BIJVOEGSEL

VAN HET NIEUW TIJDSCHRIFT VOOR WISKUNDE GEWIJD AAN ONDERWIJSBELANGEN

ONDER LEIDING VAN

J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

MET MEDEWERKING VAN

Dr. H. J. E. BETH
DEVENTER

Dr. E. J. DIJKSTERHUIS
OISTERWIJK

Dr. B. P. HAALMEIJER
AMSTERDAM

Dr. D. J. E. SCHREK
UTRECHT

Dr. P. DE VAERE
BRUSSEL

Dr. D. P. A. VERRIJP
ARNHEM

1e JAARGANG 1924/25, Nr. 3

P. NOORDHOFF — GRONINGEN

Het Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde verschijnt in zes tweemaandelijksche afleveringen, samen 10 à 12 vel druks. Prijs *f* 3.— per jaargang. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6.—) of op „Christiaan Huygens" (*f* 8.—) zijn ingeteekend, betalen *f* 2.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam, Saxen-Weimarlaan 46; Tel. 28341. Aangeteekende zendingen met bijvoeging: „Bijkantoor Saxen-Weimarlaan 48".

Het honorarium voor geplaatste artikelen bedraagt *f* 20.— per vel.

De prijs per 25 overdrukken of gedeelten van 25 overdrukken bedraagt *f* 3,50 per vel druks *in het vel gedrukt*. Gedeelten van een vel worden als een geheel vel berekend. Worden de overdrukken buiten het vel verlangd, dan wordt voor het afzonderlijk drukken bovendien *f* 6.— per vel druks in rekening gebracht.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

INHOUD.

OVER HET FORMULEEREN VAN STELLINGEN EN BEWIJZEN DER MEETKUNDE.

DOOR

J. H. SCHOGT.

Telkens, wanneer men het verslag van een wiskunde-examen opslaat, wordt men getroffen door de opmerking, dat vele candidaten te weinig zorg besteden aan den schriftelijken vorm hunner betoogen. Terecht verbaast men zich over zulke tekortkomingen bij hen, die onderwijs moeten geven, en wier welslagen voor een groot deel afhangt van duidelijkheid en stiptheid. Maar wie geneigd is, zich aan zooveel slordigheid te ergeren, moge bedenken, dat er wel eene verontschuldiging voor te vinden is, dat zij althans kan worden verklaard. Degenen, die zich voorbereiden voor een examen in de wiskunde (L.O. of M.O.) waren tot voor kort voor de studie der meetkunde (planimetrie en stereometrie) aangewezen op leerboeken, die zonder uitzondering zeer onwetenschappelijk zijn. Deze bevatten talrijke beweringen, die zinledig zijn, meestal tengevolge van het feit, dat van verschillende termen uit achteloosheid of met opzet de beteekenis niet of niet voldoende omschreven is, en de bewijzen zijn dikwijls eene aaneenschakeling van hiaten. Fouten, die in geen enkel ander onderdeel der wiskunde zouden worden toegelaten, zijn hier schering en inslag; het schijnt wel, dat zoodra men het gebied der „gewone" meetkunde betreedt, alles geoorloofd is.

Deze zonderlinge en betreurenswaardige toestand is ontstaan door de samenwerking van verschillende oorzaken. Allereerst de meer dan tweeduizendjarige heerschappij der „Elementen" van EUCLIDES. Hoe grootsch dit werk ook moge wezen, dat het aan de hedendaagsche eischen der wiskundige gestrengheid voldoet, zal niemand beweren. Toen voor de analyse de nieuwe aera reeds lang was aangebroken, moest de meetkunde zich nog vergenoegen met den redeneertrant der „elementen"; dit is eerst omstreeks 1880 anders geworden. Vandaar dat ook thans nog velen de gebruikelijke slordigheden als vanzelfsprekend aanvaarden. — Vervolgens de buitengewone moeilijkheid der „gewone" meetkunde. De eigenschappen der gewone, d.i. Euclidische één-, twee of driedimensionale, meetkunde zijn, wat haar inhoud betreft, gemakkelijk te begrijpen wegens hare aanschouwelijkheid; om te bewijzen zijn zij veel moeilijker dan die der projectieve meetkunde. Deze omstandigheid, gevoegd bij het feit, dat men om redenen van practischen aard de studie der meetkunde met die der „gewone" begint, heeft er toe bijgedragen, den ouderwetschen bewijstrant in het leven te houden. — Dan de omstandigheid, dat planimetrie en stereometrie reeds lang deel uitmaken van de leervakken der middelbare scholen. Toen men is gaan inzien, dat wiskundige gestrengheid op school niet te bereiken is, is men zich ten doel gaan stellen, de wiskunde voor de leerlingen gemakkelijk te maken. Hierbij bekommert men zich dikwijls niet of nauwelijks om de juistheid. Ieder die weet, hoe gemakkelijk de foutieve redeneeringen, die men om redenen van paedagogischen aard aan schoolkinderen meent te moeten voorzetten, door iets meer gevorderden als juist worden aanvaard, kan zich voorstellen, welken invloed de geschriften, die de elementaire meetkunde onder ieders bereik moeten brengen, hiervan hebben ondervonden. — Ten slotte noem ik als een oorzaak, die de slordigheid sterk bevordert, de eigenaardige voorliefde voor het gebruik van teekens in plaats van woorden. Het streven naar vermijding van breedsprakigheid heeft eene half-symbolische notatie voortgebracht, waarvan het gebruik in zooverre schadelijk kan zijn, dat de redeneeringen, die niet meer volledig worden opgeschreven, ook niet meer volledig worden overwogen, en — maar dit zal wel uitsluitend bij schoolkinderen voorkomen — dat men zich niet bekommert om de vraag, op welke stellingen eene gevolgtrekking berust, als die stellingen toch niet behoeven te worden opgeschreven.

Ik wil in dit opstel op eenige gebruikelijke onjuistheden de aandacht vestigen en mij daarbij beperken tot die, welke voortspruiten uit een ondoordacht gebruik van sommige woorden. Ik zal dus niet spreken over de vele onvolledigheden, die in de gebruikelijke bewijzen voorkomen. De bovenstaande „beperking" is overigens geenszins een scherpe begrenzing van mijn stof, want eene verhandeling over het weloverwogen gebruik van het woordje „dus" zou nagenoeg alle fouten moeten behandelen.

Eene onuitputtelijke bron van misverstand en verwarring vormt het wisselen der beteekenis van sommige woorden, in de eerste plaats van den naam der figuren, die in de elementaire meetkunde alle andere in belangrijkheid overtreffen: de rechte lijn en de deelverzamelingen daarvan. Men is gewoon onder „rechte lijn" (of „lijn", of „rechte") te verstaan drie figuren, die zeer verschillende eigenschappen hebben. Ten eerste de figuur, die door twee willekeurige [1]) harer punten bepaald is, en waaraan geen getal als lengte kan worden toegevoegd. Deze figuur zal ik als „rechte lijn" blijven aanduiden. Ten tweede eene deelfiguur der rechte lijn, die bepaald is door een zeker punt, haar eindpunt, en een willekeurig ander van hare punten (dus *niet* door twee willekeurige harer punten). Aan deze figuur kan evenmin een getal worden toegevoegd; ik zal haar als *halve lijn* aanduiden. Ten derde eene deelverzameling der rechte lijn, die bepaald is door twee bijzondere punten, hare eindpunten, en waaraan, gelijk men bewijzen kan, een getal als lengte kan worden toegevoegd. Deze figuur zal in het vervolg worden aangeduid als *lijnstuk*.

Wanneer men al deze begrippen door éénzelfde woord aanduidt, is de inhoud onzeker van alle stellingen, waarin dat woord voorkomt, en ook van alle stellingen, waarin begrippen voorkomen, die met behulp van dat woord worden gedefinieerd. Strikt genomen zouden bijna alle stellingen der vlakke meetkunde door deze omstandigheid onbepaald worden. Dikwijls hangt het van de definitie van een begrip af, of eene stelling juist is of niet; de stelling: „het aantal diagonalen van een n-hoek is $\frac{1}{2}n\ (n - 3)$" is juist, als men eene diagonaal van een veelhoek definieert als lijnstuk, dat twee niet-opvolgende hoekpunten van den veelhoek tot eindpunten heeft, maar als men eene diagonaal definieert als rechte lijn, is de stelling onjuist, tenzij men zekere afspraken maakt omtrent meervoudig tellen, maar dat wordt, voor zoover ik weet, nooit gedaan.

Somtijds tracht men de drie figuren te onderscheiden, door aan de woorden „rechte lijn" attributen toe te voegen, als: begrensd, eindig, oneindig, onbepaald verlengd, e. d. Reeds EUCLIDES duidde het lijnstuk soms aan door εὐθεῖα πεπερασμένη [2]), d.i. begrensde

---

1) Onder *twee willekeurige* punten wordt hier verstaan een willekeurig tweetal, dus twee punten die verschillend zijn, maar overigens willekeurig. Evenzoo in het vervolg.

2) In tegenstelling met εὐθεῖα ἄπειρος.

rechte, meestal echter sprak hij kortweg van εὐθεῖα, rechte. Mijns inziens behoort het attribuut uitsluitend gebruikt te worden ter aanduiding van bijzondere gevallen, zooals de „rechthoekige" driehoek een bijzonder geval is van den driehoek. Noemt men een lijnstuk eene begrensde lijn, dan zegt men 1°. dat een lijnstuk eene rechte lijn is, die 2°. de eigenschap heeft, begrensd te zijn. Men geeft dan aan de drie figuren een gemeenschappelijken naam, wat mij bij het groote verschil in eigenschappen niet gewenscht schijnt. Wanneer men ze achtereenvolgens aanduidt als onbegrensde, eenzijdig begrensde en tweezijdig begrensde rechte lijn, maakt men geen fouten, mits men de attributen nimmer weglaat. De boven gegeven benamingen lijken mij verkieslijker. Bepaald verwerpelijk lijkt het mij, te spreken van lijnen van eindige lengte en van oneindige lengte, want bij de tamelijk ingewikkelde beschouwingen, die leiden tot het toekennen eener lengte aan lijnstukken, is het begrip lijnstuk reeds herhaaldelijk gebruikt.

De gebruikelijke zegswijze, dat eene lijn aan elk harer uiteinden op ééne wijze verlengd kan worden, is zinledig, zoolang niet is gedefinieerd, wat men onder eene „wijze" van verlengen verstaat. De juiste vorm van deze stelling is heel eenvoudig: een lijnstuk maakt deel uit van ééne rechte lijn.

Hoe men een hoek ook definieert, men zal daarbij steeds moeten spreken over twee halve lijnen met gemeenschappelijk eindpunt. Wanneer men een punt door een letter aanduidt, heeft men ter aanduiding van een hoek dus ten minste drie letters noodig: ééne bij het hoekpunt en ééne bij een willekeurig ander punt van elk der beenen. Als men dan nog een afspraak maakt over het onderscheiden van uitspringende en inspringende hoeken, is dit aantal 3 ter aanduiding van niet-gestrekte hoeken ook voldoende [1]). Maar met minder kan men in het algemeen niet volstaan. In het bijzonder is de aanduiding door ééne letter en een index, of een kruisje of iets dergelijks [2]), verwerpelijk; want deze is slechts te gebruiken onder verwijzing naar eene teekening, en dus bij eene wiskundige redeneering niet bruikbaar. Dit schijnt door velen niet te worden ingezien; wel is waar kan elk

---

[1]) Of men de letter die het hoekpunt aanduidt al of niet in het midden wil zetten, is niet meer dan eene quaestie van smaak.

[2]) Deze wijze van aanduiding is een m.i. schadelijk gevolg van bovenbedoeld streven naar kortheid.

schoolkind U vertellen, dat de wiskundige eigenschappen niet door aanschouwing, maar door redeneering worden bewezen, maar de consequenties hiervan worden door weinigen aanvaard. Natuurlijk is er niets tegen, om, zooals gewoonlijk wordt gedaan, onder $\angle$ A van $\triangle$ ABC eens voor al den uitspringenden hoek BAC te verstaan, of om, wanneer in zeker betoog een hoek PQR herhaaldelijk voorkomt, af te spreken, dien hoek in dat betoog b.v. als $\angle$ Q_1 aan te duiden.

Men kan zeggen: „$\angle$ AOB en $\angle$ COD zijn gelijk *als* overstaande hoeken", op grond van de stelling, dat overstaande hoeken gelijk zijn, maar de veel voorkomende zegswijze: „$\angle$ ABC en $\angle$ PQR zijn gelijk *als* verwisselende binnenhoeken" is onjuist, immers zij geeft te kennen, dat de hoeken gelijk zijn, *omdat* zij verwisselende binnenhoeken zijn, wat eene onjuiste gevolgtrekking is. Men moet zeggen: „$\angle$ ABC en $\angle$ PQR zijn gelijk, als verwisselende binnenhoeken bij de snijding van twee evenwijdige rechte lijnen door eene derde", of „$\angle$ ABC $=$ $\angle$ PQR, volgens de stelling, dat...... enz."

Slechts in enkele leerboeken worden bepalingen gegeven van overeenkomstige hoeken, verwisselende binnenhoeken, enz. bij de snijding van twee rechte lijnen door eene derde; de meeste schepen den lezer af met de verwijzing naar een teekeningetje, wat natuurlijk indruischt tegen de allereerste beginselen van wiskundige redeneering.

Geen woord wordt in de elementaire meetkunde zoo vaak en zoo stelselmatig misbruikt als het woord „willekeurig". *Wanneer ik, spreker, zeg, dat $\triangle$ ABC willekeurig is, dan moogt gij, hoorder, dien driehoek kiezen, zooals gij dat wilt.* Gij moogt dus een gelijkzijdigen driehoek beschouwen, of een driehoek met een hoek van 90°. Of gij nu een driehoek kiest met drie hoeken van 60°, of een driehoek met hoeken van 58°, 59° en 63°, de bewering, die ik omtrent dien $\triangle$ ABC uitspreek, moet in beide gevallen juist zijn. — De vaak uitgesproken meening, dat een willekeurige driehoek een driehoek zonder bijzonderheden zou zijn, is zinledig, zoolang niet is omschreven, wat men onder „bijzonderheden" verstaat. Natuurlijk heeft elke driehoek bijzonderheden, dat zijn individueele eigenschappen, zooals de lengten der zijden en de grootten der hoeken. Men zou dus, om aan de uitdrukking „zonder bijzonderheden" eene beteekenis te geven, daaronder moeten verstaan: „zonder ééne der eigenschappen, die voorkomen op eene vooraf vastgestelde lijst."

Dit wordt echter voor zoover ik weet nooit gedaan, en de handelwijze zou bovendien het bezwaar medebrengen, dat men aan het woord „willekeurig" eene beteekenis ging hechten, die wisselde met het zelfstandig naamwoord, waarbij het behoorde, en toch telkens in lijnrechte tegenspraak was met de letterlijke beteekenis. Den zin uitsprekende: „$\triangle$ ABC is willekeurig", zou men *zeggen:* „gij moogt $\triangle$ ABC kiezen, zooals gij wilt", maar *meenen* „gij moogt $\triangle$ ABC op die en die bepaalde manieren *niet* kiezen". Typische voorbeelden van het onjuiste gebruik van het woord „willekeurig" zijn de volgende uitlatingen (ontleend aan leerboeken): *a*) Men verdeelt de vierhoeken in

1°. vierhoeken met 2 paar evenwijdige zijden, parallelogrammen;
2°. „ „ 1 „ „ „ , trapezia;
3°. „ zonder evenwijdige zijden, trapezoïden of *willekeurige* vierhoeken..

b) Twee *willekeurige* lijnen [in de ruimte] zijn kruisende lijnen.

Willekeurigheid is nimmer de negatie van een bepaald bijzonder geval; de opsteller van een vraagstuk bedenke, dat hij, door aan een zekere figuur het attribuut „willekeurig" toe te voegen, er den nadruk op legt, dat die figuur aan geene beperkingen gebonden is, en dus den oplosser van het vraagstuk noopt, alle mogelijkheden te bespreken. Bij weglating van het woord willekeurig verandert niets aan het vraagstuk, alleen die nadruk verdwijnt. Is het de bedoeling, de taak van den oplosser te verlichten door hem eene bespreking te besparen, dan moet men de gegevens nauwkeurig bepalen, en dat kan natuurlijk nooit geschieden door het gebruik van het woord „willekeurig". In vraagstukken over beschrijvende meetkunde (orthogonale projectie), — welk technisch onderdeel der wiskunde niet kan bogen op de welverzorgde formuleeringen —, wordt onder een willekeurig vlak nota bene bijna steeds verstaan een vlak, dat de as van projectie scheefhoekig snijdt, en niet loodrecht staat op een der projectievlakken.

„Willekeurig" kan ook gebruikt worden in den zin van „overigens willekeurig". Een willekeurig punt op de rechte lijn AB is een punt, dat op de rechte lijn AB ligt, maar overigens willekeurig is. Deze beperking veroorzaakt weinig misverstand.

Bij het formuleeren van stellingen over ongelijke hoeken en zijden van een driehoek houde men de taalregels omtrent het gebruik der trappen van vergelijking in gedachten; de gebruikelijke formuleering: „in een driehoek staat tegenover eene grootere zijde een grootere hoek" is slordig, en behoort te luiden: „tegenover de grootste van twee zijden van een driehoek staat een grootere hoek dan tegenover de kleinste."

Wanneer men zegt, dat twee driehoeken gelijk en gelijkvormig zijn, „als zij de drie zijden gelijk hebben", kan een toehoorder, b.v. een leerling, daaruit verstaan, dat elke twee gelijkzijdige driehoeken congruent zijn. Men doet dus beter te zeggen: twee driehoeken zijn congruent, als de drie zijden van den eenen driehoek achtereenvolgens gelijk zijn aan de drie zijden van den anderen. — Somtijds tracht men het aantal congruentiegevallen der driehoeken van vijf tot vier terug te brengen, door de stelling te gebruiken: „twee driehoeken zijn congruent als eene zijde en twee hoeken van den eenen driehoek gelijk zijn aan eene zijde en twee hoeken van den anderen". Deze stelling is onjuist, want als van $\triangle$ ABC en $\triangle$ PQR de zijden AB en PQ gelijk zijn, $\angle A = \angle P$ en $\angle B = \angle R$, terwijl $\angle A \neq \angle B \neq \angle C$, dan is noch $\triangle ABC \cong \triangle PQR$, noch $\triangle ABC \cong \triangle PRQ$. Het is niet mogelijk, het aantal congruentiegevallen aan dat der gevallen van gelijkvormigheid gelijk te maken, zonder de formuleeringen ingewikkeld te doen worden.

Wanneer van de drie zijden eens driehoeks twee gelijk zijn, terwijl de derde zijde aan die twee niet gelijk is, is er aanleiding, om aan die derde zijde een bijzonderen naam te geven. Daarom heeft de naam „basis" in het geval van een gelijkbeenigen driehoek reden van bestaan. Wanneer $\triangle$ ABC gelijkzijdig is, kan het voorkomen, dat men op de gelijkheid der zijden AB en AC de aandacht wil vestigen, en in dat geval kan men BC wel als basis aanduiden. Wanneer van een driehoek geen twee zijden gelijk zijn, is er in 't geheel geen aanleiding, om van „basis", „opstaande zijden", „tophoek", enz. te spreken. Deze benamingen vormen een overblijfsel van een onberedeneerde terminologie, en behooren m.i. te worden opgeruimd.

Bijzonder ongelukkig zijn de benamingen, waarin het woord *afgeknot* voorkomt. Wanneer men spreekt van een „afgeknot prisma", schijnt het, dat men bedoelt een prisma, dat de eigenschap heeft, die door het attribuut „afgeknot" wordt aangeduid, evenals een recht prisma een prisma is, dat de eigenschap heeft, recht te zijn. Maar dit is geenszins het geval: een afgeknot prisma is geen prisma. Immers de bepaling van het prisma houdt o.a. in de begrenzing door twee evenwijdige vlakken (niet behoorende tot de vlakken, waarvan al de snijlijnen evenwijdig zijn); een lichaam, zooals het afgeknot prisma, waaraan die vlakken niet voorkomen, is *dus* geen prisma. Het woord „afgeknot" mag dus niet als attribuut bij „prisma" worden opgevat; evenmin bij „pyramide". Het is mij niet gelukt, betere namen voor deze lichamen te vinden; ik noodig de lezers uit, hierover hunne gedachten eens te laten gaan. De tegenwoordige terminologie is waarlijk al te dwaas. Men zou op die manier elken *vier*hoek, die geen parallelogram is (of desnoods elk trapezium) een „afgeknotten *drie*hoek" kunnen noemen! In afwachting van eene oplossing van dit namenprobleem zou ik kunnen opmerken, dat het beter is, te spreken van een „driezijdig afgeknot prisma" dan (zooals gewoonlijk gedaan wordt) van een „afgeknot driezijdig prisma", want „driezijdig" is een attribuut, en „afgeknot prisma" geeft één enkel begrip aan. Hiertegen is echter wel wat in te brengen, en eene geheel nieuwe terminologie lijkt mij verre te verkiezen boven de oude, zelfs al is daaraan die twijfelachtige verbetering aangebracht.

Van het begrip „meetkundige plaats" wordt gewoonlijk de bepaling gegeven bij de behandeling in de vlakke meetkunde, en dan wel meestal in een der volgende vormen: men zegt, dat eene zekere figuur de meetkundige plaats is der punten, die zekere eigenschap hebben, als elk punt van de figuur die eigenschap heeft, en elk punt dat niet tot de figuur behoort, de eigenschap niet heeft, of: eene meetkundige plaats is de verzameling der punten, die zekere eigenschap hebben. Deze bepalingen kunnen zonder verandering worden gebruikt in de stereometrie, en gewoonlijk wordt dan ook in de stereometrie geen nieuwe definitie gegeven, maar volstaan met de mededeeling, dat behalve meetkundige plaatsen van punten ook meetkundige plaatsen van rechte lijnen zullen worden besproken. Deze laatste zijn dan echter niet gedefinieerd. Het ligt voor de hand, ze te bepalen door in bovenstaande definitie het woord „punt" door het woord „rechte" te vervangen, zoodat dus eene meetkundige plaats van rechte lijnen de verzameling is van alle rechte lijnen die eene bepaalde eigenschap hebben. Maar de behandeling van deze materie in de mij bekende schoolboeken (behalve die van Molenbroek en Wijdenes) is hiermede geenszins in overeenstemming. Zoo wordt b.v. steeds gezegd, dat de meetkundige plaats der rechte lijnen, die evenwijdig zijn aan een vlak W en gaan door een buiten W gelegen punt P, is het platte vlak V door P evenwijdig aan W. Het is echter duidelijk, dat V rechte lijnen bevat, die de eigenschap niet hebben, nl. niet door P gaan. De meetkundige plaats is blijkbaar een lijnenbundel in V met P als top. Wil men de stelling, zooals die gewoonlijk wordt geformuleerd, redden, dan moet men deze bepaling geven van meetkundige plaats van rechte lijnen: onder de meetkundige plaats van rechte lijnen, die een zekere eigenschap hebben, verstaat men de meetkundige plaats der punten van de rechte lijnen, die die eigenschap hebben.

De lezer verontschuldige den geringen samenhang in dit artikeltje; eene volledige en stelselmatige behandeling van het uitgebreide onderwerp kan niet plaats vinden in een tijdschriftartikel. Het is voor dezen keer slechts mijn doel, op enkele verschijnselen te wijzen en zoodoende op te wekken tot meer „taalbezinning" bij het schrijven over elementaire meetkundige onderwerpen.

VERBETERING.

Ten onrechte is op blz. 80 den naam van den Heer MACALESTER LOUP genoemd; het stukje in het „Weekblad" (3 Dec. 1924) was van den Heer Dr. L. M. KLINKENBERG. W.

HET „MEER EN MEER WISKUNDIG" KARAKTER DER H. B. SCHOOL MET 5-JARIGEN CURSUS.

DOOR

DR. H. J. E. BETH.

Wanneer men zal hebben ingezien, dat onze tijd niet zonder meer „de eeuw van het kind" mag worden genoemd, zal men het, als hij dan toch een typeerenden naam moet hebben, eens kunnen probeeren met „de eeuw van de onbewezen uitspraken." Men raakt er al zoo langzamerhand aan gewoon, dat ook door ontwikkelde menschen uitspraken op elk gebied worden gedaan zonder schijn van argumentatie en in lijnrechten strijd met de werkelijkheid. Natuurlijk is het niets anders dan het gedachteloos napraten van wat „gezaghebbende" lieden hebben beweerd; maar dan is het toch een bedenkelijk symptoom van het „minder en minder wiskundig" karakter van den tijd, waarin wij leven. Om van die onbewezen (en, laat ik er maar dadelijk bijvoegen, onjuiste, en dus ook onbewijsbare) uitspraken er maar twee te noemen, beide op onderwijsgebied: „dat het met de *school*tucht thans heel wat droeviger is gesteld dan een kwarteeuw geleden", en „dat het onderwijs aan de 5-jarige H.B.S. een meer en meer wiskundig karakter heeft aangenomen." Tot de laatste zal ik mij thans hebben te bepalen.

Laat ik beginnen met de verklaring, dat ik met het volgende geenszins de bedoeling heb, een kritiek te leveren op het aanhangige wetsontwerp tot regeling van het algemeen vormend middelbaar en voorbereidend hooger onderwijs; ik wil dat gaarne aan meer bevoegden overlaten. Ook heb ik niet het booze voornemen, een aanslag te beramen tegen bestaande of toekomstige schooltypen, die in meerder of minder mate afwijken van het type, dat ons begrijpelijkerwijze nader aan het hart ligt. Mijn streven is van zeer vredelievenden aard. Het mag dat zijn, want ik geloof niet, dat onze 5-jarige H.B.S. voor concurrentie van de zijde harer jongere zusjes zoo heel bang behoeft te zijn. Op háár leeftijd wordt men al lang niet meer jaloersch, als de ooievaar neergestreken is, ook niet, al brengt hij drie zusjes tegelijk. Al is haar peil „door den drang der tijden" eenigszins gedaald, zij mag er nog wel zijn; en als de nieuwe regelingen nog eens ten gevolge mochten hebben, dat zij eenige flinke stappen op haar levensweg *terug* mocht doen, dan zal ik mij in de nieuwe wet zéér verheugen.

Ik wilde dan iets mededeelen over „het *meer en meer* wiskundig" karakter der H.B.S. Men vindt deze uitspraak op nog andere wijzen geformuleerd, b.v. dat „de 5-jarige H.B.S. zich *meer en meer* in wis- en natuurkundige richting heeft georiënteerd", dat „de 5-jarige H.B.S. zich *meer en meer,* in afwijking van hare oorspronkelijke bestemming, heeft gespecialiseerd tot opleidingsschool voor Delft en voor de studie in genees-, wis- en natuurkunde". Aan de vijanden van ons schooltype kan ik de laatste formuleering in het bijzonder aanbevelen; zij is het hatelijkst.

Dat men het noodig heeft geoordeeld, naast de bestaande H.B.-school eene litterair-economische op te richten; dat men meent, dat deze evenzeer als de bestaande H.B.S. eene voorbereiding zal kunnen geven, niet alleen voor het bedrijfsleven, doch ook voor hoogere studie; dat men aan de abituriënten van die scholen (eigenlijk reeds vóórdat die scholen bestaan en vóórdat men zich omtrent haar resultaten eenige voorstelling kan vormen) rechten wil toekennen, die men aan de abituriënten der ruim 60 jaren bestaande scholen onthoudt...... al deze zaken, hoe belangwekkend ook, mag ik slechts in het voorbijgaan aanroeren, omdat zij alleen in verwijderd verband staan met het onderwerp mijner bespreking. Ik ben van den aanvang af, toen het denkbeeld van een splitsing der beide hoogste klassen van de bestaande H.B.S. naar voren werd gebracht, van dat denkbeeld een warm bewonderaar geweest, vóóral met het oog op kleinere plaatsen, waar men vaak niet anders heeft dan een H.B.S. Mijn bewondering is bekoeld, toen het bleek, dat deze splitsing wegens de bezuiniging slechts bij uitzondering zal worden toegepast (en juist de plaatsen, die er de grootste behoefte aan hebben, van de voordeelen verstoken zullen blijven).

Nog erger stortbad kreeg zij, toen mij b.v. uit een ingezonden schrijven van Mr. Dr. Spaander in het Alg. Handelsblad duidelijk werd, hoe de H.B.S. A tegenover de wiskunde staat.

Zijne mededeeling omtrent de 5 uren *theoretische* natuurkunde was mij niet duidelijk, en laat ik daarom onbesproken. De heer Spaander blijkt zeer ingenomen met de plaats, die aan zijn school is ingeruimd voor de Wiskunde. Hij somt met kennelijke voldoening op: 6 uren in klasse I en II, 4 in III, en *nog* 1 uur in IV en V [1]. Stellig zal hij mij ondankbaar vinden, als ik hem zeg, dat het woord „stiefmoederlijk" voor deze bedeeling nog veel te gunstig is. Ik wil nog aannemen, dat zaken als handelsrekenen buiten de genoemde uren gegeven worden, en deze 18 uren werkelijk alleen voor de wiskunde zijn. Misschien voelt hij mijn bezwaar het best, als ik hem voorstel, zijn 18 uren wiskunde als volgt te verdeelen: 2 uur in kl. I, 2 in II, 4 in III, 5 in IV en 5 in V. Daartegenover zou dan van zijne uren economie het meerendeel naar kl. I en II overgebracht moeten worden om de rekening sluitend te maken. Men behoeft geen overmaat van schranderheid te bezitten, om te kunnen gissen, wat de heer Spaander van dit voorstel zou zeggen. Welnu, zooals hij denkt over economie, zoo denk ik over wiskunde.

Wat de rechten betreft, aan het einddiploma der H. B. S. A te verbinden, in zake toelating tot de studie der rechten, ik behoef weinig toe te voegen aan de opmerkingen, die daaromtrent van verschillende zijden, gemaakt zijn: dat het verleenen van die rechten zou zijn praematuur en oneconomisch; ik wil er nog bijvoegen: onpaedagogisch.

Maar evenmin zou ik die rechten toegekend willen zien aan de bezitters van eind-diploma H. B. S. B. De toelating tot de studie in medicijnen en wis- en natuurkunde berustte op heel wat deugdelijker gronden!

Of de oprichting der H. B. S. A een verblijdend feit moet worden genoemd, is onder de tegenwoordige omstandigheden moeilijk te zeggen. Maar dat men haar bestaansrecht motiveert door te wijzen op het „meer en meer wiskundig" karakter der H.B.S., hierover wilde ik gaarne enkele woorden in het midden brengen.

De uitdrukkingswijze „meer en meer wiskundig karakter der H.B.S." is reeds zoo ingeburgerd (zie boven omtrent „onbewezen uitspraken"), dat menigeen, buiten het wiskundig kamp opgesteld (zelfs vele wiskundige collega's zijn het praatje gaan gelooven),

---

[1]) Ik citeer uit het hoofd; de cursiveering van het woordje „nog" is van mij.

zich met verbazing zal afvragen, of het dan niet waar is. Welnu, op deze vraag kunnen we antwoorden met één woord: nonsens!

Wie de eischen nagaat, die bij de oprichting der H.B.Scholen aan de abituriënten gesteld werden, en ze vergelijkt met de tegenwoordig geldende, zal zonder nader onderzoek overtuigd zijn; ik laat de verandering van staats- in schoolexamen in het midden; zij moge voor sommige scholen een verlichting der eischen inhouden, voor andere beteekent zij stellig een aanmerkelijke verzwaring! Uit de laatste opmerking ziet men reeds, hoe gevaarlijk het is, voor een bewijsvoering gebruik te maken van papieren regelingen; ik ben me dan ook zeer wel bewust, dat het gemakkelijk is een overtuigend, maar even moeilijk, een wettig bewijs te leveren van mijn stelling, dat men ten aanzien van de H.B.S. niet mag spreken van een „meer en meer toenemend", maar eerder van een „op bedenkelijke wijze afnemend" wiskundig karakter. Ik weet wel, dat het wiskunde-onderwijs in het algemeen nog vrij wat hooger staat dan het huidige examen-programma zou kunnen doen vreezen, maar zou toch, om mijne meening eenigszins te motiveeren, enkele vragen aan de collega's willen voorleggen.

Wat behandelen wij tegenwoordig van theorie der rekenkunde, dat ook niet (en terecht) op de lagere school onderwezen is? Hoewel ik niet tot degenen behoor, die techniek onderschatten, moet ik er toch op wijzen, dat herleiding van samengestelde breukvormen, vierkants- en kubiekworteltrekking, en dergelijke tot begripsvorming weinig bijdragen. Hoe ver durven wij gaan, als wij eens b.v. over het onmeetbare getal komen te praten? Vinden wij het al niet „veel te moeilijk" voor onze jongens, ook voor de 5de klassers?

Hebben de collega's ook dezelfde moeilijkheid als ik geregeld heb bij het mondeling eindexamen in Algebra: dat ik, na 3 candidaten ondervraagd te hebben, de grootste moeite heb, om voor den 4den nog eens „iets anders" te bedenken? Dat wij uit het hatelijke hoofdstuk der wortelvormen krachtens het programma alle wortelvormen mochten overboord gooien, die niet van nut zijn voor de Meetkunde, hiertegen zal men wel niet veel bezwaar gehad hebben. Omdat ook de logarithmen wel eens vervelend beginnen te worden, ga ik tegenwoordig vrij wat verder met de theorie der vergelijkingen dan gewoonte was. Maar wat is er van Algebra voor het *examen* eigenlijk overgebleven?

Hebben wij ook niet de goniometrische vergelijkingen moeten prijsgeven? Gaan wij niet (*m.i. volkomen terecht*) bij het aanbrengen van de eerste beginselen der meetkunde op veel eenvoudiger wijze te werk dan men een kwarteeuw geleden deed? zonder daarom nog te vervallen in de meetkunde van schaar en stijfselpot. Maar hoevelen onzer eindexamen-candidaten zouden nog een aardig planimetrisch vraagstukje kunnen oplossen? En durven wij in de 5de klasse nog wel eens op de eerste bladzijden van het meetkundeboek terugkomen?

Ik noemde slechts enkele punten op wiskundig gebied, en zal niet uitweiden over het lot van cosmographie, mechanica en lijnteekenen! Al kan men ook tegen het vak lijnteekenen, als àl te zeer technisch, bezwaren hebben, het kòn een gewaardeerde steun zijn bij het onderwijs in planimetrie en beschrijvende meetkunde.

Men kan over al deze wijzigingen verschillend oordeelen; en ik wil niet alles afkeuren, wat men in den laatsten tijd veranderd heeft in urentabel en leerplan, maar toch moet het vreemd aandoen, na al die wijzigingen te hooren spreken van een „meer en meer wiskundig" karakter.

Ik moet toegeven, dat ook de andere leervakken slaag gekregen hebben, en wanneer men alleen op het examenprogramma zou letten, en op grond daarvan en na vergelijking met een vroeger programma een conclusie zou willen trekken, dan zou de qualificatie „overlading" weinig van toepassing kunnen zijn. Trouwens, of er ooit van overlading kon worden gesproken, weet ik niet; er op dit oogenblik van te spreken is belachelijk.

Deze vrees voor overlading is zeer kenmerkend voor onzen tijd, waarin men meent „het kind" geen grooter weldaad te kunnen bewijzen dan door het voor inspanning te behoeden, of het te vrijwaren tegen alles, wat niet naar zijn (des kinds) smaak (tegenwoordig zegt men liever: naar zijn aard) is. Evenmin als men het kind bij iederen maaltijd zijn lievelingsgerecht zal voorzetten, evenmin moest men zich bij het bepalen van het geestelijk voedsel al te veel laten leiden door de vraag „hoe het hem smaakt". Het gevaar dreigt, dat al de „keuze", die men tegenwoordig biedt, en de „vrijheid", die men begeert, tot verslapping zal leiden en dus zal blijken te zijn geweest uit den booze. Zooals men weet, doet zich reeds aan de H.B.S. een geval voor van het moderne denkbeeld der facultatieve vakken, nl. aan het begin der 5de klasse, als de directeur aan de leerlingen beleefdelijk de vraag voorlegt: wat wenscht U te gebruiken, boekhouden of mechanica? Ik ben er nooit geheel gerust op, of bij het „overleg" van de zijde der jongelui geen argumenten verzwegen worden, die met hun aard of zelfs met hun smaak weinig te maken hebben, maar meer in verband staan met vragen als deze: welke van de beide concurreerende leeraren zou het minste huiswerk geven, en welke de hoogste cijfers?

Er zal wel niemand zijn, die zou willen tegenspreken, dat het peil van het lagere zoowel als van het voortgezet onderwijs, natuurlijk in het algemeen gesproken, gedaald is; de oorzaken, die vermoedelijk velerlei zijn, zouden we daarbij nog in het midden kunnen laten. Wanneer men nu nog zou willen aannemen, dat de daling van het lager onderwijs in sneller tempo heeft plaats gehad dan die van het voortgezet onderwijs, dan zou daarmede verklaard zijn het beruchte verschijnsel van de „kloof", die we thans bezig zijn te dempen met enquêtes, rapporten en aaneensluitingscommissies.

Men zal mij verwijten, dat ik dan de schuld van het bestaan van die kloof aan het lager onderwijs toeschrijf, hetgeen ik in hoofdzaak ook werkelijk doe. Nu moet men weer niet komen aandragen met het weinig frissche voorbeeld van het huis, waarvan men éérst het fundament legt om er daarna op voort te bouwen. Met dit beeld te gebruiken, bewijst men op de meest volledige wijze zijn ongelijk. Immers, wie een gebouw opricht, legt wel eerst de fundamenten, maar hij construeert ze in overeenstemming met het gebouw, dat erop zal moeten rusten.

Wanneer ik de schuld geef aan het lager onderwijs, dan wil ik daarmede niets zeggen ten nadeele van de onderwijzers. Inderdaad meen ik, dat zij in onze maatschappij een klasse vormen, die van de waardeering, die haar op grond van haar toewijding toekomt, slechts een klein percentage geniet. De fout schuilt m.i. geheel in het stelsel. Men heeft voor het lager onderwijs „methoden" uitgedacht, „aanschouwingsmateriaal" geconstrueerd en het stelsel van klassikaal onderwijs geperfectionneerd op zoodanige wijze, dat de intensiteit en het tempo van de geestelijke werkzaamheid der kinderen zijn teruggedrongen tot het uiterste minimum. Men bereikt daarmede, dat aan 100 % (of misschien 98 %) een zekere hoeveelheid kennis en technische vaardigheid wordt bijgebracht. Ik onderschat dit in geenen deele, en wil hierbij opmerken, dat hetgeen gezegd is omtrent de daling van het peil van het lager onderwijs alleen betrekking heeft op het gedeelte der leerlingen, dat voortgezet onderwijs genieten zal, welk gedeelte mij begrijpelijkerwijze thans alleen interesseert; voor het overige deel der schoolbevolking kan wellicht de lagere school een vergelijking met een vorige periode veel beter doorstaan.

Maar door te veel gebruik (en dus misbruik) te maken van de zooeven genoemde middelen heeft zij onrecht moeten doen aan de kinderen, die voorbestemd zijn voor het voortgezet onderwijs. Zij heeft hun niet meer kunnen geven datgene, waaraan die kinderen vóóral behoefte hebben: het bewustzijn, dat het raadplegen van het geheugen niet de eenig mogelijke geestelijke werkzaamheid is. Om het kort uit te drukken: de lagere school maakt het thans haren leerlingen véél te gemakkelijk; de leerling doet geestelijk te weinig, de onderwijzer doet te veel.

Dat de leerlingen, wanneer zij bij ons aankomen (uitzonderingen natuurlijk dáárgelaten) nog teveel uitsluitend het geheugen aanspreken, en er geen voorstelling van hebben, tot hoeveel méér zij in staat zijn, dit is naar mijne meening de geheele beteekenis van de „kloof". Daar de scholen voor voortgezet onderwijs een bepaalde taak in een bepaalden tijd hebben te volbrengen, zal een wijziging van het stelsel van lager onderwijs moeten plaats hebben vóórdat wij kans hebben uit de moeilijkheid te komen. Ik bedoel hiermede *niet*, dat de eenheidsschool weg moet, of dat het Fransch weder moet worden ingevoerd. De fout zit veel dieper.

We moeten dankbaar erkennen, dat men in de kringen van het lager onderwijs dit meer en meer gaat inzien, en dat het aan pogingen om tot verandering te komen niet ontbreekt. Ik gevoel mij niet voldoende bevoegd op het gebied van het lager onderwijs om te durven komen met de aanprijzing van het Dalton-stelsel of een ander stelsel. Alleen moet ik bij deze gelegenheid de vraag stellen, of men bij het zoeken van nieuwe wegen op het gebied van opvoeding en onderwijs niet wat erg eenzijdig zijn blik richt naar het Westen. Sluiten wij wegens den afkeer, dien wij zijn gaan gevoelen voor den ouden Duitschen schoolmeester, niet al te zeer de oogen ook voor de goede hoedanigheden, die hij bezat?

Nu ik over de aansluiting spreek, wil ik de aandacht vestigen op een punt, waarop alle lichamen, die de zaak in studie genomen hebben, voor zoover ik heb kunnen nagaan, het eens zijn; n.l. dat niet *alle* leerlingen, die de lagere school „met vrucht" gevolgd hebben, op dien grond geschikt kunnen worden geacht voor het voortgezet onderwijs, zooals dat gegeven wordt aan Gymnasium en H.B.S. (Deze uitspraak acht ik van héél groote beteekenis, ook voor de vraag, waarmede we ons op dit oogenblik bezig houden: hoe het toch komt, dat naar de meening van zoovelen „de H.B.S. een meer en meer wiskundig karakter heeft aangenomen"). Hier zijn schakeeringen; men acht noodig: „bijzondere geschiktheid voor intellectueelen arbeid", „eenige geschiktheid voor intellectueelen arbeid", „geschiktheid voor in hoofdzaak intellectueelen arbeid", enz. De moeilijkheid, waarvoor hoofden van scholen zich geplaatst zien, wanneer het op het afgeven der „verklaringen" aankomt, laat zich volkomen verklaren door het feit, dat zij zeer goed weten, dat niet iedere leerling, die hun te gemakkelijke school, zelfs met veel vrucht, heeft doorloopen, het op de H.B.S. zal kunnen volhouden. Toch meen ik, dat zij niet van die moeilijkheid kunnen worden ontslagen. Het kan zijn, dat ik het in dit opzicht gelukkig heb getroffen; ik zou het thans geldende stelsel van de verklaringen niet gaarne voor eenig ander ruilen; alleen hoop ik, dat wij nog eens van de bepalingen omtrent de cijfers, die de hoofden bij hun verklaring moeten voegen, en de cijfers, die wij zelf bij het admissie-examen geven, verlost zullen worden.

Het groot aantal teleurstellingen, dat reeds de eerste klasse der H.B.S. oplevert, wordt door leeken, zooals vanzelf spreekt, toegeschreven aan fouten in het H.B.S.onderwijs. Dat het vrij van gebreken is, zou ik niet gaarne verklaren, maar het zou thans te ver voeren, daarop in te gaan. De voornaamste oorzaken liggen echter m.i. elders, en een enkel (allerbelangrijkst) punt heb ik reeds besproken. Nu zou een statistiek gemakkelijk uitwijzen, dat de wiskunde volstrekt niet altijd het grootste struikelblok is, maar een feit is, dat wie zich tegen onze H.B.S. richt, zich in het bijzonder richt tegen het leervak Wiskunde. Toch is, naar ik reeds heb uiteengezet, de Wiskunde in den laatsten tijd er zeker niet gevaarlijker op geworden. Ik geloof daarom, dat de vermindering van de waardeering, die de Wiskunde als leervak treft, voor een gedeelte is toe te schrijven aan het feit, dat de H.B.S. niet aan alle gerechtvaardigde niet gerechtvaardigde eischen heeft kunnen voldoen.

Het is echter gemakkelijk, enkele meerdere punten op te noemen, die de genoemde vermindering van waardeering zouden kunnen verklaren. Men verneemt zoo vaak de klacht, dat men, aan hetgeen men van de wiskunde heeft geleerd, in zijn verder leven zoo weinig heeft.

Tegenover deze klacht is in de eerste plaats op te merken, dat men in de jeugd van een kind moeilijk voorspellen kan, aan welke dingen het in zijn leven wat hebben zal. Maar bovendien, de bedoeling van het wiskundeonderwijs is toch ook volstrekt niet in de eerste plaats: het bijbrengen van de kennis van een zekere hoeveelheid stellingen en formules, en van eenige technische vaardigheden. Wat de voornaamste bedoeling dan wel is? het zou voor wiskundigen een beleediging inhouden, deze vraag hier te behandelen. Dat er sommigen onder ons zijn, die er nog niets van schijnen te weten, hierop kom ik nog terug.

Wat men eraan heeft? Ziedaar de ergerlijke vraag, die ten aanzien van een leervak als wiskunde thans meer dan ooit gesteld wordt, en die typeerend is voor de neiging tot veronachtzaming van het ideëele, die in den tijd van en na den oorlog zulke bedenkelijke afmetingen heeft aangenomen. Men heeft alleen iets aan hetgene, dat men zoo spoedig mogelijk in klinkende munt kan omzetten. Zelfs onze jongelieden zijn aangetast; men hoort het, als men met hen bij hun vertrek over de toekomstplannen spreekt; voor velen is reeds de salarisvraag de meest belangrijke, zoo niet de eenige.

Een vrij algemeen gevoeld bezwaar tegen de wiskunde is, dat het geen vak „voor iedereen" zou zijn. Hier ben ik genaderd tot de legende van de speciale wiskundige begaafdheid. Als axioma aanvaardt men gaarne: een kind heeft mathematischen aanleg of het heeft dien niet; in het laatste geval heeft het literairen (literair-economischen?) aanleg. Hoe de legende van de speciale wiskundige begaafdheid in de wereld gekomen is, is gemakkelijk te gissen: het is een slimmigheid van den eersten slechten wiskundeleeraar. Toen hem in de leerarenvergadering gevraagd werd, waarom hij toch altijd zooveel onvoldoende cijfers had, heeft hij het zooeven genoemde axioma uitgesproken. Daar er nog steeds slechte wiskundeleeraren schijnen te zijn, en ze er ook wel zullen blijven, lijkt mij de kans uitgesloten, dat men het dwaalbegrip nog zal kunnen uitroeien. Mijn stellige overtuiging is, dat als hij zijn tijd goed besteedt en zorgvuldig overweegt, welke eischen hij op een zeker oogenblik aan zijn leerlingen mag stellen, de wiskundeleeraar volstrekt niet méér onvoldoende cijfers behoeft te geven dan zijn niet-wiskundige collega's. Komt hij regelmatig met een groot aantal onvoldoende cijfers, waar zijn collega's een milder oordeel kunnen uitspreken, dan zijn daarmede niet zijn leerlingen veroordeeld, noch zijn leervak, doch uitsluitend hijzelf.

Of dan niet de eene leerling de wiskunde met meer gemak beoefent dan de andere? Welzeker, maar dit zal met ieder vak zoo zijn. De vraag, waarom het gaat, is, of het waar is, dat er vele leerlingen zijn, die héél goed andere zaken kunnen leeren, maar juist géén wiskunde. En deze vraag meen ik op grond mijner ervaring ontkennend te moeten beantwoorden. Ik kan me niet meer dan één leerling herinneren, die „goed" was in de andere vakken, en een der onderdeelen van de wiskunde *niet* kon leeeren.

Het vorige punt brengt er mij vanzelf toe, iets te zeggen over het wiskunde-onderwijs aan meisjes. Het vraagstuk van het voortgezet onderwijs voor meisjes is zoo ingewikkeld, omdat het, meer nog dan voor de jongens, behalve een paedagogische ook een maatschappelijke zijde heeft. Let men alleen op de maatschappelijke zijde, dan zal men geneigd zijn deze vraag te stellen: Is het nu bepaald noodig, dat al onze meisjes òf die vervelende klassieke talen verdragen òf die akelige wiskunde? Maar als men alleen op de paedagogische zijde zou letten, dan zou men allicht de vraag aldus inkleeden: Hebben ook de meisjes met het oog op de moeilijkheden, die ook haar in het leven niet gespaard zullen blijven, recht op een onderwijs, dat niet de moeilijkheden uit den weg gaat, maar ze bij voorkeur opzoekt, omdat ze kunnen dienen om het verstand te scherpen, en de wilskracht te vergrooten?

Men tracht wel door statistieken aan te toonen, dat meisjes „van nature" een geringe neiging tot de wiskunde vertoonen. Nu zijn cijfers en statistieken heel gevaarlijke dingen en men is verrast, als men ziet, wat er op onderwijsgebied mee bereikt wordt. Alle statistieken als de genoemde lijden aan het euvel (indien zij niet reeds veroordeeld zijn doordat zij over te kleine aantallen handelen) dat zij geen licht brengen op het punt van de factoren, die tot het resultaat hebben bijgedragen. De drie voornaamste factoren zijn in dit geval: natuur, onderwijs, opvoeding; misschien moet de volgorde juist omgekeerd zijn. Over dit punt heeft Dr. Adler in een van zijn lezingen te Amsterdam zeer belangwekkende zaken medegedeeld. Het zou wel van belang zijn, indien collega's op dit punt eens iets van hun bevindingen mededeelden. Ik heb de minderwaardigheid der meisjes op het gebied der wiskunde-studie niet kunnen constateeren; wat een groot deel harer wel erg in den weg staat, is een gemis aan zelfvertrouwen. Dat dit *ontstaat* door haar geringer resultaat geloof ik niet; ik ben eerder geneigd het geringer resultaat toe te schrijven aan het weinige zelfvertrouwen; het laatste ware wellicht door de groote verschillen in de opvoeding van jongens en meisjes volledig te verklaren.

Ik heb hiermede enkele punten aangeduid, die kunnen hebben bijgedragen tot een vermindering van de waardeering, die de wiskunde thans ondervindt, en wil ten slotte nog een oogenblik stilstaan bij het aandeel, dat sommige van onze collega's meenen te moeten nemen in het bestoken van hun leervak. Het is een gevaarlijk verschijnsel, omdat de invloed van dezulken op het groote publiek aanzienlijk is. Voor teleurgestelde ouders gelden zij als profeten. Men verheugt zich erin, nog eens enkele frissche lieden op te merken in het leger van frikken en sleurmenschen. Een uitspraak, die thans in de mode is, is, dat de schoolwiskunde slechts techniek is, dus op één lijn te stellen met handteekenen en gymnastiek. De laatste toevoeging kan slechts dienen, om de grootte der minachting nader te bepalen. Hoe bekrompen het is, de laatste twee vakken als louter techniek te qualificeeren, moge ik onbesproken laten. Dat een gedeelte van hetgeen wij als wiskunde bedrijven, inderdaad „slechts" techniek is, kan men niet tegenspreken. Maar dit beschouw ik als één der vele goede zijden, die de wiskunde als leervak heeft. Om den leerlingen den smaak te geven voor —, en het nut te doen zien van ordelijk en accuraat werken, daarvoor is geen enkel leervak zoo geschikt als wiskunde. Maar dat de wiskunde *uitsluitend* techniek zou zijn, is een uitspraak, die bewijst, dat bedoelde collega's een zonderlinge opvatting hebben van de schoone taak, die hun is opgedragen.

LOODRECHTE STAND VAN LIJN EN VLAK.

DOOR

Ir. D. J. KRUIJTBOSCH.

In de moderne leerboeken wordt van de fundamenteele stelling van den loodrechten stand van een lijn en een vlak steeds het welbekende bewijs van CAUCHY gegeven, waarbij op de loodlijn aan weerszijden van het vlak gelijke stukken worden afgepast. J. N. VISSCHERS heeft van dit bewijs een variant gegeven, die steunt op de eigenschap van de zwaartelijn uit het hoekpunt van den rechten hoek in een rechthoekigen driehoek [1]). Dit bewijs is weer eens een duidelijke toepassing van het *principe van de economie van het denken*, zooals dit door ERNST MACH is geformuleerd [2]). Wat is de beteekenis van dit beginsel? Een enkel voorbeeld moge dit ophelderen. Bij de afleiding van de formule van den hollen spiegel wordt de bekende eigenschap toegepast van de verhouding der stukken, waarin een zijde van een driehoek door de bissectrice van den overstaanden hoek wordt verdeeld. Natuurlijk wordt dan de afleiding dier eigenschap niet opnieuw gezocht en zoodoende de aandacht van de hoofdzaak niet afgeleid. Evenmin zal men de oplossing van een vierkantsvergelijking, waartoe zoo menige opgave uit de mechanica aanleiding geeft, telkens opnieuw gaan *zoeken*, integendeel, men past een bekende formule toe en concentreert de aandacht geheel op het mechanica-vraagstuk zelf. Is de oplossing van een stelsel lineaire vergelijkingen met behulp van determinanten ook niet een voorbeeld van denkeconomie? Leert de identiteit $\frac{x^2-y^2}{x+y}=x-y$ ons niet, dat de samengestelde bewerking links steeds vervangen mag worden door de eenvoudige bewerking rechts? Is de bevordering

---

[1]) Wiskundig Tijdschrift (redacteur F. J. VAES), jaargang X, blz 219.

[2]) ERNST MACH, Die Mechanik, (Leipzig 1908), bladz. 521 e. v.

der economie van het denken niet een der voornaamste doelstellingen van het wiskundig onderwijs?

Het bewijs van den heer VISSCHERS is een goed voorbeeld van denkeconomie, wanneer we het naast dat van CAUCHY beschouwen. In de planimetrie wordt een „gesloten systeem van stellingen" behandeld, luidend: „Naarmate in $\triangle$ ABC de zwaartelijn uit A grooter, gelijk of kleiner is dan de helft van BC, is de hoek A scherp, recht of stomp". Om deze stellingen te bewijzen zijn voorafgaande eigenschappen noodig. Nu zegt ons beginsel, dat het beter is de genoemde zwaartelijn-eigenschap toe te passen, dan de reeks van eigenschappen, die juist tot die zwaartelijn-eigenschap hebben geleid. Het is logisch en natuurlijk, dat de heer VISSCHERS van de zwaartelijn-eigenschap gebruik maakt om te bewijzen, dat een driehoek rechthoekig is; het bewijsje is zeer eenvoudig en de omstandigheid, dat men niet eerder op dit denkbeeld is gekomen, bewijst slechts, hoe weinig actief het beginsel van denkeconomie nog in ons leeft.

Stel (figuur 1) de rechte AB loodrecht op BC en op BD (beide in vlak α) en zij BE een rechte van α door B, dan moet bewezen worden, dat AB loodrecht op BE staat. Trek daartoe de rechte DEC, verbind A met D, E en C, bepaal de middens D′, E′ en C′ van AD, AE en AC, verbind deze met B, dan is D′E′C′ // DEC. Verder is $\triangle$ AD′C′ $\cong$ $\triangle$ BD′C′ (drie zijden). Daaruit volgt AE′ = BE′ = EE′, dus $\angle$ ABE = 90°.

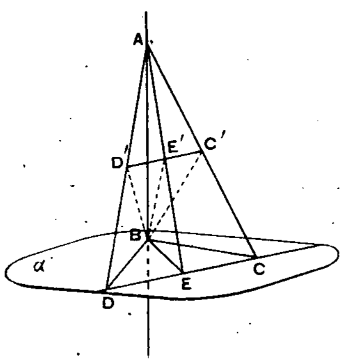

Fig. 1.

Een nadeel van dit bewijs is, dat niet direct kan worden overgegaan op de meetkundige plaats der punten, op gelijke afstanden van twee gegeven punten gelegen, waartoe de figuur van CAUCHY onmiddellijk aanleiding geeft. De mij bekende leerboeken maken echter van dit voordeel geen gebruik, de systematische indeeling van die boeken eischt, dat een meetkundige plaats niet eerder ter sprake komt dan in het speciale hoofdstuk, dat aan meetkundige plaatsen is gewijd. Anders bij KILLING en HOVESTADT [1]),

[1]) W. KILLING und H. HOVESTADT, Handbuch des mathematischen Unterrichts II (Leipzig 1913), bladz. 159.

die in hun behandeling van dit onderwerp een prachtig staaltje geven van heldere, logische en beknopte didaktiek.

Stel AB is een lijnstuk en C haar midden. Elk punt buiten AB bepaalt met AB een vlak en in elk dier vlakken ligt een middelloodlijn van AB. Breng een vlak α door twee dezer middelloodlijnen en neem in dit vlak een punt D aan. Een lijn in α, door D getrokken, snijdt de genoemde middelloodlijnen in E en F, welke punten, evenals D, met A en B worden verbonden. Nu is $\triangle AEF \cong \triangle BEF$ (drie zijden); we kunnen ze laten samenvallen door wenteling om EF, waaruit volgt $DA = DB$. Dus ligt elk punt van α evenver van A als van B en tevens zal elke lijn door C in α getrokken uitsluitend punten bevatten, die evenver van A als van B verwijderd zijn en dus een middelloodlijn van AB zijn, dus is AB loodrecht op alle rechten door C in α getrokken; we zeggen nu, dat AB loodrecht op vlak α staat. —

Conclusies *a*). Als drie lijnen door één punt gaan en één van deze staat loodrecht op de beide andere, dan staat ze loodrecht op dit vlak.

b). Wentelt de middelloodlijn CE om AB, dan beschrijft ze een plat vlak, dat AB loodrecht middendoor deelt.

In oudere boeken komt nog wel het bewijs van EUCLIDES voor (figuur 2). De bewijsmethode is geheel dezelfde als bij CAUCHY, maar omslachtiger, omdat nu meerdere lijnen met gelijke stukken verlengd moeten worden en het aantal paren congruente driehoeken grooter is. Met verwijzing naar de figuur meen ik het bewijs achterwege te mogen laten. Het bewijs is o. a. te vinden in het verouderde leerboek van O. SCHLÖMILCH, maar ook in het moderne „Mathematisches Unterrichtswerk" van HEINRICH MÜLLER [1]). In zijn „Eléments de géometrie" gaf LEGENDRE een bewijs [2]), dat steunt op de formule van de zwaarte-

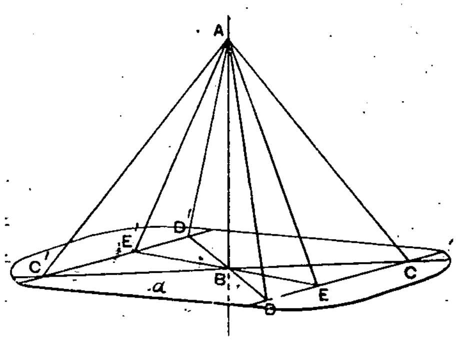

Fig. 2.

[1]) H. MÜLLER, Die Mathematik, erster Teil, Unterstufe, Ausgabe B, Leipzig, 1918, bladz. 180.

[2]) J. VERSLUYS, Handboek der Stereometrie, (Amsterdam 1911) bladz. 17.

lijn: $m_a^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2) - \frac{1}{4}a^2$. Het gekunstelde van deze methode is, dat eerst verklaard zal moeten worden, hoe men DC (figuur 3) moet trekken, opdat ze door BE middendoor zal worden gedeeld. Beter is het, en weinig omslachtiger, om het Theorema van STEWART toe te passen op de driehoeken ADC en BDC:

$$AE^2 \times DC = AC^2 \times DE + AD^2 \times CE - DE \times CE \times DC$$
$$BE^2 \times DC = BC^2 \times DE + BD^2 \times CE - DE \times CE \times DC$$

of na aftrekking:

$$(AE^2 - BE^2)DC = (AC^2 - BC^2) \times DE + (AD^2 - BD^2) \times CE$$
$$= AB^2(DE + CE) \text{ of na deeling door DC:}$$
$$AE^2 - BE^2 = AB^2, \text{ dus } \angle ABE = 90^\circ.$$

Dit bewijs is nog voor eenige vereenvoudiging vatbaar, als BD = BC wordt genomen, dan is ook AD = AC, zooals ook volgt uit de congruentie der driehoeken ABD en ABC.

Dan is: $AE^2 = AC^2 - DE \times CE$

$BE^2 = BC^2 - DE \times CE$ of na aftrekking:

$$AE^2 - BE^2 = AC^2 - BC^2 = AB^2, \text{ dus } \angle ABE = 90^\circ.$$

Dr. W. VAN LOGHEM heeft een meer-dimensionale uitbreiding van het theorema van STEWART gegeven [1]), om zoodoende voor een meer-dimensionale ruimte het bewijs te leveren van de algemeene stelling:

„Staat een lijn loodrecht op n lijnen, die een ruimte R_n bepalen, dan staat ze loodrecht op elke lijn dier ruimte."

De methode van LEGENDRE geeft tot een nog eenvoudiger bewijs aanleiding.

Dit moge hier nog volgen. Stel dat in figuur 3 de rechte DEC loodrecht op BD is getrokken, dan is $AC^2 = AB^2 + BC^2 (\angle ABC = 90^\circ) = AB^2 + BD^2 + CD^2 (\angle BDC = 90^\circ) = AD^2 + CD^2 (\angle ABD = 90^\circ)$. Uit $AC^2 = AD^2 + CD^2$ volgt, dat $\angle ADC = 90^\circ$. Hiermee is het bewijs gegeven van de eigenschap:

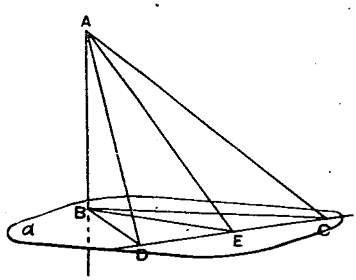

Fig. 3.

„Als een der beenen van een hoek in een vlak ligt en de projectie van dien hoek op dit vlak is recht, dan is de hoek zelf eveneens recht."

---

[1]) *Nieuw Archief voor Wiskunde*, Tweede reeks, Deel X, bladz. 17.

Verder is $AE^2 = AD^2 + DE^2$ ($\angle ADC = 90°$) $= AB^2 + BD^2 + DE^2$ ($\angle ABD = 90°$) $= AB^2 + BE^2$ ($\angle BDE = 90°$). Uit $AE^2 = AB^2 + BE^2$ volgt dat $\angle ABE = 90°$. Q. E. D.

De heer P. WIJDENES deed mij nog het volgende indirecte bewijs aan de hand. In figuur 4 liggen PM, PQ en PN in vlak α en p wordt verondersteld loodrecht te staan op m en n maar *niet* loodrecht op PQ. In het vlak, bepaald door A, P en Q, kan nu steeds een rechte AQ worden getrokken, zoodanig, dat QA = QP is. De driehoeken PMQ en AMQ stemmen overeen in twee zijden, maar PM < AM, immers $\angle APM = 90°$, waaruit volgt:

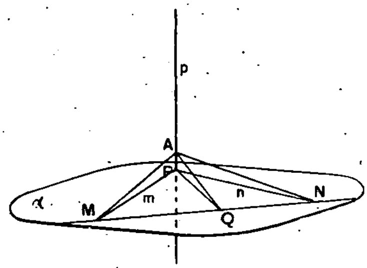

Fig. 4.

$$\angle PQM < \angle AQM$$

Op overeenkomstige wijze blijkt: $\angle PQN < \angle AQN$, of na optelling:

$$180° < 180°,$$ wat onmogelijk is;

dus moet p loodrecht op PQ staan.

De overige eigenschappen van het hoofdstuk, handelend over den loodrechten stand van lijn en vlak, ga ik stilzwijgend voorbij, behoudens één uitzondering. De opmerking moge voorafgaan, dat bij het schrijven van een leergang der stereometrie het doel niet uitsluitend moet zijn om een reeks van eigenschappen te geven in de meest logische volgorde en zonder lacunes, maar dat er tevens voor gewaakt moet worden, dat de bewijzen der stellingen zoo eenvoudig mogelijk zijn, in den meest eleganten vorm worden gegeven en tevens zooveel mogelijk de stof leveren waarop voorafgaande eigenschappen met inzicht en intuïtie toegepast kunnen worden. Al voel ik persoonlijk veel voor de onverbiddelijke logica van een „reductio ad absurdum" (zie Naschrift), het schijnt me echter toe, dat dergelijke bewijzen een niet te groote plaats mogen innemen, omdat er, behalve logica, weinig nieuws uit te leeren valt, daar de redeneering toch steeds weer dezelfde is. Directe bewijzen, zooals b.v. Dr. J. STEIN ze heeft gegeven voor de omgekeerde eigenschappen van een koordenen een raaklijnenvierhoek [1]) beschouw ik als belangrijke didaktische

[1]) *Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde,* Jaargang III, bladz. 164, o.a. overgenomen in de Vlakke Meetkunde van P. WIJDENES en Dr. D. DE LANGE.

aanwinsten. In dit licht beschouwd, bespreek ik nog de twee volgende in de meeste leerboeken genoemde eigenschappen.

I. Als één van twee evenwijdigen loodrecht op een vlak staat, staat de andere ook loodrecht op dit vlak.

II. Twee loodlijnen op hetzelfde vlak zijn evenwijdig.

Stelling I is feitelijk geen stelling, maar volgt direct uit de bepaling van den hoek, waaronder twee rechten elkaar kruisen; ze dient dan ook uitsluitend om den weg te banen tot het indirecte bewijs van stelling II. Voor stelling II stel ik het volgende directe bewijs voor (figuur 5).

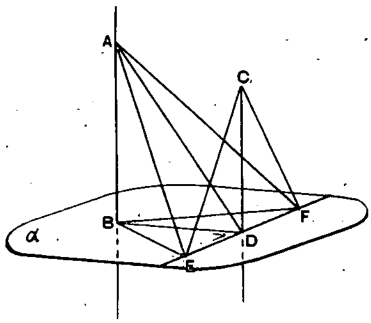

Fig. 5.

Ondersteld: AB ⊥ α en CD ⊥ α.

Gesteld: AB // CD.

Bewijs: Verbind de voetpunten B en D der loodlijnen. Trek in α een rechte door D loodrecht op BD en neem hierop DE = DF. Verbind E en F met A en B. Trek DA. Dan is △ BDE ≅ △ BDF (twee zijden en ingesloten hoek), waaruit volgt BE = BF. Vervolgens is △ ABE ≅ △ ABF (twee zijden en ingesloten hoek), waaruit volgt AE = AF. Ten slotte is △ ADE ≅ △ ADF (drie zijden), waaruit volgt ∠ EDA = ∠ FDA = 90°. Dus zijn BD, AD en CD middelloodlijnen van EF en liggen in één vlak β, dat EF loodrecht middendoor deelt. In dit vlak β ligt dus ook de lijn AB, omdat de punten A en B er in liggen. Dus liggen CD en AB in één vlak β en zijn bovendien beide loodrecht op BD, waaruit volgt, dat AB // CD is.

Vele Duitsche leerboeken geven de volgende variant van dit bewijs [1]: Verbind E en F ook nog met C, dan is △ CDE ≅ △ CDF (twee zijden en ingesl. hoek), waaruit volgt CE = CF. De vier punten A, B, D en C liggen op gelijke afstanden van E en F, dus in het vlak, dat EF loodrecht middendoor deelt, enz., enz. Het paar congruente driehoeken ADE en ADF komt bij dit bewijs te vervallen, eveneens de hulplijn AD.

---

[1]) Dr. F. BOHNERT, Elementare Stereometrie (Sammlung Schubert 1910), bladz. 10, e. a. Waarschijnlijk ontleend aan:

Dr. G. HOLZMÜLLER, Elemente der Stereometrie I, bladz. 8.

In enkele leerboeken, b. v. in het bekende van HENRICI en TREUTLEIN, wordt een totaal afwijkende behandelingsmethode gegeven [1]). Aan den loodrechten stand van lijn en vlak gaat de loodrechte stand van twee vlakken vooraf. In analogie met de planimetrie wordt een rechte hoek tusschen twee vlakken als de helft van een gestrekten gedefiniëerd. Het begrip „draaiing om een as" wordt eerst besproken. Het komt me voor, dat de eenvoudigheid aan de analogie is opgeofferd, voor eerstbeginnenden lijkt me deze methode totaal ongeschikt.

Doel van dit artikel is om onder wiskundigen de waardeering voor elkanders arbeid te bevorderen. Het vinden van een nieuw bewijs van een eigenschap uit de elementaire wiskunde is op zich zelf geen feit van eenige beteekenis. Van groote beteekenis is het echter, dat schrijvers van leerboeken zich eens goed rekenschap geven van de verschillende methoden om belangrijke onderwerpen zoo beknopt, zoo doelmatig en zoo elegant mogelijk te behandelen, dit kan de innerlijke waarde van onze schoolboeken slechts ten goede komen. Men leze eens na wat W. REINDERSMA over het onderwijs in de meetkunde heeft geschreven in het prospectus, dat in 1912 aan zijn „nieuw leerboek" voorafging.

Naschrift.

De vakterm „gesloten systeem van stellingen" is afkomstig van KILLING en HOVESTADT. Ik meen dat REINDERSMA in ons land voor 't eerst dien term heeft gebruikt in zijn nieuw leerboek der planimetrie [2]). Een voorbeeld van een dergelijk systeem heeft men in de reeds aangehaalde drie eigenschappen van de zwaartelijn.

	Ondersteld	Gestelde
I	$m_a > \frac{1}{2}a$	$\angle A < 90^\circ$
II	$m_a = \frac{1}{2}a$	$\angle A = 90^\circ$
III	$m_a < \frac{1}{2}a$	$\angle A > 90^\circ$.

Nu zijn ten aanzien van m_a alle mogelijke onderstellingen gemaakt, bij iedere onderstelling behoort één gevolgtrekking, die bewezen wordt en dus de andere mogelijke gevolgtrekkingen

[1]) J. HENRICI en P. TREUTLEIN, Lehrbuch der Elementar-Geometrie, deel III, (Leipzig 1901).

[2]) W. REINDERSMA, Nieuw leerboek der vlakke meetkunde, deel II, (Groningen 1914), bladz. 8.

uitsluit. Hieruit volgt dat de *omgekeerde eigenschappen uit het ongerijmde* bewezen kunnen worden, want wanneer aan de onderstelling $\angle A < 90^\circ$ de drie mogelijke gevolgtrekkingen $m_a > \frac{1}{2}a$, $m_a = \frac{1}{2}a$ en $m_a < \frac{1}{2}a$ worden toegevoegd, dan zullen de beide laatste conclusies niet waar kunnen zijn, immers uit $m_a = \frac{1}{2}a$ of $m_a < \frac{1}{2}a$ volgt volgens stelling II en III, dat $\angle A = 90^\circ$ of $\angle A > 90^\circ$, wat tegen de onderstelling strijdt. Het is nuttig en leerzaam om met onze leerlingen dergelijke gesloten systemen op te sporen. We vinden dan b. v. langs directen weg bewezen stellingen terug als de omgekeerde eigenschappen van de stellingen van een gesloten systeem. De congruentiestelling van de drie zijden blijkt dan de omgekeerde eigenschap te wezen van de congruentiestelling van twee zijden en den ingesloten hoek, die met de bekende eigenschap van twee driehoeken met twee paar gelijke zijden en ongelijke ingesloten hoeken een gesloten systeem vormt. Zoo bewijst dan ook Dr. A. D. VAN DER HARST de congruentiestelling van de drie zijden langs indirecten weg [1]).

[1]) Dr. A. D. VAN DER HARST, Leerboek der Planimetrie (Haarlem 1922), bladz. 65.

Mededeeling van den Heer F. M. RAZOUX SCHULTZ te Meester Cornelis: In Jg. II van het „Wiskundig Tijdschrift" van VAES werd medegedeeld, dat de directe bewijzen betreffende om- en ingeschreven vierhoeken (zie blz. 105) gegeven werden door GÉRARD in „Bulletin de Mathématique élementaire" van 1900 en later door FRICKE in „Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften".

HET STAATSEXAMEN TOT TOELATING AAN DE UNIVERSITEIT.

Uittreksel uit het verslag van het Staatsexamen in 1924; bijvoegsel van de Ned. Staatscourant 21 Januari 1925, nr. 14.

„De indruk van het examen in de wiskunde is dit jaar vrijwel gelijk aan dien van het vorige. Vele candidaten, waaronder ook voor het B-diploma, bleken een zoo onvoldoende kennis en inzicht te bezitten, dat de commissie aan een ernstige studie van deze candidaten ten zeerste twijfelt.

Wat de algebra betreft, kwam dit vooral aan den dag naar aanleiding van vragen omtrent het verloop van eenige algebraïsche functies. Het opsporen van grenswaarden, zelfs van eenvoudige drietermen van den tweeden graad, kostte dikwijls ontzaglijk veel moeite, evenals de toelichting aan de hand van een grafische voorstelling, hoewel een verbetering met het voorgaande jaar vergeleken, niet valt te ontkennen. De reststelling werd over het algemeen wel gekend, maar een goed bewijs kreeg de commissie, als zij er naar vroeg, zelden te hooren; ook de B-candidaten schoten dan dikwijls te kort.

Logarithmische vergelijkingen werden door laatstgenoemden vaak al te mechanisch opgelost; meerdere keeren werd voor $\log {}^1/_x$ geschreven $\log 1 - \log x$, enz. Een zelfde opmerking geldt voor de vraagstukken, die betrekking hebben op het bepalen van grenswaarden van vormen als $\frac{2x-5}{x^2-10x+21}$, $x - \sqrt{x-4}$, $3\cos x + 4\sin x$, $\operatorname{tg} {}^1/_2 x + \operatorname{cosec} x$, enz.

De commissie meent, naar aanleiding van ervaringen bij het mondeling examen opgedaan, dat het zeer gewenscht is, dat de candidaten de bewerkingen, die zij bij de oplossing van dergelijke vraagstukken uitvoeren, van korte toelichtingen voorzien.

Wat de Stereometrie in het bijzonder betreft, acht de commissie het van veel belang, dat de candidaten voor het goed verwerken van de theorie en ter oefening van het voorstellingsvermogen zich terdege toeleggen op het uitvoeren van ruimte-constructies, zooals het construeeren van uitslagen, enz., van pyramiden, prisma's en drievlakshoeken, als deze door eenige gegevens voldoende zijn bepaald, alsmede het construeeren van doorsneden, die door drie punten zijn bepaald.

Ten slotte moet de commissie nog de klacht uiten, dat indirecte bewijsvoeringen in vele gevallen niet dan met hulp van den examinator gegeven konden worden, ook als het niet ontbrak aan de daarvoor vereischte kennis van de theorie.

Het examen in de trigonometrie en analytische meetkunde geeft tot bijzondere opmerkingen geen aanleiding."

Aan de statistiek uit het verslag ontleen ik de volgende gegevens:

Aantal malen, dat is toegekend de beoordeeling		Algebra	Meetkunde	Trig. en An. Meetkunde
Voor diploma A.				
Zeer goed	(5)	0	0	—
Goed	(4)	24	18	—
Voldoende	(3)	40	47	—
Onvoldoende	(2)	43	42	—
Slecht	(1)	28	25	—
	(0)	1	5	—
		136	137	—
Voor diploma B, nieuw programma.				
Zeer goed	(5)	0	0	0
Goed	(4)	7	3	5
Voldoende	(3)	3	4	4
Onvoldoende	(2)	2	2	3
Slecht	(1)	3	3	1
		15	12	13

Hieronder volgen voor belanghebbenden waardevolle inlichtingen van een der examinatoren over het Staatsexamen. W.

OVER DE WISKUNDE-EISCHEN VOOR HET „STAATSEXAMEN"

DOOR

Dr. H. C. SCHAMHARDT.

Gaarne wil ik voldoen aan het vriendelijk verzoek van den heer P. WIJDENES en enkele inlichtingen verschaffen over het „Staatsexamen", voor zoover dit het vak Wiskunde betreft.

In Staatsblad N^0. 387 vindt men het Koninklijk Besluit van 26 Mei 1922, waarbij een programma wordt vastgesteld voor het eindexamen der gymnasia en het daarmee gelijkgestelde examen, vermeld in artikel 12 der hooger-onderwijswet (het „Staatsexamen"). Het heeft dus ten duidelijkste in de bedoeling van den wetgever gelegen het staatsexamen en het eindexamen der gymnasia volkomen gelijk te stellen. En uit art. 2, waarin de eischen van *„het"* examen worden vermeld, blijkt, dat ook in die eischen naar volkomen gelijkheid is gestreefd: er wordt niet het minste onderscheid gemaakt.

Het is hier natuurlijk niet de plaats om uiteen te zetten, dat deze gelijkheid ook met den besten wil nooit ten volle te bereiken is. Het zij genoeg hier uit eigen ervaring te vermelden, dat door den voorzitter en door de leden der Staatscommissies steeds met allen ernst er naar gestreefd is dit ideaal te verwezenlijken.

Wat de opsomming der eischen voor het staatsexamen betreft, is het Kon. Besluit uit den aard der zaak sober. Zoo bepaalt het zich wat de wiskunde betreft tot het volgende:

a. de stelkunde tot en met de tweede-machtsvergelijkingen, graphische voorstellingen, en bovendien voor de B-leerlingen de rekenkundige en meetkundige reeksen en logarithmen;

b. de planimetrie en de stereometrie.

c. de vlakke trigonometrie en de analytische meetkunde in het platte vlak tot en met de kegelsneden.

Alvorens tot eene nadere uiteenzetting van deze eischen over te gaan, zij volledigheidshalve nog even in herinnering gebracht, dat de A-candidaten zij zijn, die toelating vragen tot de faculteiten der godgeleerdheid, der letteren en wijsbegeerte en der rechten, terwijl de B-candidaten kunnen gaan studeeren in de faculteiten der wis- en natuurkunde, medicijnen en tegenwoordig ook rechten.

De *A-candidaten* zijn vrijgesteld van het examen in de reken- en meetkundige reeksen en de logarithmen, de trigonometrie en de analytische meetkunde. Bovendien hebben zij geen schriftelijk examen en worden dus alleen mondeling geëxamineerd in de lagere algebra en in de meetkunde. In art. 6A van het Kon. Besluit wordt de duur van dit mondelinge examen in elk der onderdeelen bepaald op 30 minuten.

De *B-candidaten* leggen het volledige wiskunde-examen af, zoowel schriftelijk als mondeling. Art. 6B bepaalt den duur op:

Stelkunde: 1 uur en 30 min. schriftelijk en 20 min. mondeling.

Plani- en stereometrie: 1 uur en 30 min. schriftelijk en 25 min. mondeling.

Trigonometrie en Anal. Meetkunde: 1 uur en 30 min. schriftelijk en 30 min. mondeling.

Thans wil ik er toe overgaan de eischen wat nader uiteen te zetten. Beginnen wij met de *Algebra.*

Waar Staatsexamen en eindexamen gymnasium wettelijk gelijk zijn, is het duidelijk, dat wij nadere aanwijzing omtrent de bedoeling van de kort-geformuleerde examen-eischen zullen kunnen vinden in het leerplan der gymnasia. Welnu, dit vermeldt nader: in de eerste vier klassen de hoofdbewerkingen met geheele en gebroken getallen en stelkundige vormen, de deelbaarheid der getallen, de evenredigheden, de vergelijkingen van den eersten graad met één of meer onbekenden, de wortelgrootheden, de gebroken en negatieve exponenten, het oplossen van eenvoudige vierkantsvergelijkingen, het rekenen met logarithmen, graphische voorstellingen; in de vijfde en zesde klasse, meer uitgebreide behandeling van de vierkantsvergelijkingen, herhaling der stelkunde. Bovendien voor de B-leerlingen in klasse V en VI de de reken- en meetkundige reeksen en de logarithmen.

Direct zij opgemerkt, dat de logarithmen wel behooren tot de leerstof der A-leerlingen van een gymnasium, echter niet tot de examenstof, zoodat deze ook op het Staatsexamen aan de A-candidaten niet worden gevraagd. Het spreekt van zelf, dat het bekend zijn met logarithmen den A-candidaten wel tot aanbeveling strekt; exameneisch is dit echter niet. Wel is dit het geval met de graphische voorstellingen. Weliswaar stelt de Staatscommissie aan de A's geen al te zware eischen en beperkt zij zich in den regel tot het onderzoek van de functie $y = ax + b$ en van den drieterm $ax^2 + bx + c$. Maar dan wordt toch wel gevergd, dat de A-candidaat goed bekend is met de graphische voorstelling van deze functies, daarvan weet na te gaan de grenswaarden, den positieven en negatieven toestand. Ook het verband tusschen de graphische voorstelling van de functie $y = ax + b$ en de oplossing van twee vergelijkingen van den eersten graad met twee onbekenden (denk ook aan afhankelijkheid en strijdigheid) moet goed gekend worden.

In het algemeen kan gezegd worden, dat op het Staatsexamen getracht wordt te peilen of de candidaten eenig wiskundig inzicht gekregen hebben. Daarom wordt er b.v. meer waarde aan gehecht, dat men de formule voor de oplossing eener vierkantsvergelijking aan een eenvoudig getallenvoorbeeld kan afleiden dan dat de de wortels machinaal met deze formule berekend worden. Bij vergelijkingen als $x^2 + 5x + 6 = 0$ zijn de wortels toch eenvoudiger te bepalen dan met een formule. Ook het bepalen van de maxima en minima van drietermen als $x^2 + 2x - 15$ of $-x^2 - 6x + 10$ is toch geen kwestie, die machinaal met behulp van een discriminant dient te worden uitgemaakt!

Niet genoeg kan er ook de nadruk op gelegd worden, dat de candidaat een duidelijk begrip dient te hebben van wat men verstaat onder de wortels van een vergelijking. Zeer dikwijls blijkt het, naar aanleiding van vragen over de reststelling en toepassingen daarvan, dat men er zich nooit rekenschap van had gegeven, wat het eigenlijk beteekent dat b. v. 5 een wortel is van de vergelijking $x^3 - 2x^2 + 10x - 125 = 0$.

Ten slotte zij in dit verband nog opgemerkt, dat het noodzakelijk is het onderscheid goed te kennen tusschen reëele en imaginaire, meetbare en onmeetbare getallen.

Het spreekt van zelf, dat de opmerkingen, hierboven gemaakt voor de A-candidaten in versterkte mate van kracht zijn voor hen, die het B-dipioma verlangen. Wordt alleen aan een zeer

8

goede A-candidaat wel eens wat meer gevraagd van graphische voorstellingen, een B-candidaat moet zeker blijk geven van een goed inzicht niet alleen in het gedrag van de genoemde functies, maar ook van andere. Ik noem slechts enkele voorbeelden als:
$y = \frac{x}{x^2+25}$, $y = \frac{2x-3}{x^2}$, $y = \frac{x^2-2x+3}{x^2+2x-3}$; $y = {}^2\log x$, $y = {}^5\log x$, $y = {}^{1/2}\log x$ enz.

Men moet toonen goed begrepen te hebben, wat de uitdrukking $p = {}^g\log a$ beteekent en inzien, waarom ${}^5\log a = \frac{{}^{10}\log a}{{}^{10}\log 5}$ en niet een dergelijken vorm alleen machinaal kunnen gebruiken.

Zooals ook op de gymnasia worden de harmonische reeksen beschouwd als te behooren tot de rekenkundige, waartoe zij immers ook altijd terug zijn te brengen.

Het mondeling examen wordt in den regel afgenomen aan de hand van een eenvoudig vraagstuk, waarbij vanzelf allerlei theoretische kwesties ter sprake komen. Het verdient daarom aanbeveling om, als men de theorie doorgewerkt heeft, onder leiding van een ervaren docent dergelijke vraagstukken te maken. In de opgaven van het Staatsexamen van vorige jaren zijn tal van geschikte voorbeelden te vinden.

Wat van de Algebra gezegd is, geldt evenzeer van de meetkunde. Zoowel de A's als de B's moeten examen afleggen in stereometrie en planimetrie. Ook hierbij wordt aan de hand van een of andere kwestie vooral onderzocht of de candidaat eenig meetkundig inzicht heeft. Voor de A's is natuurlijk de theorie hoofdzaak, maar men moet de verkregen theoretische kennis toch op eenvoudige kwesties weten toe te passen. Een candidaat, die de lichaamsdiagonalen van een afgeknotte pyramide moet teekenen en rustig elkaar kruisende lijnen aanduidt als snijdende lijnen, heeft toch werkelijk geen voldoende wiskundig inzicht al kent hij alle inhoudsformules uit het hoofd. En hetzelfde geldt voor iemand, die wel een lijnstuk in uiterste en middelste reden kan verdeelen, maar niet het lijnsegment $\frac{1}{2}a\sqrt{5}$ kan aanwijzen.

Met de B-candidaten zullen uit den aard der zaak wat lastiger kwesties behandeld worden dan met de A's, maar voor hen geldt evenzeer het bovengenoemde. Evenals voor de Algebra is ook hier de weg: onder goede leiding in de eerste plaats zich de theorie eigen maken en dan die leeren toepassen op vraagstukken zooals die — natuurlijk niet alleen — in de Staatsexamenopgaven te vinden zijn.

In denzelfden geest als het mondeling examen in de algebra en in de meetkunde wordt ook dat in de trigonometrie en analytische meetkunde voor B's afgenomen. Men zorge alvorens zich aan het examen te onderwerpen, bedreven te zijn in het gebruik van de hoofdformules der goniometrie en werke verschillende trigonometrische vraagstukken door, waarbij zich goniometrische kwesties voordoen. Dat een candidaat de formule van den straal van den ingeschreven cirkel, uitgedrukt in een zijde en 2 hoeken, niet paraat heeft, is heusch het ergste niet. Maar dat men niet in staat is r op de bedoelde wijze uit te drukken, is bedenkelijker.

Het examen in de analytische meetkunde, dat nog slechts twee keer is afgenomen, geeft natuurlijk nog niet tot vele opmerkingen aanleiding. Het mondelinge gedeelte wordt gedurende ongeveer een kwartier afgenomen, waarin getracht wordt te weten te komen of de candidaat een voldoende inzicht heeft in de methoden van dit onderdeel der meetkunde. In den regel is het examen beperkt tot een vraagstukje over de kegelsneden of een meetkundige plaats; bij een enkelen uitstekenden candidaat is wel eens een vraag gedaan, die wat verder ging en betrekking had op bundels van kegelsneden of transformatie van coördinaten.

Wat ten slotte het schriftelijk examen voor de B's betreft, kan ik, naar ik meen, volstaan met te verwijzen naar de vraagstukken van het staatsexamen. Tot en met 1922 zijn alle opgaven van dit examen (ook die van andere vakken) uitgegeven bij THEONVILLE te *Leiden*, die van de laatste twee jaren (1923 en '24) zijn verschenen bij GEBROEDERS VAN DER HOEK te *Leiden*. Er bestaan ook aparte uitgaven van de wiskunde-vraagstukken, die echter naar ik meen, niet verder loopen dan tot 1918.

Een enkele korte inlichting over de technische inrichting van het staatsexamen is misschien ook niet onwelkom.

Bijna alle A's hebben hun wiskunde-examen in den loop van de eerste twee examendagen. Een paar hebben den laatsten morgen nog één onderdeel.

Het schriftelijk wiskunde-examen voor de B's was tot dusverre als volgt ingedeeld: in den loop van den eersten morgen Algebra, den middag van den eersten dag Meetkunde en den tweeden morgen Trigonometrie en Analytische Meetkunde. Het mondeling examen is over drie dagen verdeeld, met dien verstande, dat het geheele examen niet langer dan $2^1/_2$ dag duurt.

Ten slotte nog deze raad: wil men teleurstelling vermijden, dan onderwerpe men zich vooral niet aan het staatsexamen zonder voldoende voorbereid te zijn. Alleen een wiskundig begaafde candidaat zou in staat zijn zelfstandig die voorbereiding te verkrijgen. Voor bijna allen zal het noodzakelijk zijn zich te bekwamen onder leiding van een docent, die goed op de hoogte is van de eischen van het eindexamen gymnasium en het staatsexamen. Zij, die zóó onderlegd het staatsexamen afleggen, komen zelden bedrogen uit.

BOEKBESPREKINGEN.

Jan Wijffels, Cosmographie voor de H. B. S. (Zwolle, Tjeenk Willink).

In zijn voorbericht maakt de schrijver de zaak erger dan zij is: het *vak* cosmographie is *niet* facultatief gesteld. Wel kreeg de leeraar grooter vrijheid in de keuze der onderwerpen, die hij in de hem toegemeten 2000 minuten behandelen wil. De docent ziet zich hierdoor geplaatst voor een probleem, een probleem, dat vele oplossingen toelaat. De schrijver van een leerboek voor cosmographie zal de overtuiging bezitten, een oplossing van het probleem gevonden te hebben, die ook voor anderen bruikbaar is. Bij de beoordeeling van zulk een leerboek eischt de billijkheid, dat men zich gaat stellen op het standpunt, dat de schrijver inneemt ten opzichte van de te behandelen leerstof.

Toch is het mij, ook bij de opsomming der behandelde onderwerpen, onmogelijk, enkele opmerkingen te weerhouden. In het eerste hoofdstuk worden meerdere coördinatenstelsels besproken, waarvan de schrijver er slechts één gebruikt; men vraagt zich af, waarom de behandeling der andere stelsels niet achterwege is gebleven. Indien men voor de leerlingen een uitvoerige bespreking van coördinatenleer noodig acht, kan de tijd, hieraan besteed, toch beter voor rekening van andere leervakken gebracht worden dan van cosmographie.

Een belangrijk deel van het werkje handelt over de bepaling van verschillende vaste punten en die van verschillende grootheden, d. w. z. het geeft een beschrijving van enkele belangrijke meetinstrumenten en van de metingen, welke men met die instrumenten verricht; zelfs worden fouten van opstelling besproken en correcties, die moeten worden aangebracht. Er zal wel niemand te vinden zijn, die twijfelt aan de belangrijkheid van al deze zaken, en zeer zeker zal bij een grondige bestudeering van de astronomie de practische werkzaamheid van den astronoom op den voorgrond moeten staan. Maar men kan vragen, of dit nu de onderwerpen zijn, die men *bij voorkeur* bespreekt met jeugdige leerlingen, voor wie het een eerste kennismaking met de astronomie geldt, waarbij we vooral hebben te bedenken, dat de beschikbare tijd hoogstens kan strekken tot het aanbrengen van een *kleine* hoeveelheid kennis en tot het wekken van belangstelling.

Ik reken het den schrijver tot een verdienste, dat hij meerdere zaken onbesproken laat, die vroeger geen enkel schrijver van een elementair leerboek verzweeg; tot een verwijdering van den parallactischen en den positiedriehoek heeft hij blijkbaar niet durven overgaan. Waar onze leerlingen in het begin der 4^de^ klasse niets van een boldriehoek weten, laat staan van boldriehoeksmeting, is dit onderwerp toch wel een der eerste, dat voor schrapping in aanmerking komt.

Besproken worden na de dagelijksche beweging van den hemel, de spherische coördinatenstelsels en de reeds genoemde onderwerpen: o. a. het verschijnsel van de jaarlijksche (ook dat van de dagelijksche) parallaxis en dat der aberratie; vrij uitvoerig wordt de tijdsvereffening behandeld; zeer beknopt de maansbeweging en verschijnselen, die daarmede verband houden.

Op verschillende plaatsen wordt meerdere kennis, o. a. van de natuurkunde, geeischt dan de leerlingen op het oogenblik, waarop de onderwerpen in de klasse behandeld worden, tot hun beschikking kunnen hebben. In het begin der 4^de^ klasse weten de leerlingen met den gang der lichtstralen in een kijker (en in het oog!) nog geen weg.

Mijn ernstige bezwaren tegen het werkje gelden echter niet de keuze der onderwerpen, maar wel de wijze van behandelen. Deze vind ik in hooge mate verward, onduidelijk en onnauwkeurig, om niet te zeggen: slordig.

Over het veelvuldig gebruik van wiskundige formules kan men verschillend oordeelen. Naar mijn persoonlijke meening is het af te keuren. Vooreerst in verband met den beschikbaren tijd. Maar vooral, omdat een wiskundige formule voor den leerling het bezwaar meebrengt, dat zij zijn aandacht afleidt van de zaak, waarom het te doen is. Hij ziet in een formule véél meer dan een beknopte, en veelal zeer onvolledige formuleering eener waarheid. Aan de ziekelijke neiging van de meeste leerlingen om bij alle gelegenheden te „sinussen", zooals het wel eens genoemd is, mag de docent niet toegeven.

Ook over „strengheid van behandeling" en „nauwkeurigheid van uitdrukking" kan men nog zeer verschillende meening hebben. In dit opzicht worden, ook aan den schrijver van een leerboek, door vele omstandigheden beperkingen opgelegd. Men verdraagt een onnauwkeurigheid wel, als zij in het wezenlijke belang van den leerling is, b.v. als zij aan de duidelijkheid ten goede komt. Van dezen aard zijn echter de onnauwkeurigheden van den schrijver niet; integendeel, zij vormen één der oorzaken van de onduidelijkheid van het geheel.

In verband met de plaatsruimte moet ik volstaan met enkele voorbeelden, die dienen kunnen om mijn ongunstig oordeel te motiveeren.

In zijn voorbericht zegt de schrijver, dat onderwerpen uit de wiskundige aardrijkskunde slechts dan opgenomen zijn, als de sterrekunde de wiskundige aardrijkskunde te hulp komt. Op dezen grond zal het zijn, dat we geen definitie aantreffen van horizontaalvlak en zuidpunt. Dat dit toch niet overbodig was, zal de leerling beseffen, die op pag. 13 een zuidpunt in den horizon vindt, op pag. 19 een in den equator, („de sterreklok staat op 0 uur 0 min. 0 sec. als het lentepunt in het zuidpunt staat").

Op pag. 14 worden de punten Zenith en Nadir als snijpunten van vertikaal en hemelbol gedefinieerd; echter wordt niet gezegd, hoe de punten van elkaar te onderscheiden zijn. Evenmin worden op pag. 15 Noordpool en Zuidpool van den hemel onderscheiden.

Gesproken wordt op pag. 15 van de „negatieve" draaiingsrichting der aarde, van de „positieve" van den hemelbol, zonder dat gezegd wordt, van welke zijde de beweging beschouwd wordt.

Op pag. 17 zien we de zon van het zuidelijk op het noordelijk halfrond komen, zonder dat op de vorige bladzijden van dit hemellichaam of van haar beweging sprake is geweest.

Op pag. 47 vindt men als resultaat eener zonderlinge redeneering, dat een ellips overgaat in een parabool, indien haar excentriciteit gelijk aan de eenheid wordt.

Op pag. 48 wordt van „schijnbare middellijn" der zon gesproken zonder dat deze grootheid gedefinieerd wordt. Wat de schrijver ermede bedoelt, is niet te begrijpen, vooral niet, indien men zijn Fig. 29 erbij beziet. Op deze figuur volgt echter wèl een berekening van de excentriciteit der aardbaan.

Iets dergelijks treffen we vaker aan: dat de schrijver zich in zaken van minder belang verdiept, na hoofdzaken verwaarloosd te hebben.

In de beknopte behandeling van de maanbeweging vindt men wèl de berekening van de grootste en kleinste middernachtshoogte der maan op onze breedte (resp. 66½° en 9½°), maar we missen zelfs de vermelding, dat groote middernachtshoogten voorkomen in den winter, kleine in den zomer.

Bij de behandeling van de schijngestalten der maan mist men het punt van uitgang: dat de maan een donker lichaam is, dat van de zon licht ontvangt. Het is toch vreemd, om, zonder dit mede te deelen, te beginnen met: „keert de maan ons haar donkere zijde toe......".

Op dezelfde bladzijde vindt men, dat de maan in E. K. 's middags om 6 uur culmineert, in L. K. des morgens om 6 uur.

Aan de conclusie (p. 60): „dus keert de maan ons steeds haar zelfde kant toe" gaat wèl vóóraf de gelijkheid van rotatietijd en omloopstijd, doch niets omtrent den stand van de as ten opzichte van het vlak der loopbaan.

Hiermede is slechts hier en daar een greep gedaan om te doen zien, van welken aard mijn bedenkingen zijn.

Ten slotte moet nog gewezen worden op de achtelooze wijze, waarmede met de wiskundige vaktermen wordt omgegaan. Ook hier moet ik mij tot enkele voorbeelden bepalen. Zoo spreekt de schrijver op pag. 5 van een „ruimte van de tweede dimensie", op pag. 7 van „de tweede dimensionale ruimte". (Naar aanleiding hiervan nog de volgende aanhaling uit de eerste pagina: „Een inhoud heeft drie afmetingen nl. lengte, breedte en hoogte. Deze ruimte heet een ruimte van de derde dimensie").

We vinden: dit vlak snijdt den bol *in* een grooten cirkel; dit vlak snijdt den horizon *in* de lijn AS enz.

Op pag. 48 wordt gesproken van een verhouding, waar een evenredigheid bedoeld wordt.

Men ontmoet zeer veel spelfouten; ook had de correctie zorgvuldiger moeten geschieden. H. J. E. B.

J. W. N. Le Heux: „No. 492. *Leerboek der voortgezette Beschrijvende Meetkunde,* voor de cadetten van alle wapens". Met atlas van 39 platen. Breda. De Koninklijke militaire academie. 1924.

Een goede twintig jaar geleden mocht schrijver dezes met eenige Bredasche autoriteiten een onderhoud hebben, omdat hij zich de opmerking veroorloofd had dat het onderwijs in de Beschrijvende Meetkunde aan de K.M.A. verouderd, en dus niet meer op de hoogte van den tijd was. Het gelukte hem de heeren van de juistheid van zijn kritiek te doordringen, maar het effect was niettemin nihil; in den Haag vond men het zóó wel goed, en van daaruit werden reorganisatie en moderniseering verboden.

Wat schrijver dezer destijds mislukt is, is den Heer Le Heux thans blijkbaar gelukt; in zijn leerboek kent men den ouden Badon Ghyben niet meer terug, en de hoofdstukken, die men tegenwoordig algemeen onontbeerlijk acht, vindt men er in opgenomen.

Zelfs ontmoet men in een „Aanhangsel" verschillende constructies betreffende de assen, toegevoegde middellijnen, en asymptoten der kegelsneden, alsmede de grondstellingen der Projectieve Meetkunde. De behandelingswijze is beknopt en duidelijk, en de lithographische figuren, verzameld in een atlas, zijn bijzonder fraai. Hier en daar is de constructie gecontroleerd door berekening, waardoor eenzelfde vraagstuk ook dienst kan doen in de lessen over Analytische Meetkunde en Analyse, en tal van vraagstukken, òf nieuw ontworpen òf ontleend aan examen-opgaven der laatste jaren van de Technische Hoogeschool en van de middelbare-akte-examens, zijn overal door het boek verspreid. Alles tezamen genomen een voortreffelijk boek voor leerlingen met beperkte theoretisch-meetkundige kennis, die niet altijd het „naadje van de kous" te weten kunnen komen; voor de leerlingen dus, die de schrijver dagelijks vóór zich heeft, en voor wie het boek geschreven is. Hk. d. V.

Grafisch Schrift ten dienste van het onderwijs, geen auteur. Uitgave van J. B. Wolters' U. M. Prijs *f* 0.50.

Het schrift bevat 24 blz. rood millimeterpapier; als leermiddel voor de scholen vind ik het ongeschikt; de hygiène van de oogen van onze leerlingen verzet zich tegen het gebruik. Voor de school is het gewenscht de maat op zijn minst te nemen 2 mM, beter nog 2½ mM en als kleur te kiezen zacht groen. W.

ONZE OUDSTE 17e-EEUWSCHE REKENBOEKEN

DOOR

A. HALLEMA.

Een paar jaren geleden schreef ik in een der onderwijsbladen [1]) een beknopt artikel over een onzer meest gebruikte 17e-eeuwsche rekenboeken, nl. dat van Jacob van der Schuere. Destijds legde ik de daarin vervatte mededeelingen slechts vast met het doel, om enkele verkeerde voorstellingen omtrent de geschiedenis van het rekenonderwijs hier te lande, gelijk die te vinden zijn in de meest gebruikte leerboeken en handleidingen, handelende over de geschiedenis van ons lager onderwijs en opvoeding, recht te zetten. Ik moest daarbij echter uitgaan van een zeer geschonden exemplaar van Van der Schuere's rekenboek, dat in mijn bezit was gekomen en vooral waarde had door de aanteekeningen in ms., die van de 17e eeuw af op de vele schutbladen in het werkje waren ingeschreven.

Naderhand vond ik echter toevalligerwijze beter materiaal. In een vergeten boekenverzameling van vele zeer zeldzame en oorspronkelijke werken, waaronder ook meerdere 16e-eeuwsche geschriften, nl. de Oude Bibliotheek der voormalige Schepenbank van de Stad en Baronie van Breda [2]), ontdekte ik twee weinig bekende en nagenoeg vergeten rekenboeken, welker inhoud en beteekenis voor de practijk van het rekenonderwijs in de 17e eeuw m.i. een poging

---

[1]) Zie „Het Schoolblad", jg. 1922, d.d. 4 Mei.

[2]) Deze boekerij is ondergebracht in het Raadhuis van voornoemde gemeente, nevens het Oud-Archief van Breda, en telt ongeveer 1200 werken, inzonderheid waardevolle uitgaven op het gebied van het Oudhollandsch recht en de Klassieken. Er bestaat slechts een zeer gebrekkig ingerichte catalogus van, welke voor de belangstellenden ter inzage is gedeponeerd op het Oud-Archief ter plaatse.

wettigen, om de werkjes nader bij het voetlicht te plaatsen. Zij verdienen ten volle, aan een grondige beschouwing en uitvoerige beschrijving te worden onderworpen.

Hoe intusschen in een bibliotheek van oude rechtsgeleerde werken enz., ten gebruike en gerieve van Heeren Schepenen en verdere regeeringsautoriteiten dergelijke uitgaven als rekenboeken verzeild raakten, moge uit mijn verdere mededeelingen blijken.

De volledige titels dezer werkjes, die ik in mijn bovenaangehaald artikel niet kon opgeven ten gevolge van den geschonden staat van het destijds gebruikte exemplaar, waarin het titelblad gemist werd, kunnen thans uitvoeriger beschreven worden, tegelijk met eenige uiterlijke hoedanigheden der rekenboeken.

Het eerste werkje is van Jacob van der Schuere, die zijn geesteskind doopte met den naam van „Arithmetica oft Reken-const." Deze naamgeving doet niet alleen opmerken, dat de titel naar onze begrippen te deftig was voor een schoolleerboek of practische handleiding, om goed rekenen te leeren, doch tevens kan er uit opgemaakt worden, dat men in 1600, toen het boekje voor het eerst van de pers kwam, nog in 't geheel niet ontgroeid was aan de terminologie van de leervakken der Middeleeuwsche school. Aldaar toch werd arithmetica als een der leervakken van het quadrivium (rekenkunde, muziek, meetkunde en sterrenkunde), onderwezen. Toch was ook de schrijver zich bewust, dat hij met zijn pennevrucht een meer bescheiden doel beoogde, nl. „enseignant l'art à chiffrer (anciennement dit l'Arithmetique)." Aldus luidde zijn verklaring in de opdracht der handleiding „a vertvevx et discret S. Govaert Willemsz., marchant en la tres-renommée Ville d'Amsterdam."

Hij had zijn boek „verchiert met veel schoone Exempelen, seer nut voor alle Cooplieden, Facteurs, Cassiers, Ontfanghers, etc." Daaruit zou afgeleid kunnen worden, dat het vóór alles een handleiding voor de practijk was, een toepassing der rekenkundige theorieën voor het dagelijksch gebruik, bepaaldelijk ten behoeve van volwassenen, die in de genoemde bedrijven en betrekkingen werkzaam waren. Dit moge ten deele waar zijn, doch uit hetgeen de samensteller verder uiteenzet, zoowel in proza als in poezie, alsmede uit wat anderen tot zijn lof zeggen, blijkt voldoende, dat hij zijn werk wel degelijk bestemd had ten gebruike van jeugdige beoefenaars der rekenkunde en rekenvaardigheid. Als een enkel bewijs citeer ik hier uit zijn poetische inleiding „Aen Const-lievende Ieught, Die leerbaer tracht nae Deucht," de volgende woorden:

„O Iongers, dus ontfangt dees Const in danck verheven,
VVant sy u werdt seer nut, tot ander consten goet:
End 'als ghy Coopmanschap voor u of ander doet,
Behoefdy dese Const, om rekeningh' te gheven.

Euterpes Conste dan, tracht vlijtichlijck te leeren,
End' comt leersamich mildt my wederom vereeren,
Ick sal tot onderwijs my dan bereyden saen [1]).

Iets dergelijks gaf hij ook te kennen in zijn Fransche opdracht aan den bovengenoemden Amsterdamschen koopman, waarop ik nog nader terugkom, voorts in een inleidend gedicht: „den avthevr tot synen boeck,"en blijkt eveneens uit een sonnet en een ode, te zijner eere door anderen hem toegewijd, welke aan den eigenlijken inhoud des boeks vooraf gaan.

Doch eerst iets in 't algemeen over dit werkje en daarna wat ons omtrent den schrijver bewaard bleef.

Het geheel bestaat uit 203 genummerde bladen (406 blz.) in 12mo. formaat. Achtereenvolgens worden behandeld telling, optelling, aftrekking, vermenigvuldiging, deeling en regel van drieën met geheele getallen. Daarna geschiedt hetzelfde met breuken, waarbij nog een afzonderlijke plaats wordt toegekend aan de vereenvoudiging en herleiding van gebroken getallen [2]). In de derde plaats krijgen een beurt de hoofdbewerkingen met genoemde getallen, „in Practica", als berekeningen met maten en gewichten, munten, enz., waarbij zich aansluit de „Cassiers rekeninghe." De leer der verhoudingen wordt

---

[1]) Deze laatste drie versregels meen ik het best als volgt te kunnen weergeven: Leg U eerst maar ijverig toe op de beoefening van Euterpe's kunsten: muziek en lyrische poëzie, en hebt ge U daarmede vertrouwd gemaakt, bewijs mij dan de eer met Uw leergierigheid en ik zal U onmiddellijk inwijden in de geheimen van de leer der getallen en de bewerkingen daarmee. Vgl. Verdam, Middelned. Wdb. op „saen".

[2]) Nl. onder de hoofden van „abbreviatio" („vercortinghe") en „reductio" („wederbrenginghe") en dat nog wel vóór de hoofdbewerkingen met de breuken!

als „Proportio" geheel op het einde des boeks behandeld met een ontstellende verscheidenheid van termen met Latijnsche benamingen [1]), terwijl de evenredigheden daaraan n.b. als „Progressio" in een kort hoofdstukje voorafgaan, waarbij in voorbeelden en toepassingen uitgewerkt worden de rekenkundige en meetkundige evenredigheden.

Maar de recht en omgekeerd evenredige afhankelijkheid van twee grootheden, de rekenkundige en meetkundige middelevenredige, de verhoudingsgetallen e.d. rekenkundige vormen en eigenschappen worden er reeds vóór de bovenvermelde theorie der verhoudingen en evenredigheden toegepast in een aantal hoofdstukken, welke direct na de hoofdbewerkingen met maten, gewichten en munten volgen, als zoovele grepen uit de practijk der rekenkunde. Zoo vindt men daar achtereenvolgens: „Verkeerden reghel van drien, Dobbelen reghel, oft reghel van vijven, Ghecomposeerden dobbelen reghel, Reghel van gheselschap, Gheselschap met tijdt, Facteur rekeninghe, Erfdeelinghe, vvinst ende verlies, vvinst ende verlies met tijdt, Interest, Interest op Interest, VVissel, Verghelijckinge, Buyten-landtsche rekeninghe, Buyten-landtsche rekeninghe met tijdt, Manghelinghe, Manghelinghe met tijdt, Rekeninghe van silver, gout, gout ende silver, Allegatio menginghe, Munte-slach, Coecis oft Virginium, Rekeninghe van plus ende minus, Voyage met tydt, Falsy". Al deze rekenkunstjes, — want meer dan dat zijn het in den regel niet, — zijn, behalve toepassingen van de eigenschappen der evenredigheden, niet anders dan combinaties van vermenigvuldiging en deeling, verkorte bewerkingen en omslachtig beredeneerde kunstbewerkingen. Doch het meest stuitend is hier, dat de practijk voor een groot deel aan de theorie voorafgaat. Men leerde reeds met verhoudingen, evenredigheden, reeksen enz. werken, voordat deze theoretisch verklaard waren.

In de latere rekenboeken werd dit stuk „practijk" langzamerhand ingekrompen of tot twee hoofdstukken beperkt, waarin dan achtereenvolgens eerst de regel van drieën, verkorte berekeningen, kassiersrekening en interest — en tarra-rekening direct volgden op de hoofdbewerkingen met geheele en gebroken getallen, terwijl na de verhoudingen en evenredigheden als een geheel werd behandeld:

---

[1]) Dit allermerkwaardigst hoofdstuk zal eerlang in dit Tijdschrift worden afgedrukt. (Redactie).

winst-, verlies-, gezelschaps-, interest-, wissel- en mengingrekening. Dat bewijst in ieder geval een groeiend inzicht in een wetenschappelijke en methodische indeeling der stof. Doch steeds bleef de worteltrekking nog tot het laatste kapittel uitgesteld, ten minste twee eeuwen lang na het verschijnen van het hier beschreven rekenboek. Tenslotte missen we hier, althans in een afzonderlijke behandeling, de machtsverheffing, kenmerken van deelbaarheid, grootste gemeene deeler en kleinste gemeene veelvoud en de leer der tiendeelige breuken, doordat aan deze hoofdstukken uit de theorie der rekenkunde nog geen of weinig studiën waren gewijd (Simon Stevin!)

De inhoud van het tweede door ons bedoelde rekenboekje komt met het hiervoor opgesomde wel in hoofdzaak overeen. Het kenmerkend onderscheid tusschen beide werkjes is evenwel gelegen in het feit, dat het tweede, ofschoon evenals Van der Schuere's handleiding „Aritmetica" tot titel voerende, nog minder rekenkundige wijsheid bevat. De volledige titel er van was „Aritmetica ofte Cijfferboeck, door Bernardus Stockmans, eertyts Françoysche Schoolmeester inde vermaerde coopstadt Doiderecht", en opgedragen aan „Schout, Borgermeester, Schepenen ende Raet Mitsgaders mijnen Heeren Colonellen, Capiteynen, Overicheden ende Regeerders van de stad Dordrecht, 1589." Ook de indeeling der stof is nog minder methodisch dan bij Van der Schuere. Reeds een blik in de „Tabula, ofte Tafal, om te zien alle de Regulen in desen Boeck begrepen," leert zulks. Zoo wordt eerst het getal, met „de principaelste caracteren in desen boeck gheuseert", in het eerste hoofdstuk behandeld en daarop volgt in het tweede een overzicht der in de verschillende gewesten in gebruik zijnde koornmaten. Maar nog maller is de behandeling der tafel van vermenigvuldiging na de telling en vóór de optelling der geheele getallen. Deze volgorde bleef zelfs in latere drukken, hoewel „van nieus curieus gecorigert ende verbetert, vermeerderd en bijgewerkt, tot in het midden der 17e eeuw gehandhaafd. Dit is juist, wat wij in Van der Schuere hebben te prijzen, nl. dat hij zijn ouderen voorganger en collega niet blindelings heeft gevolgd, maar zijn hoofdstuk „Multiplicatio Int gheheele" aanving met het leeren der tafel van vermenigvuldiging, gebaseerd op de uitgewerkte voorbeelden, welke de leerlingen in de hoofdstukken telling en optelling hadden bestudeerd en in opgaven toegepast. Het kan zelfs nog sterker gezegd worden met Stockmans' bewerking der rekenkunde. Buiten de hoofdbewerkingen met geheele en gebroken getallen vinden we bij hem geen voortgezette rekenkunde-leer. Het zijn dan de zg. „regels", die ik boven reeds noemde uit het boek van Van der Schuere, als kunststukjes met getallen, toegepast op de handelspractijk en het conversatie-leven, welke Stockmans debiteerde als zijn „aritmetica". Zijn boekje zou dan ook het best als een hulpboekje voor handelsrekenen, rekenspelletjes, sommetjes voor de huiskamer, getallenraadsels, e.d. kunnen getypeerd worden, zonder dat men het daarmede evenwel alle waarde voor zijn tijd mag ontzeggen.

Maar noch aan verhoudingen en evenredigheden, noch aan worteltrekking werd hierin eenige bijzondere aandacht besteed, wat wij bij Van der Schuere wel vonden. Daarom staat dit werkje van Stockmans dan ook voor het rekenkundige gedeelte in aanzienlijke mate achter bij dat van Van der Schuere. De omvang van beide is vrijwel gelijk: het boekje van Stockmans, van hetzelfde formaat, telde in den druk van 1637 410 genummerde bladzijden.

Tot dusverre heb ik eenige uiterlijke hoedanigheden der beide werkjes behandeld. Laat mij U thans iets vertellen van de samenstellers er van, voordat ik aan enkele onderdeelen een meer uitvoerige beschouwing wijd.

Omtrent onze oude rekenmeesters zijn we tot heden buitengewoon slecht ingelicht, geheel anders dan het met onze schrijfmeesters gesteld is. Raadpleegt slechts het onderhoudende werk van Van Gestel en Van der Laan over ons schrijfonderwijs en zijn geschiedenis [1]) en van ieder der calligraphen, daarin behandeld, is een levensbeeld geteekend of uitgestippeld. Doch met uitzondering van een Willem Bartjens in de 17e en een Jan van Olm in de 18e eeuw is de nagedachtenis der vaderlandsche rekenmeesters ook in de annalen der wetenschap tot enkele regelen beperkt, zoo niet geheel vergeten!

Vanwaar dit verschil? Ik verklaar het uit twee oorzaken. In de eerste plaats was het schrijven in den tijd der Republiek op de meeste scholen een belangrijker leervak dan het rekenen; lang niet

---

[1]) De juiste titel er van is: P. H. van Gestel en G. C. van der Laan, Schrijven en Schrijfonderwijs, Algemeen geschiedkundig en methodisch overzicht, enz. Uitg. Mij. J. B. Wolters, Groningen.

alle leerlingen, die toen de officiëele overheids- of kerkelijke school bezochten, brachten het tot rekenen. Zoodoende waren de onderwijzers aldaar ook eerder schrijf- dan rekenmeesters. Het rekenen werd daarentegen als een der eerst aangewezen leervakken voor het leven onderwezen op de bijscholen, naast boekhouden, Fransch en zaakkennis. Deze scholen waren aanvankelijk geheel ingericht op de behoeften van den handel, het practische leven, en daarin kon het rekenen allerminst gemist worden. Dit verklaart mede de eenzijdige inrichting der schoolrekenboeken. Als wetenschap telde de rekenkunde gedurende de bedoelde periode ook heel weinig mee, zoodat er langen tijd geen bepaalde behoefte aan studiewerken op dit terrein bestond. Wiskundigen van professie als Simon Stevin en Adriaan Metius, om slechts een paar te noemen, zien we dan ook bij voorkeur bezig op een ander gebied der mathematische wetenschappen, al was bv. de eerste nog genoeg practicus, om zelfs Prins Maurits in het zg. Italiaansch boekhouden te onderwijzen.

In de tweede plaats zijn tot heden weinig opzettelijke pogingen ondernomen tot het verzamelen van personalia betreffende de oude rekenmeesters. Doch men vergete niet, dat hun werk en dus ook hun persoon voor den tijd waarin zij leefden wel degelijk waarde had en dat ze juist hierdoor historische beteekenis kregen. Of zegt het niets, dat het werk van velen hunner 1 à 2 eeuwen op de schooltafels en in de „comptoiren" der handeldrijvenden en neringdoenden in gebruik was en hun lessen in de cijferkunst van geslacht op geslacht overgingen. Intusschen is aan dit werk van blijvende waarde, van geschiedkundig belang, buiten enkele losse notities in onze handleidingen der onderwijs- en opvoedkunde-geschiedenis, zoo goed als geen aandacht geschonken.

(Wordt vervolgd.)

Leerboek der Vlakke Meetkunde

DOOR

Dr. P. MOLENBROEK (en P. WIJDENES).

Prijs, in linnen gebonden, f 6.50.

ZESDE DRUK.

In een vroeger nummer van dit Tijdschrift hebben we het Leerboek der Stereometrie van dezelfde auteurs besproken. Het nu pas in zesden druk verschenen Leerboek der vlakke meetkunde kunnen we niet anders, dan even gunstig beoordeelen.

Het is inderdaad een voortreffelijk werk, waarin de schrijvers de zeldzame kunst verstaan, de stof niet alleen zeer helder, maar aantrekkelijk voor te dragen. Een wiskundig leerboek wordt ook voor eerstbeginnenden interessant, als het harmonisch ineenzit, de mathematische waarheden in haar onderling verband laat zien, en de eene door de andere belicht. Zoo'n boek hebben we hier vóór ons; rec. gelooft niet, dat wij er een dergelijk bij ons middelbaar onderwijs gebruiken. Het behandelt behalve de classieke meetkunde ook een goed deel van de moderne: de stellingen van Desargues, Pascal, Brianchon, de theorie van pool en poollijn, de harmonische ligging, de dubbelverhouding, de leer der vermenigvuldiging en der inversie van figuren; en dat alles is niet aangebracht voor 't bloot vermaak om theorema's te bewijzen, maar met het oog op het elegante gebruik, dat men ervan bij werkstukken kan maken. De auteurs hebben het geschetste programma weten door te voeren zonder in het euvel van een noodeloozen overvloed van bijzonderheden te vervallen, en nergens hebben zij de perken, die aan een gezond middelbaar onderricht te stellen zijn, overschreden.

Zij hebben geen zorg gespaard om tot in de minste kleinigheden hun werk zoo bruikbaar mogelijk te maken. Om kort te zijn vermelden we enkel, dat de stellingen in vette letter zijn gedrukt, dat overal randschriften zijn aangebracht, dat de figuren overvloedig zijn en met een onderschrift voorzien, hetwelk het doel ervan of de stelling, waarop zij betrekking hebben, samenvat.

Een rijke keuze van toepassingen en vraagstukken is voorhanden, doelmatig getroffen om bij de leerlingen de grondstellingen er in te prenten.

Aan het einde zijn daarenboven vier hoofdstukken gewijd aan de elementaire behandeling der kegelsneden. K. L.

Wis- en Natuurkundig Tijdschrift van Jan. 1925.

MEETKUNDE DER KEGELSNEDEN

(Met Atlas)

DOOR **Dr. J. G. RUTGERS.**

Prijs in linnen band *f* 5.—.

In deze monographie wordt de leer der kegelsneden in beknopten vorm en met behulp van elementaire middelen zuiver meetkundig ontvouwd. Hoofddoel van den schrijver is de behandeling der gewichtigste constructies, die bij kegelsneden zijn uit te voeren, om daardoor tot de ontwikkeling der eigenschappen van die krommen te komen. Het uitgangspunt vormt de stereometrische definitie der kegelsneden als doorsnijdingen van een omwentelingskegel met een plat vlak, en de schrijver stelt daarop het theorema van Dandelin aan de spits van zijn beschouwingen. De constructies worden in drie groepen ingedeeld. De eerste groep omvat die constructies, welke uit de brandpuntseigenschappen voortvloeien. De tweede groep staat in verband met de definitie der ellips als parallelprojectie van een cirkel, definitie die als bijzonder geval uit de algemeene verkregen wordt door den kegel tot een omwentelingscylinder te laten ontaarden. Een derde groep constructies en de daarmede samenhangende eigenschappen worden uit de theorema's van Pascal en Brianchon verkregen. In aansluiting daarmee geeft de schrijver een korte, maar duidelijke uiteenzetting van de grondstellingen der projectieve geometrie, van de theorie van pool en poollijn, van het dualiteitsbeginsel, en behandelt hij zeer mooi de projectieve ontstaanswijze der kegelsneden.

Het is meermaals betoogd geworden, dat de meetkundige behandeling van vragen boven de analytische het voordeel biedt, den weg, dien men volgt voortdurend te belichten, en het onderzochte onderwerp nooit uit het oog te verliezen; en menigmaal heeft zij daardoor op aanschouwelijke wijze tot uitkomsten geleid, die zonder haar wellicht lang verborgen waren gebleven. Het ligt in den aard der zaak, dat zulks vooral bij vraagstukken van constructie het geval zal zijn. Den lezer van het werkje van Prof. Rutgers zal deze waarheid vaak te binnen schieten; hij zal onder den indruk komen van de macht en de vruchtbaarheid der meetkunde, en daarom bezit het besproken boekje voor jonge mathematici een werkelijke opvoedende waarde. De leeraars onzer athenea en colleges zullen het verdienstelijke werkje ongetwijfeld met belangstelling lezen, en zoo zal veel van zijn goeden invloed vanzelf op hun scholieren overgaan.

Bij de twee honderd netjes uitgevoerde figuren zijn in een atlas saamgebracht, hetgeen den lezer het altijd lastige omslaan van bladzijden spaart. K. L.

Wis- en Natuurkundig Tijdschrift van Jan. 1925.

UITGAVE VAN P. NOORDHOFF TE GRONINGEN.