Een hoek van 360° aftrekken: een herleiding van „'t 1e in 't 4e kw.

Nu kan de heer R. dat wel zoo „noemen", maar is dat „noemen" door de realiteit wel voldoende gemotiveerd? Dit laatste heeft hij eerst aan te toonen. Nu demonstreert hij wel met een *voorbeeld* [$\sin(\alpha + 270°) = -\sin(90° - \alpha) = -\cos\alpha$], dat dit met de teekens (hier komt 't bij deze materie toch hoofdzakelijk op aan) uitkomt, maar verbeeldt de heer R. zich nu, dat hij een algemeen geldig bewijs heeft gegeven? Zoo is 't met alle formules, die in deze § voorkomen. Nergens treft men algemeene bewijzen aan.

§ 5 behandelt „de hoofdformules der goniometrie." Eerst krijgt men sinus- en cosinusregel, waarvan de laatste (zeker in dit boek) met die hoofdformules niets van doen heeft. De bewijzen der hoofdformules worden gegeven door middel van Ptolemaeus, tegen welke bewijzen een gewichtig bezwaar is in te brengen. In de *theorie* behooren ze daarom niet in de eerste plaats thuis. Hetzelfde bezwaar is in te brengen tegen de afleiding uit $c = b\cos A + a\cos B$. Aan het einde der § blijkt, dat de Schr. wel iets van het gewichtige bezwaar tegen zijn bewijsvoering gevoeld heeft ('t gebrek aan algemeenheid; à propos: hoeveel combinaties van bijzondere gevallen zijn wel mogelijk?!) is 't bezwaar toch niet voldoende tot hem doorgedrongen; immers na zijn 2e bewijs (uit een driehoek) gaat hij zeggen: „is β negatief dan krijgen we . . . . !!

Op blz. 32 zie ik onderaan de bladzijde een aardige opmerking, eigenlijk een vraag: „Gaat deze formule ($\operatorname{tg} m\alpha + \operatorname{tg} m\beta + \operatorname{tg} m\gamma = \operatorname{tg} m\alpha \operatorname{tg} m\beta \operatorname{tg} m\gamma$ voor $\alpha + \beta + \gamma = 180°$) altijd door? Neem eens $\alpha=\beta=\gamma=30^\circ$ en $m=3$". Het komt mij voor, dat die vraag *hier* na zoo *weinig voorbereiding* misplaatst is. Ik zou 't antwoord van den heer R. zelf op deze vraag wel eens willen hooren!

Op blz. 33 wordt voor 't bewijzen van identiteiten (trigonometrische formules) de „R-methode" aanbevolen, alsof men hier met iets bijzonders te doen heeft en zóó verre de voorkeur verdient b.v. boven 't uitdrukken van de zijden in één zijde en goniom. verhoudingen van de hoeken! Men handele in die bewijzen naar omstandigheden! Zoo worden 2 bladzijden gewijd aan de oplossing van $a=b$ uit $a \operatorname{tg} A+b \operatorname{tg} B=(a+b) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+B)$. [L. O. 1916]. Laat ik den heer R. de volgende ongekunstelde oplossing aan de hand doen:

Uit 't gegeven volgt terstond:

$$a\{\operatorname{tg} A-\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A+B)\}=a . \frac{\sin B}{\sin A}\{\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A+B)-\operatorname{tg} B\}=0.$$

Tangenten in sin. en cos. uitdrukkende:

$$a: \frac{(\sin A \cos B-\cos A \sin B) \sin \frac{1}{2}(A-B)}{\sin A \cos A \cos B \cos \frac{1}{2}(A+B)}=0$$

$$\sin (A-B)=0 \qquad \sin \tfrac{1}{2}(A-B)=0$$

$$A=B \qquad A=B.$$

Voor mijn part maakt de heer R. hier een R-methode van.

Op blz. 38 zie ik weer zoo'n omslachtig gedoe (meer dan $\frac{1}{2}$ bladzijde): „Voorbeeld IV. In welken driehoek is $I=s(s-a)$?" Zie hier mijn oplossing:

$I=sr=s(s-a) \operatorname{tg} \frac{1}{2} A$, alzoo $\operatorname{tg} \frac{1}{2} A=1$, waaruit $A=90^\circ$. (Eén regeltje!).

Op blz. 41 zie ik staan (bij het logarithmisch maken van den cosinusregel): „Nu is $\cos^2 \frac{1}{2}\gamma$ altijd $\leqq 1$." „$=$" is mis. Over het stellen van $\frac{4ab \cos^2 \frac{1}{2}\gamma}{(a+b)^2}=\sin^2 \varphi$ moet de heer R. nog eens een goed boek naslaan.

Op blz. 42 staat het logarithmisch maken van den cosinusregel door het stellen van $\frac{a-b}{a+b} \cot \frac{1}{2}\gamma=\operatorname{tg} \varphi$ [dus $=\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha-\beta)$]. Zou het nu niet de moeite waard zijn te vermelden, dat deze geheele herleiding tot niets anders leidt dan tot een formule van MOLLWEIDE?!

Op blz. 55 worden de hoeken van een driehoek berekend, zoo de 3 zijden bekend zijn. Ik zie hier logarithmen met 6 decimalen staan. Deze zijn al zeer ongebruikelijk. Ik heb hier voor mij liggen een boekje getiteld: Landmeten en waterpassen door H. J. VAN LEUSEN, Inspecteur der Heidemaatschappij te Arnhem (Voorwoord van Prof. HEUVELINK). In 't algemeen ziet men hierin logarithmen met 5 decimalen (soms ook wel met 7). Wat wil nu eigenlijk de heer R. met die logarithmen met 6 decimalen ten opzichte van de schooljeugd?! Bovendien komt op deze bladzijde voor „Opmerking. Bij deze en dergelijke bewerkingen mag het verschil zeker niet meer dan 10″ bedragen met 180°." Wat bedoelt de Schr. met dit „mag"? Eischt de practijk (en dan welke practijk) dit? Of levert deze berekening hoogstens dit verschil op? Mij dunkt, dat, mocht 't laatste de bedoeling zijn, men hiervan zoo maar niet in een vloek en een zucht van af is! Zou 't niet geraden zijn, hier maar een zéér voorzichtige uitdrukking te gebruiken?!

Op blz. 60 zien wij weer eens het gevolg van een gebrekkige methode. De Schr. wil oplossen de verg. $\cos(\varphi - \psi) = \cos\psi$ (φ onbek. en ψ bekend) en schrijft „$\varphi - \psi = \psi$ of $360° - \psi$, waaruit volgt $\varphi = 2\psi$ en $\varphi = 360°$". Had hij geschreven de volledige oplossing: $\varphi - \psi = 2k \times 180° \pm \psi$, dan had hij gekregen: $\varphi = 2\psi + 2k \times 180°$ en $\varphi = 2k \times 180°$, uit welke laatste verg. men *vooreerst* gewoon is te laten volgen $\varphi = 0°$, wat toch zeker — daar de verg als toepassing van een meetkundig vraagstuk geldt — eenvoudiger gezegd is dan $\varphi = 360°$!

Op de bladzijden 65, 66 en 67 zien we weer eens, hoe de heer R. de kunst verstaat om van eenvoudige vraagstukken minder voor de hand liggende oplossingen te geven.

„Voorbeeld I. Op de bissectrice van $\angle BAC = 2\alpha$ ligt een vast punt P ($BAP = \alpha$). BC draait om P. Bewijs, dat $\frac{1}{AC} + \frac{1}{AB} =$ $=$ constant". Laat de heer R. eens bekijken de in een paar regeltjes te vinden formule: $b_a = \frac{2bc \cos \frac{1}{2} A}{b + c}$, waarin nu $\frac{bc}{b + c}$ dus $\frac{b + c}{bc} = \frac{1}{c} + \frac{1}{b}$ constant is.

„Voorbeeld II. $\angle ABD = 90°$; $BC = a$ (C op BD); $CD = b$. Op AB een punt A te vinden, zóódat $\angle DAC = \angle CAB$." Heel natuurlijk zou zijn de oplossing: $AD^2 - AB^2 = (a + b)^2$ en $AD : AB = b : a$ enz.

„Vraag: Als $\angle DAC \neq \angle CAB$, bepaal AB dan zoo, dat b onder een maximumhoek gezien wordt.” In de één bladzijde lange oplossing zie ik nergens de waarde van AB. Het is toch zoo eenvoudig!: De cirkel door A, C en D raakt AB, dus is $AB = \sqrt{a(a+b)}$. En wat moet nu die dwaze voorwaarde „$\operatorname{tg} CAD \geqq \frac{b}{2\sqrt{a(a+b)}}$”?! Vooral dat minusteeken is kostelijk (vooral in verband met dat gelijk-teeken)!!

Op de bladzijden 75, 76 en 77 krijgt de heer R. weer eens een R-nachtmerrie!

De behandeling van den afstand van twee ontoegankelijke punten op de bladzijden 82, 83 en gedeeltelijk 84 doet heusch niet naar meer van dat soort verlangen, terwijl juist nuttige opmerkingen bij het probleem van SNELLIUS (blz. 86) ontbreken!

De afleiding van formules van den koordenvierhoek op de volgende bladzijden kan men gerust aan den leerling overlaten!

Het boek sluit — wat theorie betreft — met een behandeling van cyclometrische functies. Over de moeilijkheden, die zich hierbij voordoen, glijdt de heer R. zonder blikken of blozen heen. Tegen de usance in maakt hij 't zich met te schrijven „$\operatorname{bg} \operatorname{cosec} \sqrt{26} = \operatorname{bg} \cot \pm 5$” wel heel gemakkelijk!

Ik had een flauwe hoop. Er zijn docenten, die meenen, dat men 't met strengheid van methode bij jeugdige leerlingen niet zoo nauw moet nemen. Ik behoor tot die categorie geenszins. Ik vind 't beste (wel te onderscheiden van 't moeilijkste!) voor mijn leerlingen nog niet goed genoeg. Is de stof te moeilijk, dan zwijge men absoluut, maar ik zou niet gaarne zien, dat men mij kon verwijten, dat ik ze steenen voor brood neerzette.

Maar dit alles daargelaten. Er bestond nog de mogelijkheid, dat het „Handboek” („voor hen, die voor een acte Wiskunde studeeren”) nu eens den heer R. als rigoureus man zou laten zien.... Doch het laatste restje hoop had ik dra verloren. Tot blz. 19 onderaan vond ik dezelfde ongelukkige theorie als in het „Leerboek”. Toen plotseling als een kat in een vreemd pakhuis lees ik den zin: „De volgende nauwkeuriger bepalingen en behandelingen zijn afkomstig van MÖBIUS.” Nu twee en een halve bladzijde en dan abrupt eindigende aldus:

„$\sin(gh)\cos(fp)+\sin(hf)\cos(gp)+\cos(fg)\cos(hp)=0$ [1])
„$\sin(gh)\sin(fp)+\sin(hf)\sin(gp)+\sin(fg)\sin(hp)=0$
„uit welke de betrekkingen der goniometrische functies afgeleid
„kunnen worden.

Verder zwijgt 't „Handboek" hierover. Was 't daarom maar niet beter geweest „MÖBIUS" geheel achterwege te hebben gelaten? Want welke leerling zal nu de portée hiervan inzien?!

Het „Handboek" bevat verder weinig andere gezichtspunten dan het „Leerboek".

Op blz. 56 zie ik het volgende vraagstuk:

„12. Gegeven $\angle \alpha$, s en R. Voor welken driehoek is bij „constante α en s een minimum van R voorhanden?

De heer R. geeft hierbij een *aanwijzing*. Maar ik moet eerlijk bekennen, dat ik een examinandus met zoo'n aanwijzing niet benijd. Daar is veel kans op, dat de man in de war raakt. Waarom niet *begonnen* met te trachten R uit te drukken in s en de hoeken. Kent de man weinig formules, dan zal hij aldus beginnen:

$$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{b}{2\sin B}=\frac{c}{2\sin C}=$$
$$=\frac{2s}{2(\sin A+\sin B+\sin C)}=\frac{s}{4\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C}.$$

$2\cos\frac{1}{2}B\cos\frac{1}{2}C$ of $\cos\frac{1}{2}(B-C)+\cos\frac{1}{2}(B+C)=\cos\frac{1}{2}(B-C)+$ $+\sin\frac{1}{2}A$ moet nu een maximum worden, dus? . . . .

De 3 bladzijden, 64, 65 en 66 worden gewijd aan 't bewijs van $\varphi+\varphi_1+\varphi_2<180^\circ$, als φ, φ_1 en φ_2 de scherpe standhoeken zijn van een rechthoekig viervlak. Welnu, ik zou zeggen, men heeft terstond: $\cos^2\varphi+\cos^2\varphi_1+\cos^2\varphi_2=1$ (bedenk b.v.: $\varphi=\angle COH$). Nu is voor $\varphi+\varphi_1+\varphi_3=180^\circ$: $\cos^2\varphi+\cos^2\varphi_1+$ $+\cos^2\varphi_3=1-2\cos\varphi\cos\varphi_1\cos\varphi_3$ (in een paar regeltjes te bewijzen). Ook is $\varphi+\varphi_1>90^\circ$, dus $\varphi_3<90^\circ$, dus $\cos^2\varphi_3<\cos^2\varphi_2$, waaruit $\varphi_3>\varphi_2$. Alzoo $\varphi+\varphi_1+\varphi_2<180^\circ$.

Op de bladzijden 79—103 krijgt men heel wat formules over merkwaardige lijnen enz. te zien, maar waarom niet de afleiding van veel daarvan aan den leerling overgelaten? Ik denk, dat deze dan in vele gevallen een heel wat eenvoudiger afleiding zou geven dan de heer R!

---

[1]) Fout of drukfout?

Ik zie b.v. op de bladzijden 90 en 91 zeer ingewikkeld afgeleid: $\operatorname{tg} x = \frac{b-a}{b+a} \operatorname{tg} \frac{1}{2} C$, waarin x de hoek voorstelt tusschen b_c en $z_c(m_c)$. Men heeft toch terstond uit de gelijkheid van 2 driehoeken:

$$a \sin(\tfrac{1}{2} C + x) = b \sin(\tfrac{1}{2} C - x)$$

$$\frac{\sin(\frac{1}{2} C + x)}{\sin(\frac{1}{2} C - x)} = \frac{b}{a}$$

$$\frac{\sin(\frac{1}{2} C + x) - \sin(\frac{1}{2} C - x)}{\sin(\frac{1}{2} C + x) + \sin(\frac{1}{2} C - x)} = \frac{b-a}{b+a}$$

$$\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} C} = \frac{b-a}{b+a}.$$

$1\frac{1}{2}$ bladzijde is dus wel niet noodig!

Zoo ook wordt in een volle bladzijde (98 en 99) opgelost de vraag: „Voor welke driehoeken met constante O en A is $b^2 + c^2$ minimum?" Dit kan in een enkel regeltje! Men heeft:

$$b^2 + c^2 = (b - c)^2 + 2bc = (b - c)^2 + \frac{4O}{\sin A};$$

dat minimum is voor $b = c$.

Zoo is 't ook met die wijsheid over den vierhoek. In een paar regeltjes kan men formules bewijzen, waaraan de heer R. bladzijden besteedt. Ik doe maar een greep: de z. g. cosinusregel. Men heeft:

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \,.\, AC \cos BCA =$$
$$= BC^2 + CD^2 + DA^2 - 2CD \,.\, DA \cos D - 2BC \,.\, CA \cos BCA.$$

Nu is $CA \cos BCA = CD \cos C + DA \cos E = CD \cos C - - DA \cos (A + B)$, dus ....

Op de bladzijden 108 en 109 past de Schr. de projectiestellingen op den vierhoek toe. Dit zou inderdaad heel fraai zijn, als de heer R. die stellingen maar behoorlijk gefundeerd had! Thans blijkt volstrekt niet, dat men hier met algemeen geldige formules te doen heeft.

Bij de behandeling van de 7 verschillende gevallen (waarbij slechts een paar minder eenvoudige) van den vierhoek op de bladzijden 109—117 komt 't mij voor, dat men beter doet directe aansluiting te zoeken bij de meetkundige constructie. Men kan dan werkelijk al dat formulen-gegoochel missen! De leerling redt zich dan in voorkomende gevallen zelf wel.

Op blz. 125—129 behandelt de heer R. drie problemen, waarin de vorm van een vierhoek moet bepaald worden uit vier van elkaar onafhankelijke hoeken. Hoeveel levendiger wordt dit stel, wanneer men *steeds* SNELLIUS voor oogen houdt (al past men de oplossing van dit probleem niet steeds letterlijk toe)!

Op blz. 137 zie ik een drukfout staan, die ook in 't „Leerboek" voorkomt. Het lijkt wel of boeken schrijven fabriekswerk is! Het is trouwens bij deze gelegenheid dezelfde gebrekkige methode als die van 't „Leerboek", een methode, die ik op *tal van plaatsen* bij den heer R. aantref, maar die bij zoo'n logisch te ontwikkelen betrekking toch wel zeer onaangenaam aandoet. Het gaat nl. om het bewijs van

$$\mathrm{bg}\sin x \pm \mathrm{bg}\sin y = \mathrm{bg}\sin\left(x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2}\right),$$

waarop trouwens nog wel wat af te dingen valt; maar dit daargelaten. [Dat de heer R. het zich ten opzichte van de moeilijkheden bij cycl. vormen wel heel gemakkelijk maakt, vermeldde ik reeds bij de bespreking van het „Leerboek"]. Wat doet nu de Schr.? Hij neemt van beide leden den sinus, krijgt 't zelfde en klaar is hij. Is dat nu een methode om iemand zoo'n formule *zelf te laten vinden?* De herhaalde ergernis doet mij ten slotte mijn hart ook hierover nog eens uitstorten. Het is in 't algemeen een minder gewenschte methode tot 't bewijzen van een identiteit *beide* leden te verwerken. Men moet slechte hoogst zelden deze methode toepassen, daar 't den leerling een paedagogischen factor ontneemt!

Het geknoei aan 't einde van het hoofdstuk over cyclometrische vormen (wat ook in 't „Leerboek" wordt aangetroffen) gaan we maar met stilzwijgen voorbij.

Kijk, kijk, zei ik zoo bij mij zelve, toen ik de bladzijden 147—150 (handelende over invoeren en verdrijven van wortels bij gon. vergelijkingen) onder de oogen kreeg, de heer Ruben was nog al eens conscientieus om te vermelden, wie dit en dat gevonden had. Zou 't niet eerlijk zijn geweest te vermelden, van wie deze beschouwingen (de clou ontbreekt trouwens!) oorspronkelijk afkomstig zijn?!

Waarom staat *vijf* keer op blz. 148 „lin" in plaats van „lim"?

En hierbij ben ik zoo ongeveer aan het slot van mijn beoordeeling van het werk van den heer Ruben gekomen. Een collega, dien ik er een dezer dagen over sprak en wien ik te kennen gaf, dat ik die boeken wel op een *heel* laag peil vond staan, antwoordde mij: maar er komen toch wel aardige opgaven in voor. Nu, dat kan wel zijn, maar vergoeden nu die wel-eens-aardige opgaven den overigens gebrekkigen inhoud? Natuurlijk geenszins. Want een leerling met gemiddeld intellect wordt door een behandeling van de stof, als in deze boeken gegeven wordt, eigenlijk verknoeid. Het is inderdaad treurig, dat deze prullen gebruikt worden, natuurlijk gebruikt door menschen, die er de examenfoefjes in hopen te vinden.

Medelijden moet ieder deskundige, die deze boeken met aandacht doorziet, bezielen met het lot van allen, die daaruit hun wijsheid voor 't L. O.-examen opdoen en niet 't minst lijkt mij bovendien nog dat medelijden gerechtvaardigd als .... een zeker iemand dat examen afneemt!

D. P. A. V.

CONVERGENTIE EN SOM VAN ONEINDIGE REEKSEN [1]).

door

Dr. M. J. BELINFANTE.

Geachte Hoorders,

De belangrijkste begrippen in de theorie der oneindige reeksen, de gronden waarop vrijwel het geheele gebouw rust, zijn, naast de ook in de overige deelen der analyse benoodigde leer der irrationale getallen en der limieten, de *convergentie* en de *som* der oneindige reeksen. In den loop der tijden zijn de aanvankelijk zeer vage voorstellingen die men dienaangaande had, verdicht tot scherpomlijnde mathematische begrippen bij uitnemendheid. Van den groei dezer begrippen wil ik U een overzicht geven, en hiertoe sommige opvattingen nader toelichten.

Wat is een oneindige reeks? De tegenwoordige wiskunde beant-

---

[1]) Openbare les ter aanvaarding van het privaat-docentschap aan de Universiteit van Amsterdam gehouden op 25 Maart 1925. De noten en citaten zijn later bijgevoegd.

woordt deze vraag aldus: een oneindige reeks is een voorschrift dat aan elk natuurlijk (d.w.z. positief geheel getal) een grootheid toeordent. Deze bepaling zal, zooals meer voorkomt, bij dengene die nog niet wist wat een oneindige reeks is, geen duidelijke voorstelling wekken van het gedefinieerde object; gaan we daarom na hoe men er toe gekomen is deze definitie op te stellen.

Het begrip *eindige* reeks zij hierbij zonder meer voor iedereen duidelijk ondersteld: eenige getallen naast elkaar op een rij geplaatst en door komma's gescheiden vormen een eindige reeks getallen. In de lagere algebra beschouwt men reeksen, waarvan de opvolgende termen op een bepaalde wijze uit elkaar ontstaan, en heeft daarvoor afzonderlijke benamingen ingevoerd:

de reeks 1, 3, 5, 7, 9, heet een rekenkundige reeks, elke volgende term ontstaat uit den voorgaanden door vermeerdering met 2; de reeks 1, $^1/_2$, $^1/_4$ noemt men een meetkundige reeks, elke volgende term ontstaat uit den voorgaanden door dezen door 2 te deelen.

Men kan nu een dergelijke reeks, waarvan ons hetgeen men de wet van opvolging noemt bekend is, verder voortzetten: bij de genoemde meetkundige reeks van drie termen kunnen we $^1/_8$ bijschrijven als vierde, $^1/_{16}$ als vijfde, enz. Vraagt men hoe b.v. de elfde term zou moeten luiden, dan leert een eenvoudige berekening dat deze $^1/_{1024}$ bedraagt.

Wij gelooven dus in staat te zijn deze reeks zoover voort te zetten als we willen, en dit zou ook het geval zijn, indien we over voldoende schrijfmateriaal, tijd, enz. konden beschikken. Denken we ons boven dergelijke beperkingen van het menschelijk leven verheven, dan zou de reeks dus onbegrensd kunnen worden voortgezet. De naïeve wiskundige komt er zoodoende toe om te spreken van een oneindige reeks, en meent zich zelfs in het ongestoorde bezit van de geheele reeks te kunnen verheugen. Dit laatste is natuurlijk slechts een illusie, want de onbeperkte voortzetting van de reeks, indien zij al mogelijk ware, kan niet beëindigd gedacht worden, daar elke laatst neergeschreven term de taak oplegt den volgenden te berekenen.

De in het nauw gedreven wiskundige komt dan ook vroeg of laat tot de bekentenis dat zijn oneindige reeks, als geheel gedacht, eigenlijk een hersenschim is, en hij zal beseffen dat het eigenlijke wezen van hetgeen hij voor een oneindige reeks hield, bestaat in de wet van opeenvolging der termen. Een oneindige reeks wordt daarom gedefinieerd als een voorschrift dat aan elk natuurlijk getal een grootheid toeordent.

Dit natuurlijke getal is dan het rangnummer van den bijbehoorenden term van de reeks. Het is duidelijk dat de opeenvolging der termen door dit voorschrift evenzeer bepaald is als omgekeerd de toevoeging van term en rangnummer door de opeenvolging van de termen. Daarentegen is de moeilijkheid betreffende het oneindige karakter der reeks niet opgehelderd maar verplaatst, en teruggebracht tot een soortgelijke met betrekking tot de rij der natuurlijke getallen.

Het oneindig zijn van deze rij kan men, al naar het standpunt dat men inneemt, bewezen achten door haar te definieeren als een teekenrij welke ontstaat uit een eerste teeken en het voorschrift dat uit elk teeken een volgend afleidt; men kan haar ook zonder meer als intuïtief duidelijk object aanvaarden, of wel zich daarentegen op finitistisch standpunt plaatsen, en wèl de genoemde definitie der natuurlijke getallenrij accepteeren, doch daarbij denken aan een eindige rij die uit een menschelijkerwijze gesproken zeer groot aantal termen bestaat. Het doet er trouwens voor den opbouw van de theorie der oneindige reeksen niet toe wat men hierbij denkt, zoolang de conclusies uitsluitend berusten op de definities welke als praemissen gekozen worden; op dezelfde wijze als het er over den bouw van een huis slechts op aankomt hoe de steenen geplaatst worden, en niet of de steenensjouwer zich verbeeldt edelgesteenten dan wel gewone klinkers te vervoeren.

Iets van de illusies die sommigen van hen gekoesterd hebben en anderen misschien nog bezitten, wordt door de mathematici bewaard in hun notatie, doordien zij van een zoogenaamde oneindige reeks enkele termen opschrijven, en deze door tittels laten volgen.

De zooeven besproken meetkundige reeks wordt bijvoorbeeld geschreven als $1, \, ^1/_2, \, ^1/_4, \, ^1/_8, \ldots\ldots$

Bij een eindige reeks getallen kunnen we vragen naar de som, waarmede we bedoelen het resultaat van de gedurige optelling der volgende termen bij de eerste.

Als men zich op het standpunt stelt dat een oneindige reeks eenvoudig is de onbepaalde voortzetting van een groeiende eindige reeks, komt men er licht toe ook hiervan de termen achtereenvolgens bij de eerste opgeteld te denken, hetgeen we bij onze meetkundige reeks aanduiden door haar te schrijven: $1 + {}^1/_2 + {}^1/_4 + {}^1/_8 + \ldots\ldots$

Het bezwaar tegen de beschouwing van een oneindige reeks als iets: dat kant en klaar voor ons ligt, treedt nu nog duidelijker naar voren dan straks: we zouden immers nooit klaar komen indien we *alle* termen van de reeks successievelijk wilden addeeren. Is de optelling van een aantal termen (b.v. de eerste honderd) van onze reeks volbracht, dan zal bij verdere voortzetting een steeds grootere gedeeltelijke som worden verkregen. Het heeft er dus den schijn van dat de gedeeltelijke som, door maar een genoegzaam aantal termen te nemen, zoo groot gemaakt kan worden als we willen. De werkelijke uitvoering van het proces schenkt ons echter spoedig de overtuiging, dat dit geenszins het geval is, waaruit dan tevens blijkt dat de scrupules betreffende het lichtvaardig concludeeren over een zoogenaamd oneindig proces niet overdreven zijn. Inderdaad, de som van de eerste twee termen bedraagt $1^1/_2$, die van de eerste drie $1^3/_4$; gaat men zoo verder, dan vindt men achtereenvolgens de getallen $1^7/_8$, $1^{15}/_{16}$,...... enz. We zien dus dat de verkregen sommen beneden 2 blijven, doch dit getal steeds meer naderbij komen. Het verschil met het getal 2 is eerst $^1/_2$, dan slechts $^1/_4$, $^1/_8$, $^1/_{16}$,...... enz.

De naïeve opvatting leidt er hier weer toe om ons dit sommeeringsproces ten einde toe volvoerd te denken, en daar men bij elke stap het getal 2 steeds meer nadert, terwijl dit getal aan den anderen kant nimmer overschreden wordt, is men zeer geneigd te meenen dat met deze redeneering bewezen is dat de som van de oneindige reeks $1 + {}^1/_2 + {}^1/_4 + \ldots\ldots$ gelijk moet zijn aan 2. Deze conclusie is onjuist, omdat de redeneering stuit op het oude voor de hand liggende bezwaar, dat men zich het proces ten onrechte ten einde gevoerd denkt; want, doordat elke term gevolgd wordt door een anderen, staat men na iedere volbrachte optelling meteen voor de taak den volgenden term bij het verkregen resultaat te addeeren.

De wiskundige vermijdt deze fout door een soortgelijke definitie van som te geven als van oneindige reeks: een oneindige reeks heeft volgens hem een bepaald getal s tot som, indien er een voorschrift gegeven is dat aan elk positief getal een natuurlijk getal toeordent op zoodanige wijze dat, als men van de termen in volgorde er meer sommeert dan het natuurlijke getal aanwijst, de verkregen som minder dan het gegeven positieve getal van s afwijkt.

Inderdaad is een dergelijke handelwijze de eenig logische: het begrip som was slechts gedefinieerd voor een eindig aantal termen en berustte op de mogelijkheid om alle termen achtereenvolgens te addeeren: voor een oneindige reeks was het begrip som nog niet gedefinieerd en is het addeeringsproces niet te volvoeren: wij moeten dus een nieuwe bepaling van som geven.

Al naar nu bij het onderzoek van een oneindige reeks het voornaamste doel is het bedrag van de opeenvolgende termen te leeren kennen, dan wel in hoofdzaak het bestaan van een som ons interesseert, spreekt men van fundamentaalreeks en van somreeks. Bij de laatste verbindt men de termen door + teekens. Met de theorie der oneindige reeksen bedoelt men die der somreeksen. Op de fundamentaalreeksen zal ik niet verder ingaan, evenmin op het ook voor de somreeksen zoo belangrijke limietbegrip eener fundamentaalreeks.

Het voorgaande moge voldoende zijn om een indruk te geven wat een oneindige reeks is: we hebben gezien dat men ook bij oneindige reeksen van som spreekt, doch dat het woord som hier een nieuwe definitie verlangt; deze bepaling is van dien aard dat de oneindige reeks juist dat getal tot som krijgt, hetwelk men van naïef standpunt meent te zullen vinden door alle termen op te tellen. De primitieve opvatting omtrent de oneindige reeksen en haar som vond reeds in de oudheid indirect een bestrijding in de zoogenaamde drogredenen van Z e n o, waaruit de ongerijmdheid van de primitieve opvatting kan geconcludeerd worden.

Bespreken we nu nog wat de moderne mathematicus bedoelt met de convergentie van een reeks. De definitie hiervan kan men als volgt formuleeren: een reeks is convergent als er een voorschrift bestaat dat aan elk positief getal een natuurlijk getal toevoegt met de eigenschap dat de som van een willekeurig aantal elkaar opvolgende termen uit de reeks, wier rangnummer dat natuurlijke getal overtreft, in absolute waarde kleiner blijft dan dat gegeven positief getal.

Dit komt, populair uitgedrukt, hierop neer, dat de som van de termen die op een bepaalden term volgen, willekeurig klein wordt, als men dezen bepaalden term ver genoeg in de reeks kiest. Stelt men de som van de eerste n termen eener reeks voor door S_n, dan is de reeks convergent als bij elk positief getal ε een natuurlijk getal M te berekenen is, zoodat voor $n > M$ en willekeurige p voldaan is aan:

$$| S_{n+p} - S_n | < \varepsilon.$$

Men kan bewijzen dat convergente reeksen een som hebben, en dat omgekeerd reeksen, die een som hebben, convergeeren. Als een reeks convergeert kan men haar som naar willekeur benaderen door de som van een genoegzaam aantal termen te nemen. Het spreekt vanzelf dat reeksen die niet convergent zijn, ook geen som kunnen bezitten. Zulke reeksen heeten divergent: de reeks $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots\ldots$ b.v. is divergent, en we zien dat de som van een zeker aantal termen van deze reeks 1 of 0 is, naar gelang we een oneven of een even aantal termen nemen.

Gaan we na deze korte uiteenzetting van de begrippen oneindige reeks, som en convergentie, hunne historische ontwikkeling na. De overgang van het primitieve standpunt tot het moderne strenge is niet steeds in stijgende lijn gegaan: in de overgangsperioden werd nu eens strenger, dan weer lichtvaardiger gehandeld.

Het eerste voorbeeld van het gebruik eener oneindige reeks vinden wij in Archimedes' „Kwadratuur der parabool". Daar bewijst hij n.l. dat:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots = \frac{4}{3}.$$

Knopp merkt in zijn voortreffelijk leerboek over de oneindige reeksen[1]) hierbij op (in navolging van anderen trouwens), dat Archimedes slechts laat zien dat een veelterm welke uit de eerste $n + 1$ termen dezer reeks bestaat, kleiner blijft dan $\frac{4}{3}$, welke waarde n ook heeft, en dat het verschil van dien veelterm met $\frac{4}{3}$, gelijk is aan $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^n}$, hetgeen voor voldoend groote n kleiner blijft dan een willekeurig gegeven positief getal. Feitelijk zou Archimedes dus slechts met eindige uitdrukkingen hebben gerekend. Na het voorgaande zal men echter begrijpen dat hiermede juist de kern van de zaak naar voren is gebracht. Immers in wezen bedoelt de hedendaagsche wiskunde met de bovenstaande gelijkheid niets anders dan wat Archimedes hier weergeeft. Daargelaten of Archimedes de klip die in de primitieve opvatting ligt onbewust, dan wel opzettelijk heeft vermeden, is zijn gedachtengang onberispelijk en komt men in de geschiedenis voorbeelden van oneindige-reeksbehandeling tegen, die voor het moderne gemoed heel wat minder bevredigend zijn.

---

[1]) K. Knopp. *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen.* J. Springer, Berlin, 1924 (p. 103).

De volgende wiskundigen plaatsen zich in hoofdzaak op het primitieve standpunt, volgens hetwelk de oneindige reeks gesommeerd wordt door voortdurende additie der termen. Bij sommigen doet zich de behoefte aan een convergentiebewijs gelden, o.a. bij Brouncker, Newton en Leibniz.

Afdoende zijn hun convergentiebewijzen weliswaar geenszins, doch deze pogingen beteekenen in elk geval een stap in de goede richting. Zij werden echter spoedig door een teruggang in dit opzicht gevolgd. In de tweede periode, die Reiff[1]) die der *formeele ontwikkeling* noemt, werden convergentievragen geheel naar den achtergrond gedrongen. Leibniz vormt den overgang, doordat hij eensdeels het bekende convergentiecriterium voor alterneerende reeksen opstelde, terwijl hij aan den anderen kant niet schroomt om aan de klaarblijkelijk niet-convergente reeks $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots\ldots$ de som $\frac{1}{2}$ toe te kennen, en wel op grond van het reeds meermalen genoemde primitieve standpunt, waarbij de som als het resultaat van de optelling van alle termen beschouwd wordt.

Een zekere Grandi had reeds vóór Leibniz aan de reeks $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots\ldots$ de som $\frac{1}{2}$ gegeven, door in de meetkundige reeds $1 - x + x^2 - x^3 + \ldots\ldots$, die voor $|x| < 1$ gelijk is aan $\frac{1}{1+x}$, de waarde 1 te substitueeren. Om te laten zien dat de primitieve somdefinitie vervuld is, houdt hij de volgende redeneering.

„Twee broeders erven uit de nalatenschap van hun vader een „steen van onschatbare waarde, welke niet verkocht mag worden; „zij komen daarom overeen dat de steen afwisselend in de verzame„ling van elk hunner een jaar lang vertoeven zal. Als men nu vast„stelt dat dit in alle eeuwigheid tusschen de beide families besloten „wordt, dan zal aan de familie van elken broeder de steen oneindig „dikwijls gegeven en oneindig dikwijls ontnomen worden, en toch „heeft elk het halve bezit van den steen."

Het behoeft nauwelijks betoog, dat de wiskunde in haar tegenwoordig stadium van dergelijke redeneeringen niet meer gediend is. Eigenaardig is dat Grandi zelf de tegenspraak opmerkt, waartoe het klakkeloos addeeren van de termen eener divergente reeks kan leiden. Vereenigt men namelijk van de besproken reeks telkens

---

[1]) R. Reiff. *Geschichte der unendlichen Reihen.* Tübingen, 1889.

twee op elkaar volgende termen, dan komt er: $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = (1 - 1) + \ldots\ldots = 0 + 0 + \ldots\ldots = 0.$

Er zou dus uit volgen $\frac{1}{2} = 0$. Deze tegenstrijdigheid wordt door G r a n d i echter in verband gebracht met de schepping van de wereld.

Om den afstand nog eens breed uit te meten welke tusschen de strengheid der wiskundige beginselen van thans en destijds bestaat, moge het woord gegeven worden aan den zooeven genoemden grooten wiskundigen denker Leibniz, die betere gronden voor de gelijkstelling van onze reeks met de breuk meende te kunnen aanvoeren.

„Neemt men een even aantal termen van de reeks," aldus redeneert deze tijdgenoot van G r a n d i, „dan vindt men 0, neemt men een oneven aantal termen, dan vindt men 1. Het oneindige is noch even, noch oneven, maar beide praedicaten zijn even gerechtvaardigd; volgens de waarschijnlijkheidsrekening is het rekenkundig gemiddelde van twee waarden die voor een grootheid even waarschijnlijk zijn de juiste: dus zal de juiste waarde van de reeks $\frac{1}{2}$ zijn."

Neemt men in aanmerking wie deze redeneering gehouden heeft, dan schijnt de kloof tusschen het wiskundige denken van nu en van destijds wel heel wijd. Er dient echter aan toegevoegd dat er ook in dezen tijd mathematici waren, die zich tegen dergelijke logica richtten, o.a. de wiskundige V a r i g n o n; voorts mag niet onopgemerkt blijven dat het beginsel van de gemiddelde waarde, ofschoon in het geciteerde verband verwerpelijk, niettemin later een gezonde basis zou krijgen.

Met E u l e r en G o l d b a c h wordt de tweede periode *definitief* ingeluid. De wiskundigen uit deze periode rekenen in het algemeen met oneindige reeksen en oneindige uitdrukkingen als met eindige reeksen en eindige uitdrukkingen, passen alle eigenschappen voor polynomen toe op machtreeksen, en voeren herleidingen met divergente reeksen uit. Het groote probleem voor den modernen onderzoeker is dat de voornaamste vertegenwoordiger uit deze periode, L e o n h a r d E u l e r, vrijwel uitsluitend juiste resultaten heeft afgeleid, niettegenstaande zijn bewerkingen meestentijds volkomen ongeoorloofd moeten genoemd worden. Gewoonlijk wordt van E u l e r alleen gecritiseerd dat hij met divergente reeksen gewerkt heeft; ik zal echter trachten aan te toonen dat dit lang niet het zwakste punt van Euler is, en daarna een voorbeeld geven van veel gevaarlijker manoeuvres.

In de eerste plaats dan dient geconstateerd dat Euler volstrekt niet geheel onkundig aangaande de convergentiequaestie was; hij geeft een vrij behoorlijke omschrijving van wat convergentie is, en merkt het verschijnsel van de zoogenaamde semi-convergentie op. Voorts was Euler zich er zeer wel van bewust dat hij met divergente reeksen werkte, maar hij trachtte hiervoor een rechtvaardiging te vinden in de opstelling van een nieuw sombegrip voor een oneindige reeks. Hij kiest hiervoor namelijk de waarde van de eindige uitdrukking waaruit de reeks ontstaat. Niclaus Bernoulli opperde hiertegen de bedenking dat eenzelfde oneindige reeks misschien uit verschillende eindige uitdrukkingen zou kunnen ontstaan, weet hiervoor echter geen voorbeeld aan te voeren. Dergelijke voorbeelden kent men tegenwoordig wel; zoo is b.v.

$$\frac{1+x}{1+x+x^2}=\frac{1-x^2}{1-x^3}=1-x^2+x^3-x^5+x^6-x^8+\ldots,$$

waardoor voor $x = 1$ de betrekking:

$$\tfrac{2}{3} = 1-1+1-1+\ldots\ldots$$

voor den dag komt.

„Das Eulersche Prinzip ist also jedenfalls unsicher, und nur der „ungewöhnliche Instinkt Eulers für das mathematisch Richtige hat „ihn trotz der ausgiebigen Benutzung solcher divergenten Reihen „davor bewahrt, falsche Ergebnisse zu zeitigen" zegt Knopp in zijn reeds genoemd werk. [1])

Het standpunt van Euler kan tegen dergelijke opmerkingen verdedigd worden als men de somdefinitie een weinig anders preciseert. Het is n.l. mogelijk een aan den gedachtengang van Euler nauw verwante, doch aan strengere eischen voldoende sommatietheorie op te bouwen zonder het convergentiebegrip te gebruiken. Ik wil de grondbeginselen hiervan kort weergeven zoowel ter toelichting van mijn bewering dat het standpunt van Euler na het aanbrengen van dezen steun en reduceering tot de hierin gelegen beperking voldoende stevig gegrondvest is, als om een voorbeeld te geven eener van het convergentiebegrip onafhankelijke sommatietheorie, welk voorbeeld straks nog ter sprake komt.

In deze *formeele* sommatietheorie der oneindige reeksen heeft

---

[1]) l. c. p. 459.

elke term een vaste plaats met daaraan verbonden index; de termen mogen niet verwisseld, noch gesplitst worden, evenmin mogen er termen samengenomen worden.

Verder gelden de volgende beginselen:

[1]) Oneindige reeksen die slechts verschillen door een uit louter nullen bestaand beginsegment worden als gelijk beschouwd.

[2]) De som van een getal en een oneindige reeks is bij definitie de oneindige reeks die ontstaat door dat getal bij den eersten term der oneindige reeks op te tellen.

[3]) De som van twee oneindige reeksen is de reeks die ontstaat door de gelijkgeïndiceerde termen van beide reeksen bij elkaar op te tellen.

[4]) Het product van een oneindige reeks met een getal is de reeks die ontstaat door elken term van die reeks met dat getal te vermenigvuldigen.

[5]) Het product van twee oneindige reeksen wordt volgens den bekenden multiplicatieregel van Cauchy gedefinieerd.

Uit deze definities volgen gemakkelijk de gewone regels voor de associatieve, distributieve en commutatieve eigenschappen van som en product. Aan sommige oneindige reeksen kan nu een getal, som genaamd, worden toegevoegd, en wel krachtens de volgende beginselen:

a) indien de oneindige reeks aan een formeele vergelijking voldoet, die slechts één wortel heeft, dan is de som gelijk aan dien wortel.

b) bestaat de reeks uit een beginsegment gevolgd door louter nullen, dan is de som het getal dat gelijk is aan de som van de termen van het beginsegment.

c.) indien een reeks aan een formeele vergelijking voldoet waarin nog andere oneindige reeksen optreden, waaraan reeds een som is toegekend, wordt de som op grond van het eerste beginsel vastgesteld nadat de gesommeerde reeksen in de formeele vergelijking door hun som vervangen zijn.[1]) Ook kan aan een aantal reeksen tegelijk een som worden toegekend indien er een voldoend aantal

---

[1]) Eenvoudige voorbeelden van deze sombepaling zijn o.a.:

$2(0+1+2+4+\dots)+(1+0+0+\dots)=(1+2+4+\dots);\quad 2s+1=s;\quad s=-1$

$\frac{1}{2}(0+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots)+(1+0+0+\dots)=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots);\quad \frac{1}{2}s+1=s;\quad s=2$

$(1-1+1-1+\dots)+(-1+0+0+\dots)=-(1-1+1-\dots);\quad s-1=-s;\quad s=\frac{1}{2}.$

onderling onafhankelijke betrekkingen langs formeelen weg gevonden zijn. Het is duidelijk dat op deze wijze aan één reeks geen twee verschillende getallen kunnen worden toegevoegd, daar immers met betrekking tot de optelling en de vermenigvuldiging voor de oneindige reeksen dezelfde rekenregels gelden als voor getallen.

Beschouwt men naast de numerieke reeksen ook reeksen waarvan de termen functies zijn van een veranderlijke, dan kunnen deze beginselen grootendeels onveranderd blijven. Omtrent de toekenning van een somfunctie aan een functiereeks zou men denzelfden weg kunnen volgen als bij numerieke reeksen voor het geval dat er één en slechts één éénduidige functie bestaat, die aan dezelfde formeele vergelijking voldoet als de reeks.

Voor de numerieke reeks, die door substitutie van een bepaalde waarde voor de veranderlijke uit de functiereeks ontstaat, zal men dan dezelfde som vinden als vroeger.[1])

Houdt men aan deze beginselen vast, dan is het manoeuvreeren op de wijze van E u l e r, voor zoover het formeel rekenen met gewone oneindige reeksen betreft, niet gewaagd; men behoeft echter slechts de Analysis Infinitorum op te slaan om veel gevaarlijker handelwijzen aan te treffen. Bij wijze van illustratie wil ik met u den weg bewandelen langs welken E u l e r en J o h a n n B e r n o u l l i de som van de hyperharmonische reeks voor $k=2$ hebben afgeleid.

Zoowel L e i b n i z als J a c o b B e r n o u l l i hebben tevergeefs hun uiterste best gedaan om deze som te vinden.

J o h a n n B e r n o u l l i berekent de som met behulp van de reeks voor sin x, terwijl E u l e r een volkomen analoog procédé volgt met de reeks voor den sinus hyperbolicus.

Van de vergelijking: $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots = 0$

deelen we beide leden door x en substitueeren $x^2 = \frac{1}{z}$, dan komt er:

$$\sqrt{z}\,.\sin\frac{1}{\sqrt{z}} = 1 - \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{z} + \frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{z^2} - \ldots\ldots = 0.$$

Breken we het linkerlid van deze vergelijking bij een bepaalden term af, dan zal de som van de wortels van de hierdoor ontstane vergelijking gelijk zijn aan $^1/_6$. J o h a n n B e r n o u l l i meent dat

---

1) Op de nadere uitwerking van dit beginsel, dat ik in dezen vorm nergens aantrof, hoop ik te gelegener tijd terug te komen.

dit nu ook geldt voor de vergelijking waarvan het linkerlid de oneindige reeks is. De wortels van $\sqrt{z} \,.\, \sin \frac{1}{\sqrt{z}} = 0$ zijn: $0, \frac{1}{\pi^2}, \frac{1}{(2\pi)^2}, \frac{1}{(3\pi)^2}, \ldots$ waaruit dus volgen zou:

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{(2\pi)^2} + \frac{1}{(3\pi)^2} + \ldots$$

of, door vermenigvuldiging met π^2:

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots$$

Ik wil nu aan een voorbeeld laten zien hoe gemakkelijk deze handelwijze tot een ongerijmd resultaat kan voeren.

Beschouwen we de transcendente vergelijking:

$$x \{ e^{\frac{1}{x}} - 1 \} \equiv 1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2\,.\,3x^2} + \frac{1}{2.3.4x^3} + \ldots = 0.$$

De wortels van deze vergelijking zijn, zooals gemakkelijk blijkt, imaginaire getallen van den vorm $\frac{\pm 1}{2n\pi\sqrt{-1}}$, waarin n positief geheel is. De toepassing van de redeneering van E u l e r—B e r n o u l l i leidt tot het resultaat:

$$\sum \frac{\pm 1}{2n\pi\sqrt{-1}} = \frac{1}{2}.$$

Het ongerijmde van deze uitkomst is minder gelegen in het divergente karakter van de reeks in het linkerlid, dan wel in het feit dat alle termen zuiver imaginair zijn. Niet ten onrechte dus wijst K n o p p op het mathematische instinct van E u l e r, dat hem in staat gesteld heeft om in het doolhof der ongeoorloofde herleidingen steeds den uitgang te vinden en met een juist resultaat voor den dag te komen. Om nog eens aan dezelfde vergelijking te laten zien hoe dezelfde ongeoorloofde handelwijze tot een goede uitkomst kan leiden, merken we op dat voor gewone vergelijkingen de som der quadraten van de wortels gevonden wordt door het vierkant van den tweeden coëfficient te verminderen met het tweevoud van den derden. Deze eigenschap klakkeloos toepassende op onze transcendente vergelijking vinden we voor de som der quadraten van de wortels $-2 \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{4n^2\pi^2}$, voor het vierkant van den tweeden coëfficient verminderd met het tweevoud van den derden: $\frac{1}{4}-\frac{2}{6}=-\frac{1}{12}$

en dus na gelijkstelling: $-2\sum_1^\infty \frac{1}{4n^2\pi^2}=-\frac{1}{12}$ of, door vermenigvuldiging met $-2\pi^2$: $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

Deze betrekking, die wij nu reeds tweemaal langs ongeoorloofden weg hebben gevonden, is ook wel langs wettigen weg te verkrijgen, alleen niet zoo spoedig, want ook hier duurt eerlijk het langst. [1])

De besproken handelwijze is slechts een klein staaltje van al de verschillende onwettige procédé's waaraan Euler zich heeft schuldig gemaakt, en waarmede hij, op geniale wijze manoeuvreerend, de schoonste resultaten wist te voorschijn te tooveren. Zijn Analysis Infinitorum blijft, ondanks het totale gemis aan strengheid, wegens de fraaie formeele herleidingen ook voor den modernen lezer een genietbare lectuur. De reeksen waarvan Euler de som weet op te schrijven vormen een formulelijst, die niet veel te wenschen overlaat. Men mist weliswaar de som van de hyperharmonische reeks voor $k=3$, 5 enz. Maar tot heden zijn ook de moderne onderzoekers er niet in geslaagd deze leemten aan te vullen, zoodat het vermoeden voor de hand ligt dat de som dezer reeks geen eenvoudige functie van in ander verband bekende getallen is. [2])

De verdienste van de onmiddellijke opvolgers van Euler op dit terrein ligt dan ook niet zoozeer in hetgeen zij aan zijn resultaten hebben toegevoegd, als wel in de strengere behandeling, die zij de oneindige reeksen deden ondergaan, en de wijze waarop zij deze resultaten opnieuw afgeleid hebben.

Duidelijk blijkt dit als men de *Analysis Infinitorum* van Euler vergelijkt met het bijna zeventig jaar later verschenen, niet minder

---

[1]) Zie voor vier geheel verschillende strenge afleidingen: Knopp, l. c. p. 239, 267, 325 en 376. Een onberispelijke afleiding, nauw verwant aan de boven besproken korte, maar onbetrouwbare is te vinden in Weber—Wellstein, „Enzyklopädie der Elementarmathematik", Bd I, § 139. Teubner, Leipzig, 1909.

[2]) Vgl. Knopp, l. c. p. 232, 233.

baanbrekende werk van Cauchy, dat den titel draagt: „Cours d'analyse". Dit boek behoort geheel tot de derde periode, die door Reiff gekarakteriseerd wordt als de periode der *exacte behandeling*. In dezen tijd wordt, voornamelijk onder invloed van Gauss en Cauchy, het convergentiebegrip ontwikkeld zooals dit tot op heden vrijwel algemeen aanvaard wordt, en inzake het gebruik van divergente reeksen een geheelonthoudersverbod uitgevaardigd. Uit de leerboeken der analyse werden de divergente reeksen verbannen, en zij kwamen er niet anders voor dan om als afschrikwekkend voorbeeld te dienen; in de toegepaste wiskunde daarentegen, voornamelijk in de astronomie, werd op groote schaal gesmokkeld. [1])

Gauss is de eerste die volledig en streng de convergentie onderzoekt en bewijst van de hypergeometrische reeks. Negen jaar later werd door Cauchy in bovengenoemd werk een strenge leer der convergentie ontwikkeld, en werden de naar hem genoemde criteria opgesteld en bewezen. In het voorbericht merkt hij o.a. op:

„J'ai été forcé d'admettre diverses propositions qui paraitront „peut-être un peu dures: par exemple, qu'une série divergente n'a „pas de somme."

Veel krachtiger spreekt Abel zich vijf jaar later uit in de volgende bewoordingen:

„Les séries divergentes sont, en général, quelque chose de bien „fatal et c'est une honte qu'on ose y fonder aucune démonstration."

In deze periode wordt nog het begrip der gelijkmatige convergentie door Stokes en Seidel ingevoerd, en hiermede eindigt het werkje van Reiff, dat in 1889 geschreven werd.

Nu, ongeveer 35 jaar later, kunnen we constateeren dat deze derde periode door een vierde gevolgd is, welke de strengheid van de derde periode eenigszins vereenigt met de methoden van de

---

[1]) Dat ook hier grootendeels juiste resultaten bereikt werden heeft een geheel andere oorzaak dan bij de formeele rekenwijze van Euler. Het karakter van de in de astronomie optredende divergente reeksen brengt mede dat de gedeeltelijke sommatie aanvankelijk steeds dichter voert tot de waarde der te berekenen functie, doch er zich op den duur weer hoe langer hoe meer van verwijdert. Voor de practisch vereischte nauwkeurigheid is het niet eens noodig de gunstigste waarde te kennen. Vergelijk H. Poincaré: „Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste", t I, p. 1—5. Gauthier—Villars, Paris, 1892.

tweede door middel van de sommatietheorieën, die in die vierde periode zijn opgesteld. De divergente reeksen, die eigenlijk nooit geheel van het tooneel verdwenen waren, maar zich toch niet openlijk durfden vertoonen, zijn volledig in eere hersteld. Eensdeels is dit te danken aan het practische nut dat zij in de toegepaste wiskunde afwierpen, aan den anderen kant ten gevolge van de neiging der mathematici om zich in het bezit te stellen van de vergelijking:

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots\ldots = \tfrac{1}{2},$$

die gedurende de derde periode de wiskundigen als een verboden vrucht bleef aanlokken. De annexatie geschiedde nu echter niet zooals vroeger bij wijze van brutale roof, doch onder behoorlijke betaling van den logischen kostprijs. De eerste welgeslaagde poging van dien aard is ondernomen door F r o b e n i u s, die de grondgedachte van L e i b n i z op gelukkige wijze in verbinding bracht met het beginsel van het continuïteitstheorema van A b e l. Niet lang daarna werden door C e s à r o en H ö l d e r somdefinities gegeven voor reeksen, welke in het geval van convergentie dezelfde som opleveren als de oude, en die bovendien aan sommige divergente reeksen een som toekennen. Toen dit beginsel eenmaal was vastgelegd heeft de productie van sommatiemethoden niet stilgestaan, en zij is feitelijk nog in vollen gang. In tegenstelling met de zooeven uitvoeriger besproken formeele sommatie zijn alle voorgestelde methoden onvoorwaardelijk van toepassing op convergente reeksen.

Ter illustratie wil ik de sommeerbaarheid van de eerste orde volgens C e s à r o-H ö l d e r even bespreken. We stellen de som van de eerste n termen eener reeks voor door s_n, en de gemiddelde waarde van de eerste n dezer partieele sommen door t_n, zoodat:

$$t_n = \frac{s_1 + s_2 + \ldots\ldots + s_n}{n}.$$

Indien de oorspronkelijke reeks convergeert heeft de fundamentaalreeks s_1, s_2,...... een limiet, die de som is van de convergente reeks. Men kan nu gemakkelijk bewijzen dat de fundamentaalreeks t_1, t_2 ...... in dit geval ook een limiet zal hebben, en wel een die even groot is als de voorgaande. Als we dezelfde fundamentaalreeksen opschrijven voor een niet-convergente reeks, zal de fundamentaalreeks $\{s_n\}$ geen limiet hebben; het kan echter gebeuren dat de reeks $\{t_n\}$ toch een limiet heeft. Men spreekt dan af deze limiet te beschouwen als de som van de niet-convergente reeks. Er is dan voldaan aan den zoogenaamden *consistentie-eisch* dat het procédé, op convergente reeksen toegepast, geen ander getal levert dan de gewone som. Terecht is er door S i l v e r m a n op gewezen dat men dezen eisch bij een nieuw procédé ook moet stellen ten opzichte van de reeds ingevoerde procédé's, en hij laat dan ook door een voorbeeld zien dat twee procédé's consistent kunnen zijn ten opzichte van het gewone convergentie-proces, doch niet ten opzichte van elkaar, d. w. z. dat beide procédé's wel voor een convergente reeks de gewone som leveren, doch aan een zekere divergente reeks verschillende waarden tot som toekennen.

Welke van de niet met elkaar consistente procédé's zal men nu handhaven? Het ligt voor de hand dat men zich bij de keuze hiervan zal laten leiden door het belang dat de procédé's voor andere wiskundige onderzoekingen hebben, en verder, voor zoover het voorgaande a priori niet te overzien is, door de eigenschappen welke de sommatieprocédé's ten opzichte van de fundamenteele bewerkingen met oneindige reeksen meebrengen. In het bijzonder vestigt men de aandacht op het vroeger besproken beginsel van E u l e r, en stelt gaarne vast dat de sommatieprocédé's meestal aan divergente reeksen als som de waarde teruggeven van een eindige uitdrukking waaruit de reeks af te leiden is door een formeele bewerking. In dit verband wil ik er nog even op wijzen dat misschien de combinatie van de vroeger besproken formeele sommatie met de andere methoden vruchten zou kunnen afwerpen. Immers als een divergente reeks door formeele bewerkingen kan worden uitgedrukt als een functie van convergente of reeds gesommeerde divergente reeksen, dan levert deze uitdrukking, krachtens het formeele sommatiebeginsel, een middel om de som van die divergente reeks te bepalen.

Het is overigens vrijwel ondoenlijk om in kort bestek een overzicht te geven van de sommatieprocédé's, die tot nogtoe zijn voorgesteld en van de uitbreidingen, die het begrip som hierbij verkregen heeft. Het convergentiebegrip daarentegen heeft in dezelfde periode geen wijziging ondergaan; de opstelling ervan zooals zij sinds C a u c h y en G a u s s heeft plaats gehad, is tot voor kort vrijwel afdoende gebleken.

Het overzicht over den groei van de begrippen convergentie en som zou echter onvolledig zijn, indien ik niet met nog enkele woorden melding maakte van den invloed van de nieuwere intuïtionistische strooming op het gebied der oneindige reeksen. [1]) Zooals bekend mag worden ondersteld is een der meest fundamenteele verschillen met de klassieke richting het niet-onbeperkt aanvaarden van het principium tertii exclusi in verband met den zoogenaamden eisch tot constructiviteit. Dientengevolge wordt het aantal te onderscheiden gevallen in den regel niet onbelangrijk vergroot, doordat de negatie van het tegengestelde eener bewering niet zonder meer gelijkgesteld wordt met haar bevestiging. Zoo vervalt deze gelijkstelling voor een oneindige verzameling elementen, daar men hiervoor niet als voor een eindige verzameling in staat is, het al dan niet aanwezig zijn eener eigenschap aan elk element afzonderlijk te onderzoeken, totdat alle elementen een beurt hebben gehad.

Men zou kunnen meenen dat dus de finitist wel het recht zou hebben tot onbeperkte aanvaarding van het principium tertii exclusi met de consequenties daarvan; dit behoeft echter m. i. geenszins het geval te zijn, want ook als men de rij der natuurlijke getallen eindig maar zeer lang denkt, moet men zich haar in elk geval voorstellen als door geen mensch ten einde doorloopen. Het onderzoek betreffende het al dan niet aanwezig zijn eener eigenschap kan dus in geen geval aan elken term individueel ten einde uitgevoerd worden.

Gaan we thans de consequenties na voor het convergentiebegrip eener oneindige reeks, en kiezen we daartoe de gebruikelijke formuleering van dit begrip, dan is een reeks convergent als bij elk positief getal ε een natuurlijk getal M kan worden aangegeven, zoodat:

$$| s_{n+p} - s_n | < \varepsilon \text{ voor } n > M.$$

De negatie van de eigenschap der convergentie is klaarblijkelijk het bestaan voor elk positief getal ε van twee fundamentaalreeksen van toenemende positieve getallen $\{n_\nu\}$ en $\{m_\nu\}$ zoodat:

$$| s_{n_\nu+m_\nu} - s_{n_\nu} | > \varepsilon \text{ voor elke } \nu.$$

Stel nu dat er voor een bepaalde reeks bewezen is dat deze negatie zich niet kan voordoen. Dan bezitten we daarom in het algemeen volstrekt geen middel om bij elk gegeven positief getal een bijbehoorend natuurlijk getal M te berekenen. Inderdaad bestaan er tegenvoorbeelden waarbij het voor het vinden van dat natuurlijke getal M

[1]) L. E. J. Brouwer. Over de rol van het principium tertii exclusi in de wiskunde, in het bijzonder in de functietheorie. Wis- en Natuurkundig Tijdschrift 2. (1923).

noodig zou zijn om de oplossing te kennen van problemen die als tot nu toe onopgelost bekend staan [1]).

Vandaar dat voor het ongerijmd zijn van de negatie der convergentie de benaming *non-oscilleerend* is ingevoerd.

Hoe staat het nu met het sombegrip dat in den aanvang hand aan hand ging met dat der convergentie? De reeks Σu_n had het getal s tot som als bij elk positief getal een natuurlijk getal M te berekenen was, zoodat: $|s - s_n| < \varepsilon$ voor $n > M$. Uit deze bepaling blijkt gemakkelijk dat reeksen die een som hebben convergent zijn, en dat dus niet-convergente reeksen volgens deze definitie geen som kunnen hebben. Non-oscilleerende reeksen waarvan de convergentie niet vaststaat, hebben dus ook geen som. Daarentegen kan het wel gebeuren dat er bij een non-oscilleerende niet-convergente reeks een getal s bekend is, zoodanig, dat de negatie der someigenschap voor de reeks met s als som ongerijmd is, m.a.w. voor welk getal s bij elk positief getal ε de onmogelijkheid vaststaat van het bestaan eener klimmende fundamentaalreeks natuurlijke getallen $\{n_\nu\}$ zoodat: $|s - s_{n_\nu}| \geq \varepsilon$ voor elke ν. Deze non-oscilleerende reeksen, die dus niet convergent zijn en geen som hebben in de gewone beteekenis, maar waarvoor toch een getal bekend is dat bij een convergente reeks de rol van som zou spelen, noemt men *negatief-convergent*, en in tegenstelling daarmede de gewone convergente reeksen wel *positief-convergent*.

Hoe principieel deze onderscheidingen ook zijn, en hoe verstrekkend de gevolgen van de intuïtionistische zienswijze voor andere onderdeelen van de wiskunde, voor de bestaande theorie van de oneindige reeksen blijken de consequenties niet zoo ingrijpend als men na het voorgaande zou kunnen meenen. Zeker, er dienen wijzigingen aangebracht: zoo b.v. in de formuleering en de bewijsvoering van het bekende convergentiekenmerk van Kummer [1]) en in den bewijsgang van menig theorema van Hardy-Littlewood. [2]) Maar het veld van onderzoek naar de voor de bestaande theorie noodzakelijke correcties blijkt bij nadere beschouwing reeds grootendeels

---

[1]) Zie voor voorbeelden: Brouwer, l. c.

[2]) Vergelijk *Proc. of the Lond. Math. Soc. Ser.* 2 Bd 11 p. 411—478, Bd 13 p. 174—191 met Landau. *Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie*, p. 45—55. Springer, Berlin, 1916.

ontgonnen, en het merkwaardige hierbij is dat zulks niet is geschied om te voldoen aan de consequenties van het intuïtionistische standpunt, doch om de bedoelde bewijzen in duidelijker of aantrekkelijker vorm te gieten. Zoo hebben Pringsheim[1]) en Landau[2]) onbewust medegeploegd op den intuïtionistischen akker, en het lijkt mij voor het intuïtionisme geen gering feit dat wiskundigen als de genoemde de beginselen er van gedeeltelijk met de daad beleden hebben.

Afgescheiden van de gesignaleerde punten en nog enkele andere kunnen van de bestaande theorie der oneindige reeksen de voornaamste gedeelten ongewijzigd blijven, terwijl de opbouw eener systematische theorie der non-oscilleerende en negatief-convergente reeksen, die ongetwijfeld een vijfde periode in de geschiedenis van de theorie der oneindige reeksen zal inluiden, tot dusver niet is aangevangen. De in de bestaande theorieën gebruikte reeksen daarentegen zijn vrijwel geregeld positief-convergent, en hiervan geven de desbetreffende convergentiebewijzen bijna steeds ondubbelzinnig blijk, zoodat er geen wijzigingen aangebracht behoeven te worden.

Hiermede hoop ik U in korte trekken een vluchtig beeld gegeven te hebben van de ontwikkeling van de begrippen convergentie en som van de primitieve opvattingen af tot aan de subtiele onderscheidingen van den laatsten tijd toe.

Ik wil deze openbare les niet besluiten zonder een woord van dank voor het in mij gestelde vertrouwen, en zonder uiting te geven aan mijn groote vreugde dat het mij vergund is mede te werken tot de beoefening der wiskunde aan de universiteit, waar mijn hoogvereerde leermeesters, wien ik mijn opleiding dank, hunne voortreffelijke lessen geven. Ik heb gezegd.

---

[1]) Zie Brouwer, l. c.

[2]) Vergelijk *Proc. of the Lond. Math. Soc. Ser.* 2 Bd 11 p. 411—478, Bd 13 p. 174—191 met Landau. *Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie*, p. 45—55. Springer, Berlin, 1916.

Leerboek der Vlakke Meetkunde

DOOR

Dr. P. MOLENBROEK (en P. WIJDENES).

Prijs, in linnen gebonden, f 6.50.

ZESDE DRUK.

De Heeren *Molenbroek* en *Wijdenes* hebben hiermee het door hen opgevatte plan gansch ten uitvoer gebracht: de leerboeken voor Meetkunde van eerstgenoemde in tweeërlei vorm te bewerken, een kleine uitgave voor het Middelbaar en Voorbereidend Hooger Onderwijs, en een groote voor actestudie en voor al wie er meer van wil weten.

Vergeleken met de vijfde uitgave (zie *Schoolblad* van 20, 10, '23) is deze bewerking onbetwistbaar een vooruitgang: alle goede eigenschappen bleven behouden, en bovendien werden tal van verbeteringen en aanvullingen aangebracht. De definities werden met zorg nagezien en op menige plaats verkort en verduidelijkt; de onontbeerlijke postulaten uitdrukkelijk aangegeven; op de meeste plaatsen (nog niet overal) het incorrecte „*rechte*" vervangen door „*lijnstuk*". Nieuw opgenomen onderwerpen zijn: enkele hoofdstellingen uit de moderne meetkunde van den driehoek (aan „*driehoekmicroscopie*" willen we niet doen, verklaren de schrijvers); inversie; de raakproblemen van *Apollonius;* cirkelbundels; isogonaal — en supplementaircirkels van een stel van twee of drie cirkels; de hoofdeigenschappen van ellips, hyperbool, parabool in elementaire behandeling. Daar het boek bestemd is voor lezers die reeds een eerste Wiskunde onderwijs genoten, wordt hier en daar beroep gedaan op Driehoeksmeting en ook al eens vooruitgeloopen als het er op aan kwam gelijkaardige vraagstukken dadelijk na malkander te behandelen. Van het geheel mag getuigd worden dat de schrijvers erin geslaagd zijn een uitstekend leerboek samen te stellen, dat de vergelijking met de beste uit het buitenland kan doorstaan.

Wat de inkleeding betreft: overal werd gezorgd voor beknopte en geschikte notaties; randschrift, cursief en vetjes maken den inhoud zeer overzichtelijk en een alfabetisch register vergemakkelijkt het naslaan; eindelijk heeft de Heer *Wijdenes* de fraaie, sprekende en van een onderschrift voorziene figuren met kwistige hand rondgestrooid.

Ook typografisch is het boek tot in de puntjes verzorgd: zoo naar inhoud als vorm is het een genot voor geest en oog! △.

Het Schoolblad voor Vlaanderen van 25 April 1925.

UITGAVE VAN P. NOORDHOFF TE GRONINGEN.